Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Joswig
Katja Kulas

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2006
31.05./01.06.2006

Diskrete Mathematik

Übung

Mittelseminaraufgabenblatt

Zum Erwerb eines Mittelseminarscheins dieser Veranstaltung sind folgende Aufgaben zu bearbeiten. Die ersten beiden Aufgaben sind obligatorisch, zwischen der dritten und vierten können Sie jedoch wählen. Fertigen Sie Ihre Seminararbeit in LaTeX mittels des auf der Webpage der Veranstaltung vorgegebenen Standards an. Der Umfang der Arbeit sollte 8 bis 10 Seiten betragen. Abgabetermin ist der 5. bzw. 6. Juli 2006. Bei Fragen und Problemen stehen Professor Joswig und die beiden Assistenten Katja Kulas und Sven Herrmann gerne in ihren Sprechstunden zur Verfügung.

Appel und Haken haben Mitte der 1970er Jahre bewiesen, dass jeder planare Graph 4-färbbar ist; siehe [1, 2, 3]. Der Beweis ist jedoch ausgesprochen aufwändig und kommt bislang nicht ohne Computerunterstützung aus. Thema dieser Mittelseminararbeit sind verschiedene Sätze, Beweise und Phänomene aus dem Umfeld des 4-Farbensatzes.

Dabei ist für ein $k \in \mathbb{N}$ die *k-(Knoten)-Färbung* eines ungerichteten Graphen $\Gamma = (V, E)$ definiert als eine Abbildung $f : V \to \{1, \dots, k\}$ mit $f(v) \neq f(w)$ für jede Kante $\{v, w\} \in E$. Die Zahl $f(v)$ heißt *Farbe* von v. Die *chromatische Zahl* $\chi(\Gamma)$ ist die minimale Anzahl von Farben, die für eine Knotenfärbung von Γ benötigt werden.

Aufgabe 1 Geben Sie einen Beweis des 5-Farbensatzes an: Jeder planare Graph ist 5-färbbar.

Sie finden viele Beweise in verschiedenen Lehrbüchern, darunter auch Matoušek und Nešetřil [6].

Aufgabe 2 Geben Sie einen Beweis des 3-Farbensatzes an: Sei Γ ein 3-regulärer, zusammenhängender und planarer Graph mit der Eigenschaft, dass jeder geschlossene Weg in Γ gerade Länge hat. Dann ist der duale Graph Γ^* 3-färbbar.

Hier gibt es auch mehrere veröffentlichte Beweise, nach denen Sie im Internet oder in der Bibliothek suchen können. Das Problem bei der Suche könnte aber sein, dass entweder etwas Allgemeineres gezeigt wird, als hier verlangt ist, oder dass der Satz bzw. Beweis nicht unmittelbar von planaren Graphen redet. Vielleicht ist es also einfacher, direkt einen Beweis anzugeben?

Aufgabe 3

(i) Beschreiben Sie die Heuristik zum Färben von Graphen von Daniel Brélaz. Diese finden Sie z.B. in [4] unter dem Link `http://portal.acm.org/citation.cfm?coll=GUIDE&dl=GUIDE&id=359101`.

(ii) Konstruieren Sie einen 3-zusammenhängenden planaren Graphen, für den die Brélaz–Heuristik eine 4-Färbung liefert.

(iii) Konstruieren Sie einen zweiten 3-zusammenhängenden planaren Graphen, für den die Brélaz–Heuristik keine 4-Färbung liefert.

Alternativ zur Aufgabe 3 können Sie folgende schwierigere Aufgabe bearbeiten:

Aufgabe 4 Finden Sie einen Fehler in einem beliebigen (z.B. im Internet) veröffentlichten Beweis des 4-Farbensatzes, der behauptet, ohne Computer auszukommen (z.B. Cahit [5]).

Literatur

[1] Kenneth Appel and Wolfgang Haken, *Every planar map is four colorable*, Bull. Amer. Math. Soc. **82** (1976), no. 5, 711–712. MR MR0424602 (54 #12561)

[2] ———, *The four color proof suffices*, Math. Intelligencer **8** (1986), no. 1, 10–20, 58. MR MR823216 (87b:05055)

[3] ———, *Every planar map is four colorable*, Contemporary Mathematics, vol. 98, American Mathematical Society, Providence, RI, 1989, With the collaboration of J. Koch. MR MR1025335 (91m:05079)

[4] Daniel Brélaz, *New methods to color the vertices of a graph*, Comm. ACM **22** (1979), no. 4, 251–256. MR MR527126 (80c:90080)

[5] Ibrahim Cahit, *The four color theorem and three proofs*, `http://www.emu.edu.tr/~cahit/`.

[6] Jiří Matoušek and Jaroslav Nešetřil, *Invitation to discrete mathematics*, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1998. MR MR1668997