Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Joswig
Katja Kulas

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2006
28./29.06.2006

Diskrete Mathematik

11. Übung

Gruppenübungen

Aufgabe G1 Man nehme Bube, Dame, König und As in jeder Farbe und arrangiere die 16 Karten in einem 4×4–Quadrat, so dass in keiner Zeile, Spalte oder Diagonale derselbe Wert oder dieselbe Farbe zweimal erscheint. Kann erreicht werden, das Rot-Schwarz wie auf einem Schachbrett jeweils abwechselnd erscheint?

Aufgabe G2 Sei $K = \mathbb{F}_q$ der Körper mit q Elementen $x_0, \ldots, x_{q-1}$, wobei $x_0 = 0$ und $x_1 = 1$. Zeigen Sie, dass die in der Vorlesung definierten $q \times q$–Matrizen $A_1, \ldots, A_{q-1}$ mit $A_k(i,j) := x_i x_k + x_j$ paarweise orthogonale lateinische Quadrate sind.

Aufgabe G3 Zeigen Sie, dass die Anzahl lateinischer Quadrate der Ordnung n mit $n = 1, 2, 3, 4$ genau 1,2,12,576 beträgt. Wieviele lateinische Quadrate der Ordnungen 1,2,3 und 4 gibt es, wenn man die Permutationen der Zeilen und Spalten nicht berücksichtigt?

Aufgabe G4 Seien Γ_f und Π_f die in der Vorlesung definierten bipartiten Graphen, wobei G eine endliche abelsche Gruppe der Ordnung $q \geq 2$ und $f : G \times G \to G$ eine Funktion auf G sei. Zeigen Sie, dass Π_f genau dann der Inzidenzgraph einer endlichen projektiven Ebene der Ordnung q ist, wenn Γ_f keinen Kreis der Länge vier enthält.

Hinweis: In der Vorlesung wurde gezeigt, dass Π_f $q + 1$–regulär und $q^2 + q + 1$ Knoten in jeder Farbklasse hat.

Aufgabe G5 Zeigen Sie: Sei $N(n)$ die Anzahl von paarweise orthogonalen lateinischen Quadraten der Ordnung $n = n_1 n_2$. Dann ist $N(n_1 n_2) \geq \min(N(n_1), N(n_2))$.

Hausübungen

Abgabe am 05./06.07.2006

Aufgabe H1 (5 Punkte)

Drei Punkte in einer endlichen projektiven Ebene, die nicht auf einer Geraden liegen, nennen wir *Dreieck*. Zeigen Sie, dass es in der projektiven Ebene $\mathrm{PG}_2\,\mathbb{F}_q$ über $\mathbb{F}_q$, q sei prim, genau $\frac{1}{6}q^3(q+1)(q^2+q+1)$ Dreiecke gibt.

Aufgabe H2 (5 Punkte)

Ein lateinisches Quadrat $A = (a_{ij})$ der Ordnung n heißt *zeilenvollständig*, wenn jedes geordnete Paar (x, y) verschiedener Zahlen genau einmal an aufeinanderfolgenden Positionen einer Zeile vorkommt, d.h. (a_{ij}, a_{ij+1}) für irgendwelche i, j.

(i) Beweisen Sie, dass keine zeilenvollständigen lateinischen Quadrate der Ordnung 3 oder 5 existieren. Konstruieren Sie ein zeilenvollständiges lateinisches Quadrat der Ordnung 4.

(ii) Definieren Sie spaltenvollständige lateinische Quadrate analog.

(iii) Sei $K = \mathbb{F}_q$ der Körper mit q Elementen $x_1, \ldots, x_q$, so dass jedes Nicht-Nullelement von $\mathbb{F}_q$ eindeutig als $x_{i+1} - x_i$ für ein bestimmtes $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ geschrieben werden kann. Sei A dass lateinische Quadrat (mit Zeilen- und Spaltenindizes $0, \ldots, n-1$ statt $1, \ldots, n$) mit den Einträgen $a_{ij} = x_i + x_j$. Zeigen Sie, dass A sowohl zeilen- als auch spaltenvollständig ist.

(iv) Zeigen Sie, dass die Folge

$$0, 1, n-1, 2, n-2, \ldots, \frac{1}{2}n - 1, \frac{1}{2}n + 1, \frac{1}{2}n$$

für gerades n die Eigenschaft aus (iii) erfüllt.

Aufgabe H3 (5 Punkte)

Ein *lateinisches* $r \times s$*–Rechteck* ist eine $r \times s$–Matrix ($r \leq s$) mit Einträgen aus der Menge $\{1, \ldots, n\}$, so dass jede Zahl maximal einmal in jeder Zeile und Spalte vorkommt.

Zeigen Sie, dass jedes lateinische $r \times n$–Rechteck zu einem lateinischen Quadrat der Ordnung n erweitert werden kann. Zum Beispiel ist eine mögliche Erweiterung des lateinischen 2×4–Rechtecks

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

das lateinische Quadrat

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$