Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Joswig
Katja Kulas

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2006
21./22.06.2006

Diskrete Mathematik

10. Übung

Gruppenübungen

Aufgabe G1 Betrachten Sie das Entscheidungsproblem SATISFIABILITY (kurz: SAT)

SATISFIABILITY	
Instanz:	m Klausen $C_1, \ldots, C_m$ in Booleschen Variablen $x_1, \ldots, x_n$ (d.h. C_i ist ein Ausdruck der Form $y_{i_1} \vee \ldots \vee y_{i_{k_i}}$ mit $y_{i_j} \in \{x_{i_j}, \overline{x_{i_j}}\}$).
Frage:	Gibt es eine erfüllende Belegung, d.h. gibt es eine Belegung der Variablen $x_1, \ldots, x_n$ mit wahr oder falsch, so dass alle Klausen wahr sind?

Zum Beispiel gibt es für $\overline{x_3}, x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3$ die erfüllende Belegung $x_i = 0$, $i = 1, 2, 3$, und für $x_1 \vee x_2 \vee x_3, x_1 \vee \overline{x_2}, x_2 \vee \overline{x_3}, x_3 \vee \overline{x_1}, \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}$ gibt es keine erfüllende Belegung.

Das Programm `MiniSat`, dass unter `/home/kulas/MiniSat/MiniSat_v1.14` zur Verfügung gestellt ist, kann Instanzen des SAT–Problems lösen, die im folgenden Format angegeben sind.

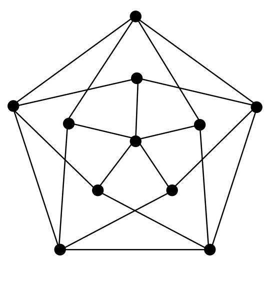
```
p cnf 3 5
1 2 3 0
1 -2 0
2 -3 0
3 -1 0
-1 -2 -3 0
```

Dabei steht in der ersten Zeile nach `p cnf` die Anzahl der Variablen (n) und die Anzahl der Klausen und anschließend werden die Klausen des SAT–Problems aufgelistet. Die Variablen werden als Zahlen von 1 bis n ausgedrückt und $-i$ steht für die negierte Form der Variable i. Jede Klause wird mit 0 abgeschlossen.

Der Aufruf des Programms mit der Datei `file.cnf` im beschriebenen `cnf`–Format erfolgt mit dem Befehl `minisat file.cnf`.

(i) Überlegen Sie sich, wie man das Problem, eine k–Färbung eines (ungerichteten) Graphen zu finden, als SAT–Problem umformulieren kann. Wieviele Variablen und Klausen werden benötigt?

(ii) Bestimmen Sie mithilfe von `MiniSat` eine 4–Färbung des *Grötzsch*–Graphen:



(iii) Wie kann man mithilfe der SAT–Formulierung alle k–Färbungen eines Graphen bekommen?

Hausübungen

Abgabe am 28./29.06.2006

Aufgabe H1 (5 Punkte)

Ein Computerprogramm ruft 7 Funktionen auf, die jeweils auf einer oder mehr von 6 Dateien zugreifen bzw. arbeiten und eine Zeiteinheit benötigen. Dabei dürfen je zwei Funktionen nicht gleichzeitig auf eine Datei zugreifen, sind ansonsten allerdings voneinander unabhängig.

Die folgende Tabelle zeigt, welche Funktion mit welcher Datei arbeitet:

Fkt.\Datei	1	2	3	4	5	6
1		x		x		
2	x		x	x	x	
3		x	x			x
4	x		x	x		
5		x	x			x
6	x					x
7		x		x	x	

Erstellen Sie einen Ablaufplan der 7 Funktionen unter Beachtung der möglichen Dateizugriffe: Wieviele Zeiteinheiten werden mindestens benötigt und wie müssen die Funktionen dann geplant werden?

Formulieren Sei dieses Problem dabei als ein geeignetes Graphenfärbungsproblem.

Aufgabe H2 (5 Punkte)

Sei G ein Graph, dessen Zykel mit ungerader Länge sich paarweise schneiden, d.h. dass jeweils zwei Zykel ungerader Länge einen gemeinsamen Knoten haben. Zeigen Sie, dass $\chi(G) \leq 5$, wobei $\chi(G)$ die chromatische Zahl von G ist.

Aufgabe H3 (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Fano–Ebene bis auf Isomorphie die einzige projektive Ebene der Ordnung 2 ist.