Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Joswig
Katja Kulas

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Sommersemester 2006
26.04.2006

Diskrete Mathematik

2. Übung

Gruppenübungen

Aufgabe G1 Zeigen Sie, dass die Summe der Binomialkoeffizienten im Pascalschen Dreieck in einer Diagonale von rechts oben nach links unten stets die Fibonacci–Zahl F_{n+k} ist (d.h. $F_0 = F_1 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ $(n \geq 2)$.
Beispiel: Das Startelement $n = 4, k = 3$ ergibt $4 + 10 + 6 + 1 = 21 = F_7$.

Aufgabe G2 Beim Lotto werden sechs Zahlen aus $\{1, \ldots, 49\}$ ausgewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die gezogene Menge zwei Zahlen mit Differenz 1 enthält?

Aufgabe G3 Die *Euler–Zahlen* $A_{n,k}$ zählen die Permutationen π von $\{1, \ldots, n\}$ mit genau k Anstiegen, d.h. k Stellen i mit $\pi_i < \pi_{i+1}$. Zum Beispiel haben wir für $n = 3$: $A_{3,0} = 1$, $A_{3,1} = 4$, $A_{3,2} = 1$. Zeigen Sie die Rekursion:

$$A_{n,k} = (n-k)A_{n-1,k-1} + (k+1)A_{n-1,k} \ (n > 0) \text{ mit } A_{0,0} = 1, A_{0,k} = 0 \ (k > 0).$$

Aufgabe G4 Das Pascalsche Dreieck (etwas verschoben) ergibt einen verblüffenden Primzahltest. Wir nummerieren die Zeilen mit $0, 1, 2, \ldots, n, \ldots$, und ebenso die Spalten. In die n-te Zeile schreiben wir die $n + 1$ Binomialkoeffizienten $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n}$, aber verschoben in die Spalten mit den Nummern $2n$ bis inklusive $3n$. Schließlich markieren wir eine dieser $n + 1$ Zahlen, falls Sie ein Vielfaches von n ist. Die ersten Zeilen und Spalten sehen folgendermaßen aus:

n\k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	1												
1			$\overline{1}$	$\overline{1}$									
2					1	$\overline{2}$	1						
3							1	$\overline{3}$	$\overline{3}$	1			
4									1	$\overline{4}$	6	$\overline{4}$	1

Zeigen Sie: Eine Zahl k ist genau dann prim, wenn alle Elemente in der k-ten Spalte markiert sind. Hinweis: k gerade ist leicht und für k ungerade beweise man zunächst, dass das Element in der n-ten Zeile und k-ten Spalte $\binom{n}{k-2n}$ ist.

Hausübungen

Abgabe am 03.05.2006

Aufgabe H1 (5 Punkte)

Zeigen Sie:

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{a}{i}\binom{b}{n-i} = \binom{a+b}{n} \qquad \text{mit } a, b, n \in \mathbb{N}.$$

Definition 1. *Gegeben sei eine Permutation $\pi \in \mathrm{Sym}(n)$. Eine Inversion von π ist ein Paar π_i, π_j mit $i < j$ aber $\pi_i > \pi_j$. Zum Beispiel hat 1 4 3 5 2 die Inversionen 4,3; 4,2; 3,2; 5,2.*

Aufgabe H2 (5 Punkte)

Sei $I_{n,k}$ die Anzahl der n–Permutationen mit genau k Inversionen.
Zeigen Sie:

(i) $I_{n,0} = 1$,

(ii) $I_{n,k} = I_{n,\binom{n}{2}-k}$ $(k = 0, \ldots, \binom{n}{2})$.

(iii) $I_{n,k} = I_{n-1,k} + I_{n,k-1}$ für $k < n$. Gilt dies auch für $k = n$?

(iv) $\sum_{k=0}^{\binom{n}{2}} (-1)^k I_{n,k} = 0$, $n \geq 2$.

Aufgabe H3 (5 Punkte)

Sei $c_{n,k}$ die Anzahl der Permutationen π von $\{1, \ldots, n\}$ mit exakt k Zykeln. Die Zahlen $s_{n,k} := (-1)^{n-k} c_{n,k}$ heißen *Stirling–Zahlen der ersten Art*. Beweisen Sie für die Zahlen $c_{n,k}$ die Rekursion:

$$c_{n,k} = (n-1) \cdot c_{n-1,k} + c_{n-1,k-1} \; (n, k \geq 1),$$

wobei $c_{n,k} = 0$ für $n \leq 0$ oder $k \leq 0$ außer $c_{0,0} = 1$.

Aufgabe H4 (5 Punkte)

Auf wie viele Arten kann ein König von der linken unteren Ecke eines Schachbrettes nach der rechten oberen ziehen, wenn er stets nach oben, nach rechts oder diagonal nach rechts oben zieht?

Hinweis: Setzen Sie r gleich der Anzahl der Diagonalzüge und summieren Sie dann über r.