Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Joswig
Katja Kulas

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Sommersemester 2006
17./18.05.2006

Diskrete Mathematik

5. Übung

Gruppenübungen

Aufgabe G1 Für einen Graphen $G = (V, E)$ ist der Komplementärgraph $\overline{G}$ definiert durch den Graphen $(V, \binom{V}{2} \setminus E)$. Sei G ein d–regulärer Graph mit n Knoten. Zeigen Sie, dass die Gesamtzahl der Dreiecke in G und $\overline{G}$ genau $\binom{n}{3} - \frac{n}{2}d(n-d-1)$ ist.

Aufgabe G2 Sei V_q^3 für eine Primzahl q der 3–dimensionale Vektorraum über dem Körper $\mathbb{F}_q = \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$. Wir definieren die Inzidenzstruktur $P(V_q^3)$ wie folgt:

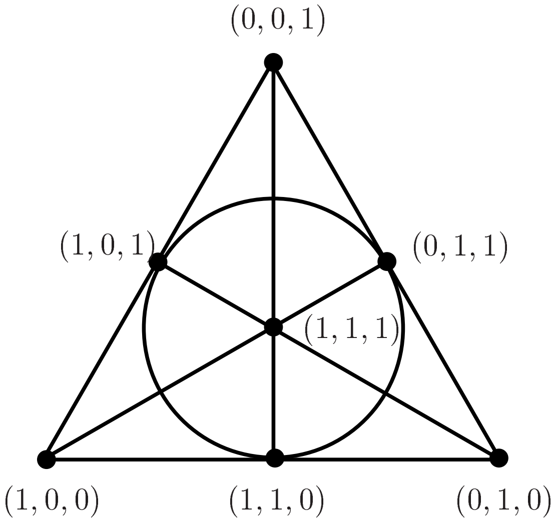
Die *Punkte* von $P(V_q^3)$ sind die eindimensionalen Unterräume von V_q^3,
die *Geraden* von $P(V_q^3)$ sind die zweidimensionalen Unterräume von V_q^3,
die *Inzidenz* von $P(V_q^3)$ ist das mengentheoretische Enthaltensein.

Dann ist $P(V_q^3)$ eine projektive Ebene, d. h. sie erfüllt folgende Eigenschaften:

1. Für je zwei Punkte existiert genau eine Gerade, die inzident zu beiden ist.
2. Für je zwei Geraden existiert genau ein Punkt, der inzident zu beiden ist.
3. Es gibt vier Punkte, so dass keine Gerade inzident zu mehr als zwei dieser Punkte ist.

Man kann zeigen, dass auf jeder Geraden von $P(V_q^3)$ genau $q + 1$ Punkte liegen und durch jeden Punkt von $P(V_q^3)$ genau $q + 1$ Geraden verlaufen.

Für $q = 2$ ist eine projektive Ebene die sogenannte *Fano*–Ebene:



Die *Inzidenzmatrix* $I_q = (a_{ij})$ einer projektiven Ebene ist eine $\{0, 1\}$–Matrix mit einer Zeile pro Gerade und einer Spalte pro Punkt der projektiven Ebene, so dass für einen Punkt j und eine Gerade i der Eintrag a_{ij} genau dann 1 ist, wenn i und j inzident sind.

Beispielsweise ist eine mögliche Inzidenzmatrix für die Fano–Ebene gegeben durch

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

alle anderen entstehen durch Umordnen der Zeilen oder Spalten.

Aufgabe:

(i) Zeigen Sie, dass die Anzahl der Zeilen und die Anzahl der Spalten von I_q jeweils $q^2 + q + 1$ beträgt.

(ii) Bestimmen Sie die Determinante der Inzidenzmatrix I_q für jede beliebige Primzahl $q \geq 2$. Berechnen Sie dazu $I_q \cdot I_q^T$.

Definition 1 (Knesergraph). *Seien n, k natürliche Zahlen mit $1 \leq k < n$. Der Knesergraph $K_{n,k}$ hat als Knoten alle n–Teilmengen der Menge $[2n + k]$ und zwei solche Mengen sind genau dann durch eine Kante verbunden, wenn sie disjunkt sind.*

Aufgabe G3 Geben Sie die Gradfolge des Knesergraphen $K_{n,k}$ an. Wie sieht $K_{2,1}$ aus?

Aufgabe G4 Sei $D = (V, A)$ ein zykelfreier gerichteter Graph mit n Knoten. Zeigen Sie, dass die Knoten $v_1, \ldots, v_n$ in D so sortiert werden können, dass $i < j$, falls $(v_i, v_j) \in A$.

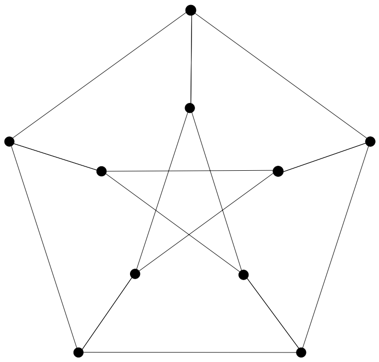
Bemerkung: Ein solche Nummerierung der Knoten heißt *topologische Sortierung* von D.

Hausübungen

Abgabe am 24./25.05.2006

Aufgabe H1 (5 Punkte)

Sei G ein zusammenhängender Graph, in dem für jede Kante e zwei Zykel C_1, C_2 existieren, die e enthalten und keine weitere Kante gemeinsam haben. Beweisen Sie, dass G 3-zusammenhängend ist und zeigen sie damit, dass der unten abgebildete Petersen–Graph 3–zusammenhängend ist.



Aufgabe H2 (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass jeder 5–reguläre Graph einen Zykel der Länge $l \geq 6$ enthält.

Aufgabe H3 (5 Punkte)

Bridge ist ein Spiel, in dem zwei Teams von jeweils zwei Partnern gegeneinander antreten. Es gibt einen Bridge–Club, der folgende Regel eingeführt hat: Wenn zwei Spieler einmal als Partner angetreten sind, können sie nicht erneut an einem Spiel teilnehmen (weder als Partner noch als Gegner).

15 Mitglieder des Clubs wollen gegeneinander antreten. Allerdings entscheidet sich einer davon, sich lieber mit diskreter Mathematik zu beschäftigen. Die übrigen 14 Personen nehmen sich vor, solange zu spielen, bis jeder viermal gespielt hat. Obwohl die neue Regel es den Bridge–Liebhabern nicht einfach macht, entscheiden sie sich zu insgesamt sechs weiteren Spielen.

Anschließend kommt der bislang abwesende Mathematiker und möchte wenigstens einmal mitspielen. Beweisen Sie mit graphentheoretischen Mitteln, dass dies sogar möglich ist.

Hinweis: Benutzen Sie dazu, dass die maximale Anzahl von Kanten in einem dreiecksfreien Graph mit n Knoten $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$ ist (Mantel, 1907).

Aufgabe H4 (5 Punkte)

Sei $\Gamma = ([n], A)$ ein (gerichteter) Graph, in dem jeder Kante $(i, j) \in A$ ein Gewicht $w_{ij} \in \mathbb{R}$ zugeordnet wird. Setze

$$A_\Gamma := (a_{ij}) \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n \times n}, \quad \text{wobei } a_{ij} = \begin{cases} w_{ij} & : \ (i,j) \in A, \\ 0 & : \ i = j, \\ +\infty & : \ \text{sonst.} \end{cases}$$

Welche Bedingung müssen die Gewichte w_{ij} erfüllen, so dass der Eintrag von $A_\Gamma^{\odot n-1}$ in Zeile i und Spalte j genau die Länge eines kürzesten Weges von Knoten i zum Knoten j im Graphen Γ ist?

Bemerkung: Die Länge eines Weges in Γ ist die Summe der Gewichte seiner Kanten.