Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Joswig
Katja Kulas

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Sommersemester 2006
10/11..05.2006

Diskrete Mathematik

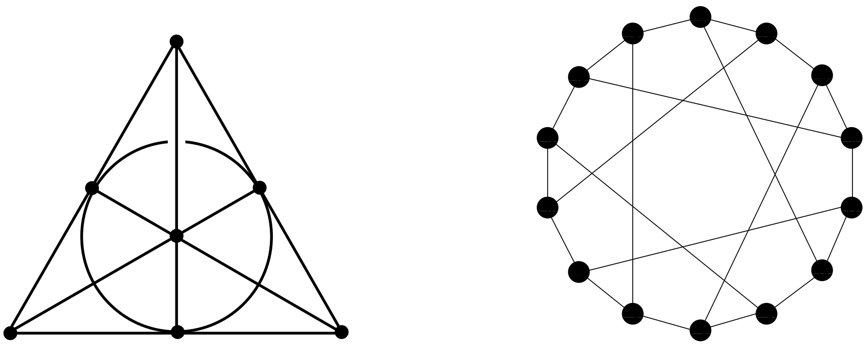
4. Übung

Gruppenübungen

Aufgabe G1 Die aus der projektiven Geometrie bekannte *Fano–Ebene* ist die in Abbildung 1(a) angegebene projektive Ebene mit 7 Punkten (d.h. eindimensionalen Unterräumen von $\mathbb{F}_2^3$) und 7 Geraden (d.h. zweidimensionalen Unterräumen von $\mathbb{F}_2^3$).

Der *Inzidenzgraph* einer projektiven Ebene ist ein bipartiter Graph $G = (V_A \cup V_B, E)$. Die Knotenteilmenge V_A besteht aus den Punkten und V_B aus den Geraden der projektiven Ebene. Zwei Knoten $v \in V_A$ und $w \in V_B$ von G sind genau dann durch eine Kante verbunden, wenn der Punkt v auf der Geraden w liegt bzw. wenn v inzident zu w ist.

Zeigen Sie, dass der Inzidenzgraph der Fano-Ebene und der in Abbildung 1(b) angegebene *Heawood–Graph* isomorph sind.



(a) Die Fano–Ebene (b) Der Heawood-Graph

Aufgabe G2 Zeigen Sie: In einem (endlichen) Graphen ist die Anzahl der Knoten mit ungeradem Grad gerade.

Aufgabe G3 Die Gradfolge eines einfachen Graphen G mit Knotenmenge $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ ist definiert als die Folge der in aufsteigender Reihenfolge angeordneten Knotengrade $d(v_i)$.

(i) Gibt es Graphen zu folgenden Gradfolgen?

$$(2,2,3,3,3,3) \quad (1,2,4,5,6,6,6,6) \quad (2,2,4,4,6,6,6)$$

(ii) Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Zwei isomorphe Graphen haben die gleiche Gradfolge.

(b) Zwei Graphen, die die gleiche Gradfolge haben, sind isomorph.

(iii) Zeigen Sie, dass es in jedem Graphen $G = (V, E)$ mit $|V| \geq 2$ zwei Knoten $x, y \in V$ gibt mit $d(x) = d(y)$.

Aufgabe G4 Sei G ein *kritisch 2-zusammenhängender Graph*; d.h. G ist 2-zusammenhängend, aber kein Graph $G - e$ für $e \in E(G)$ ist 2-zusammenhängend.

(i) Beweisen Sie, dass mindenstens ein Knoten von G Grad 2 hat.

(ii) Finden Sie für jedes n ein Beispiel eines kritisch 2-zusammenhängenden Graphen mit einem Knoten vom Grad mindestens n.

(iii) Geben Sie für jedes n ein Beispiel eines kritisch 2-zusammenhängenden Graphen mit einem Knoten vom Grad $\geq n$, der von allen Knoten vom Grad 2 mindestens den Abstand n hat.

Aufgabe G5 Beweisen Sie für die Eulersche φ–Funktion folgende Gleichung:

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n.$$

Hinweis: Betrachten Sie für $d|n$ die Mengen $S_d = \{k \cdot \frac{n}{d} : \mathrm{ggT}(k, d) = 1, 1 \leq k \leq d\}$.

Hausübungen

Abgabe am 17./18.05.2006

Aufgabe H1 (5 Punkte)

Angenommen ein Graph $G = (V, E)$ mit $|V| = n$ und $|E| \geq 3$ ohne isolierte Knoten hat keinen induzierten Untergraphen mit zwei Kanten. Zeigen Sie, dass $G = K_n$, $n \geq 3$, ist.

Aufgabe H2 (5 Punkte)

Ein *Turnier* $T = (V, A)$ ist ein einfacher gerichteter Graph, in dem zwischen je zwei Knoten genau eine gerichtete Kante besteht. Zeigen Sie, dass es in einem Turnier immer einen Knoten gibt, von dem aus jeder weitere Knoten durch einen gerichteten Weg der Länge ≤ 2 erreicht werden kann.

Aufgabe H3 (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass der ungerichtete vollständige Graph K_n auf $n \geq 3$ Knoten genau

$$\sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} \frac{(k-1)!}{2}$$

ungerichtete einfache Kreise besitzt.

Aufgabe H4 (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass ein Graph G mit $n \geq 2$ Knoten und $m > \binom{n-1}{2}$ Kanten zusammenhängend ist. Zeigen Sie, dass es (bis auf Isomorphie) genau einen unzusammenhängenden Graphen mit $\binom{n-1}{2}$ Kanten gibt.