Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Joswig
Katja Kulas

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2006
19./20.07.2006

Diskrete Mathematik

14. Übung

Gruppenübungen

Ein Sudoku–Rätsel wird repräsentiert durch ein 9×9–Gitter, welches aus neun 3×3–Teilgittern bzw. Boxen besteht, in denen bereits wie in folgender Abbildung einige Felder Einträge zwischen 1 und 9 besitzen. Das Ziel ist es, den restlichen Feldern des Gitters so die Zahlen 1 bis 9 zuzuordnen, dass jede Zeile, jede Spalte sowie jede Box jede Zahl genau einmal enthält.

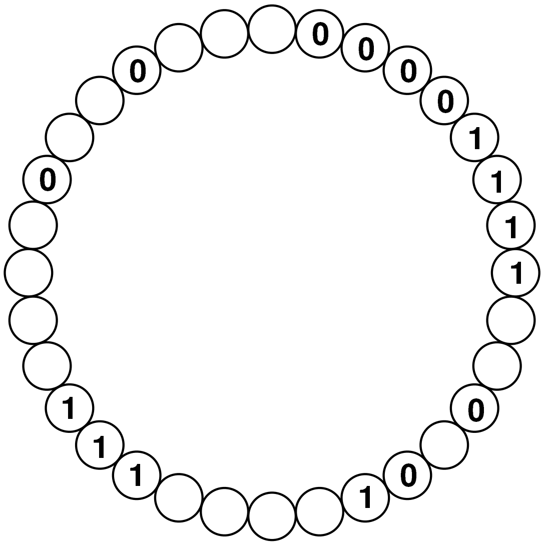
		4		3				5
	8			7	4			6
		9				2		
				9		1		4
8	2						7	9
4		1		5				
		8				7		
5			3	1			2	
2				8		9		

Aufgabe G1 Lösen Sie folgenden Varianten des Sudoku:

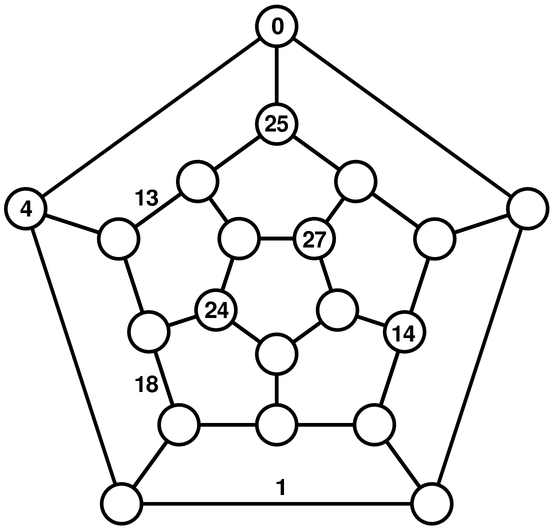
In diesem Rätsel müssen Sie ein *Lateinisches Tableau* vervollständigen: jede Zeile muss eine Permutation der Zahlen 1 bis r enthalten, wobei r die Breite der entsprechenden Zeile ist, und jede Spalte muss eine Permutation der Zahlen 1 bis c, wobei c die Höhe der entsprechenden Spalte ist.

			6				5		
	7								2
		9				1			
8				3	6		
4				
				5
	3	
		1

In diesem Rätsel müssen Sie eine *De Bruijn*–Sequenz der Ordnung 5 vervollständigen: jede mögliche 0-1–Folge der Länge 5 muss im Uhrzeigersinn genau einmal in diesem Zykel vorhanden sein, wobei zwei solcher Folgen überlappen dürfen.



In diesem Rätsel müssen Sie eine *anmutige* Markierung eines Graphen finden: jeder Knoten des Graphen ist mit einer nichtnegativen ganzen Zahl zwischen 0 und m, der Anzahl der Kanten des Graphen, markiert, wobei jede Zahl maximal einmal verwendet werden darf. Jede Kante wird mit der Differenz der Label ihrer Endkonten versehen. Dabei muss jede Zahl $1, \ldots, m$ genau einmal vorkommen.



Aufgabe G2 Diese Aufgabe beschäftigt sich mit der Anzahl bzw. der angenäherten Anzahl aller möglichen Sudoku–Gitter, d.h. wieviele Möglichkeiten gibt es, ein Sudoku–Gitter zu vervollständigen, so dass jede Zeile, Spalte und 3×3–Box die Zahlen 1 bis 9 genau einmal enthält.

(i) Wieviele Gitter gibt es, bei denen die Block-, die Zeilen- und die Spaltenregel außer acht gelassen wird?

(ii) Wieviele Gitter gibt es, bei denen die Zeilen- und die Spaltenregel außer acht gelassen wird?

(iii) Wieviele Gitter gibt es, bei denen die Spaltenregel außer acht gelassen wird?

(iv) Wieviele Gitter gibt es , wenn wir nun annehmen, dass die Zeilen- und die Spaltenregel unabhängig voneinander sind und die Hinzunahme der Spaltenregel die Anzahl der zulässigen Gitter um den gleichen Faktor wie die Zeilenregel reduziert?

Ihr Ergebnis sollte ungefähr $6,6571 \cdot 10^{21}$ betragen, welches von der tatsächlichen Anzahl zulässiger Sudoku–Gitter $6.670.903.752.021.072.936.960 \approx 6,671 \cdot 10^{21}$ nur um $0,2$ Prozent abweicht.

Aufgabe G3 Formulieren Sie das Sudoku–Problem als SAT–Problem (vgl. 10. Übung, Aufgabe G1). Wieviele Variablen und Klausen werden benötigt?