

**Ungleichungen für sukzessive Minima und  
verallgemeinerte In- und Umkugelradien**

von

**Dipl.-Math. Martin Henk**  
aus Siegen

Vom Fachbereich Mathematik der  
Universität-Gesamthochschule Siegen  
zur Verleihung des akademischen Grades

DOKTOR DER NATURWISSENSCHAFTEN

genehmigte Dissertation.

Siegen 1991

1. Gutachter: Prof. Dr. J.M. WILLS
2. Gutachter: Prof. Dr. U. BETKE

Tag der Promotion: 01.02.1991

## Vorwort

Ende des 19. Jahrhunderts entdeckte *Minkowski* (1864-1909) grundlegende Beziehungen zwischen der Gitterpunktanzahl und dem Volumen zentralsymmetrischer konvexer Körper. Die Verbindung zwischen der diskreten Gitterpunktanzahl und dem stetigen Volumen wird dabei durch die sukzessiven Minima hergestellt. Eines seiner Hauptergebnisse ist der sogenannte 2. Hauptsatz der *Geometrie der Zahlen*, der das Produkt aus sukzessiven Minima und Volumen bestmöglich nach oben abschätzt. Dieses Resultat findet bis heute tiefliegende Anwendungen in verschiedenen Teildisziplinen der Mathematik, wie z.B. in der *Zahlentheorie*, *Optimierung* und *Computational Geometry*.

In Kapitel 1 werden Ungleichungen zwischen sukzessiven Minima und Gitterpunktanzahl sowie zwischen sukzessiven Minima und *Minkowskischen* Quermaßintegralen (bzw. inneren Volumina) hergeleitet. Dazu werden in Abschnitt 1.1 die benötigten Definitionen bereitgestellt und eine kurze Einführung in die mit der Gitterpunktanzahl verbundenen Problematik gegeben.

Abschnitt 1.2 befaßt sich mit Abschätzungen der Gitterpunktanzahl in Abhängigkeit von den sukzessiven Minima. Eine in diesem Zusammenhang von Herrn *Wills* geäußerte Vermutung, die in einem gewissen Sinne das Analogon des 2. Hauptsatzes der *Geometrie der Zahlen* für die Gitterpunktanzahl darstellt, wird im Fall der Ebene bewiesen. Die sich aus dieser Vermutung ableitbare und dem 1. Hauptsatz der *Geometrie der Zahlen* entsprechende Beziehung zwischen Gitterpunktanzahl und erstem sukzessiven Minimum wird für beliebige Dimensionen gezeigt. Anschließend werden analoge Ungleichungen für zentralsymmetrische, streng konvexe Körper untersucht.

In Abschnitt 1.3 wird eine Serie von Ungleichungen gezeigt, die das Produkt aus geeigneten sukzessiven Minima und dem Volumen eines zentralsymmetrischen konvexen Körpers mit einem geeigneten inneren Volumen verbindet. Alle diese Relationen sind bestmöglich und lassen sich als eine Erweiterung des 2. Hauptsatzes der *Geometrie der Zahlen* auffassen.

*Minkowskis* 1. Hauptsatz der *Geometrie der Zahlen*, der eine Abschwächung des 2. Hauptsatzes darstellt, kann auch so interpretiert werden, daß das Volumen eines zentralsymmetrischen konvexen Körpers nicht größer ist als das Volumen eines Würfels, dessen Kantenlänge eine einfache Funktion des ersten sukzessiven Minimums ist. Eine dieser Aussage entsprechende Beziehung in der *Konvexgeometrie* besagt, daß das Volumen eines beliebigen konvexen Körpers nicht größer ist als das Volumen einer um den halben Durchmesser des Körpers dilatierten Einheitskugel.

Der Durchmesser kann definiert werden als das Zweifache des Maximums unter den In- oder Umkugelradien aller eindimensionalen Projektionen des Körpers und kann in diesem Sinne, bis auf den Faktor 2, als eindimensionaler Um- oder Inkugelradius

aufgefaßt werden. Durch Betrachtung des Maximums unter den In- oder Umkugelradien aller  $i$ -dimensionalen Projektionen ergibt sich analog ein  $i$ -dimensionaler In- oder Umkugelradius. Wird das Maximum durch das Minimum bzw. die Projektionen durch Schnitte mit geeigneten  $i$ -dimensionalen affinen Ebenen ersetzt, so führt dies insgesamt zu vier Serien von verallgemeinerten Inkugelradien sowie zu vier Serien von verallgemeinerten Umkugelradien.

In Kapitel 2 werden die Beziehungen dieser In- und Umkugelradien zueinander und ihre Verbindung zum Volumen untersucht. Eine genaue Definition der Radien findet sich in Abschnitt 2.1, wo auch einige einfache Eigenschaften der Radien aufgezeigt werden. Insbesondere ergeben sich durch Betrachtung der polaren Menge eines Körpers interessante Zusammenhänge zwischen den Radien, die über Projektionen definiert sind und denen, die durch Schnittbildung ermittelt werden.

Im Hinblick auf *Minkowskis 2. Hauptsatz der Geometrie der Zahlen* werden in Abschnitt 2.2 sogenannte Sukzessive-Minima-Typ Ungleichungen untersucht, d.h., es werden Ungleichungen betrachtet, die das Volumen eines konvexen Körpers mit dem Produkt der In- oder Umkugelradien einer Serie von In- oder Umkugelradien verknüpfen. Insgesamt gibt es 16 zu betrachtende Relationen. Die dabei erzielten Resultate sind bis auf wenige Ausnahmen bestmöglich. Für zentralsymmetrische konvexe Körper ergeben sich nur bestmögliche Beziehungen, und in einigen Fällen weisen diese interessante Ähnlichkeiten zu den klassischen Ungleichungen von *Minkowski* zwischen Volumen und Produkt der sukzessiven Minima auf.

Zwei der vier Serien von Umkugelradien zeichnen sich dadurch aus, daß der auftretende eindimensionale Umkugelradius gleich dem halben Durchmesser ist. In Abschnitt 2.3 werden für diese beiden Serien von Umkugelradien obere Schranken der Quotienten aus  $i$ -dimensionalem und  $j$ -dimensionalem Umkugelradius für  $i > j$  entwickelt. Alle diese Schranken sind bestmöglich, und als ein Spezialfall dieser Serie von Ungleichungen ergibt sich der klassische Satz von *Jung*, der eine nicht zu verbessernde obere Schranke für den Quotienten aus Umkugelradius und Durchmesser angibt.

Das in einem gewissen Sinne duale Gegenstück des Satzes von *Jung* ist der Satz von *Steinhagen*, der den Inkugelradius eines konvexen Körpers durch die Dicke nach unten abschätzt. Auch hier eignen sich zwei Serien von Inkugelradien dazu, diesen Satz als Spezialfall allgemeinerer Beziehungen zwischen  $i$ -dimensionalem und  $j$ -dimensionalem Inkugelradius dieser beiden Serien aufzufassen. Solche Ungleichungen werden in Abschnitt 2.4 untersucht. Die dort angegebenen Schranken sind im allgemeinen nicht bestmöglich. Für 3-dimensionale konvexe Körper ergeben sich jedoch auch hier scharfe Beziehungen.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. J. M. Wills für die vielen Anregungen, die zu dieser Arbeit führten, sowie Herrn Prof. Dr. U. Betke für die zahlreichen und fruchtbaren Diskussionen, die in entscheidendem Maße zur Lösung einiger Probleme beitrugen. æ

# Inhaltsverzeichnis

## **Kapitel 1 Gitterpunkte, sukzessive Minima und Quermaßintegrale**

1.1	Einführung .....	4
1.2	Gitterpunkte und sukzessive Minima .....	8
1.3	Sukzessive Minima und Quermaßintegrale .....	13

## **Kapitel 2 Verallgemeinerte In- und Umkugelradien konvexer Körper**

2.1	Einführung .....	16
2.2	Sukzessive-Minima-Typ Ungleichungen .....	23
2.3	Eine Verallgemeinerung des Satzes von Jung .....	30
2.4	Anmerkungen zu dem Satz von Steinhagen .....	34

<b>Literaturverzeichnis</b> .....	44
-----------------------------------	----

<b>Notationen</b> .....	47
-------------------------	----

# 1 Gitterpunkte, sukzessive Minima und Quermaßintegrale

## 1.1 Einführung

Ein Gitter  $\mathbb{L}$  des  $d$ -dimensionalen euklidischen Raumes  $E^d$  ist die Menge aller ganzzahligen Linearkombinationen von  $d$  linear unabhängigen Vektoren  $a^i \in E^d$ ,  $1 \leq i \leq d$ . Die Elemente des Gitters werden als Gitterpunkte bezeichnet, und  $(a^1, \dots, a^d)$  heißt eine Basis von  $\mathbb{L}$ . Bezeichnet  $\mathcal{K}^d$  die Menge der konvexen Körper (kompakt konvexe Mengen) des  $E^d$ , so heißt für  $K \in \mathcal{K}^d$

$$G(K, \mathbb{L}) = \text{card}(K \cap \mathbb{L})$$

die Gitterpunktanzahl von  $K$  bzgl. des Gitters  $\mathbb{L}$ . Ist durch  $\mathbb{Z}^d$  die Menge aller Punkte des  $E^d$  mit ganzzahligen Koordinaten gekennzeichnet, so heißt  $G(K, \mathbb{Z}^d)$  einfach Gitterpunktanzahl von  $K$ .

Die Bestimmung der Gitterpunktanzahl zentralsymmetrischer konvexer Körper  $K$ , d.h.,  $K \in \mathcal{K}^d$  mit  $K = -K$ , ist ein klassisches mathematisches Problem, dessen Ursprung in der *Zahlentheorie* zu finden ist. Ausgehend von der Problemstellung der ganzzahligen Lösbarkeit gewisser positiver quadratischer Formen erkannte *Minkowski* fundamentale Zusammenhänge zwischen Gitterpunktanzahl und Volumen zentralsymmetrischer konvexer Körper und wurde so zum Begründer der *Geometrie der Zahlen* [M].

Ein wesentlicher Bestandteil seiner Untersuchungen sind die von ihm eingeführten sukzessiven Minima. Ist  $\mathcal{K}_0^d$  die Menge der zentralsymmetrischen konvexen Körper des  $E^d$ ,  $K \in \mathcal{K}_0^d$  mit  $\dim(K) = d$ , so ist das  $i$ -te sukzessive Minimum  $\lambda_i(K, \mathbb{L})$ ,  $1 \leq i \leq d$ , bzgl. eines Gitters  $\mathbb{L}$  definiert durch ([Gr, L], S. 123)

$$\lambda_i(K, \mathbb{L}) = \min\{\lambda \in \mathbb{R} \mid \lambda > 0, \dim(\lambda K \cap \mathbb{L}) \geq i\},$$

d.h.,  $\lambda_i(K, \mathbb{L})$  ist der kleinste positive Dilatationsfaktor mit der Eigenschaft, daß  $i$  linear unabhängige Gitterpunkte aus  $\mathbb{L}$  in dem dilatierten Körper enthalten sind. Offensichtlich ist  $\lambda_1(K, \mathbb{L}) \leq \lambda_2(K, \mathbb{L}) \leq \dots \leq \lambda_d(K, \mathbb{L})$ , und ist zum Beispiel  $K$  ein achsenparalleler Quader mit den Kantenlängen  $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_d$ , dann gilt  $\lambda_i(K, \mathbb{Z}^d) = 2/\mu_i$ .

Bezeichnet  $V(K)$  das Volumen eines konvexen Körpers, dann besagt *Minkowskis* 1. Hauptsatz der *Geometrie der Zahlen* ([M], S. 76; [Gr, L], S. 40): Für  $K \in \mathcal{K}_0^d$ ,  $\dim(K) = d$ , gilt

$$(\lambda_1(K, \mathbb{Z}^d))^d V(K) \leq 2^d. \quad (1.1)$$

Insbesondere bedeutet (1.1), daß ein zentralsymmetrischer konvexer Körper  $K \in \mathcal{K}_0^d$  mit Volumen  $V(K) \geq 2^d$  mindestens zwei vom Nullpunkt verschiedene Gitterpunkte enthält.

*Minkowskis 2. Hauptsatz der Geometrie der Zahlen* stellt eine Verschärfung von (1.1) dar und beschreibt die folgende grundlegende Beziehung ([M], S. 211; [Gr, L], S. 59; [Ba, Wo, Z]; [D]; [We]; [Da]): Für  $K \in \mathcal{K}_0^d$ ,  $\dim(K)=d$ , gilt

$$\lambda_1(K, \mathbb{Z}^d) \lambda_2(K, \mathbb{Z}^d) \cdots \lambda_d(K, \mathbb{Z}^d) V(K) \leq 2^d. \quad (1.2)$$

Diese Ungleichung kann so interpretiert werden, daß das Volumen eines zentralsymmetrischen konvexen Körpers  $K \in \mathcal{K}_0^d$  nicht größer ist als das Volumen eines achsenparallelen Quaders mit den Kantenlängen  $2/\lambda_i(K, \mathbb{Z}^d)$ ,  $1 \leq i \leq d$ .

Demnach gilt Gleichheit in (1.2) z.B. für achsenparallele Quader und in (1.1) z.B. für einen Würfel. Eine detaillierte Untersuchung der Gleichheitsfälle in (1.1) bzw. (1.2) findet sich bei ([M], S. 81, 224; [Gr, L], S. 82; [C, D]; [Ke]; [J]).

Im Gegensatz zu der Ungleichung (1.2) läßt sich die folgende untere Schranke leicht beweisen ([M], S. 192; [Gr, L], S. 62)

$$\lambda_1(K, \mathbb{Z}^d) \lambda_2(K, \mathbb{Z}^d) \cdots \lambda_d(K, \mathbb{Z}^d) V(K) \geq 2^d/d!, \quad (1.3)$$

Gleichheit gilt hier z.B. für ein reguläres Kreuzpolytop.

Basierend auf (1.1) bewies *Blichfeldt* [Bl] für zentralsymmetrische konvexe Körper die nachstehende, bestmögliche untere Schranke für die Gitterpunktanzahl

$$G(K, \mathbb{Z}^d) \geq 2 \left\lfloor \frac{V(K)}{2^d} \right\rfloor + 1, \quad (1.4)$$

dabei bezeichnet  $\lfloor \alpha \rfloor$  die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich  $\alpha \in \mathbb{R}$  ist.

Um die Gitterpunktanzahl beliebiger konvexer Körper abzuschätzen, ist es notwendig, außer dem Volumen weitere Funktionale zu betrachten. Eine herausragende Rolle kommt dabei den *Minkowskischen* Quermaßintegralen zu.

Mit Hilfe der Integralformel von *Kubota* lassen sich für einen konvexen Körper  $K \in \mathcal{K}^d$  die *Minkowskischen* Quermaßintegrale  $W_i(K)$ ,  $0 \leq i \leq d$ , folgendermaßen induktiv definieren ([Bn, Fe], S. 49; [H1], S. 209):

$$\begin{aligned} d = 1: & \quad W_0(K) = V(K), \quad W_1(K) = \kappa_1, \\ d > 1: & \quad W_0(K) = V(K), \quad W_i(K) = \frac{1}{d\kappa_{d-1}} \int_{S^{d-1}} \overline{W}_{i-1}(K|H_u) du, \quad i = 1, \dots, d, \end{aligned}$$

dabei bezeichnet  $\kappa_i$  das Volumen der  $i$ -dimensionalen Einheitskugel,  $S^{d-1}$  den Rand der  $d$ -dimensionalen Einheitskugel,  $H_u$  die Hyperebene mit Normalenvektor  $u$  und  $\overline{W}_{i-1}(K|H_u)$  das im  $(d-1)$ -dimensionalen Raum  $H_u$  gebildete  $(i-1)$ -te Quermaßintegral der orthogonalen Projektion von  $K$  auf  $H_u$ .

Insbesondere ist  $dW_1(K)$  gleich der Oberfläche  $F(K)$  eines konvexen Körpers und  $W_d(K) = \kappa_d$ . Mittels der Normierung

$$V_i(K) = \binom{d}{i} \frac{W_{d-i}(K)}{\kappa_{d-i}}, \quad i = 0, \dots, d,$$

ergeben sich die von *McMullen* [Mc] eingeführten inneren Volumina  $V_i(K)$ . Speziell gilt  $V_d(K)=V(K)$ ,  $V_{d-1}(K)=F(K)/2$  und  $V_0(K)=1$ . Das  $i$ -te innere Volumen besitzt die gleichen Eigenschaften wie  $W_{d-i}(K)$ , es ist also bewegungsinvariant, definit, monoton, beschränkt, homogen (vom Grade  $i$ ), stetig und additiv ([H1], S. 210). Zusätzlich ist  $V_i(K)$  dimensionsinvariant, d.h., es bleibt unverändert, wenn  $K$  in einen euklidischen Raum höherer Dimension eingebettet wird.

Für die  $d$ -dimensionale Einheitskugel  $B^d$  gilt  $V_i(B^d)=\binom{d}{i}\kappa_d/\kappa_{d-i}$ , und ist  $K$  ein achsenparalleler Quader mit den Kantenlängen  $\mu_1, \dots, \mu_d$ , so ist  $V_i(K)$  gleich der  $i$ -ten elementarsymmetrischen Funktion der  $d$  Variablen  $\mu_1, \dots, \mu_d$  ([H1], S. 216).

Die Suche nach einer unteren Schranke für die Gitterpunktanzahl ist im Jahre 1972 zu einem gewissen Abschluß gekommen. Für  $K \in \mathcal{K}^d$  gilt

$$G(K, \mathbb{Z}^d) > V_d(K) - V_{d-1}(K) = V(K) - \frac{1}{2}F(K),$$

und diese Abschätzung ist i. a. bestmöglich.

Im  $E^2$  wurde diese Ungleichung bereits 1948 gezeigt [N], *Schmidt* [S] und *Bokowski/Wills* [Bo, W1] bewiesen sie im  $E^3$  und vermuteten sie für beliebige Dimensionen. Basierend auf einer Arbeit von *Hadwiger* [H2] gelang es schließlich *Bokowski*, *Hadwiger* und *Wills* [Bo, H, W] die allgemeine Gültigkeit zu beweisen.

Die Frage nach oberen Schranken für die Gitterpunktanzahl ist noch weitgehend ungelöst. Sogar für die Klasse der zentralsymmetrischen konvexen Körper existiert keine befriedigende Antwort. Eines der ältesten Ergebnisse stellt der Satz von *Blichfeldt* [Bl] dar, der aber nur für konvexe Körper gilt, die  $d$  linear unabhängige Gitterpunkte enthalten: Für  $K \in \mathcal{K}^d$ ,  $\dim(K \cap \mathbb{Z}^d)=d$ , gilt

$$G(K, \mathbb{Z}^d) \leq d!V(K) + d.$$

Die optimalen  $K$  sind hier geeignete Pyramiden und Zylinder. Im  $E^2$  gilt für beliebige  $K \in \mathcal{K}^2$  die Ungleichung

$$G(K, \mathbb{Z}^2) \leq V(K) + \frac{1}{2}F(K) + 1.$$

Diese Beziehung wurde von *Nosarzewska* [N] gezeigt, folgt aber auch aus einer Arbeit von *Pick* [Pi]. Für höhere Dimensionen liegen nur Teilergebnisse oder Vermutungen vor. Eine zentrale Vermutung in den 70er Jahren war (s. z.B. *Wills* [W1])

$$G(K, \mathbb{Z}^d) \leq \sum_{i=0}^d V_i(K).$$

Im Falle  $d=2$  entspricht dies dem obigen Satz von *Nosarzewska*, und für  $d=3$  wurde sie von *Overhagen* [O] bewiesen. Weiter gilt die Ungleichung für die Klasse der Gitterzonotope [B, G] und für Rotationskörper bis  $d \leq 20$  [H, W].

1979 widerlegte *Hadwiger* [H3] dann diese Vermutung für  $d \geq 441$ . Sein Gegenbeispiel ist ein Simplex, und durch Betrachtung eines regulären Kreuzpolytops konnten *Betke* und *Henk* (unveröffentlicht) diese Schranke auf 207 reduzieren.

Viele der existierenden oberen Schranken für die Gitterpunktanzahl sind von der Form

$$G(K, \mathbb{Z}^d) \leq \sum_{i=0}^d \rho_i V_i(K),$$

wobei  $\rho_i \geq 1$  gewisse positive Gewichte bezeichnen (s. z.B. [Bo, W2]; [Bo]; [G1]; [G2]; [F, G, W]). Im Hinblick auf die *Willssche* Vermutung wirft dies die Frage auf, wie viele und welche der Gewichte auf 1 gesetzt werden dürfen. Von besonderem Interesse ist dabei das Problem, ob  $\rho_d = \rho_{d-1} = 1$  gilt, da dies in direkter Verbindung steht zu der von *Ehrhart* [Eh] vermuteten Ungleichung

$$G(K, \mathbb{Z}^d) \leq V(K) + \frac{1}{2}F(K) + \sum_{i=0}^{d-2} V_i(Q(K)),$$

wobei  $Q(K)$  der kleinste achsenparallele Quader ist, der  $K$  enthält.

Erste Teilergebnisse in dieser Richtung sind von *Betke* und *Henk* (unveröffentlicht) erzielt worden, indem sie zeigen: Für jedes  $\epsilon > 0$  existiert eine nur von der Dimension  $d$  und  $\epsilon$  abhängige Konstante  $c(d, \epsilon)$ , so daß für  $K \in \mathcal{K}^d$  gilt

$$G(K, \mathbb{Z}^d) \leq V(K) + (1 + \epsilon)V_{d-1}(K) + c(d, \epsilon) \sum_{i=0}^{d-2} V_i(K).$$

Abschließend sei bemerkt, daß die hier aufgelisteten Ergebnisse nur eine sehr kleine Auswahl der bisherigen Untersuchungen zum Thema Gitterpunkte darstellen. In diesem Zusammenhang sei auf das Buch von *Erdős/Gruber/Hammer* [Er, Gr, Ha] über Gitterpunkte und auf das Standardwerk von *Gruber/Lekkerkerker* [Gr, L] über *Geometrie der Zahlen* verwiesen sowie auf die bersichtsarbeiten von *Betke/Wills* [B, W] über stetige und diskrete Funktionale konvexer Körper und *Wills* [W3].

## 1.2 Gitterpunkte und sukzessive Minima

Eine erste obere Schranke für die Gitterpunktanzahl spezieller zentralsymmetrischer konvexer Körper findet sich bei *Minkowski* ([M], S. 79). Mit Hilfe des ersten sukzessiven Minimums läßt sie sich wie folgt beschreiben: Für  $K \in \mathcal{K}_0^d$ ,  $\dim(K)=d$ ,  $\lambda_1(K, \mathbb{Z}^d) \geq 1$ , gilt

$$G(K, \mathbb{Z}^d) \leq 3^d, \quad (1.5)$$

d.h., ein zentralsymmetrischer konvexer Körper, der 0 als einzigen Gitterpunkt im Inneren enthält, besitzt höchstens  $3^d - 1$  Gitterpunkte auf dem Rand. Gleichheit gilt in (1.5) zum Beispiel für einen Würfel der Kantenlänge 2.

Ist  $K \in \mathcal{K}_0^d$  streng konvex — die Verbindungsstrecke von je zwei Punkten  $x, y \in K$ ,  $x \neq y$ , schneidet das Innere von  $K$  — so kann  $3^d$  durch  $2^{d+1} - 1$  ersetzt werden ([M], S. 80). Dieses Resultat ist von *Woods* [Wo] verallgemeinert worden, indem er zeigt: Für  $K \in \mathcal{K}_0^d$ ,  $\dim(K)=d$ ,  $K$  streng konvex, gilt

$$\sum_{i=1}^d G(\text{bd}(\lambda_i(K, \mathbb{Z}^d)K), \mathbb{Z}^d) \leq 2^{d+1} - 2,$$

dabei bezeichnet  $\text{bd}(\lambda_i(K, \mathbb{Z}^d)K)$  den Rand von  $\lambda_i(K, \mathbb{Z}^d)K$ . Eine entsprechende Beziehung für beliebige  $K \in \mathcal{K}_0^d$  existiert nicht. ■

*Minkowski's* Beweis von (1.5) befindet sich in seinem Buch [M] in unmittelbarem Anschluß an seinen Beweis für den 1. Hauptsatz der *Geometrie der Zahlen* (1.1). Um so erstaunlicher ist es, im Hinblick auf die Ähnlichkeit zwischen (1.5) und (1.1), daß *Minkowski* seinem 2. Hauptsatz der *Geometrie der Zahlen* (1.2) und der Beziehung (1.3) entsprechende Relationen für Gitterpunktanzahl und sukzessive Minima nicht entwickelt hat.

Kürzlich erkannte *Wills* die Existenz solcher Zusammenhänge und äußerte die Vermutung, daß für die Gitterpunktanzahl eines zentralsymmetrischen konvexen Körpers die folgende, *Minkowski's* 2. Hauptsatz der *Geometrie der Zahlen* analoge Beziehung gilt: Für  $K \in \mathcal{K}_0^d$ ,  $\dim(K)=d$ , ist

$$G(K, \mathbb{Z}^d) \leq \left\lfloor \frac{2}{\lambda_1(K, \mathbb{Z}^d)} + 1 \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{2}{\lambda_2(K, \mathbb{Z}^d)} + 1 \right\rfloor \cdot \dots \cdot \left\lfloor \frac{2}{\lambda_d(K, \mathbb{Z}^d)} + 1 \right\rfloor. \quad (1.6)$$

Gleichheit gilt hier z.B. für einen achsenparallelen Quader mit geraden ganzzahligen Kantenlängen.

Einen allgemeingültigen Beweis für (1.6) gibt es noch nicht. Im folgenden wird eine aus (1.6) abgeleitete, dem 1. Hauptsatz der *Geometrie der Zahlen* (1.1) entsprechende Ungleichung gezeigt und (1.6) für den Fall  $d=2$  bewiesen.

**SATZ 1.1.** Für  $K \in \mathcal{K}_0^d$ ,  $\dim(K)=d$ , gilt

$$G(K, \mathbb{Z}^d) \leq \left( \left\lfloor \frac{2}{\lambda_1(K, \mathbb{Z}^d)} + 1 \right\rfloor \right)^d, \quad (1.7)$$

und diese Ungleichung ist bestmöglich.

BEWEIS: Sei  $p = \lfloor 2/\lambda_1(K, \mathbb{Z}^d) + 1 \rfloor$ , also  $p > 2/\lambda_1(K, \mathbb{Z}^d)$ , und es sei angenommen, daß zwei Gitterpunkte  $g = (g_1, \dots, g_d)^T$  und  $h = (h_1, \dots, h_d)^T$ ,  $g \neq h$ , aus  $K$  existieren, die bzgl. Division durch  $p$  der gleichen Restklasse angehören, d.h.,

$$g_i \equiv h_i \pmod{p} \quad i = 1, \dots, d. \quad (1.8)$$

Unter Beachtung der Konvexität von  $K$  folgt aus  $2/p < \lambda_1(K, \mathbb{Z}^d)$ , daß der von 0 verschiedene Gitterpunkt

$$\left( \frac{g_1 - h_1}{p}, \dots, \frac{g_d - h_d}{p} \right)^T = \frac{1}{2} \left( \frac{2}{p} g \right) + \frac{1}{2} \left( -\frac{2}{p} h \right) \quad (1.9)$$

im Inneren von  $\lambda_1(K, \mathbb{Z}^d)K$  enthalten ist, was im Widerspruch zur Definition des ersten sukzessiven Minimums steht.

Folglich kann es keine zwei Gitterpunkte mit der Eigenschaft (1.8) geben, und daher läßt sich jedem Gitterpunkt  $g$  aus  $K$  in eindeutiger Weise ein  $d$ -Tupel  $(\tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_d)$  zuordnen, wobei  $\tilde{g}_i$  die Restklasse der  $i$ -ten Komponente von  $g$  bzgl.  $p$  ist. Da es nur  $p^d$  verschiedene solcher Tupel gibt, folgt (1.7).

Für einen Würfel  $K$  der Kantenlänge  $\mu$  mit  $\lfloor \mu \rfloor \in 2\mathbb{Z}$  ist

$$G(K, \mathbb{Z}^d) = (2 \lfloor \mu/2 \rfloor + 1)^d = (\lfloor 2/\lambda_1(K, \mathbb{Z}^d) + 1 \rfloor)^d,$$

und dies zeigt, daß die Beziehung (1.7) i. a. bestmöglich ist. q.e.d.

Offensichtlich ist *Minkowskis* Satz (1.5) in Satz 1.1. enthalten, und für  $d=2$  gilt die folgende Verschärfung von (1.7).

**SATZ 1.2.** Für  $K \in \mathcal{K}_0^2$ ,  $\dim(K)=2$ , gilt

$$G(K, \mathbb{Z}^2) \leq \left\lfloor \frac{2}{\lambda_1(K, \mathbb{Z}^2)} + 1 \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{2}{\lambda_2(K, \mathbb{Z}^2)} + 1 \right\rfloor, \quad (1.10)$$

und diese Ungleichung ist bestmöglich.

BEWEIS: Seien  $z^1, z^2$  zwei linear unabhängige Gitterpunkte mit  $z^i \in \lambda_i(K, \mathbb{Z}^2)K$ ,  $i=1, 2$ , und die Verbindungsstrecke zwischen  $z^1$  und  $z^2$  enthalte keine weiteren Gitterpunkte. Das Dreieck  $\text{conv}(\{0, z^1, z^2\})$  besitzt außer  $0, z^1, z^2$  keine Gitterpunkte, und daher bilden  $z^1, z^2$  eine Basis von  $\mathbb{Z}^2$  ([Gr, L], S. 20). Somit kann unter Beachtung der Invarianz von Gitterpunktanzahl und sukzessiven Minima gegenüber unimodularen Transformationen angenommen werden

$$z^1 = (1, 0)^T \quad \text{und} \quad z^2 = (0, 1)^T.$$

Es sei bemerkt, daß für  $d \geq 3$  keine analoge Transformation existiert ([Gr, L], S. 21). Für einen beliebigen Punkt  $x = (x_1, x_2)^T$  aus  $K$  gilt nun

$$\lambda_2(K, \mathbb{Z}^2)|x_1| \leq 1 \quad \text{oder} \quad \lambda_2(K, \mathbb{Z}^2)|x_2| \leq 1, \quad (1.11)$$

denn sonst läge der Gitterpunkt  $(x_1/|x_1|, x_2/|x_2|)^T$  im Inneren der konvexen Menge, die durch die Punkte  $\pm z^1, \pm z^2, \lambda_2(K, \mathbb{Z}^2)x$  erzeugt wird. Da diese Menge in  $\lambda_2(K, \mathbb{Z}^2)K$  enthalten ist, ergibt sich ein Widerspruch zur Definition des zweiten sukzessiven Minimums.

Für  $i=1, 2$  sei  $p_i = \lfloor 2/\lambda_i(K, \mathbb{Z}^2) + 1 \rfloor$  und  $f : E^2 \rightarrow E^2$  die lineare Abbildung, die den Raum entlang der  $i$ -ten Koordinatenrichtung um den Faktor  $2/p_i$  verzerrt, d.h.,

$$f((x_1, x_2)^T) = \left( \frac{2}{p_1}x_1, \frac{2}{p_2}x_2 \right)^T.$$

Mit  $2/p_i < \lambda_i(K, \mathbb{Z}^2)$  folgt aus (1.11)

$$f(K) \cap \mathbb{Z}^2 = 0. \quad (1.12)$$

Seien nun  $g=(g_1, g_2)^T$ ,  $h=(h_1, h_2)^T$ ,  $g \neq h$  zwei Gitterpunkte aus  $K$  mit der Eigenschaft

$$g_i \equiv h_i \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2. \quad (1.13)$$

Aus der Konvexität von  $f(K)$  folgt, daß der von 0 verschiedene Gitterpunkt

$$\left( \frac{g_1 - h_1}{p_1}, \frac{g_2 - h_2}{p_2} \right)^T = \frac{1}{2}f(g) + \frac{1}{2}f(-h) \quad (1.14)$$

in  $f(K)$  enthalten ist. Da dies im Widerspruch zu (1.12) steht, kann es keine zwei Gitterpunkte in  $K$  mit der Eigenschaft (1.13) geben. Daher läßt sich jedem Gitterpunkt  $(g_1, g_2)^T$  aus  $K$  in injektiver Weise ein 2-Tupel  $(\tilde{g}_1, \tilde{g}_2)$  zuordnen, wobei  $\tilde{g}_i$  die Restklasse von  $g_i$  bzgl.  $p_i$  ist. Da es nur  $p_1 \cdot p_2$  verschiedene solcher Tupel gibt, folgt die Behauptung.

An einem achsenparallelen Quader  $K$  mit den Kantenlängen  $\mu_1, \mu_2$ ,  $\lfloor \mu_1 \rfloor, \lfloor \mu_2 \rfloor \in 2\mathbb{Z}$ , wird deutlich, daß sich die Beziehung (1.10) i. a. nicht verbessern läßt. **q.e.d.**

Durch leichte Modifikation der Beweise von Satz 1.1. und Satz 1.2. ergeben sich unmittelbar die folgenden Beziehungen für streng konvexe Körper, wobei  $\lceil \alpha \rceil$  die kleinste ganze Zahl größer oder gleich  $\alpha \in \mathbb{R}$  bezeichnet.

**SATZ 1.3.** Für  $K \in \mathcal{K}_0^d$ ,  $\dim(K)=d$ , und  $K$  streng konvex, gilt

$$G(K, \mathbb{Z}^d) \leq 2 \left( \left\lceil \frac{2}{\lambda_1(K, \mathbb{Z}^d)} \right\rceil \right)^d - 1, \quad (1.15)$$

$$G(K, \mathbb{Z}^2) \leq 2 \left\lceil \frac{2}{\lambda_1(K, \mathbb{Z}^2)} \right\rceil \cdot \left\lceil \frac{2}{\lambda_2(K, \mathbb{Z}^2)} \right\rceil - 1, \quad (1.16)$$

und diese Ungleichungen sind bestmöglich.

BEWEIS: Sei  $p = \lceil 2/\lambda_1(K, \mathbb{Z}^d) \rceil$ , und seien  $g, h$  zwei Gitterpunkte aus  $K$ , die der Bedingung (1.8) genügen. Wegen  $2/p \leq \lambda_1(K, \mathbb{Z}^d)$  ist nun der Gitterpunkt aus (1.9) im Rand

von  $\lambda_1(K, \mathbb{Z}^d)K$  enthalten. Da  $K$  streng konvex ist, bedeutet dies  $h=-g$ . Somit läßt sich nun jedem Paar  $g, -g, g \neq 0$ , von Gitterpunkten aus  $K$  in eindeutiger Weise ein Restklassen-Tupel wie im Beweis von Satz 1.1. zuordnen, womit (1.15) gezeigt ist.

Zum Beweis von (1.16) sei  $p_i = \lceil 2/\lambda_i(K, \mathbb{Z}^d) \rceil$ ,  $i=1, 2, g, h$  und  $f(K)$  seien wie im Beweis von Satz 1.2. Wegen  $2/p_i \leq \lambda_i(K, \mathbb{Z}^d)$  und (1.11) besitzt  $f(K)$  außer 0 keine Gitterpunkte im Inneren. Somit liegt der Gitterpunkt aus (1.14) auf dem Rand von  $f(K)$ , und da  $f(K)$  streng konvex ist, gilt  $g=-h$ , und es folgt (1.16).

Sei  $P \in \mathcal{K}^d$  das folgende Polytop

$$P = \text{conv}(\{g \in \mathbb{Z}^d \mid 1 \geq g \geq 0 \text{ oder } -1 \leq g \leq 0\}).$$

$P$  ist also die konvexe Hülle der Gitterpunkte des Würfels mit Kantenlänge 2, die entweder nur positive oder negative Koordinaten besitzen. Außer diesen Gitterpunkten enthält  $P$  keine weiteren Gitterpunkte, und bis auf 0 sind alle Gitterpunkte von  $P$  auch Ecken. Bekannterweise ([Bn, Fe], S. 34) kann  $P$  durch einen streng konvexen Körper  $\bar{K}$  so approximiert werden, daß gilt  $P \subset \bar{K}$  und  $G(\bar{K}, \mathbb{Z}^d) = G(P, \mathbb{Z}^d) = 2^{d+1} - 1$ .

Durch Schnitte von  $\bar{K}$  mit Kugeln, die  $P$  enthalten und  $P$  in genau einer Ecke berühren, kann ein streng konvexer Körper  $K$  konstruiert werden, der die Ecken von  $P$  im Rand enthält. Für diesen Körper gilt nun  $G(K, \mathbb{Z}^d) = 2^{d+1} - 1$ ,  $\lambda_i(K, \mathbb{Z}^d) = 1$ ,  $1 \leq i \leq d$ , und dies zeigt, daß (1.15) und (1.16) i. a. nicht zu verbessern sind. q.e.d.

Eine 'gute', (1.3) entsprechende, untere Schranke für die Gitterpunktanzahl zentralsymmetrischer konvexer Körper ist noch nicht gefunden. Verknüpft man (1.3) mit (1.4) so ergibt sich unmittelbar

$$G(K, \mathbb{Z}^d) \geq 2 \left\lceil \frac{1}{d! \lambda_1(K, \mathbb{Z}^d) \cdots \lambda_d(K, \mathbb{Z}^d)} \right\rceil + 1.$$

Ein anderer, von *Betke* stammender Ansatz ist der folgende:

Sei  $K \in \mathcal{K}_0^d$ ,  $\dim(K) = d$  und  $z^1, \dots, z^d$  seien  $d$  linear unabhängige Gitterpunkte mit der Eigenschaft, daß  $z^i/\lambda_i(K, \mathbb{Z}^d)$  im Rand von  $K$  liegt. Das Kreuzpolytop mit den Ecken  $\pm z^i/\lambda_i(K, \mathbb{Z}^d)$ ,  $1 \leq i \leq d$ , ist in  $K$  enthalten, und seine Gitterpunktanzahl ist nicht kleiner als die des Kreuzpolytops  $P = \text{conv}(\{\pm a^i/\lambda_i(K, \mathbb{Z}^d), 1 \leq i \leq d\})$ , wobei  $a^1, \dots, a^d$  eine Basis von  $\mathbb{Z}^d$  ist. Somit gilt  $G(K, \mathbb{Z}^d) \geq G(P, \mathbb{Z}^d)$ , und es bleibt 'nur' das kombinatorische Problem, die Gitterpunktanzahl von  $P$  mit Hilfe der sukzessiven Minima auszudrücken.

Abschließend sei bemerkt, daß die hier aufgeführten Ungleichungen für beliebige Gitter gelten. Ist nämlich  $\mathbb{L}$  ein beliebiges Gitter mit der Basis  $a^1, \dots, a^d$  und  $A$  die Matrix mit den Spalten  $a^1, \dots, a^d$ , dann gelten die Beziehungen  $G(K, \mathbb{L}) = G(A^{-1}K, \mathbb{Z}^d)$  und  $\lambda_i(K, \mathbb{L}) = \lambda_i(A^{-1}K, \mathbb{Z}^d)$ ,  $1 \leq i \leq d$ .

Darüberhinaus können die Ungleichungen (1.7) und (1.10) in einigen Fällen wie folgt verbessert werden: Ist  $p$  aus dem Beweis von Satz 1.1. eine gerade Zahl, so kann es wegen  $2/p < \lambda_1(K, \mathbb{Z}^d)$  keinen Gitterpunkt  $g$  aus  $K$ ,  $g \neq 0$ , geben mit

$$g_i \equiv 0 \pmod{p} \quad \text{oder} \quad g_i \equiv \frac{p}{2} \pmod{p}, \quad 1 \leq i \leq d.$$

Folglich kann in diesem Falle die rechte Seite in (1.7) um den Faktor  $2^d-1$  verkleinert werden.

Mit analogen Argumenten kann gezeigt werden, daß das Produkt auf der rechten Seite von (1.10) um  $2^k-1$  verringert werden kann, wobei  $k$  die Anzahl der geraden Faktoren in diesem Produkt angibt.

### 1.3 Sukzessive Minima und Quermaßintegrale

Minkowskis 2. Hauptsatz der *Geometrie der Zahlen* (1.2) kann wegen  $V_0(K)=1$  auch folgendermaßen formuliert werden: Für  $K \in \mathcal{K}_0^d$ ,  $\dim(K)=d$ , gilt

$$\lambda_1(K, \mathbb{Z}^d) \lambda_2(K, \mathbb{Z}^d) \cdots \lambda_d(K, \mathbb{Z}^d) V(K) \leq 2^d V_0(K).$$

Damit beschreibt er einen Zusammenhang zwischen dem Produkt aller sukzessiven Minima, dem Volumen und dem 0-ten inneren Volumen eines zentralsymmetrischen konvexen Körpers. In [W2] beweist *Wills* die Existenz von Ungleichungen zwischen dem Produkt der größten  $(d-i)$  sukzessiven Minima, dem Volumen und dem  $i$ -ten inneren Volumen, indem er zeigt: Für  $K \in \mathcal{K}_0^d$ ,  $\dim(K)=d$ ,  $0 \leq i \leq d-1$ , gilt

$$\lambda_{i+1}(K, \mathbb{Z}^d) \cdots \lambda_d(K, \mathbb{Z}^d) V(K) \leq 2^{d-i} i! V_i(K).$$

Im folgenden wird nun gezeigt, daß der Faktor  $2^{d-i} i!$  in den obigen Ungleichungen durch  $2^{d-i}$  ersetzt werden kann [He]. Dieses Ergebnis wurde von *Wills* [W2] vermutet und stellt in einem gewissen Sinne eine Erweiterung von (1.2) dar.

**SATZ 1.4.** *Sei  $K \in \mathcal{K}_0^d$ ,  $\dim(K)=d$ . Dann gilt für  $1 \leq i \leq d-1$*

$$\lambda_{i+1}(K, \mathbb{Z}^d) \cdots \lambda_d(K, \mathbb{Z}^d) V(K) < 2^{d-i} V_i(K). \quad (1.17)$$

*Keine der Ungleichungen kann verbessert werden.*

BEWEIS: Für  $1 \leq j \leq i$  sei  $y^j \in K$  so gewählt, daß  $\lambda_1(K, \mathbb{Z}^d) y^1, \dots, \lambda_i(K, \mathbb{Z}^d) y^i$   $i$  linear unabhängige Gitterpunkte sind. Desweiteren sei  $L_{d-i} = \{x \in E^d \mid x_{j_1} = \dots = x_{j_i} = 0\}$  eine geeignete  $(d-i)$ -dimensionale Koordinatenebene mit  $\text{lin}(\{z^1, \dots, z^i\}) \cap L_{d-i} = 0$ .

Ist nun  $\mathbb{Z}^{d-i}$  die Menge aller Punkte mit ganzzahligen Koordinaten in  $L_{d-i}$  und  $K_{d-i} = K \cap L_{d-i}$ , so folgt mit (1.2)

$$\lambda_1(K_{d-i}, \mathbb{Z}^{d-i}) \cdots \lambda_{d-i}(K_{d-i}, \mathbb{Z}^{d-i}) V^{d-i}(K_{d-i}) \leq 2^{d-i}.$$

Dabei bezeichnet  $V^{d-i}$  das  $(d-i)$ -dimensionale Volumen. Aufgrund der Wahl von  $L_{d-i}$  enthält  $\lambda_j(K_{d-i}, \mathbb{Z}^{d-i}) K$  mindestens  $i+j$  linear unabhängige Gitterpunkte, so daß gilt

$$\lambda_{i+j}(K, \mathbb{Z}^d) \leq \lambda_j(K_{d-i}, \mathbb{Z}^{d-i}), \quad j = 1, \dots, d-i,$$

und daher

$$\lambda_{i+1}(K, \mathbb{Z}^d) \cdots \lambda_d(K, \mathbb{Z}^d) V^{d-i}(K_{d-i}) \leq 2^{d-i}. \quad (1.18)$$

Ist  $L_{d-i}^\perp$  das  $i$ -dimensionale total orthogonale Komplement von  $L_{d-i}$ , so ergibt sich aus der Konvexität von  $K$ :  $V^{d-i}(K_{d-i}) \geq V^{d-i}(\frac{1}{2}(K \cap (x+L_{d-i})) + \frac{1}{2}(K \cap (-x+L_{d-i})))$ , für  $x \in L_{d-i}^\perp$ . Unter Berücksichtigung der Zentralsymmetrie und der *Brunn-Minkowski* Ungleichung ([Bn, Fe], S. 87) folgt daraus  $V^{d-i}(K_{d-i}) \geq V^{d-i}(K \cap (x+L_{d-i}))$  für alle

$x \in L_{d-i}^\perp$ , was bedeutet, daß der bezüglich dem Volumen maximale Schnitt der Ebenenschar  $x + L_{d-i}$ ,  $x \in L_{d-i}^\perp$ , mit  $K$  für  $x=0$  angenommen wird. Mittels elementarer Integrationsregeln läßt sich daher das Volumen von  $K$  folgendermaßen nach oben abschätzen

$$V(K) \leq V^i(K|L_{d-i}^\perp)V^{d-i}(K_{d-i}), \quad (1.19)$$

wobei  $V^i(K|L_{d-i}^\perp)$  das  $i$ -dimensionale Volumen der orthogonalen Projektion von  $K$  auf  $L_{d-i}^\perp$  bezeichnet.

Sei nun  $\bar{K}$  der konvexe Körper, der durch *Schwarzsche* Symmetrisierung von  $K$  an der Ebene  $L_{d-i}^\perp$  entsteht. Bekannterweise werden durch diesen Abrundungsprozeß die Quermaßintegrale nicht vergrößert ([Le], S. 226), so daß gilt  $V_i(\bar{K}) \leq V_i(K)$ ,  $0 \leq i \leq d$ . Weiterhin ist  $K|L_{d-i}^\perp = \bar{K} \cap L_{d-i}^\perp$ , und zusammen mit der Monotonie und Dimensionsinvarianz der inneren Volumina folgt:

$$V^i(K|L_{d-i}^\perp) = V_i(K|L_{d-i}^\perp) = V_i(\bar{K} \cap L_{d-i}^\perp) \leq V_i(\bar{K}) \leq V_i(K).$$

Nun ist  $\bar{K} \cap L_{d-i}^\perp$  eine  $i$ -dimensionale Teilmenge von  $\bar{K}$ , so daß gilt  $V_i(\bar{K} \cap L_{d-i}^\perp) < V_i(\bar{K})$  ([Bn, Fe], S. 50) bzw.  $V^i(K|L_{d-i}^\perp) < V_i(K)$ . Daraus ergibt sich unter Beachtung von (1.19) als obere Schranke für das Volumen von  $K$

$$V(K) < V_i(K)V^{d-i}(K_{d-i}).$$

Zusammen mit (1.18) folgt  $\lambda_{i+1}(K, \mathbb{Z}^d) \cdot \dots \cdot \lambda_d(K, \mathbb{Z}^d)V(K) < 2^{d-i}V_i(K)$ .

Um zu zeigen, daß diese Ungleichungen bestmöglich sind, sei für  $1 \leq i \leq d-1$ ,  $\mu \geq 1$ ,  $Q_i(\mu)$  der folgende achsenparallele Quader

$$Q_i(\mu) = \left\{ x \in E^d \mid -\frac{\mu}{2} \leq x_j \leq \frac{\mu}{2}, 1 \leq j \leq i, \quad -\frac{1}{2} \leq x_j \leq \frac{1}{2}, i+1 \leq j \leq d \right\}.$$

Offensichtlich gilt  $V(Q_i(\mu)) = \mu^i$ ,  $\lambda_j(Q_i(\mu), \mathbb{Z}^d) = 2/\mu$ ,  $1 \leq j \leq i$ , und  $\lambda_j(Q_i(\mu), \mathbb{Z}^d) = 2$  für  $i+1 \leq j \leq d$ . Wie in der Einführung bemerkt, ist  $V_i(Q_i(\mu))$  die  $i$ -te elementarsymmetrische Funktion der Kantenlängen von  $Q_i(\mu)$  und daher gilt

$$\frac{2^{d-i}V_i(Q_i(\mu))}{\lambda_{i+1}(Q_i(\mu), \mathbb{Z}^d) \cdot \dots \cdot \lambda_d(Q_i(\mu), \mathbb{Z}^d)V(Q_i(\mu))} = 1 + \sum_{j=0}^{i-1} \mu^{j-i} \binom{i}{j} \binom{d-i}{i-j}.$$

Für  $\mu \rightarrow \infty$  konvergiert der rechte Ausdruck gegen 1, und dies bedeutet, daß keine der Ungleichungen i. a. verbessert werden kann. **q.e.d.**

Eine der Beziehung (1.3) entsprechende untere Schranke der Form  $\gamma(d, i)V_i(K)$ , wobei  $\gamma(d, i)$  eine Konstante ist, die nur von der Dimension  $d$  und dem Index  $i$  abhängt, existiert für die linke Seite in (1.17) nicht.

Zusammen mit (1.2) würde das nämlich bedeuten, daß für  $1 \leq i \leq d-1$  das Produkt  $\lambda_1(K, \mathbb{Z}^d) \cdot \dots \cdot \lambda_i(K, \mathbb{Z}^d)V_i(K)$  nach oben durch  $2^d/\gamma(d, i)$  beschränkt wäre. Daß dies jedoch nicht der Fall sein kann, zeigt das folgende Beispiel:

Sei eine  $(d-1)$ -dimensionale Ebene  $L_{d-1}$  im  $E^d$  mit Normalenvektor  $u$  so gewählt, daß  $L_{d-1}$  außer 0 keinen weiteren Gitterpunkt enthält, und für  $\mu > 0$  sei  $\bar{K}(\mu)$  ein um den Faktor  $\mu$  dilatiertes reguläres  $(d-1)$ -dimensionales Kreuzpolytop in  $L_{d-1}$ . Für hinreichend kleines  $\lambda(\mu) > 0$  besitzt das Kreuzpolytop  $K(\mu) = \text{conv}(\{\bar{K}(\mu), \pm\lambda(\mu)u\})$  nur 0 als Gitterpunkt, so daß gilt  $\lambda_j(K(\mu), \mathbb{Z}^d) > 1$ ,  $1 \leq j \leq d$ . Weiterhin ist aufgrund der Monotonie der inneren Volumina  $V_i(K(\mu)) > V_i(\bar{K}(\mu))$  und  $V_i(\bar{K}(\mu)) > (2\mu)^i / i!$ , wie ein geeigneter  $i$ -dimensionaler Schnitt zeigt. Somit ist

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \lambda_1(K(\mu), \mathbb{Z}^d) \cdot \dots \cdot \lambda_i(K(\mu), \mathbb{Z}^d) V_i(K(\mu)) \rightarrow \infty.$$

In Analogie zu (1.3) gilt aber [W2] für  $K \in \mathcal{K}_0^d$ ,  $\dim(K) = d$  und  $1 \leq i \leq d-1$ :

$$\lambda_1(K, \mathbb{Z}^d) \cdot \dots \cdot \lambda_i(K, \mathbb{Z}^d) V_i(K) > 2^i / i!. \quad (1.20)$$

Auch diese Beziehungen lassen sich nicht verbessern, wie zum Beispiel an der Serie von Kreuzpolytopen

$$K_i(\mu) = \text{conv}(\{\pm e^j, 1 \leq j \leq i, \pm \mu e^j, i+1 \leq j \leq d\}),$$

für  $\mu_{>0} \rightarrow 0$  deutlich wird. Dabei bezeichnet  $e^j$  den  $j$ -ten kanonischen Einheitsvektor.

Wird in (1.17) (bzw. (1.20)) ' $<$ ' durch ' $\leq$ ' (' $>$ ' durch ' $\geq$ ') ersetzt, so können die Ungleichungen mit  $i=0$  beginnen ( $i=d$  enden), und es ergeben sich auf natürliche Weise Erweiterungen der klassischen *Minkowskischen* Sätze (1.2) und (1.3). Im Gegensatz zu (1.2) und (1.3) ([Gr, L], S. 124) lassen sich aber die Beziehungen (1.17) und (1.20) nicht für beliebige Gitter verallgemeinern. Für Gitter mit einer orthonormierten Basis behalten die Ungleichungen aufgrund der Bewegungsinvarianz der inneren Volumina ihre Gültigkeit.

## 2 Verallgemeinerte In- und Umkugelradien konvexer Körper

### 2.1 Einführung

Neben den *Minkowskischen* Quermaßintegralen (s. 1.1 Einführung) zählen Inkugelradius  $r(K)$ , Umkugelradius  $R(K)$ , Dicke  $\Delta(K)$  und Durchmesser  $D(K)$  zu den klassischen Funktionalen konvexer Körper  $K \in \mathcal{K}^d$ .

Der Inkugelradius gibt für  $K \in \mathcal{K}^d$  das Maximum aller Radien von  $d$ -dimensionalen Kugeln an, die in  $K$  enthalten sind, der Umkugelradius ist definiert als das Minimum aller Radien von  $d$ -dimensionalen Kugeln, die  $K$  enthalten ([Bn, Fe], S. 54).

Die In- und Umkugelradius zugehörigen Kugeln heißen In- bzw. Umkugel. Die Umkugel eines konvexen Körpers ist stets eindeutig bestimmt, wogegen es mehrere Inkugeln geben kann. Desweiteren ist der Inkugelradius im Gegensatz zum Umkugelradius nicht dimensionsinvariant. Deshalb sei im folgenden für einen konvexen Körper  $K \in \mathcal{K}^d$ , der in einer  $i$ -dimensionalen affinen Ebene  $L$  enthalten ist, durch  $r(K; L)$  der Inkugelradius bzgl. des durch  $L$  induzierten  $i$ -dimensionalen euklidischen Raumes gekennzeichnet.

Die Dicke eines konvexen Körpers beschreibt den minimalen Abstand von parallelen Stützhyperebenen an  $K$ , und der Durchmesser gibt den maximalen Abstand paralleler Stützhyperebenen an ([Bn, Fe], S. 51).  $D(K)$  ist zugleich der maximale euklidische Abstand zweier beliebiger Punkte des Körpers.

Es sei bemerkt, daß auf Grund der Kompaktheit von  $K$  und dem Auswahlssatz von *Blaschke* ([Bn, Fe], S. 34) die in den obigen Definitionen von Inkugelradius, Umkugelradius, Dicke und Durchmesser angegebenen Minima und Maxima existieren. Dieses Argument wird im weiteren noch häufig verwendet, ohne jedesmal explizit darauf hinzuweisen. ■

Offensichtlich ist  $R(K) \geq D(K)/2$ ,  $\Delta(K)/2 \geq r(K)$ , und Gleichheit gilt z.B. für zentralsymmetrische Körper. Daß andererseits der Umkugelradius durch den Durchmesser bzw. die Dicke durch den Inkugelradius nach oben beschränkt ist, wurde von *Jung* [Ju] bzw. *Steinhagen* [St] gezeigt. Für  $K \in \mathcal{K}^d$  gilt nämlich:

$$R(K) \leq D(K) \sqrt{\frac{d}{2d+2}} \quad (2.1)$$

$$r(K) \geq \begin{cases} \Delta(K) \frac{\sqrt{d+2}}{2d+2} & \text{falls } d \text{ gerade,} \\ \Delta(K) \frac{1}{2\sqrt{d}} & \text{falls } d \text{ ungerade.} \end{cases} \quad (2.2)$$

In (2.2) gilt Gleichheit für ein reguläres Simplex, jedoch nicht nur für dieses, denn für  $d \geq 3$  lassen sich z.B. von den Ecken eines regulären Simplex Stücke abschneiden, ohne daß sich Dicke und Inkugelradius ändern. Dagegen gilt in (2.1) genau dann '=', wenn  $K$  ein reguläres Simplex der Kantenlänge  $D(K)$  enthält.

Dicke und Durchmesser eines konvexen Körpers  $K$  können auch wie folgt definiert werden:  $\Delta(K)/2$  ist das Minimum unter den In- oder Umkugelradien aller eindimensionalen Projektionen von  $K$ , und  $D(K)/2$  ist das entsprechende Maximum. Insofern ist die halbe Dicke bzw. der halbe Durchmesser ein spezieller eindimensionaler In- bzw. Umkugelradius, je nachdem ob die Größe über den Inkugelradius oder Umkugelradius beschrieben wird. Insbesondere läßt sich bei dieser Betrachtungsweise  $r(K)$  bzw.  $R(K)$  als  $d$ -dimensionaler Inkugelradius bzw. Umkugelradius von  $K$  auffassen, und bzgl. orthogonaler Projektionen auf  $i$ -dimensionale Ebenen ergeben sich die folgenden  $i$ -dimensionalen In- und Umkugelradien.

**DEFINITION 2.1.** Für  $K \in \mathcal{K}^d$ ,  $1 \leq i \leq d$ , sei

$$\begin{aligned} R_\pi^i(K) &:= \max_{L \in \mathcal{L}_i^d} R(K|L) & r_\pi^i(K) &:= \max_{L \in \mathcal{L}_i^d} r(K|L; L) \\ R_i^\pi(K) &:= \min_{L \in \mathcal{L}_i^d} R(K|L) & r_i^\pi(K) &:= \min_{L \in \mathcal{L}_i^d} r(K|L; L), \end{aligned}$$

wobei  $\mathcal{L}_i^d$ ,  $1 \leq i \leq d$ , die Menge aller  $i$ -dimensionalen linearen Teilräume des  $E^d$  bezeichnet, und für  $L \in \mathcal{L}_i^d$  ist durch  $K|L$  die orthogonale Projektion von  $K$  auf  $L$  gekennzeichnet.

Anstatt Radien bzgl. Projektionen zu betrachten, ist es auch möglich, In- und Umkugelradien über geeignete Schnitte affiner Ebenen mit dem Körper zu erhalten. Bezeichnet nämlich  $L^\perp$  für  $L \in \mathcal{L}_i^d$  das total orthogonale Komplement von  $L$ , so sind  $\max_{x \in L^\perp} R(K \cap (x + L))$  und  $\max_{x \in L^\perp} r(K \cap (x + L); x + L)$  für einen konvexen Körper wohldefiniert, und durch Bildung des Maximums bzw. Minimums dieser Größen bzgl. aller Ebenen  $L \in \mathcal{L}_i^d$  ergeben sich vier weitere Serien von verallgemeinerten In- und Umkugelradien.

**DEFINITION 2.2.** Für  $K \in \mathcal{K}^d$ ,  $1 \leq i \leq d$ , sei

$$\begin{aligned} R_\sigma^i(K) &:= \max_{L \in \mathcal{L}_i^d} \max_{x \in L^\perp} R(K \cap (x + L)) & r_\sigma^i(K) &:= \max_{L \in \mathcal{L}_i^d} \max_{x \in L^\perp} r(K \cap (x + L); x + L) \\ R_i^\sigma(K) &:= \min_{L \in \mathcal{L}_i^d} \max_{x \in L^\perp} R(K \cap (x + L)) & r_i^\sigma(K) &:= \min_{L \in \mathcal{L}_i^d} \max_{x \in L^\perp} r(K \cap (x + L); x + L). \end{aligned}$$

Ist z.B.  $K$  ein Ellipsoid mit Mittelpunkt 0 und den Halbachsen  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_d$ , so ergeben sich die folgenden In- und Umkugelradien: Offensichtlich ist  $R(K) = D(K)/2 = a_d$ ,  $r(K) = \Delta(K)/2 = a_1$  und daher

$$R_\pi^i(K) = R_\sigma^i(K) = a_d, \quad r_i^\pi(K) = r_i^\sigma(K) = a_1, \quad \text{für } 1 \leq i \leq d.$$

Ist  $L_i$  ein  $i$ -dimensionaler linearer Teilraum, der die ersten  $i$  Halbachsen enthält, so gilt  $R_i^\sigma(K) \leq R_i^\pi(K) \leq R(K|L_i) = a_i$ . Sind andererseits die letzten  $i$  Halbachsen in  $L_i$  enthalten, so folgt  $r_\pi^i(K) \geq r_\sigma^i(K) \geq r(K \cap L_i; L_i) = a_{d-i+1}$ . Mit Hilfe des später gezeigten Satzes 2.2. gilt daher

$$R_i^\pi(K) = R_i^\sigma(K) = a_i, \quad r_\pi^i(K) = r_\sigma^i(K) = a_{d-i+1}, \quad \text{für } 1 \leq i \leq d.$$

Ein erster Hinweis auf die Serien  $R_i^\sigma(K)$ ,  $R_i^\pi(K)$  findet sich bei *Zindler* [Z]. Dort wird für  $d=3$  gezeigt, daß es konvexe Körper  $K$  gibt, über die ein Kreis geschoben werden kann, dessen Radius kleiner als der kleinste Hüllzylinderradius ist, d.h.,  $R_2^\sigma(K) < R_2^\pi(K)$ .

Aber nicht nur aus konvexgeometrischer Sicht sind diese Radien von Interesse, sondern auch in dem Gebiet der *Computational Geometry* spielen sie eine Rolle [G, K], wo z.B.  $R_i^\pi(K)$  als Maß für die Approximationsgüte eines konvexen Körpers durch  $(d-i)$ -dimensionale affine Ebenen betrachtet wird.

Ein anderer, mehr algebraischer Gesichtspunkt dieser Radien ergibt sich durch Betrachtung des sogenannten *Steiner*-Polynoms  $\sum_{i=0}^d V_{d-i}(K) \kappa_i \mu^i$  ([H1], S. 214), das das Volumen des äußeren Parallelkörpers von  $K$  im Abstand  $\mu$  beschreibt. Ersetzt man  $\mu$  durch  $-\mu$ , so ergeben sich für  $d=2$  interessante Beziehungen zwischen den Nullstellen des Polynoms und dem In- und Umkugelradius des Körpers ([T]; [Od]). Für höhere Dimensionen ist es daher möglich, daß entsprechende Beziehungen zwischen den Nullstellen und geeigneten  $i$ -dimensionalen In- und Umkugelradien bestehen. Dieser Aspekt wird hier aber nicht behandelt, und im folgenden werden einige konvexgeometrische Eigenschaften der In- und Umkugelradien herausgearbeitet.

Unmittelbar aus der Definition wird deutlich, daß es sich bei den Radien um stetige, monotone (z.B.  $K \subset \bar{K} \Rightarrow r_\sigma^i(K) \leq r_\sigma^i(\bar{K})$ ) Funktionale handelt, die invariant gegenüber Bewegungen des Körpers sind, d.h., sie bleiben unverändert, wenn  $K$  Translationen oder Drehungen unterworfen wird. Darüberhinaus sind sie homogen vom Grade 1 (z.B.  $\bar{K} = \mu K$ ,  $\mu \geq 0$ ,  $\Rightarrow r_\sigma^i(\bar{K}) = \mu r_\sigma^i(K)$ ) und die 1-dimensionalen In- und Umkugelradien sind dadurch ausgezeichnet, daß sie bis auf den Faktor 2 gleich der Dicke oder dem Durchmesser sind, in Abhängigkeit davon, ob das Minimum oder Maximum betrachtet wird.

Genauer gilt für  $K \in \mathcal{K}^d$

$$\begin{aligned} R(K) &= R_\pi^d(K) = R_\sigma^d(K) = R_d^\pi(K) = R_d^\sigma(K), \\ r(K) &= r_\pi^d(K) = r_\sigma^d(K) = r_d^\pi(K) = r_d^\sigma(K), \\ D(K)/2 &= R_\pi^1(K) = R_\sigma^1(K) = r_\pi^1(K) = r_\sigma^1(K), \\ \Delta(K)/2 &= R_\pi^1(K) = R_\sigma^1(K) = r_\pi^1(K) = r_\sigma^1(K). \end{aligned}$$

Bezüglich des Verhältnisses zwischen dem  $i$ -ten und  $(i+1)$ -ten In- oder Umkugelradius lassen sich zunächst folgende einfache Ordnungsrelationen aufstellen.

**SATZ 2.1.** Für  $K \in \mathcal{K}^d$  und  $1 \leq i \leq d-1$  gilt

$$\begin{array}{ll} i) & R_{\pi}^{i+1}(K) \geq R_{\pi}^i(K) & ii) & r_{\pi}^{i+1}(K) \leq r_{\pi}^i(K) \\ iii) & R_{i+1}^{\pi}(K) \geq R_i^{\pi}(K) & iv) & r_{i+1}^{\pi}(K) \leq r_i^{\pi}(K) \\ v) & R_{\sigma}^{i+1}(K) \geq R_{\sigma}^i(K) & vi) & r_{\sigma}^{i+1}(K) \leq r_{\sigma}^i(K) \\ vii) & R_{i+1}^{\sigma}(K) \geq R_i^{\sigma}(K) & viii) & r_{i+1}^{\sigma}(K) \leq r_i^{\sigma}(K). \end{array}$$

BEWEIS: Sei  $L_i$  ein  $i$ -dimensionaler linearer Teilraum und  $L_{i+1} \in \mathcal{L}_{i+1}^d$  mit  $L_i \subset L_{i+1}$ .

Es ist  $K|L_i = (K|L_{i+1})|L_i$  und deshalb gilt  $R(K|L_i) \leq R(K|L_{i+1})$  beziehungsweise  $r(K|L_i; L_i) \geq r(K|L_{i+1}; L_{i+1})$ . Daraus ergeben sich die Beziehungen i)-iv).

Zu jedem Vektor  $x \in L_i^{\perp}$  existiert ein Vektor  $z^x \in L_{i+1}^{\perp}$  mit  $(x + L_i) \subset (z^x + L_{i+1})$ . Somit ist  $\max_{x \in L_i^{\perp}} R(K \cap (x + L_i)) \leq \max_{x \in L_{i+1}^{\perp}} R(K \cap (x + L_{i+1}))$ , woraus die Ungleichungen v) und vii) folgen.

Ist andererseits  $z \in L_{i+1}^{\perp}$  und ist  $z^m$  ein Inkugelmittelpunkt von  $K \cap (z + L_{i+1})$ , so gibt es ein  $x^z \in L_i^{\perp}$  mit  $z^m \in (x^z + L_i) \subset (z + L_{i+1})$ . Daher ist  $\max_{x \in L_i^{\perp}} r(K \cap (x + L_i); x + L_i) \geq \max_{x \in L_{i+1}^{\perp}} r(K \cap (x + L_{i+1}); x + L_{i+1})$  und es folgen vi) und viii). **q.e.d.**

Keine der obigen Ungleichungen kann i. a. verbessert werden, was an einer  $d$ -dimensionalen Kugel deutlich wird. Ist  $K \in \mathcal{K}_0^d$ , so ist  $R(K) = D(K)/2$ ,  $r(K) = \Delta(K)/2$ , und zusammen mit Satz 2.1. gilt deshalb  $R_{\pi}^i(K) = R_{\sigma}^i(K) = R(K)$ ,  $r_i^{\pi}(K) = r_i^{\sigma}(K) = r(K)$  für  $1 \leq i \leq d$ .

Aus Satz 2.1. folgt insbesondere, daß für  $i < j$  der  $i$ -te Umkugelradius durch den  $j$ -ten Umkugelradius und der  $j$ -te Inkugelradius durch den  $i$ -ten Inkugelradius nach oben beschränkt sind.

Die Frage, ob dies auch für  $j < i$  gilt, kann für vier Serien sofort negativ beantwortet werden. Es handelt sich hierbei um die in einem gewissen Sinne asymmetrischen Serien  $R_i^{\pi}(K)$ ,  $R_i^{\sigma}(K)$ ,  $r_{\pi}^i(K)$ ,  $r_{\sigma}^i(K)$ , die sich dadurch auszeichnen, daß der 1-dimensionale Umkugelradius gleich der halben Dicke und der 1-dimensionale Inkugelradius gleich dem halben Durchmesser ist. Denn für ein Ellipsoid  $K$  mit den Halbachsen  $0 < a_1 \leq \dots \leq a_d$  ergeben sich für  $1 \leq i, j \leq d$  die Gleichungen  $R_i^{\pi}(K)/R_j^{\pi}(K) = R_i^{\sigma}(K)/R_j^{\sigma}(K) = a_i/a_j$  bzw.  $r_{\pi}^j(K)/r_{\pi}^i(K) = r_{\sigma}^j(K)/r_{\sigma}^i(K) = a_{d-j+1}/a_{d-i+1}$ , und dies zeigt, daß die Quotienten für  $j < i$  im allgemeinen nicht nach oben beschränkt sind.

Für die verbleibenden vier Serien sind die entsprechenden Quotienten beschränkt. Dies folgt unmittelbar aus (2.1) und (2.2). Eine genauere Untersuchung dieser Beziehungen erfolgt in den Abschnitten 2.3 und 2.4.

Außer den trivialen Ungleichungen  $R_{\pi}^i(K) \geq R_i^{\pi}(K)$ ,  $r_{\pi}^i(K) \geq r_i^{\pi}(K)$ ,  $R_{\pi}^i(K) \geq r_{\pi}^i(K)$  und  $R_i^{\pi}(K) \geq r_i^{\pi}(K)$  (analog für die Radien aus Definition 2.2) gelten zusätzlich die folgenden Beziehungen.

**SATZ 2.2.** Für  $K \in \mathcal{K}^d$  und  $1 \leq i \leq d$  gilt

$$\begin{array}{ll} i) & R_{d-i+1}^{\pi}(K) \geq r_{\pi}^i(K) & ii) & R_{d-i+1}^{\sigma}(K) \geq r_{\sigma}^i(K) \\ iii) & R_{\pi}^{d-i+1}(K) \geq r_i^{\pi}(K) & iv) & R_{\sigma}^{d-i+1}(K) \geq r_i^{\sigma}(K). \end{array}$$

BEWEIS: Offensichtlich reicht es i) und ii) zu zeigen. Seien  $L_i \in \mathcal{L}_i^d$ ,  $L_{d-i+1} \in \mathcal{L}_{d-i+1}^d$  mit  $r_\pi^i(K) = r(K|L_i; L_i)$ ,  $R_{d-i+1}^\pi(K) = R(K|L_{d-i+1})$ , und sei  $L_1$  ein 1-dimensionaler linearer Teilraum von  $L_{d-i+1} \cap L_i$ . Nun ist

$$R(K|L_{d-i+1}) \geq R((K|L_{d-i+1})|L_1) = r((K|L_i)|L_1; L_1) \geq r(K|L_i; L_i),$$

und es folgt i).

Sei nun  $K$  so translatiert, daß für eine geeignete  $i$ -dimensionale Ebene  $L_i \in \mathcal{L}_i^d$  gilt  $r_\sigma^i(K) = r(K \cap L_i; L_i)$  und  $0$  ein Inkugelmittelpunkt von  $K \cap L_i$  ist. Darüberhinaus seien  $L_{d-i+1} \in \mathcal{L}_{d-i+1}^d$ ,  $x \in L_{d-i+1}^\perp$  mit  $R_{d-i+1}^\sigma(K) = R(K \cap (x + L_{d-i+1}))$ , und  $L_1$  sei ein 1-dimensionaler linearer Teilraum von  $L_i \cap L_{d-i+1}$ . Da  $0$  ein Inkugelmittelpunkt von  $K \cap L_i$  folgt

$$R_{d-i+1}^\sigma(K) \geq R(K \cap L_{d-i+1}) \geq R(K \cap L_1) = r(K \cap L_1; L_1) \geq r(K \cap L_i; L_i)$$

und damit ii).

**q.e.d.**

Weitere Relationen zwischen den Radien ergeben sich durch Betrachtung der sogenannten polaren Menge  $K^*$  eines konvexen Körpers  $K$ . Dabei ist ([Le], S. 62)

$$K^* = \{y \in E^d \mid x^T y \leq 1 \text{ für alle } x \in K\}.$$

Sind  $K_1, K_2 \in \mathcal{K}^d$  mit  $K_1 \subset K_2$ , so ist  $K_2^* \subset K_1^*$ , und enthält ein konvexer Körper  $K \in \mathcal{K}^d$  den Nullpunkt im Inneren, dann gilt  $K^* \in \mathcal{K}^d$  und  $(K^*)^* = K$  ([Le], S. 65). Ist zudem  $0$  der Mittelpunkt der Umkugel eines  $d$ -dimensionalen konvexen Körpers  $K$ , so folgt aus den aufgezeigten Eigenschaften der polaren Menge, daß  $0$  ein Inkugelmittelpunkt von  $K^*$  ist, und es gilt  $r(K^*) = 1/R(K)$ . Allgemeiner gilt der folgende Zusammenhang.

**LEMMA 2.1.** *Für  $K \in \mathcal{K}^d$  mit  $0 \in \text{int}(K)$  gilt*

$$R(K)r(K^*) \geq 1,$$

und Gleichheit gilt nur dann, wenn  $0$  Umkugelmittelpunkt von  $K$  ist.

BEWEIS: Sei  $z \in E^d$  der Umkugelmittelpunkt von  $K$  und  $B(z, R(K))$  die Umkugel. Ist  $z=0$ , so gilt nach den vorangegangenen Betrachtungen Gleichheit, und daher sei im folgenden  $z \neq 0$ .

Nun ist  $z^T z - R(K)^2 < 0$ ,  $B(z, R(K))^* \subset K^*$ , und die polare Menge der Umkugel kann beschrieben werden durch

$$B(z, R(K))^* = \{x \in E^d \mid x = y/(z^T y + 1), \|y\| \leq 1/R(K)\}, \quad (2.3)$$

d.h.,  $B(z, R(K))^*$  ist das Bild der Kugel  $\{y \in E^d \mid \|y\| \leq 1/R(K)\}$  unter der projektiven Abbildung  $\Theta(y) = y/(z^T y + 1)$ .

Im weiteren wird nun gezeigt, daß die Kugel mit Mittelpunkt  $z^*=z/(z^T z - R(K)^2)$  und Radius  $1/R(K)$  in  $B(z, R(K))^*$  enthalten ist. Dazu sei  $x \in E^d$  mit  $\|x\| \leq 1/R(K)$  und  $z^*+x=\gamma z + \hat{x}$  mit  $\gamma=(z^T x/z^T z)+1/(z^T z - R(K)^2)$ ,  $z^T \hat{x}=0$ . Nun ist  $\gamma < 1/z^T z$ , und für  $y^x=(z^*+x)/(1-\gamma z^T z)$  folgt  $\Theta(y^x)=z^*+x$ . Nach (2.3) reicht es daher zu zeigen  $\|y^x\| < 1/R(K)$ .

$$\begin{aligned} \|y^x\| &= \frac{\sqrt{z^T z + 2z^T x(z^T z - R(K)^2) + x^T x(z^T z - R(K)^2)^2}}{R(K)^2 + z^T x(z^T z - R(K)^2)} \\ &\leq \frac{1}{R(K)} \frac{\sqrt{R(K)^2 z^T z + 2z^T x R(K)^2(z^T z - R(K)^2) + (z^T z - R(K)^2)^2}}{R(K)^2 + z^T x(z^T z - R(K)^2)} \\ &\leq \frac{1}{R(K)} \frac{\sqrt{(R(K)^2 + z^T x(z^T z - R(K)^2))^2 - (R(K)^2(z^T z) - (z^T z)^2)}}{R(K)^2 + z^T x(z^T z - R(K)^2)} \\ &< \frac{1}{R(K)}. \end{aligned}$$

q.e.d.

Mit Hilfe dieses Lemmas ergeben sich nun interessante Beziehungen zwischen den Umkugelradien eines konvexen Körpers und geeigneten Inkugelradien der zugehörigen polaren Menge, an denen insbesondere ein Zusammenhang zwischen den Radien aus Definition 2.1 und Definition 2.2 deutlich wird.

**SATZ 2.3.** Für  $K \in \mathcal{K}^d$  mit  $0 \in \text{int}(K)$  und  $1 \leq i \leq d-1$  gilt

$$\begin{aligned} i) \quad R_\pi^i(K) r_\sigma^i(K^*) &\geq 1 & ii) \quad R_\sigma^i(K) r_\pi^i(K^*) &\geq 1 \\ iii) \quad R_i^\pi(K) r_\sigma^i(K^*) &\geq 1 & iv) \quad R_i^\sigma(K) r_\pi^i(K^*) &\geq 1. \end{aligned}$$

BEWEIS: Sei  $L$  ein beliebiger  $i$ -dimensionaler linearer Teilraum des  $E^d$ . Bekannterweise gilt ([Mc, Sh], S. 70)

$$(K|L)^* \cap L = K^* \cap L \quad \text{bzw.} \quad (K \cap L)^* \cap L = (K^*|L). \quad (2.4)$$

Seien nun  $L_i \in \mathcal{L}_i^d$  und  $x \in L_i^\perp$  so gewählt, daß gilt  $r_\sigma^i(K^*) = r(K^* \cap (x + L_i); x + L_i)$ . Damit ist  $r_\sigma^i(K^*) \geq r(K^* \cap L_i; L_i)$  und Anwendung von Lemma 2.1. bzgl. des  $i$ -dimensionalen Raumes  $L_i$  liefert

$$r(K^* \cap L_i; L_i) \geq 1/R((K^* \cap L_i)^* \cap L_i).$$

Nach (2.4) ist  $(K^* \cap L_i)^* \cap L_i = K|L_i$  und daher gilt  $r(K^* \cap L_i; L_i) \geq 1/R_\pi^i(K)$ , woraus i) folgt. Die Beziehungen ii)-iv) ergeben sich analog. q.e.d.

Gleichheit gilt in Satz 2.3. z.B. für ein  $d$ -dimensionales Ellipsoid mit Mittelpunkt 0. Ist nämlich  $K$  ein solches Ellipsoid mit den Halbachsen  $0 < a_1 \leq \dots \leq a_d$ , so ist  $K^*$  ein Ellipsoid mit den Halbachsen  $1/a_d \leq \dots \leq 1/a_1$ .

Abschließend sei bemerkt, daß Untersuchungen zu Umkugelradius, Inkugelradius, Durchmesser und Dicke konvexer Körper eine lange Tradition im Gebiet der *Konvexgeometrie* haben. In diesem Zusammenhang sei auf die folgende Literatur verwiesen ([Bla], [Bn, Fe], [Dan, Grü, K], [Eg]).

## 2.2 Sukzessive-Minima-Typ Ungleichungen

*Minkowskis 1. Hauptsatz der Geometrie der Zahlen* (1.1) besagt, daß das Volumen eines zentralsymmetrischen konvexen Körpers  $K$  nicht größer ist als das Volumen eines Würfels mit der Kantenlänge  $2/\lambda_1(K, \mathbb{Z}^d)$ . Eine in einem gewissen Sinne entsprechende Beziehung existiert für das Volumen und den Durchmesser, denn für  $K \in \mathcal{K}^d$  gilt ([Bn, Fe], S. 76)

$$V(K) \leq \kappa_d (D(K)/2)^d, \quad (2.5)$$

was besagt, daß das Volumen eines konvexen Körpers nicht größer ist als das einer  $d$ -dimensionalen Kugel mit Radius  $D(K)/2$ .

Andererseits ist das Volumen von  $K \in \mathcal{K}^d$  offensichtlich durch  $\kappa_d (r(K))^d$  nach unten beschränkt, und dies steht in einer gewissen Analogie zu der folgenden Abschwächung von (1.3):  $V(K) \geq (2/\lambda_d(K, \mathbb{Z}^d))^d / d!$ ,  $K \in \mathcal{K}_0^d$ .

Nun ist  $D(K)/2$  im Sinne der Definitionen 2.1 und 2.2 ein 1-dimensionaler In- oder Umkugelradius,  $r(K)$  ein  $d$ -dimensionaler Inkugelradius, und im Hinblick auf *Minkowskis 2. Hauptsatz der Geometrie der Zahlen* (1.2) und der Beziehung (1.3) entsteht die Frage nach entsprechenden Abschätzungen des Volumens eines konvexen Körpers durch geeignete Produkte von In- oder Umkugelradien.

Im folgenden soll nun dieser Fragestellung nachgegangen werden. Dabei werden sich in einigen Fällen interessante Ähnlichkeiten zu den Aussagen (1.2) und (1.3) ergeben. Als erste einfache Konsequenz aus (2.5) folgt

**SATZ 2.4.** *Für  $K \in \mathcal{K}^d$  gilt*

$$\begin{aligned} i) \quad & V(K) \leq \kappa_d R_\sigma^1(K) \cdot \dots \cdot R_\sigma^d(K), \\ ii) \quad & V(K) \leq \kappa_d R_\pi^1(K) \cdot \dots \cdot R_\pi^d(K), \end{aligned}$$

*und keine der Schranken kann verbessert werden.*

BEWEIS: Nach Definition der Radien und Satz 2.1. ergeben sich für  $1 \leq i \leq d$  die Beziehungen  $R_\pi^i(K) \geq R_\sigma^i(K) \geq R_\sigma^1(K) = D(K)/2$ , so daß aus (2.5) die Ungleichungen folgen. Eine  $d$ -dimensionale Kugel zeigt, daß keine der Relationen i. a. verbessert werden kann.

**q.e.d.**

Für  $d \geq 2$  kann das Volumen eines konvexen Körpers im Verhältnis zum Durchmesser beliebig klein werden, und das bedeutet, daß außer 0 keine untere Schranke für die Quotienten  $V(K)/(R_\pi^1(K) \cdot \dots \cdot R_\pi^d(K))$  bzw.  $V(K)/(R_\sigma^1(K) \cdot \dots \cdot R_\sigma^d(K))$  existiert.

Mit Hilfe der Inkugelradien  $r_i^\pi(K)$  und  $r_i^\sigma(K)$  kann die triviale untere Schranke  $\kappa_d (r(K))^d$  für das Volumen folgendermaßen verschärft werden.

**SATZ 2.5.** *Für  $K \in \mathcal{K}^d$  gilt*

$$\begin{aligned} i) \quad & V(K) \geq \kappa_d r_1^\pi(K) \cdot \dots \cdot r_d^\pi(K), \\ ii) \quad & V(K) \geq \kappa_d r_1^\sigma(K) \cdot \dots \cdot r_d^\sigma(K), \end{aligned}$$

*und keine der Schranken kann verbessert werden.*

BEWEIS: Wegen  $r_i^\sigma(K) \leq r_i^\pi(K)$ ,  $1 \leq i \leq d$ , reicht es i) zu zeigen. Dies geschieht mittels Induktion über die Dimension  $d$ . Für  $d=1$  ist die Beziehung offensichtlich richtig, und daher sei im folgenden  $d \geq 2$ .

Aus der rekursiven Definition der *Minkowskischen* Quermaßintegrale (1.1 Einführung) ergibt sich als ein Spezialfall die sogenannte Oberflächenformel von *Cauchy* ([Bn, Fe], S. 48), die sich mit den in Abschnitt 1.1 eingeführten Bezeichnungen wie folgt darstellen läßt:

$$\kappa_{d-1}F(K) = \int_{S^{d-1}} V^{d-1}(K|H_u)du,$$

wobei  $V^{d-1}$  das  $(d-1)$ -dimensionale Volumen bezeichnet. Zusammen mit der Beziehung  $dV(K) \geq r(K)F(K)$  ([Bn, Fe], S. 38) ergibt sich daraus

$$d\kappa_{d-1}V(K) \geq r(K) \int_{S^{d-1}} V^{d-1}(K|H_u)du. \quad (2.6)$$

Bezeichnet  $r_i^\pi(K|H_u; H_u)$ ,  $1 \leq i \leq d-1$ , den in der Projektionsebene  $H_u$  gebildeten  $i$ -dimensionalen Inkugelradius, so gilt  $r_i^\pi(K|H_u; H_u) \geq r_i^\pi(K)$ . Mit Hilfe der Induktionsvoraussetzung (IV) und (2.6) folgt daraus

$$dV(K) \geq d\kappa_d r_1^\pi(K) \cdot \dots \cdot r_{d-1}^\pi(K) r(K)$$

und damit i). Daß keine der Relationen i. a. verbessert werden kann, zeigt eine  $d$ -dimensionale Kugel. q.e.d.

Eine obere Schranke für  $V(K)/(r_1^\pi(K) \cdot \dots \cdot r_d^\pi(K))$  bzw.  $V(K)/(r_1^\sigma(K) \cdot \dots \cdot r_d^\sigma(K))$ ,  $\dim(K)=d$ , gibt es im allgemeinen nicht, da das Volumen im Verhältnis zur Dicke beliebig groß werden kann.

Im Gegensatz zu den bisher behandelten vier Serien von In- und Umkugelradien sind bei den verbleibenden asymmetrischen Serien die entsprechenden Relationen sowohl nach unten als auch nach oben beschränkt. Speziell für zentralsymmetrische konvexe Körper wird sich eine Analogie zu den klassischen Ungleichungen (1.2) und (1.3) herausstellen, insbesondere sind dort geeignete achsenparallele Quader und Kreuzpolytope Extremalbeispiele.

**SATZ 2.6.** Für  $K \in \mathcal{K}^d$  gilt

- i)  $V(K) \leq 2^d R_1^\sigma(K) \cdot \dots \cdot R_d^\sigma(K)$ ,
- ii)  $V(K) \leq 2^d R_1^\pi(K) \cdot \dots \cdot R_d^\pi(K)$ ,

und keine der Schranken kann verbessert werden.

BEWEIS: Wegen  $R_i^\sigma(K) \leq R_i^\pi(K)$ ,  $1 \leq i \leq d$ , reicht es i) zu zeigen. Dies geschieht mittels Induktion über die Dimension  $d$ . Für  $d=1$  ist die Beziehung offensichtlich richtig, und daher sei im folgenden  $d \geq 2$ .

Nach Definition der Dicke eines konvexen Körpers existieren ein  $(d-1)$ -dimensionaler linearer Teilraum  $L_{d-1}$  des  $E^d$  und  $x \in L_{d-1}^\perp$ ,  $\mu_0 \in \mathbb{R}$ , so daß gilt

$$V(K) = \int_{-\Delta(K)/2}^{\Delta(K)/2} V^{d-1}(K \cap (tx + \mu_0 x + L_{d-1})) dt. \quad (2.7)$$

Ist nun  $K$  so translatiert, daß  $V^{d-1}(K \cap (tx + L_{d-1}))$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , maximal ist für  $t=0$ , so folgt

$$V(K) \leq \Delta(K) V^{d-1}(K \cap L_{d-1}). \quad (2.8)$$

Anwendung der IV auf  $K \cap L_{d-1}$  liefert unter Beachtung von  $\Delta(K) = 2R_1^\sigma(K)$  die Beziehung ■

$$V(K) \leq 2^d R_1^\sigma(K) R_1^\sigma(K \cap L_{d-1}; L_{d-1}) \cdot \dots \cdot R_{d-1}^\sigma(K \cap L_{d-1}; L_{d-1}),$$

wobei  $R_i^\sigma(K \cap L_{d-1}; L_{d-1})$  den bzgl.  $L_{d-1}$  gebildeten  $i$ -dimensionalen Umkugelradius bezeichnet.

Für  $1 \leq i \leq d-1$  genügt es daher zu zeigen  $R_i^\sigma(K \cap L_{d-1}; L_{d-1}) \leq R_{i+1}^\sigma(K)$ . Dazu sei  $L_{i+1} \in \mathcal{L}_{i+1}^d$ , und  $L_i$  sei ein  $i$ -dimensionaler linearer Teilraum von  $L_{i+1} \cap L_{d-1}$ . Zu jedem  $x \in L_i^\perp \cap L_{d-1}$  existiert ein  $z^x \in L_{i+1}^\perp$  mit  $(x + L_i) \subset (z^x + L_{i+1})$ , und daher gilt

$$\max_{x \in (L_i^\perp \cap L_{d-1})} R(K \cap (x + L_i)) \leq \max_{x \in L_{i+1}^\perp} R(K \cap (x + L_{i+1})),$$

woraus  $R_i^\sigma(K \cap L_{d-1}; L_{d-1}) \leq R_{i+1}^\sigma(K)$  folgt.

Es bleibt zu zeigen, daß i) und ii) nicht verbessert werden können. Hierzu genügt es, diese Eigenschaft für die Beziehung ii) nachzuweisen.

Für  $\mu > 0$  bezeichne  $Q(\mu)$  einen achsenparallelen Quader mit Mittelpunkt 0 und den Kantenlängen  $2\mu, 2\mu^2, \dots, 2\mu^d$ . Offensichtlich ist  $R_i^\pi(Q(\mu))$  nicht größer als der Umkugelradius eines achsenparallelen Quaders mit den Kantenlängen  $2\mu, 2\mu^2, \dots, 2\mu^i$ , so daß für  $1 \leq i \leq d$  gilt  $R_i^\pi(Q(\mu)) \leq (\sum_{j=1}^i \mu^{2j})^{1/2}$ , und daher ist

$$\frac{V(Q(\mu))}{R_1^\pi(Q(\mu)) \cdot \dots \cdot R_d^\pi(Q(\mu))} \geq 2^d \frac{\mu \mu^2 \cdot \dots \cdot \mu^d}{\mu (\sum_{j=1}^2 \mu^{2j})^{1/2} \cdot \dots \cdot (\sum_{j=1}^d \mu^{2j})^{1/2}}.$$

Es gilt  $\mu^k / (\sum_{j=1}^k \mu^{2j})^{1/2} \rightarrow 1$  für  $\mu \rightarrow \infty$ , und das bedeutet, daß die Schranken i. a. bestmöglich sind. q.e.d.

Eine gute untere Abschätzung für das Volumen eines beliebigen konvexen Körpers durch das Produkt der Radien  $R_i^\sigma(K)$  oder  $R_i^\pi(K)$  ist noch nicht bekannt. Die Existenz einer solchen Schranke zeigt der folgende Satz.

**SATZ 2.7.** Für  $K \in \mathcal{K}^d$  gilt

$$\begin{aligned} i) \quad V(K) &\geq \left( \sqrt{2^d(d+1)/d!} \right) R_1^\pi(K) \cdot \dots \cdot R_d^\pi(K), \\ ii) \quad V(K) &\geq \left( \sqrt{2^d(d+1)/d!} \right) R_1^\sigma(K) \cdot \dots \cdot R_d^\sigma(K). \end{aligned}$$

BEWEIS: Wegen  $R_i^\pi(K) \geq R_i^\sigma(K)$ ,  $1 \leq i \leq d$ , reicht es i) zu zeigen. Dies geschieht mittels Induktion über die Dimension  $d$ . Für  $d=1$  ist die Beziehung offensichtlich richtig, und daher sei im folgenden  $d \geq 2$ .

Seien  $x, y$  zwei Punkte aus  $K$  mit  $\|x - y\| = D(K)$ , und sei  $K$  so translatiert, daß  $y = -x$  gilt. Ist  $L_{d-1} \in \mathcal{L}_{d-1}^d$  die  $(d-1)$ -dimensionale Ebene mit Normalenvektor  $x$ , so liefert Steiner-Symmetrisierung ([Bn, Fe], S. 69) von  $K$  an der Ebene  $L_{d-1}$  einen konvexen Körper  $\bar{K}$  mit  $x, -x \in \bar{K}$  und

$$V(\bar{K}) \geq V(\text{conv}(\{\bar{K} \cap L_{d-1}, x, -x\})) = \frac{D(K)}{d} V^{d-1}(\bar{K} \cap L_{d-1}).$$

Nun bleibt das Volumen bei der Steiner-Symmetrisierung unverändert ([Bn, Fe], S. 70), und es ist  $\bar{K} \cap L_{d-1} = K|L_{d-1}$ . Damit gilt

$$V(K) \geq \frac{D(K)}{d} V^{d-1}(K|L_{d-1}). \quad (2.9)$$

Für eine Ebene  $L_i \in \mathcal{L}_i^d$ ,  $1 \leq i \leq d-1$ , mit  $L_i \subset L_{d-1}$  ist offensichtlich  $(K|L_{d-1})|L_i = K|L_i$ . Daher gilt für die in  $L_{d-1}$  gebildeten  $i$ -dimensionalen Umkugelradien  $R_i^\pi(K|L_{d-1}; L_{d-1})$  die Beziehung  $R_i^\pi(K|L_{d-1}; L_{d-1}) \geq R_i^\pi(K)$ ,  $1 \leq i \leq d-1$ . Zusammen mit der IV und (2.9) ergibt sich daraus

$$V(K) \geq \frac{D(K)}{d} \left( \sqrt{2^{d-1}d/(d-1)!} \right) R_1^\pi(K) \cdot \dots \cdot R_{d-1}^\pi(K).$$

Mit (2.1) kann nun der Durchmesser durch den Umkugelradius abgeschätzt werden und es folgt i). **q.e.d.**

Im Falle  $d=2$  sind die Abschätzungen aus Satz 2.7. nicht verbesserbar, was anhand eines regulären Dreiecks deutlich wird.

Der folgende Satz zeigt, daß sich im Gegensatz zu den obigen Umkugelradien eine scharfe untere Abschätzung für das Volumen durch das Produkt der Inkugelradien  $r_\pi^i(K), r_\sigma^i(K)$  angeben läßt.

**SATZ 2.8.** Für  $K \in \mathcal{K}^d$  gilt

$$\begin{aligned} i) \quad V(K) &\geq (2^d/d!) r_\pi^1(K) \cdot \dots \cdot r_\pi^d(K), \\ ii) \quad V(K) &\geq (2^d/d!) r_\sigma^1(K) \cdot \dots \cdot r_\sigma^d(K), \end{aligned}$$

und keine der Schranken kann verbessert werden.

BEWEIS: Wegen  $r_{\pi}^i(K) \geq r_{\sigma}^i(K)$ ,  $1 \leq i \leq d$ , reicht es i) zu zeigen. Dies geschieht mittels Induktion über die Dimension  $d$ . Für  $d=1$  ist die Beziehung offensichtlich richtig, und daher sei im folgenden  $d \geq 2$ .

Nach (2.9) existiert eine  $(d-1)$ -dimensionale Ebene  $L_{d-1} \in \mathcal{L}_{d-1}^d$  mit der Eigenschaft  $V(K) \geq (D(K)/d)V^{d-1}(K|L_{d-1})$ . Anwendung der IV auf  $K|L_{d-1}$  liefert unter Beachtung von  $D(K)/2 = r_{\pi}^1(K)$

$$V(K) \geq (2^d/d!)r_{\pi}^1(K)r_{\pi}^1(K|L_{d-1}; L_{d-1}) \cdots r_{\pi}^{d-1}(K|L_{d-1}; L_{d-1}), \quad (2.10)$$

wobei  $r_{\pi}^i(K|L_{d-1}; L_{d-1})$  den bzgl.  $L_{d-1}$  gebildeten  $i$ -dimensionalen Inkugelradius bezeichnet.

Sei nun  $1 \leq i \leq d-1$ ,  $L_{i+1} \in \mathcal{L}_{i+1}^d$  und  $L_i$  ein  $i$ -dimensionaler linearer Teilraum, der in  $L_{i+1} \cap L_{d-1}$  enthalten ist. Wegen  $K|L_i = (K|L_{i+1})|L_i$  ist  $r(K|L_i; L_i) \geq r(K|L_{i+1}; L_{i+1})$ , und daher gilt  $r_{\pi}^i(K|L_{d-1}; L_{d-1}) \geq r_{\pi}^{i+1}(K)$ . Zusammen mit (2.10) folgt daraus i).

Um zu zeigen, daß i) und ii) nicht verbessert werden können, genügt es, diese Eigenschaft für die Beziehung ii) nachzuweisen.

Dazu sei mit  $e^j$ ,  $1 \leq j \leq d$ , der  $j$ -te kanonische Einheitsvektor bezeichnet, und für  $\mu > 0$  sei  $C(\mu)$  das Kreuzpolytop mit den Ecken  $\pm \mu^j e^j$ ,  $1 \leq j \leq d$ . Offensichtlich ist  $r_{\sigma}^{d-i+1}(C(\mu))$  nicht kleiner als der  $(d-i+1)$ -dimensionale Inkugelradius des Kreuzpolytops mit den Ecken  $\pm \mu^j e^j$ ,  $i \leq j \leq d$ , und daher ist  $r_{\sigma}^{d-i+1}(C(\mu)) \geq (\sum_{j=i}^d \mu^{-2j})^{-1/2}$ . Es folgt

$$\frac{V(C(\mu))}{r_{\sigma}^1(C(\mu)) \cdots r_{\sigma}^d(C(\mu))} \leq \frac{2^d}{d!} \mu \mu^2 \cdots \mu^d \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^d \mu^{-2j}} \sqrt{\sum_{j=2}^d \mu^{-2j} \cdots \mu^{-d}},$$

und da  $\mu^k (\sum_{j=k}^d \mu^{-2j})^{1/2} \rightarrow 1$  für  $\mu \rightarrow \infty$ , sind die Schranken i. a. nicht verbesserbar. **q.e.d.**

Analog zu Satz 2.7. kann für die Inkugelradien  $r_{\pi}^i(K)$ ,  $r_{\sigma}^i(K)$  lediglich gezeigt werden, daß das Volumen eines beliebigen konvexen Körpers durch das Produkt dieser Radien nach oben beschränkt ist. Es gilt der folgende Satz.

**SATZ 2.9.** Für  $K \in \mathcal{K}^d$  gilt

- i)  $V(K) \leq \gamma(d)r_{\sigma}^1(K) \cdots r_{\sigma}^d(K)$ ,
- ii)  $V(K) \leq \gamma(d)r_{\pi}^1(K) \cdots r_{\pi}^d(K)$ , mit

$$\gamma(d) = \binom{d}{d/2} \sqrt{2} \sqrt{\frac{d+1}{d+2}} \sqrt{(d+1)!}, \quad d \text{ gerade, sonst } \gamma(d) = \binom{d+1}{(d+1)/2} \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(d+1)!}.$$

BEWEIS: Wegen  $r_{\sigma}^i(K) \leq r_{\pi}^i(K)$ ,  $1 \leq i \leq d$ , reicht es i) zu zeigen. Dies geschieht mittels Induktion über die Dimension  $d$ . Für  $d=1$  ist die Beziehung offensichtlich richtig, und daher sei im folgenden  $d \geq 2$ .

Nach (2.8) existiert eine  $(d-1)$ -dimensionale Ebene  $L_{d-1} \in \mathcal{L}_{d-1}^d$  mit

$$V(K) \leq \Delta(K)V^{d-1}(K \cap L_{d-1}). \quad (2.11)$$

Bezeichnet  $r_\sigma^i(K \cap L_{d-1}; L_{d-1})$  für  $1 \leq i \leq d-1$  den in der Schnittebene  $L_{d-1}$  bestimmten  $i$ -dimensionalen Inkugelradius, so gilt  $r_\sigma^i(K \cap L_{d-1}; L_{d-1}) \leq r_\sigma^i(K)$ , und zusammen mit der IV folgt aus (2.11)

$$V(K) \leq \gamma(d-1)r_\sigma^1(K) \cdot \dots \cdot r_\sigma^{d-1}(K)\Delta(K).$$

Mit Hilfe von (2.2) läßt sich die Dicke eines konvexen Körpers durch den Inkugelradius abschätzen, und es folgt i). **q.e.d.**

Für die Klasse der zentralsymmetrischen konvexen Körper existieren bessere und scharfe Schranken der entsprechenden Ausdrücke aus Satz 2.7. und Satz 2.9. Unter Berücksichtigung von Satz 2.6. und Satz 2.8. können diese Ergebnisse folgendermaßen dargestellt werden

**SATZ 2.10.** Für  $K \in \mathcal{K}_0^d$  gilt

- i)  $R_1^\pi(K) \cdot \dots \cdot R_d^\pi(K)(2^d/d!) \leq V(K) \leq 2^d R_1^\pi(K) \cdot \dots \cdot R_d^\pi(K),$
- ii)  $R_1^\sigma(K) \cdot \dots \cdot R_d^\sigma(K)(2^d/d!) \leq V(K) \leq 2^d R_1^\sigma(K) \cdot \dots \cdot R_d^\sigma(K),$
- iii)  $r_\pi^1(K) \cdot \dots \cdot r_\pi^d(K)(2^d/d!) \leq V(K) \leq 2^d r_\pi^1(K) \cdot \dots \cdot r_\pi^d(K),$
- iv)  $r_\sigma^1(K) \cdot \dots \cdot r_\sigma^d(K)(2^d/d!) \leq V(K) \leq 2^d r_\sigma^1(K) \cdot \dots \cdot r_\sigma^d(K),$

und keine der Schranken kann verbessert werden.

BEWEIS: Die oberen Schranken in i) und ii) bzw. die unteren Schranken in iii) und iv) ergeben sich aus Satz 2.6. bzw. Satz 2.8. Da die dort angegebenen Extremalbeispiele zentralsymmetrisch sind, sind diese Schranken bestmöglich.

Der Beweis der unteren Schranken in i) und ii) bzw. der oberen Schranken in iii) und iv) kann vollkommen analog zu dem Beweis von Satz 2.7. bzw. 2.9. durchgeführt werden. Hierbei ist lediglich zu beachten, daß für  $K \in \mathcal{K}_0^d$  gilt  $R(K) = D(K)/2$  bzw.  $r(K) = \Delta(K)/2$ .

Wegen Satz 2.2. folgen die nicht zu verbessernden oberen Schranken in i), ii) bzw. die unteren Schranken in iii), iv) aus den entsprechenden Abschätzungen in iii), iv) bzw. i), ii). Das bedeutet, daß alle Schranken i. a. bestmöglich sind. **q.e.d.**

Für  $K \in \mathcal{K}^2$  mit  $\dim(K) = 2$  folgt aus (2.7), daß  $V(K)$  gleich dem Integral der Längen aller 1-dimensionalen Schnitte in Richtung  $x$  ist. Die Länge eines solchen Schnittes ist bis auf höchstens eine Ausnahme stets kleiner als  $2R(K)$ , und daher gilt

$$V(K) < \Delta(K)2R(K).$$

Sind andererseits  $x, y, v, w \in K$  mit  $\|x-y\|=D(K)$ ,  $\|v-w\|=2r(K)$  und  $(v-w)^T(x-y)=0$ , so ist das Volumen der konvexen Hülle der Punkte  $x, y, v, w$  nicht kleiner als  $D(K)r(K)$ . Da aber  $\text{conv}(\{x, y, v, w\}) \neq K$ , folgt

$$V(K) > D(K)r(K).$$

Auf Grund der induktiven Beweisführung kann daher für  $K \in \mathcal{K}^d$ ,  $\dim(K)=d \geq 2$ , in Satz 2.6. ' $\leq$ ' durch '<', in Satz 2.8. ' $\geq$ ' durch '>', und für  $K \in \mathcal{K}_0^d$ ,  $\dim(K)=d \geq 2$ , kann in Satz 2.10. ' $\leq$ ' durch '<' ersetzt werden.

### 2.3 Eine Verallgemeinerung des Satzes von Jung

Wegen  $R_\sigma^1(K) = D(K)/2$  und  $R_\sigma^d(K) = R(K)$  kann der Satz von Jung (2.1) für  $K \in \mathcal{K}^d$  auch folgendermaßen formuliert werden:

$$R_\sigma^d(K) \leq \sqrt{\frac{2d}{d+1}} R_\sigma^1(K).$$

Insofern beschreibt er für diese Umkugelradien wie auch für die Serie  $R_\pi^i(K)$  einen Zusammenhang zwischen dem  $d$ -dimensionalen Umkugelradius und dem 1-dimensionalen Umkugelradius. ■

In diesem Abschnitt werden nun generell die Beziehungen zwischen dem  $i$ -dimensionalen und dem  $j$ -dimensionalen Umkugelradius der beiden Serien  $R_\sigma^i(K), R_\pi^i(K)$  untersucht, und dabei werden sich die beiden folgenden Sätze ergeben.

**SATZ 2.11.** Sei  $K \in \mathcal{K}^d$ . Dann gilt für  $1 \leq j \leq i \leq d$ ,

$$R_\sigma^i(K) \leq \sqrt{\frac{i(j+1)}{j(i+1)}} R_\sigma^j(K),$$

und für  $i > j$  gilt nur dann Gleichheit, falls  $K$  ein reguläres  $i$ -dimensionales Simplex mit der Kantenlänge  $R_\sigma^j(K)((2j+2)/j)^{1/2}$  enthält.

**SATZ 2.12.** Sei  $K \in \mathcal{K}^d$ . Dann gilt für  $1 \leq j \leq i \leq d$ ,

$$R_\pi^i(K) \leq \sqrt{\frac{i(j+1)}{j(i+1)}} R_\pi^j(K),$$

und für  $i > j$  gilt nur dann Gleichheit, wenn eine orthogonale Projektion von  $K$  auf eine  $i$ -dimensionale Ebene ein reguläres  $i$ -dimensionales Simplex mit der Kantenlänge  $R_\pi^j(K)((2j+2)/j)^{1/2}$  enthält.

Jeder dieser beiden Sätze stellt eine Verallgemeinerung des klassischen Satzes von Jung dar, denn speziell für  $i=d, j=1$  stimmen die Aussagen in Satz 2.11. und Satz 2.12. mit (2.1) überein.

Zum Beweis dieser Relationen sind einige Hilfsbetrachtungen über Umkugelradien von Simplexen notwendig. Wie das folgende (bekannte) Lemma zeigt, ist nämlich der Umkugelradius eines konvexen Körpers  $K$  durch den Umkugelradius eines geeigneten, in  $K$  enthaltenen Simplex bestimmt.

**LEMMA 2.2.** Sei  $K \in \mathcal{K}^d$ , und  $0$  sei der Umkugelmittelpunkt von  $K$ . Dann gibt es ein  $k$ -dimensionales Simplex  $\bar{T} \subset K$ ,  $\bar{T} = \text{conv}(\{x^0, \dots, x^k\})$  mit den Eigenschaften

$$0 \in \text{relint}(\bar{T}), \|x^i\| = R(K), 0 \leq i \leq k \text{ und } R(\bar{T}) = R(K).$$

BEWEIS: Nach ([Bn, Fe], S. 9, S. 54) existieren Punkte  $x^0, \dots, x^l$ ,  $1 \leq l \leq d$ , aus  $K$  mit  $0 \in \text{conv}(\{x^0, \dots, x^l\})$ ,  $\|x^i\| = R(K)$  und  $R(\text{conv}(\{x^0, \dots, x^l\})) = R(K)$ . Durch Auswahl einer bzgl. der Anzahl minimalen Punktmenge mit diesen Eigenschaften folgt die Behauptung. **q.e.d.**

Mit Hilfe dieses Lemmas lassen sich nun für ein Simplex die Ebenen, die den maximalen  $(d-1)$ -dimensionalen Umkugelradius bzgl. Projektionen oder Schnitte liefern, leicht bestimmen. Es gilt die folgende Aussage.

**LEMMA 2.3.** *Sei  $T \in \mathcal{K}^d$  ein  $d$ -dimensionales Simplex, und  $\hat{F}$  sei eine Facette von  $T$  mit maximalem Umkugelradius. Dann gilt*

$$\begin{aligned} R_\sigma^{d-1}(T) &= R(T \cap (\hat{x} + \hat{L})) = R(\hat{F}), \\ R_\pi^{d-1}(T) &= R(T|_{\hat{L}}) = R(\hat{F}), \end{aligned}$$

wobei  $\hat{L} \in \mathcal{L}_{d-1}^d$ ,  $\hat{x} \in \hat{L}^\perp$  so gewählt sind, daß  $\hat{x} + \hat{L}$  Stützhyperebene von  $\hat{F}$  ist.

BEWEIS: Sei  $L_{d-1} \in \mathcal{L}_{d-1}^d$  mit  $R_\pi^{d-1}(T) = R(T|_{L_{d-1}})$ , und sei  $T|_{L_{d-1}}$  die konvexe Hülle der Punkte  $x^0, \dots, x^d$ , wobei  $x^0, \dots, x^d$  die Bilder der Ecken von  $T$  unter der Projektion auf  $L_{d-1}$  sind. Weiter sei  $T$  so translatiert, daß 0 der Umkugelmittelpunkt von  $T|_{L_{d-1}}$  ist, und  $\bar{T} \subset T|_{L_{d-1}}$  mit  $\bar{T} = \text{conv}(\{x^0, \dots, x^k\})$ ,  $1 \leq k \leq d-1$ , sei ein Simplex mit den Eigenschaften aus Lemma 2.2.

Sämtliche Ecken von  $T$ , die unter der Projektion auf  $x^0, \dots, x^k$  abgebildet werden, gehören einer geeigneten Facette  $F$  von  $T$  an, und es folgt

$$R(\hat{F}) \geq R(F) \geq R(F|_{L_{d-1}}) \geq R(\bar{T}) = R_\pi^{d-1}(T).$$

Andererseits gilt  $R(\hat{F}) \leq R_\sigma^{d-1}(T) \leq R_\pi^{d-1}(T)$  und damit die Behauptung. **q.e.d.**

Ist  $S$  ein reguläres  $d$ -dimensionales Simplex, so folgen aus Lemma 2.3. die Beziehungen  $R(S)/R_\pi^{d-1}(S) = R(S)/R_\sigma^{d-1}(S) = d/(d^2-1)^{1/2}$ . Wie das folgende Lemma zeigt, sind dies sogar für beliebige Simplizes obere Schranken.

**LEMMA 2.4.** *Sei  $T \in \mathcal{K}^d$  ein Simplex. Dann gilt*

$$\begin{aligned} i) \quad R(T) &\leq \frac{d}{\sqrt{d^2-1}} R_\sigma^{d-1}(T), \\ ii) \quad R(T) &\leq \frac{d}{\sqrt{d^2-1}} R_\pi^{d-1}(T), \end{aligned}$$

und Gleichheit gilt nur dann, wenn  $T$  ein reguläres  $d$ -dimensionales Simplex ist.

BEWEIS: Nach Lemma 2.3. gilt für ein reguläres Simplex in i) und ii) Gleichheit. Unter Beachtung der Beziehung  $R_\sigma^{d-1}(T) \leq R_\pi^{d-1}(T)$  reicht es daher, das Lemma für den Fall  $R_\sigma^{d-1}(T)$  zu beweisen.

Dazu sei  $0$  der Umkugelmittelpunkt von  $T$ , und  $\{x^0, \dots, x^k\}$  sei eine Teilmenge der Ecken von  $T$ , so daß das Simplex  $\bar{T} = \text{conv}(\{x^0, \dots, x^k\})$  die Eigenschaften aus Lemma 2.2. besitzt. Für  $k < d$  folgt

$$R(T) = R(\bar{T}) = R_\sigma^{d-1}(T) < \frac{d}{\sqrt{d^2 - 1}} R_\sigma^{d-1}(T).$$

Im folgenden kann daher angenommen werden, daß  $T = \text{conv}(\{x^0, \dots, x^d\})$  ein  $d$ -dimensionales Simplex ist mit  $0 \in \text{int}(T)$  und  $\|x^i\| = R(T)$ ,  $0 \leq i \leq d$ .

Bezeichnet  $\lambda$  den maximalen Radius einer  $d$ -dimensionalen Kugel um  $0$ , die in  $T$  enthalten ist, so berührt diese Kugel in einem Punkt  $\lambda a$ ,  $\|a\| = 1$ , eine Facette  $F$  von  $T$ , die gegeben sei durch  $F = \text{conv}(\{x^1, \dots, x^d\})$ . Offensichtlich ist  $a$  Normalenvektor der Stützhyperebene von  $F$ , und es folgt

$$\|x^i - \lambda a\|^2 = R(T)^2 - \lambda^2, \quad 1 \leq i \leq d.$$

Daher ist  $\lambda a$  der Umkugelmittelpunkt der Facette  $F$  ([Bn, Fe], S. 54) und somit

$$R(T)^2 - R_\sigma^{d-1}(T)^2 \leq \lambda^2. \quad (2.12)$$

Nach Wahl von  $\lambda$  ist  $\lambda \leq r(T)$ , und da nach *L. Fejes Tóth* [F] der Inkugelradius von Simplex  $T$  der Beziehung  $r(T) \leq R(T)/d$  genügt, ergibt sich

$$\lambda^2 \leq \frac{R(T)^2}{d^2}.$$

Zusammen mit (2.12) folgt daraus die Ungleichung i).

Gilt in i) Gleichheit, so muß dem Beweise zufolge  $T$  ein  $d$ -dimensionales Simplex sein, für das  $r(T) = R(T)/d$  gilt. Dies ist aber nur dann der Fall, wenn  $T$  ein reguläres Simplex ist [F]. q.e.d.

Mit Hilfe der beiden vorangegangenen Lemmata lassen sich nun die beiden anfangs aufgeführten Sätze 2.11. und 2.12. beweisen.

BEWEIS von **SATZ 2.11.**: Zur Verifikation der Ungleichungen reicht es für  $1 < i \leq d$  zu zeigen

$$R_\sigma^i(K) \leq \frac{i}{\sqrt{i^2 - 1}} R_\sigma^{i-1}(K). \quad (2.13)$$

Dazu sei  $K$  so translatiert, daß für eine geeignete  $i$ -dimensionale Ebene  $L_i \in \mathcal{L}_i^d$  gilt  $R_\sigma^i(K) = R(K \cap L_i)$ , und  $0$  ist der Umkugelmittelpunkt von  $K \cap L_i$ . Darüberhinaus sei  $T \subset (K \cap L_i)$  mit  $T = \text{conv}(\{x^0, \dots, x^k\})$ ,  $1 \leq k \leq i$ , ein höchstens  $i$ -dimensionales Simplex gemäß Lemma 2.2. Bezeichnet  $R_\sigma^{i-1}(T; L_i)$  den  $(i-1)$ -dimensionalen Umkugelradius von  $T$  bzgl. des durch die Schnittebene  $L_i$  induzierten Raumes, so gilt mit Lemma 2.4.

$$R(T) \leq \frac{i}{\sqrt{i^2 - 1}} R_\sigma^{i-1}(T; L_i). \quad (2.14)$$

Nach Wahl von  $T$  ist  $R(T)=R_\sigma^i(K)$ , und da offensichtlich  $R_\sigma^{i-1}(K)\geq R_\sigma^{i-1}(T;L_i)$  gilt, folgt (2.13).

Gilt nun für  $i>j$  in einer Ungleichung aus Satz 2.11. Gleichheit, so muß insbesondere in (2.13) und daher auch in (2.14) Gleichheit gelten. Nach Lemma 2.4. ist daher  $T$  ein reguläres  $i$ -dimensionales Simplex, das nun der Beziehung genügt

$$R(T) = R_\sigma^i(K) = \sqrt{\frac{i(j+1)}{j(i+1)}} R_\sigma^j(K). \quad (2.15)$$

Für das  $i$ -dimensionale reguläre Simplex  $T$  gilt  $R(T)=(i/(2i+2))^{1/2}D(T)$ , so daß mit (2.15) folgt, daß  $T$  den Durchmesser (die Kantenlänge)  $R_\sigma^j(K)((2j+2)/j)^{1/2}$  besitzt.

Enthält andererseits  $K$  ein  $i$ -dimensionales reguläres Simplex  $T$  mit der angegebenen Kantenlänge, so folgt aus den bisher gezeigten Beziehungen

$$R(T) = \sqrt{\frac{i}{2i+2}} D(T) = \sqrt{\frac{i(j+1)}{j(i+1)}} R_\sigma^j(K) \geq R_\sigma^i(K). \quad (2.16)$$

Offensichtlich ist  $R(T)\leq R_\sigma^i(K)$ , und daher kann in (2.16) '≥' durch '=' ersetzt werden. **q.e.d.**

BEWEIS von **SATZ 2.12.**: Mit Hilfe von Lemma 2.4. kann der Beweis analog zu dem Beweis von Satz 2.11. geführt werden. **q.e.d.**

Zusammen mit den Ungleichungen i) und v) aus Satz 2.1. bilden die Ungleichungen aus Satz 2.11. und Satz 2.12. eine vollständige und bestmögliche Charakterisierung der Quotienten  $R_\sigma^i(K)/R_\sigma^j(K)$ ,  $R_\pi^i(K)/R_\pi^j(K)$ ,  $1\leq i, j\leq d$ .

## 2.4 Anmerkungen zu dem Satz von Steinhagen

Mit Hilfe der Inkugelradien  $r_i^\pi(K)$  kann für  $K \in \mathcal{K}^d$  der Satz von *Steinhagen* (2.2) folgendermaßen dargestellt werden

$$r_d^\pi(K) \geq \begin{cases} r_1^\pi(K) \frac{\sqrt{d+2}}{d+1} & \text{falls } d \text{ gerade,} \\ r_1^\pi(K) \frac{1}{\sqrt{d}} & \text{falls } d \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Ebenso kann (2.2) mit den Inkugelradien  $r_i^\sigma(K)$  formuliert werden, und im Hinblick auf die Verallgemeinerung des Satzes von *Jung* (Abschnitt 2.3) entsteht die Frage, inwieweit der Satz von *Steinhagen* als Spezialfall allgemeinerer Beziehungen zwischen dem  $i$ -dimensionalen und  $j$ -dimensionalen Inkugelradius der beiden Serien  $r_i^\pi(K)$ ,  $r_i^\sigma(K)$  aufgefaßt werden kann.

Obwohl die hier betrachteten Serien von Inkugelradien in einem gewissen Sinne den in Abschnitt 2.3 untersuchten Umkugelradien polar gegenüberstehen (s. Satz 2.3.), scheint das Problem  $r_i^\pi(K)$  bzw.  $r_i^\sigma(K)$  bestmöglich durch  $r_j^\pi(K)$  bzw.  $r_j^\sigma(K)$ ,  $i > j$ , nach unten abzuschätzen schwieriger zu sein, als die entsprechenden oberen Abschätzungen für die Umkugelradien (s. Satz 2.11., Satz 2.12.). Diese Diskrepanz kommt auch schon in zahlreichen Beweisen von (2.1) und (2.2) zum Ausdruck, s. z.B. ([Eg], S. 111; [Ge]; [Juh]; [Le], S.78).

Die Grundlage für die Beweise von Satz 2.11. und Satz 2.12. bildet Lemma 2.3., das speziell für ein reguläres  $d$ -dimensionales Simplex  $S$  aussagt, daß der  $(d-1)$ -dimensionale Umkugelradius  $R_\pi^{d-1}(K)$  oder  $R_\sigma^{d-1}(K)$  gleich dem Umkugelradius eines durch eine Facette von  $S$  induzierten regulären  $(d-1)$ -dimensionalen Simplex ist. Dies gewährleistet zusammen mit den Lemmata 2.2. und 2.4., daß eine bestmögliche obere Schranke von  $R(K)/R_\pi^{d-1}(K)$  bzw.  $R(K)/R_\sigma^{d-1}(K)$  durch iterative Anwendung bestmögliche Abschätzungen der Quotienten  $R_\sigma^i(K)/R_\sigma^j(K)$  bzw.  $R_\pi^i(K)/R_\pi^j(K)$ ,  $i > j$ , liefert.

Bei den Inkugelradien  $r_i^\pi(K)$ ,  $r_i^\sigma(K)$  verhält es sich anders. Dort ist insbesondere, wie das folgende Lemma zeigt, der 2-dimensionale Inkugelradius  $r_2^\pi(S)$  eines regulären 3-dimensionalen Simplex  $S$  nicht durch ein reguläres Simplex bestimmt.

**LEMMA 2.5.** *Sei  $T \subset E^3$  ein 3-dimensionales Simplex mit den Ecken  $x^0, \dots, x^3$  und für  $1 \leq i < j \leq 3$  sei  $L_{i,j} \in \mathcal{L}_2^3$  die Ebene mit Normalenvektor  $x^i - x^j$ . Dann gilt für  $L \in \mathcal{L}_2^3$  mit  $L \neq L_{i,j}$ ,  $1 \leq i < j \leq 3$ ,*

$$r(T|L; L) > r_2^\pi(T).$$

*Insbesondere gilt also  $r_2^\pi(T) = \min_{1 \leq i < j \leq 3} r(T|L_{i,j}; L_{i,j})$ .*

**BEWEIS:** Bei der orthogonalen Projektion von  $T$  auf eine Ebene  $L$  entsteht entweder ein Dreieck oder ein Viereck. Ist  $T|L$  ein Dreieck, so berührt der Inkreis alle drei Kanten des Dreiecks, und es können die beiden Fälle unterschieden werden, daß die Ecken von  $T$  unter der Projektion im relativen Rand des Dreiecks liegen oder daß eine Ecke von  $T$  im relativen Inneren von  $T|L$  enthalten ist.

Ist andererseits  $T|L$  ein Viereck, so gibt es stets einen Inkreis, der drei Kanten berührt. In diesem Fall ist zu unterscheiden, ob zwei dieser Kanten parallel sind oder nicht. Alle diese möglichen vier Fälle werden nun im einzelnen behandelt.

Dazu sei  $S^2$  der Rand der Einheitskugel im  $E^3$ , und für  $u \in S^2$  sei  $L(u) \in \mathcal{L}_2^3$  die Ebene mit Normalenvektor  $u$ ,  $x(u)$  sei für  $x \in E^3$  das Bild von  $x$  unter der Projektion auf  $L(u)$ , und  $r(u)$  sei der Inkreisradius von  $T|L(u)$ . Desweiteren sei nun angenommen, daß ein  $\bar{u} \in S^2$  existiere mit

$$L(\bar{u}) \neq L_{i,j}, 1 \leq i < j \leq 3, \text{ und } r_2^\pi(T) = r(T|L(\bar{u}); L(\bar{u})). \quad (2.17)$$

i)  $T|L(\bar{u}) = \text{conv}(\{x^0(\bar{u}), x^1(\bar{u}), x^3(\bar{u})\})$  und  $x^2(\bar{u}) \in \text{relbd}(T|L(\bar{u}))$ .

Unter der getroffenen Annahme (2.17) ist  $x^2(\bar{u})$  im relativen Inneren einer Kante des Dreiecks  $T|L(\bar{u})$  enthalten. Sei dies die Kante  $\text{conv}(\{x^0(\bar{u}), x^1(\bar{u})\})$ . Somit ist  $\bar{u}$  orthogonal zu einem Normalenvektor der Stützebene der Facette  $\text{conv}(\{x^0, x^1, x^2\})$ , und ist  $T$  gegeben durch  $x^0 = (0, 0, 0)^T$ ,  $x^1 = (1, 0, 0)^T$ ,  $x^2 = (x_1^2, x_2^2, 0)^T$ ,  $x^3 = (x_1^3, x_2^3, x_3^3)^T$ ,  $x_3^3 > 0$ , so kann  $\bar{u}$  dargestellt werden als  $\bar{u} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, 0)^T$  mit  $\bar{u}_2 > 0$ . (Eine solche Darstellung von  $T$  kann stets durch geeignete Drehung, Translation und Skalierung erreicht werden.)

Für ein beliebiges  $u = (u_1, u_2, 0)^T \in S^2$  ergeben sich nach geeigneter Drehung von  $T|L(u)$  in den  $E^2$  die Koordinaten

$$\begin{aligned} x^0(u) &= (0, 0, 0)^T \\ x^1(u) &= (0, -u_2, 0)^T \\ x^2(u) &= (0, -u_2 x_1^2 + u_1 x_2^2, 0)^T \\ x^3(u) &= (x_3^3, -u_2 x_1^3 + u_1 x_2^3, 0)^T. \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist  $0 > -\bar{u}_2 x_1^2 + \bar{u}_1 x_2^2 > -\bar{u}_2$ , und daher existiert eine Umgebung  $V$  um  $\bar{u}$  in  $S^2$ , so daß für alle  $u = (u_1, u_2, 0)^T$  aus  $V$  die Projektion  $T|L(u)$  ein Dreieck ist mit  $x^2(u) \in \text{relint}(\text{conv}(\{x^0(u), x^1(u)\}))$ . Sei nun  $\bar{V} = \{u \in V \mid u = (u_1, u_2, 0)^T, u_2 > 0\}$ .

Der Inkreisradius eines Dreiecks ist gleich dem 2-fachen Quotienten aus Flächeninhalt und Umfang, und daher folgt für alle  $u \in \bar{V}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r(u)} &= \frac{\|x^1(u)\| + \|x^3(u)\| + \|x^1(u) - x^3(u)\|}{x_3^3 u_2} \\ &= \frac{1}{x_3^3} \left( 1 + \sqrt{\left(\frac{x_3^3}{u_2}\right)^2 + (x_1^3)^2 + \left(\frac{u_1}{u_2}\right)^2 (x_2^3)^2 - 2\frac{u_1}{u_2} x_1^3 x_2^3} \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\left(\frac{x_3^3}{u_2}\right)^2 + (x_1^3 - 1)^2 + \left(\frac{u_1}{u_2}\right)^2 (x_2^3)^2 - 2\frac{u_1}{u_2} (x_1^3 - 1)x_2^3} \right). \end{aligned}$$

Mit der Parametertransformation  $u_1 = t/(t^2+1)^{1/2}$ ,  $u_2 = (1/(t^2+1))^{1/2}$  wird ein geeignetes ■

offenes Intervall  $I$  stetig und bijektiv auf  $\bar{V}$  abgebildet. Somit ist für  $t \in I$

$$\frac{1}{r(t)} = \frac{1}{x_3^3} \left( 1 + \sqrt{f(t)} + \sqrt{g(t)} \right) \text{ mit}$$

$$\begin{aligned} f(t) &= t^2((x_3^3)^2 + (x_2^3)^2) - 2tx_1^3x_2^3 + (x_3^3)^2 + (x_1^3)^2, \\ g(t) &= t^2((x_3^3)^2 + (x_2^3)^2) - 2t(x_1^3 - 1)x_2^3 + (x_3^3)^2 + (x_1^3 - 1)^2. \end{aligned}$$

Nun sind  $f(t)$ ,  $g(t)$  Polynome zweiten Grades mit  $f(t), g(t) > 0$ , und daher sind die Funktionen  $f(t)^{1/2}, g(t)^{1/2}$  streng konvex. Dies bedeutet aber, daß  $1/r(u)$  für  $u \in \bar{V}$  streng konvex ist, und d.h., es gibt ein  $\tilde{u} \in \bar{V}$  mit  $r(T|L(\tilde{u}); L(\tilde{u})) < r(T|L(\bar{u}); L(\bar{u}))$ , was im Widerspruch zu (2.17) steht.

**ii)**  $T|L(\bar{u}) = \text{conv}(\{x^0(\bar{u}), x^1(\bar{u}), x^3(\bar{u})\})$  und  $x^2(\bar{u}) \in \text{relint}(T|L(\bar{u}))$ .

Sei  $H_{0,1} = \text{aff}(\{x^0(\bar{u}), x^1(\bar{u}), x^0(\bar{u}) + \bar{u}\})$ .  $H_{0,1}$  ist Stützebene der Kante  $\text{conv}(\{x^0, x^1\})$ , und bezeichnet  $H_3$  die affine Ebene, die durch Parallelverschiebung von  $H_{0,1}$  in den Punkt  $x^3$  entsteht, so liegt nach Voraussetzung  $x^2$  im Inneren des durch die Ebenen  $H_{0,1}$  und  $H_3$  begrenzten Bereichs. Somit schneidet der Strahl von  $x^3$  ausgehend mit Richtung  $x^2 - x^3$  die Ebene  $H_{0,1}$  in einem Punkt  $\tilde{x}^2$ .

Ist nun  $\tilde{T}$  das Simplex mit den Ecken  $x^0, x^1, \tilde{x}^2, x^3$ , so gilt nach Konstruktion  $\tilde{T}|L(\bar{u}) = T|L(\bar{u})$ , und  $\tilde{x}^2(\bar{u})$  liegt im relativen Inneren der Kante  $\text{conv}(\{x^0(\bar{u}), x^1(\bar{u})\})$ . Weiterhin ist  $T \subset \tilde{T}$ , und daher ist  $r_{\tilde{T}}^2(\tilde{T}) = r(\tilde{T}|L(\bar{u}); L(\bar{u}))$ . Somit genügt  $\tilde{T}$  der Annahme (2.17) und den Bedingungen aus Fall i), und dies ergibt einen Widerspruch.

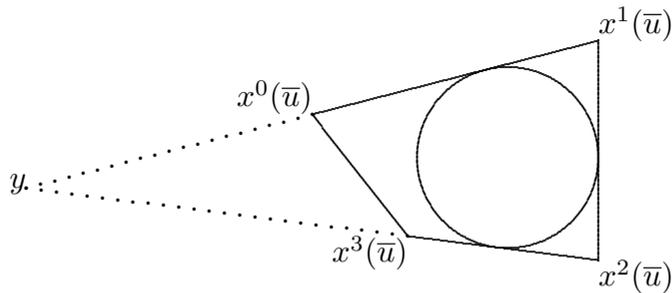
Im folgenden sei  $T|L(\bar{u})$  ein Viereck, und  $z$  sei ein Inkreismitelpunkt des Vierecks, der die Kanten  $k_{0,1}, k_{1,2}$  und  $k_{2,3}$  berührt, mit  $k_{i,j} = \text{conv}(\{x^i(\bar{u}), x^j(\bar{u})\})$ . Desweiteren sei  $H_{0,1}$  bzw.  $H_{2,3}$  die Stützebene der Kante  $\text{conv}(\{x^0, x^1\})$  bzw.  $\text{conv}(\{x^2, x^3\})$ , die gegeben sei durch  $H_{0,1} = \text{aff}(\{x^0(\bar{u}), x^1(\bar{u}), x^0(\bar{u}) + \bar{u}\})$  bzw.  $H_{2,3} = \text{aff}(\{x^2(\bar{u}), x^3(\bar{u}), x^2(\bar{u}) + \bar{u}\})$ . Es bleiben nun zwei Fälle zu unterscheiden. ■

**iii)** Die Kanten  $k_{0,1}$  und  $k_{2,3}$  sind parallel.

Unter dieser Voraussetzung ist der Abstand der beiden parallelen Ebenen  $H_{0,1}$  und  $H_{2,3}$  gleich  $2r(\bar{u})$ . Bei der Projektion von  $T$  auf die Ebene  $L(\tilde{u})$  mit  $\tilde{u} = (x^1 - x^0) / \|x^1 - x^0\|$  entsteht daher ein Dreieck, dessen Dicke nicht größer ist als  $2r(\bar{u})$ . Somit ist der Inkreisradius dieses Dreiecks kleiner als  $r(\bar{u})$ , was einen Widerspruch zu (2.17) darstellt.

**iv)** Die Kanten  $k_{0,1}$  und  $k_{2,3}$  sind nicht parallel.

Für den Schnittpunkt  $y$  der beiden Geraden  $\text{aff}(k_{0,1})$  und  $\text{aff}(k_{2,3})$  kann angenommen werden, daß er bzgl. der Stützgerade  $\text{aff}(k_{1,2})$  des Vierecks im selben Halbraum (bzgl.  $L(\bar{u})$ ) liegt wie  $T|L(\bar{u})$ , da sonst  $k_{2,3}$  durch die Kante  $\text{conv}(\{x^0(\bar{u}), x^3(\bar{u})\})$  ersetzt werden kann.



Der Strahl von  $x^1$  ausgehend mit Richtung  $x^0 - x^1$  schneidet daher die Ebene  $H_{2,3}$  in einem Punkt  $x^4$ , der unter der Projektion auf  $L(\bar{u})$  in den Schnittpunkt  $y$  übergeht.

Das Simplex  $\tilde{T}$  mit den Ecken  $x^1, x^2, x^3, x^4$  wird unter der Projektion auf  $L(\bar{u})$  auf das Dreieck mit den Ecken  $x^1(\bar{u}), x^2(\bar{u}), y$  abgebildet, und zudem liegt  $x^3(\bar{u})$  im relativen Inneren der Kante  $\text{conv}(\{x^2(\bar{u}), y\})$ . Nach Konstruktion ist  $r(\tilde{T}|L(\bar{u}); L(\bar{u})) = r(\bar{u})$ , und wegen  $\tilde{T} \subset T$  folgt  $r_2^\pi(\tilde{T}) = r(\tilde{T}|L(\bar{u}); L(\bar{u}))$ . Somit genügt  $\tilde{T}$  der Annahme (2.17) und den Bedingungen aus Fall i), und dies ergibt einen Widerspruch.

Aus den Überlegungen zu i)-iv) folgt, daß die Annahme (2.17) falsch ist. Daher gilt die Behauptung. q.e.d.

Lemma 2.5. kann auch so interpretiert werden, daß für ein 3-dimensionales Simplex die Ebene  $L \in \mathcal{L}_2^3$ , für die  $r_2^\pi(T) = r(T|L; L)$  gilt, von den Normalenvektoren der Stützebenen zweier geeigneter Facetten von  $T$  aufgespannt wird. Dies legt die Verallgemeinerung nahe, für ein  $d$ -dimensionales Simplex  $i$ -dimensionale Projektionsebenen zu betrachten, die von  $i$  Normalenvektoren der Stützebenen von Facetten des Simplex erzeugt werden. Dabei ergeben sich die folgenden Relationen.

**LEMMA 2.6.** Sei  $T^d \subset E^d$  ein  $d$ -dimensionales Simplex mit den Ecken  $x^{0,d}, \dots, x^{d,d}$ . Die Facetten von  $T^d$  seien mit  $F^{j,d} = \text{conv}(\{x^{0,d}, \dots, x^{j-1,d}, x^{j+1,d}, \dots, x^{d,d}\})$  bezeichnet und die zugehörigen äußeren Einheitsnormalenvektoren der Stützhyperebenen mit  $u^{j,d}$ ,  $0 \leq j \leq d$ . Ist  $L_i = \text{lin}(\{u^{0,d}, \dots, u^{i-1,d}\})$ , so gilt für  $2 \leq i \leq d-1$

$$r(T^d) = \left( \frac{\sum_{j=0}^{i-1} V^{d-1}(F^{j,d}) + \left\| \sum_{j=0}^{i-1} V^{d-1}(F^{j,d}) u^{j,d} \right\|}{\sum_{j=0}^d V^{d-1}(F^{j,d})} \right) \cdot r(T^d|L_i; L_i). \quad (2.18)$$

Bezeichnet weiterhin  $r_1^\pi(T^d|L_i; L_i)$  den minimalen Inkugelradius aller 1-dimensionalen Projektionen von  $T^d|L_i$  auf in  $L_i$  enthaltene 1-dimensionale Ebenen, so gilt

$$r(T^d) \geq \left( \frac{2 \left\| \sum_{j=0}^{i-1} V^{d-1}(F^{j,d}) u^{j,d} \right\|}{\sum_{j=0}^d V^{d-1}(F^{j,d})} \right) \cdot r_1^\pi(T^d|L_i; L_i). \quad (2.19)$$

BEWEIS: Nach Definition ist die Ebene  $L_i$  orthogonal zu der Seite  $\text{conv}(\{x^{i,d}, \dots, x^{d,d}\})$  von  $T^d$ , und daher ist  $T^d|L_i$  ein  $i$ -dimensionales Simplex. Die Ecken dieses Simplex seien mit  $x^{0,i}, \dots, x^{i,i}$  gekennzeichnet, wobei  $x^{i,i}$  das Bild von  $\text{conv}(\{x^{i,d}, \dots, x^{d,d}\})$  und  $x^{j,i}$ ,  $0 \leq j \leq i-1$ , das Bild von  $x^{j,d}$  unter der orthogonalen Projektion auf  $L_i$  sei. Bezogen auf den Raum  $L_i$  sei der äußere Einheitsnormalenvektor der Stützhyperebene der Facette  $F^{j,i} = \text{conv}(\{x^{0,i}, \dots, x^{j-1,i}, x^{j+1,i}, \dots, x^{i,i}\})$  mit  $u^{j,i}$ ,  $0 \leq j \leq i$ , bezeichnet.

Sei nun  $T^i = T^d|L_i$ ,  $2 \leq i \leq d-1$ . Offensichtlich ist  $T^i = T^{i+1}|L_i$ , und im folgenden wird die orthogonale Projektion von  $T^{i+1}$  auf  $L_i$  im Raum  $L_{i+1}$  näher betrachtet. Dazu sei  $T^{i+1}$  so translatiert, daß gilt  $x^{i,i+1} = -x^{i+1,i+1}$ .

Die Ebene  $L_i$  ist orthogonal zu der Kante  $\text{conv}(\{x^{i,i+1}, x^{i+1,i+1}\})$  des Simplex  $T^{i+1}$ , und somit ergibt Steiner-Symmetrisierung ([Bn, Fe], S. 69) von  $T^{i+1}$  an dieser Ebene ein volumengleiches Simplex, dessen Schnitt mit  $L_i$  gleich  $T^i$  ist. Insbesondere werden bei dieser Symmetrisierung die Facetten von  $T^{i+1}$ , die die Kante  $\text{conv}(\{x^{i,i+1}, x^{i+1,i+1}\})$  enthalten, auf inhaltsgleiche Facetten des symmetrisierten Simplex abgebildet. Folglich gelten die Beziehungen

$$V^i(F^{j,i+1}) = V^{i-1}(F^{j,i}) \cdot \frac{\|x^{i,i+1} - x^{i+1,i+1}\|}{i}, \quad 0 \leq j \leq i-1, \quad (2.20)$$

$$V^{i+1}(T^{i+1}) = V^i(T^i) \cdot \frac{\|x^{i,i+1} - x^{i+1,i+1}\|}{i+1}. \quad (2.21)$$

Durch iterative Anwendung von (2.20) und (2.21) ergeben sich die Gleichungen

$$V^{d-1}(F^{j,d}) = V^{i-1}(F^{j,i}) \cdot \frac{\Upsilon_i}{(d-1) \cdot \dots \cdot i}, \quad 0 \leq j \leq i-1, \quad (2.22)$$

$$V(T^d) = V^i(T^i) \cdot \frac{\Upsilon_i}{d \cdot \dots \cdot (i+1)}, \quad (2.23) \quad \text{mit}$$

$$\Upsilon_i = \|x^{d-1,d} - x^{d,d}\| \cdot \dots \cdot \|x^{i,i+1} - x^{i+1,i+1}\|.$$

Bekannterweise ([Bn, Fe], S. 118) ist für ein Polytop die Summe der äußeren Einheitsnormalenvektoren, gewichtet mit dem entsprechenden Inhalt der Facetten, gleich 0. Somit gilt

$$V^{i-1}(F^{i,i}) = \left\| \sum_{j=0}^{i-1} V^{i-1}(F^{j,i}) u^{j,i} \right\|.$$

Unter Beachtung von  $u^{j,i} = u^{j,d}$ ,  $0 \leq j \leq i-1$ , folgt daher zusammen mit (2.22)

$$\left\| \sum_{j=0}^{i-1} V^{d-1}(F^{j,d}) u^{j,d} \right\| = V^{i-1}(F^{i,i}) \frac{\Upsilon_i}{(d-1) \cdot \dots \cdot i}. \quad (2.24)$$

Mit Hilfe von (2.22) und (2.24) kann die Oberfläche von  $T^i$  durch Oberflächenkomponenten von  $T^d$  dargestellt werden, und da für ein  $k$ -dimensionales Simplex der Inkugelradius gleich dem  $k$ -fachen Verhältnis aus Volumen zu Oberfläche ist, folgt aus (2.22), (2.23) und (2.24) die Gleichung (2.18).

Ist nun  $h(T^i)$  die Höhe im Simplex  $T^i$  über der Seite  $F^{i,i}$ , so gilt  $h(T^i) \geq 2r_1^\pi(T^i; L_i)$  und  $h(T^i)V^{i-1}(F^{i,i}) = iV^i(T^i)$ . Zusammen mit (2.23) und (2.24) folgt daraus die Ungleichung (2.19). **q.e.d.**

Wie von *Betke* bemerkt, liefern die Projektionsebenen aus Lemma 2.6. für ein Simplex  $T$  im allgemeinen nicht die bestmöglichen Inkugelradien bzgl.  $r_i^\pi(T)$ . Ist nämlich  $T$  ein reguläres 4-dimensionales Simplex mit den Ecken  $x^0, \dots, x^4$  und dem Inkugelradius 1 (Kantenlänge  $2\sqrt{10}$ ), so entsteht bei der Projektion auf eine Ebene  $L$ , die orthogonal zu einer Kante des Simplex ist, ein 3-dimensionales Simplex  $\bar{T}$ , was als Pyramide über einem 2-dimensionalen regulären Dreieck beschrieben werden kann. Die Kantenlänge dieses regulären Dreiecks ist gleich  $2\sqrt{10}$ , und die Pyramidenspitze hat zu den übrigen Ecken den Abstand  $\sqrt{30}$ .

Wird nun  $\bar{T}$  im  $E^3$  auf eine 2-dimensionale Ebene  $L_2^1$  projiziert, die orthogonal zu einer Kante von  $\bar{T}$  mit Kantenlänge  $\sqrt{30}$  ist, so ergibt dies ein Dreieck  $D_1$  mit den Kantenlängen  $\sqrt{80/3}, \sqrt{80/3}, 2\sqrt{10}$ . Diese Projektion entspricht der Projektion von  $T$  auf eine Ebene  $L_2$  wie in Lemma 2.6. Für den Inkreis von  $D_1$  folgt

$$r(D_1; L_2^1) = \frac{10}{4 + \sqrt{6}} \approx 1.55.$$

Wird andererseits  $\bar{T}$  auf eine 2-dimensionale Ebene  $L_2^2$  projiziert, die orthogonal zu einer Kante von  $\bar{T}$  mit Kantenlänge  $2\sqrt{10}$  ist, so entsteht dabei ein Dreieck  $D_2$  mit den Kantenlängen  $\sqrt{30}, \sqrt{30}, \sqrt{20}$ , und es gilt

$$r(D_2; L_2^2) = \sqrt{5} \sqrt{\frac{\sqrt{6}-1}{\sqrt{6}+1}} \approx 1.45.$$

Dennoch ergeben sich mit Hilfe von Lemma 2.6. für einen konvexen Körper brauchbare untere Abschätzungen für das Verhältnis zwischen dem  $i$ -dimensionalen und dem  $j$ -dimensionalen Inkugelradius,  $i > j$ , der Serie  $r_i^\pi(K)$ . Dabei ergibt sich insbesondere für  $i=d, j=1$  der Satz von *Steinhagen* (2.2).

**SATZ 2.13.** *Sei  $K \in \mathcal{K}^d$  mit  $\dim(K)=d$ . Dann gilt*

$$r_i^\pi(K) > \left( \frac{j}{i+1} + \sqrt{\binom{i+1}{j}^{-1} \frac{j(i+1-j)}{(i+1)^{2i}}} \right) \cdot r_j^\pi(K), \quad 2 \leq j < i \leq d, \quad (2.25)$$

$$r_i^\pi(K) \geq \begin{cases} r_1^\pi(K) \frac{\sqrt{i+2}}{i+1} & \text{falls } i \text{ gerade,} \\ r_1^\pi(K) \frac{1}{\sqrt{i}} & \text{falls } i \text{ ungerade.} \end{cases}, \quad 2 \leq i \leq d. \quad (2.26)$$

*Ist insbesondere  $i$  ungerade und  $j=(i+1)/2$ , dann gilt sogar*

$$r_i^\pi(K) \geq \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{i}} \right) r_j^\pi(K). \quad (2.27)$$

BEWEIS: Zuerst werden die obigen Ungleichungen für den Fall  $i=d$  gezeigt. Dazu sei  $K$  so translatiert, daß  $0$  ein Inkugelmittelpunkt ist, und  $\bar{T} \subset K$ ,  $\bar{T} = \text{conv}(\{x^0, \dots, x^m\})$ ,  $1 \leq m \leq d$ , sei ein  $m$ -dimensionales Simplex, dessen Ecken dem Rand von  $K$  angehören und so auf der Inkugel um  $0$  verteilt sind, daß  $0$  im relativen Inneren von  $\bar{T}$  enthalten ist. Die Existenz eines solchen Simplex folgt aus den Eigenschaften einer Inkugel und dem Satz von Carathéodory ([Bn, Fe], S. 54, S. 9).

Für  $m=1$  gilt  $r(K) = \Delta(K)/2$ , und daher ist  $r_d^\pi(K) = r_i^\pi(K)$  für  $1 \leq i \leq d$ . Deshalb sei im folgenden  $2 \leq m < d$ , und  $L_m \in \mathcal{L}_m^d$  sei der lineare Teilraum, der von den Ecken von  $\bar{T}$  erzeugt wird.

Die Tangentialebenen der Inkugel durch die Punkte  $x_0, \dots, x_m$  bestimmen einen prismenartigen Raumteil, der  $K$  enthält und dessen Schnitt mit  $L_m$  ein  $m$ -dimensionales Simplex  $T^m$  ist. Der Inkugelradius von  $T^m$  bzgl. des Raumes  $L_m$  ist nach Wahl von  $T^m$  gleich dem Inkugelradius von  $K$  ([Bn, Fe], S. 54), und da  $K|L_m$  in  $T^m$  enthalten ist, folgt zusammen mit Satz 2.1. iv)

$$\begin{aligned} r(T^m; L_m) &= r_d^\pi(K) = r_j^\pi(K), \quad m \leq j \leq d, \quad \text{und} \\ r_j^\pi(T^m; L_m) &\geq r_j^\pi(K|L_m; L_m) \geq r_j^\pi(K), \quad 1 \leq j \leq m-1, \end{aligned} \quad (2.28)$$

wobei  $r_j^\pi(\cdot; L_m)$  den entsprechenden  $j$ -dimensionalen Inkugelradius bzgl. des Raumes  $L_m$  bezeichnet.

Die rechten Seiten in (2.25), (2.26) und (2.27) sind für festes  $j$  in dem Parameter  $i$  monoton fallend, und wegen (2.28) reicht es somit, diese Ungleichungen im Fall  $i=d$  für das  $m$ -dimensionale Simplex  $T^m$  im  $E^m$  mit  $i=m$  zu beweisen.

Deshalb sei im folgenden  $T$  ein  $d$ -dimensionales Simplex mit den Ecken  $x^0, \dots, x^d$ , und für  $0 \leq j \leq d$  sei der äußere Einheitsnormalenvektor der Stützhyperebene der Facette  $F^j = \text{conv}(\{x^0, \dots, x^{j-1}, x^{j+1}, \dots, x^d\})$  mit  $u^j$  bezeichnet. Desweiteren sei die Oberfläche von  $T$  auf 1 normiert, d.h.,

$$\sum_{k=0}^d V^{d-1}(F^k) = 1. \quad (2.29)$$

Zum Beweis von (2.25) sei nun  $2 \leq j \leq d-1$  und  $\{k_1, \dots, k_j\}$  eine  $j$ -elementige Teilmenge von  $\{0, \dots, d\}$ . Bezeichnet  $T^{k_1, \dots, k_j}$  das  $j$ -dimensionale Simplex, das durch die orthogonale Projektion von  $T$  auf die Ebene  $L_{k_1, \dots, k_j}$  entsteht, die von den Vektoren  $u^{k_1}, \dots, u^{k_j}$  aufgespannt wird, so gilt mit Lemma 2.6. unter Berücksichtigung von (2.29)

$$\frac{r(T)}{r(T^{k_1, \dots, k_j}; L_{k_1, \dots, k_j})} = \sum_{l=1}^j V^{d-1}(F^{k_l}) + \left\| \sum_{l=1}^j V^{d-1}(F^{k_l}) u^{k_l} \right\|. \quad (2.30)$$

Ist  $P_j$  die Menge aller  $j$ -elementigen Teilmengen der Zahlen  $0, \dots, d$  und  $|P_j| = \binom{d+1}{j}$  ihre Mächtigkeit, so folgt mit (2.30)

$$\frac{r(T)}{r_j^\pi(T)} \geq \max_{(k_1, \dots, k_j) \in P_j} \frac{r(T)}{r(T^{k_1, \dots, k_j}; L_{k_1, \dots, k_j})}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \frac{1}{|P_j|} \sum_{(k_1, \dots, k_j) \in P_j} \left( \sum_{l=1}^j V^{d-1}(F^{k_l}) + \left\| \sum_{l=1}^j V^{d-1}(F^{k_l}) u^{k_l} \right\| \right) \\
&= \frac{j}{d+1} + \frac{1}{|P_j|} \sum_{(k_1, \dots, k_j) \in P_j} \left\| \sum_{l=1}^j V^{d-1}(F^{k_l}) u^{k_l} \right\| \\
&> \frac{j}{d+1} + \sqrt{|P_j|^{-1}} \sqrt{\sum_{(k_1, \dots, k_j) \in P_j} \frac{\left\| \sum_{l=1}^j V^{d-1}(F^{k_l}) u^{k_l} \right\|^2}{|P_j|}}. \tag{2.31}
\end{aligned}$$

Um diesen Ausdruck weiter abzuschätzen, bedarf es der schon in Lemma 2.6. verwendeten Beziehung ([Bn, Fe], S. 118)

$$\sum_{k=0}^d V^{d-1}(F^k) u^k = 0. \tag{2.32}$$

Quadrierung von (2.32) ergibt

$$\sum_{k=0}^d V^{d-1}(F^k)^2 + 2 \sum_{0 \leq l < k \leq d} V^{d-1}(F^l) u^l V^{d-1}(F^k) u^k = 0,$$

und damit folgt

$$\begin{aligned}
&\sum_{(k_1, \dots, k_j) \in P_j} \frac{\left\| \sum_{l=1}^j V^{d-1}(F^{k_l}) u^{k_l} \right\|^2}{|P_j|} \\
&= |P_j|^{-1} \left( \binom{d}{j-1} \sum_{k=0}^d V^{d-1}(F^k)^2 + 2 \binom{d-1}{j-2} \sum_{0 \leq l < k \leq d} V^{d-1}(F^l) u^l V^{d-1}(F^k) u^k \right) \\
&= \frac{j(d+1-j)}{(d+1)d} \sum_{k=0}^d V^{d-1}(F^k)^2 \\
&\geq \frac{j(d+1-j)}{(d+1)^2 d}. \tag{2.33}
\end{aligned}$$

In Verbindung mit (2.31) ergeben sich aus (2.33) die Ungleichungen aus (2.25) für den Fall  $i=d$ .

Durch Betrachtung des quadratischen Mittels liefert die Abschätzung aus (2.33) insbesondere die Beziehung

$$\max_{(k_1, \dots, k_j) \in P_j} \left\| \sum_{l=1}^j V^{d-1}(F^{k_l}) u^{k_l} \right\| \geq \sqrt{\frac{j(d+1-j)}{(d+1)^2 d}}, \tag{2.34}$$

so daß unter Beachtung von  $r_1^\pi(T) \leq r_1^\pi(T^{k_1, \dots, k_j}; L_{k_1, \dots, k_j})$  zusammen mit Lemma 2.6. und (2.29) folgt

$$\begin{aligned} \frac{r(T)}{r_1^\pi(T)} &\geq \max_{2 \leq j \leq d-1} \max_{(k_1, \dots, k_j) \in P_j} \frac{r(T)}{r_1^\pi(T^{k_1, \dots, k_j}; L_{k_1, \dots, k_j})} \\ &\geq \max_{2 \leq j \leq d-1} \max_{(k_1, \dots, k_j) \in P_j} 2 \left\| \sum_{l=1}^j V^{d-1}(F^{k_l})u^{k_l} \right\| \\ &\geq \max_{2 \leq j \leq d-1} 2 \sqrt{\frac{j(d+1-j)}{(d+1)^2 d}}. \end{aligned}$$

Ist  $d$  ungerade, so wird das Maximum angenommen für  $j=(d+1)/2$ , und für  $d$  gerade wird das Maximum angenommen bei  $j=d/2$ . Daraus folgen für  $i=d > 2$  die Ungleichungen aus (2.26). Für  $d=2$  ergeben sich die entsprechenden Beziehungen durch direkte Betrachtung eines 2-dimensionalen Dreiecks.

Zum Beweis von (2.27) sei  $(n_1, \dots, n_j) \in P_j$  ein  $j$ -Tupel mit der Eigenschaft (vgl. (2.34))

$$\left\| \sum_{l=1}^j V^{d-1}(F^{n_l})u^{n_l} \right\| \geq \sqrt{\frac{j(d+1-j)}{(d+1)^2 d}}. \quad (2.35)$$

Ist  $(n_{j+1}, \dots, n_{d+1}) = \{0, \dots, d\} \setminus \{n_1, \dots, n_j\}$ , so folgt aus (2.35) unter Einbeziehung von (2.30) und (2.32)

$$\begin{aligned} \frac{r(T)}{r_j^\pi(T)} + \frac{r(T)}{r_{d+1-j}^\pi(T)} &\geq \frac{r(T)}{r(T^{n_1, \dots, n_j}; L_{n_1, \dots, n_j})} + \frac{r(T)}{r(T^{n_{j+1}, \dots, n_{d+1}}; L_{n_{j+1}, \dots, n_{d+1}})} \\ &= \sum_{l=1}^{d+1} V^{d-1}(F^{n_l}) + 2 \left\| \sum_{l=1}^j V^{d-1}(F^{n_l})u^{n_l} \right\| \\ &\geq 1 + 2 \sqrt{\frac{j(d+1-j)}{(d+1)^2 d}}. \end{aligned}$$

Für  $d$  ungerade und  $j=(d+1)/2$  ergibt sich daraus im Fall  $i=d$  die Ungleichung aus (2.27). Damit sind nun für  $i=d$  alle Ungleichungen des Satzes bewiesen.

Ist nun  $j < i < d$ , so sei  $L_i \in \mathcal{L}_i^d$  ein  $i$ -dimensionaler Teilraum mit der Eigenschaft  $r_i^\pi(K) = r(K|L_i; L_i)$ . Anwendung der bereits gezeigten Relationen ( $i=d$ ) in diesem  $i$ -dimensionalen Raum ergibt nun die Ungleichungen aus (2.25), (2.26) und (2.27), wobei  $r_j^\pi(K)$  ersetzt ist durch  $r_j^\pi(K|L_i; L_i)$ , den entsprechenden  $j$ -dimensionalen Inkugelradius von  $K|L_i$  im Raum  $L_i$ . Offensichtlich ist  $r_j^\pi(K|L_i; L_i) \geq r_j^\pi(K)$ , und es folgt die Behauptung. q.e.d.

Als unmittelbare Konsequenz aus Satz 2.13. ergeben sich die folgenden Beziehungen für die Inkugelradien  $r_i^\sigma(K)$ .

**SATZ 2.14.** Sei  $K \in \mathcal{K}^d$  mit  $\dim(K)=d$ . Dann gilt

$$r_i^\sigma(K) > \left( \frac{j}{i+1} + \sqrt{\binom{i+1}{j}^{-1} \frac{j(i+1-j)}{(i+1)^{2i}}} \right) \cdot r_j^\sigma(K), \quad 2 \leq j < i \leq d, \quad (2.36)$$

$$r_i^\sigma(K) \geq \begin{cases} r_1^\sigma(K) \frac{\sqrt{i+2}}{i+1} & \text{falls } i \text{ gerade,} \\ r_1^\sigma(K) \frac{1}{\sqrt{i}} & \text{falls } i \text{ ungerade.} \end{cases}, \quad 2 \leq i \leq d. \quad (2.37)$$

Ist insbesondere  $i$  ungerade und  $j=(i+1)/2$ , dann gilt sogar

$$r_i^\sigma(K) \geq \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{i}} \right) r_j^\sigma(K). \quad (2.38)$$

BEWEIS: Für  $i=d$  ergeben sich die Relationen aus der Beziehung  $r_j^\sigma(K) \leq r_j^\pi(K)$  und Satz 2.13. Ist  $i < d$ , so kann analog zum Beweis von Satz 2.13. argumentiert werden.

**q.e.d.**

Die Ungleichungen (2.26) und (2.37) sind für  $i=d$  identisch mit dem Satz von Steinhagen (2.2) und sind daher in diesem Fall bestmöglich. Desweiteren liefert (2.27) für  $i=d=3$  eine nicht verbesserbare Beziehung, denn es gilt

**SATZ 2.15.** Für  $K \in \mathcal{K}^3$  gilt

$$\begin{aligned} i) \quad r_3^\pi(K) &\geq \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \right) r_2^\pi(K), \\ ii) \quad r_3^\pi(K) &\geq \frac{1}{\sqrt{3}} r_1^\pi(K), \end{aligned}$$

und keine der Ungleichungen kann verbessert werden.

BEWEIS: Ist  $\dim(K) < 3$ , so gilt  $r_1^\pi(K) = r_2^\pi(K) = r_3^\pi(K) = 0$ . Im Fall  $\dim(K) = 3$  folgt die Gültigkeit der Ungleichungen aus (2.26) und (2.27).

Ist nun  $S$  ein reguläres 3-dimensionales Simplex, so folgt aus Lemma 2.6, daß in i) Gleichheit gilt, und offensichtlich ist auch ii) für  $S$  mit Gleichheit erfüllt. **q.e.d.**

Nach Satz 2.14. gelten die Ungleichungen i) und ii) aus dem obigen Satz auch für die Inkugelradien  $r_i^\sigma(K)$ . Jedoch ist dort der Gleichheitsfall noch unbekannt.

## Literaturverzeichnis

- [Ba, Wo, Z] Bambah, R. P., Woods, A. C., Zassenhaus, H., *Three proofs of Minkowski's second inequality in the geometry of numbers*, J. Austral. Math. Soc. 5, (1965), 453-462.
- [B, G] Betke, U., Gritzmann, P., *An application of valuation theory to two problems of discrete geometry*, Discrete Math. 58, (1986), 81-85.
- [B, W] Betke, U., Wills, J. M., *Stetige und diskrete Funktionale konvexer Krper*, Contributions to geometry (Proc. Geom. Sympos, Siegen, 1978), Ed. by J. Tlke and J. M. Wills, 226-237, Birkhuser, Basel 1979.
- [Bla] Blaschke, W., *Kreis und Kugel*, Veit, Leipzig, W. de Gruyter, Berlin 1916.
- [Bl] Blichfeldt, H. F., *Note on geometry of numbers*, Bull. Amer. Math. Soc. 27, (1921), 152-153.
- [Bo] Bokowski, J., *Gitterpunktanzahl und Parallelekrpervolumen von Eikrpern*, Monatsh. Math. 79, (1975), 93-101.
- [Bo, H, W] Bokowski, J., Hadwiger, H., Wills, J. M., *Eine Ungleichung zwischen Volumen, Oberflche und Gitterpunktanzahl konvexer Krper im n-dimensionalen euklidischen Raum*, Math. Z. 127, (1972), 363-364.
- [Bo, W1] Bokowski, J., Wills, J. M., *Eine Ungleichung zwischen Volumen, Oberflche und Gitterpunktanzahl konvexer Mengen im  $\mathbb{R}^3$* , Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 25, (1974), 7-13.
- [Bo, W2] —, —, *Upper bounds for the number of lattice points of convex bodies*, Am. Math. Monthly 81, (1974), 620-622.
- [Bn, Fe] Bonnesen, T., Fenchel, W., *Theorie der konvexen Krper*, Springer, Berlin 1934.
- [C, D] Corput, J. G. van der, Davenport, H., *On Minkowski's fundamental theorem in the geometry of numbers*, Proc. Kon. Ned. Akad. Wet. 49, (1946), 701-707.
- [Da] Danicic, I., *An elementary proof of Minkowski's second inequality*, J. Austral. Math. Soc. 10, (1969), 177-181.
- [Dan, Gr, K] Danzer, L., Grnbaum, B., Klee, V., *Helly's theorem and its relatives. In Convexity (V. Klee, ed.)*, Amer. Math. Soc. Proc. Symp. Pure Math. 13, (1963), 101-180.

- [D] Davenport, H., *Minkowski's inequality for the minima associated with a convex body*, Quarterly J. Math. 10, (1939), 119-121.
- [Eg] Eggleston, H. G., *Convexity*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1958).
- [Eh] Ehrhart, E., *Polynomes arithmétiques et méthode des polyèdres en combinatoire*, Birkhuser, Basel (1977).
- [Er, Gr, Ha] Erds, P., Gruber, P. M., Hammer, J., *Lattice Points*, Pitman, Harlow, Essex (1989).
- [F] Fejes Tóth, L., *Extremum properties of the regular polytopes*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. (1955), 143-146.
- [F, G, W] Fejes Tóth, G., Gritzmann, P., Wills, J. M., *On finite multiple packings*, Archiv d. Math. 54 (1990), in Druck.
- [Ge] Gericke, H., *ber die grte Kugel in einer konvexen Punktmenge*, Math. Z. 40, (1936), 317-318.
- [G1] Gritzmann, P., *Finite Packungen und berdeckungen*, Habilitationsschrift Siegen 1984.
- [G2] —, *Finite packing of equal balls*, J. London Math. Soc. 33, (1986), 543-553.
- [G, K] Gritzmann, P., Klee, V., *Inner and outer  $j$ -radii of convex bodies in finite-dimensional normed spaces*, erscheint in Discrete and Computational Geometry, (1991).
- [Gr, L] Gruber, P. M., Lekkerkerker, C. G., *Geometry of numbers*, Amsterdam, North-Holland 1987.
- [H1] Hadwiger, H., *Vorlesungen ber Inhalt, Oberflche und Isoperimetrie*, Springer, Berlin 1957.
- [H2] —, *Gitterperiodische Punktmengen und Isoperimetrie*, Monatshefte Math. 76, (1972), 410-418.
- [H3] —, *Gitterpunktanzahl im Simplex und Wills'sche Vermutung*, Math. Ann. 239, (1979), 271-288.
- [H, W] Hadwiger, H., Wills, J. M., *Gitterpunktanzahl konvexer Rotationskrper*, Math. Ann. 208, (1974), 221-232.
- [He] Henk, M., *Inequalities between successive minima and intrinsic volumes of a convex body*, Mh. Math. 110, (1990), 279-282.
- [J] Jarník, V., *On Estermann's proof of a theorem of Minkowski*, Casopis Pešt Mat. Fyz. 73, (1949), 131-140.
- [Juh] Juhnke, F., *Inradius und Dicke konvexer Krper aus Optimierungstheoretischer Sicht*, Beitrge zur Algebra und Geometrie 27, (1988), 13-20.

- [Ju] Jung, H. W. E., *ber die kleinste Kugel, die eine räumliche Figur einschliet*, J. reine angew. Math. 123, (1901), 241-257.
- [Ke] Keller, O. -H., *Geometrie der Zahlen*, Enz. Math. Wiss. Band 12, Heft 11, Teil III 1954.
- [Le] Leichtwei, K., *Konvexe Mengen*, Springer, Berlin 1979.
- [M] Minkowski, H., *Geometrie der Zahlen*, Teubner, Leipzig 1910.
- [Mc] McMullen, P., *Non-linear angle-sum relations for polyhedral cones and polytopes*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 78, (1975), 247-261.
- [Mc, Sh] McMullen, P., Shephard, G. C., *Convex polytopes and the upper bound conjecture*, Cambridge University Press 1971.
- [N] Nosarzewska, M., *Evaluation de la différence entre l'aire d'une région plane convexe et le nombre des points aux coordonnées entières couverts par elle*, Coll. Math. 1, (1948), 305-311.
- [Od] Oda, T., *Convex Bodies and Algebraic Geometry*, Springer, Berlin—New York—Tokyo 1988.
- [O] Overhagen, T., *Zur Gitterpunktanzahl konvexer Krper im 3-dimensionalen euklidischen Raum*, Math. Ann. 216, (1975), 217-224.
- [Pi] Pick, G., *Geometrisches zur Zahlenlehre*, Naturwiss. Zeitschrift Lotos Prag, (1899), 311-319.
- [S] Schmidt, W. M., *Volume, surface area and the number of integer points covered by a convex set*, Arch. Math. 23, (1972), 537-543.
- [St] Steinhagen, P., *ber die grte Kugel in einer konvexen Punktmenge*, Abt. math. Semin. Hamburg 1, (1922), 15-26.
- [T] Teissier, B., *Bonnesen-type inequalities in algebraic geometry*, I. Princeton Univ. Press, (1982), 85-105.
- [We] Weyl, H., *On geometry of numbers*, Proc. London. Math. Soc. (2), 47, (1942), 268-289.
- [W1] Wills, J. M., *Zur Gitterpunktanzahl konvexer Mengen*, Elemente Math. 28/3, (1973), 57-63.
- [W2] —, *Minkowski's successive minima and the zeros of a convexity-function*, Mh. Math. 109, (1990), 157-164.
- [W3] —, *Kugellagerungen und Konvexgeometrie*, Jber. d. Dt. Math.-Verein. 92, (1990), 21-46.
- [Wo] Woods, A. C., *On a theorem of Minkowski*, Proc. Amer. Math. Soc. 9, (1958), 354-355.
- [Z] Zindler, K., *ber konvexe Gebilde. I., II., III.*, Mh. Math. Phys. 30, (1920), 87-102.