Auf dem Weg von der Vermutung zum Theorem: Die Starke-Perfekte-Graphen-Vermutung

von Martin Henk und Annegret Wagler

Die Starke-Perfekte-Graphen-Vermutung, ein seit 40 Jahren offenes und herausragendes Problem der Graphentheorie, scheint gelöst zu sein. Nach über zwei Jahren intensiver Forschung kündigten Ende Mai 2002 Maria Chudnovsky (Princeton), Neil Robertson (Ohio State), Paul Seymour (Princeton) und Robin Thomas (Georgia Tech) einen Beweis der Vermutung an. Das noch unveröffentlichte Manuskript soll ca. 250 Seiten umfassen und es wird sicherlich noch einige Zeit vergehen, bis eine abschließende Stellungnahme erfolgen kann. Auf der Oberwolfach-Tagung „Geometric Convex Combinatorics“ (16.–22. Juni 2002) gaben Maria Chudnovsky und Paul Seymour in drei einstündigen Vorträgen Einblick in die Struktur des Beweises.

1 Perfekte Graphen

Motiviert durch eine Arbeit von Claude E. Shannon über die Übertragunsrate von Block-Codes [14] interessierte sich Claude Berge Ende der 1950er Jahre für

Claude Berge (1926 – 2002)[1]

die Beziehung zwischen Cliquen und Färbungen. Eine Teilmenge der Knoten eines Graphen wird als *Clique* bezeichnet, falls je zwei Knoten dieser Teilmenge benachbart, d.h. durch eine Kante verbunden sind. Die *Cliquenzahl* $\omega(G)$ bezeichnet die maximale Kardinalität einer Clique des Graphen G. Die *Färbungszahl* $\chi(G)$ ist die minimal benötigte Anzahl von Farben, um die Knoten von G so zu färben, dass je zwei benachbarte Knoten unterschiedlich gefärbt sind. Offensichtlich müssen alle Knoten einer Clique verschiedene Farben tragen, daher gilt $\omega(G) \leq \chi(G)$. Eine einfache Klasse von Graphen mit $\omega(G) < \chi(G)$ bilden die sehnenlosen ungeraden Kreise C_{2k+1} mit $k \geq 2$, genannt „odd holes“ (in Abb. 1(a) ist der C_5 als kleinstes Beispiel dargestellt). Für sie gilt $\omega(C_{2k+1}) = 2$ und $\chi(C_{2k+1}) = 3$.

Berge [2] taufte nun einen Graphen G *perfekt*, falls für alle induzierten Untergraphen G' von G Cliquenzahl $\omega(G')$ und Färbungszahl $\chi(G')$ übereinstimmen. Hierbei versteht man unter einem *induzierten Untergraphen* von G eine Teilmenge der Knotenmenge einschließlich aller Kanten von G, die zwei Knoten dieser Teilmenge verbinden. Der in Abb. 1(b) gezeigte Graph ist perfekt, der Graph in Abb. 1(c) hingegen nicht, da er einen C_5 als induzierten Untergraphen enthält.

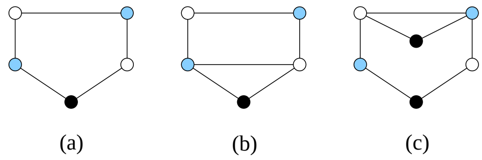

Abbildung 1

Die Perfektheit einiger Graphenklassen war bereits seit langem bekannt, u.a. von

- *bipartiten Graphen* (die Graphen mit Färbungszahl höchstens zwei),
- *Komplementen bipartiter Graphen* (das Komplement $\overline{G}$ hat die gleiche Knotenmenge wie G, zwei Knoten sind in $\overline{G}$ benachbart, wenn sie in G unverbunden sind),
- *Kantengraphen bipartiter Graphen* (der Kantengraph $L(G)$ hat die Kanten von G als Knoten, zwei Knoten sind in $L(G)$ benachbart, falls die entsprechenden Kanten von G einen gemeinsamen Knoten besitzen),
- *Komplementen von Kantengraphen bipartiter Graphen.*

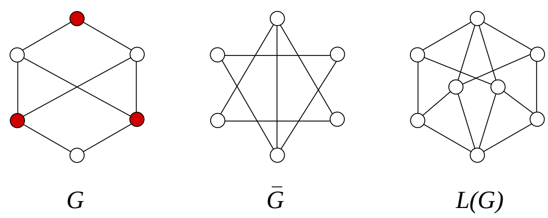

Abbildung 2: Ein bipartiter Graph G, sein Komplement $\overline{G}$ und sein Kantengraph $L(G)$.

Die Perfektheit bipartiter Graphen ist trivial, die der anderen Klassen folgt aus Sätzen von Kőnig [10, 11]. Diese vier Klassen werden im Folgenden *Basisklassen* genannt.

[1] Quelle: `http://www.cs.columbia.edu/~sanders/graphtheory/people/Berge.C.html`

2 Zwei Vermutungen

Die Beobachtung, dass bei den bekannten Beispielen jeweils die Graphenklassen und deren Komplementärklassen perfekt sind, führte Berge 1960 [2] zu der Vermutung:

(PGV) Perfekte-Graphen-Vermutung.
Ein Graph G ist genau dann perfekt, wenn sein Komplement $\overline{G}$ perfekt ist.

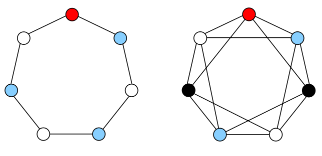

Abbildung 3: Der C_7 und sein Komplement $\overline{C}_7$.

Eine weitere Überlegung galt „verbotenen Untergraphen“ in perfekten Graphen. Shannon hatte bereits beobachtet, dass „odd holes“ imperfekt sind. Berge stellte fest, dass dies auch für deren Komplemente zutrifft (siehe Abb. 3 für ein Beispiel). Deshalb dürfen weder „odd holes“ noch deren Komplemente als induzierte Untergraphen perfekter Graphen auftreten. Berge vermutete 1960, dass dies bereits perfekte Graphen charakterisiert:

(SPGV) Starke-Perfekte-Graphen-Vermutung.
Ein Graph G ist genau dann perfekt, wenn weder G noch $\overline{G}$ ein „odd hole“ als induzierten Untergraphen enthält.

Die genaue Geschichte beider Vermutungen ist von Berge in [1] dargestellt. Chvátal und Sbihi schlugen vor, einen Graphen *Berge* zu nennen, falls dieser weder „odd holes“ noch deren Komplemente als induzierte Untergraphen enthält. Damit reduziert sich die SPGV auf die Aussage: *Jeder Berge-Graph ist perfekt.* Eine andere Formulierung der Vermutung basiert auf dem von Padberg eingeführten Begriff eines *minimal imperfekten Graphen.* Darunter versteht man einen Graph, der selbst nicht perfekt ist, aber alle seine echten induzierten Untergraphen. Die „odd holes“ und deren Komplemente sind Beispiele minimal imperfekter Graphen und in dieser Terminologie besagt die SPGV: *„Odd holes“ und deren Komplemente sind die einzigen minimal imperfekten Graphen* bzw. *Es gibt keine minimal imperfekten Berge-Graphen.*

Angeregt durch die beiden Vermutungen von Berge begann ein intensives Studium perfekter Graphen. (Sucht man nach dem Stichwort „perfect graph“ im MathSciNet so erhält man ca. 700 Treffer). Es wurden u.a. viele tiefliegende und überraschende Beziehungen von perfekten Graphen zu anderen Problemen in der Graphentheorie, der polyedrischen Kombinatorik, oder auch der ganzzahligen und semidefiniten Programmierung aufgezeigt. Als ein Beleg sei hier nur ein Resultat von Grötschel, Lovász und Schrijver genannt. Sie konnten u.a. zeigen, dass für perfekte Graphen $\chi(G)$ (und somit auch $\omega(G)$) in polynomialer Zeit bestimmt werden kann. Für beliebige Graphen ist die Berechnung von $\chi(G)$ ein NP-schweres Problem! Für einen Überblick über die wunderbare Welt der perfekten Graphen sei auf [3], [8] und [1] verwiesen.

Ein erster Durchbruch gelang Lovász [12] im Jahre 1972, indem er die PGV bewies. Dieses fundamentale Resultat ist heutzutage als das *Perfekte-Graphen-Theorem* bekannt und verallgemeinert u.a. einige klassische Theoreme (z.B. von Kőnig [10, 11] und Dilworth [7]).

Zum Beweis der SPGV wurden über die Jahrzehnte große Anstrengungen unternommen. Dabei wurden viele schöne und interessante Struktureigenschaften minimal imperfekter Graphen entdeckt, die Perfektheit für eine Vielzahl von Graphenklassen bewiesen bzw. die SPGV für eine Reihe spezieller Berge-Graphen verifiziert (siehe [4, 1] als Überblick). Mit Hilfe eines probabilistischen Ansatzes konnten Prömel und Steger [13] 1992 sogar zeigen, dass fast alle Berge-Graphen perfekt sind.

3 Struktur von Berge-Graphen

Ein Ansatz zum Beweis der SPGV, der in den letzten Jahren intensiv von Conforti und Cornuéjols verfolgt und propagiert wurde, beruht auf folgender Idee: Berge-Graphen gehören entweder zu den vier Basisklassen oder weisen „einfache Strukturen“ auf, die in minimal imperfekten Graphen nicht vorkommen. Im Jahre 2001 stellten Conforti, Cornuéjols, Robertson, Seymour, Thomas und Vušković eine erste Vermutung über die Struktur von Berge-Graphen auf.

Dekompositions-Vermutung.
Für jeden Berge-Graphen G gilt:

i) *G gehört zu einer der vier Basisklassen, oder*

ii) *G oder $\overline{G}$ besitzt einen „2-join“, oder*

iii) *G besitzt eine „skew partition“, oder*

iv) *G hat ein „homogeneous pair“.*

Es würde sicherlich zu weit führen, hier genauer auf die Definition der einzelnen Strukturen einzugehen. Daher sei an dieser Stelle auf einen Übersichtsartikel von Cornuéjols anlässlich des ICM2002 verwiesen [6].

Aus Arbeiten von Cornuéjols und Cunningham, Chvátal und Sbihi folgt, dass minimal imperfekte Graphen weder „2-joins“ noch „homogeneous pairs“ besitzen. Im Mai 2002 kündigten Chudnovsky und Seymour an, dass sie auch das Auftreten von „skew partitions“ ausschließen konnten. Die Dekompositions-Vermutung impliziert also, dass es keine minimal imperfekten Berge-Graphen gibt, und somit folgt aus ihr die SPGV.

Ebenfalls im Mai 2002 kündigten Chudnovsky, Robertson, Thomas und Seymour Resultate über die Struktur von Berge-Graphen an, die zusammen mit schon bekannten Resultaten die Dekompositions-Vermutung beweisen. Jedoch scheint die endgültige Formulierung des (eines) Dekompositions-Theorems noch nicht ganz festzustehen, da Chudnovsky und Seymour auf der Oberwolfach-Tagung eine leicht geänderte Fassung präsentierten, in der „homogeneous pairs“ durch sogenannte „M-joins“ und auch „skew partitions“ durch eine etwas speziellere Struktur ersetzt wurden. Dies deutet wohl darauf hin, dass die Dinge noch im Fluss sind: man darf gespannt (und sehr optimistisch) auf eine erste schriftliche Fassung des Beweises der SPGV warten.

4 Und nun?

Auch wenn die SPGV bewiesen ist, sind den perfekten Graphen noch nicht alle Geheimnisse entlockt. Ein offenes Problem, welches auch von Paul Seymour angesprochen wurde, ist die algorithmische Verifikation der Perfektheit eines Graphen. In anderen Worten: Gibt es einen polynomialen Algorithmus zum Entscheiden, ob ein gegebener Graph perfekt ist? Bisher ist nur bekannt, dass dieses Entscheidungsproblem zu der Komplexitätsklasse co-NP gehört: der ganze Graph ist imperfekt, falls ein (einziger) imperfekter induzierter Untergraph gefunden wird.

Aus dem Beweis der SPGV würde folgen, dass man in G und $\overline{G}$ „nur“ noch nach „odd holes“ suchen muss. Kürzlich gaben Conforti, Cornuéjols, Kapoor und Vušković [5] einen polynomialen Algorithmus an, der entscheidet, ob ein gegebener Graph „even holes“, d.h. sehnenlose Kreise gerader Länge, besitzt. Sind „odd holes“ tiefer als „even holes“?

Das Dekompositionsresultat für Berge-Graphen bietet weiter einen Ansatz, die dort verwendeten Zerlegungen zum Erkennen perfekter Graphen algorithmisch auszunutzen. Einen allzugroßen Optimismus bzgl. der polynomialen Erkennbarkeit perfekter Graphen dämpft allerdings ein Resultat, das kürzlich in [9] erzielt wurde und zeigt, dass die Eigenschaft perfekt zu sein so komplex wie nur möglich ist.

Literatur

[1] J. Ramirez-Alfonsin und B. Reed, eds., *Perfect Graphs*, Springer-Verlag (2001).

[2] C. Berge, *Färbung von Graphen, deren sämtliche bzw. deren ungerade Kreise starr sind*, Wiss. Zeitschrift der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg (1961), 114–115.

[3] C. Berge und V. Chvátal, eds., *Topics on Perfect Graphs*, North Holland, Amsterdam (1984).

[4] A. Brandstädt, V.B. Le und J.P. Spinrad, *Graph Classes: A Survey*, Siam Monographs on Discrete Mathematics and Applications (1999).

[5] M. Conforti, G. Cornuéjols, A. Kapoor und K. Vušković, *Even-hole free graphs, Part II: Recognition algorithm*, erscheint in Journal of Graph Theory, 2002.

[6] G. Cornuéjols, *The Strong Perfect Graph Conjecture*, `http://integer.gsia.cmu.edu/`, June 2002.

[7] R.P. Dilworth, *A Decomposition Theorem for Partially Ordered Sets.* Annals of Math. 2 (1950), 161–166.

[8] M. Grötschel, L. Lovász und A. Schrijver, *Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization*, Springer-Verlag (1988).

[9] S. Hougardy und A. Wagler, *Perfectness is an Elusive Graph Property*, Preprint ZR 02-11, ZIB, 2002.

[10] D. Kőnig, *Über Graphen und ihre Anwendung auf Determinantentheorie und Mengenlehre*, Math. Ann. 77 (1916), 453–465.

[11] D. Kőnig, *Graphen und Matrizen*, Math. Fiz. Lapok 38 (1931), 116–119.

[12] L. Lovász, *Normal Hypergraphs and the Weak Perfect Graph Conjecture*, Discrete Math. 2 (1972), 253–267.

[13] H.J. Prömel und A. Steger, *Almost all Berge graphs are perfect*, Combin. Probab. Comput. 1 (1992), no. 1, 53–79.

[14] C.E. Shannon, *The Zero-Error Capacity of a Noisy Channel.* IRE Trans. Inform. Theory 2 (1965), 8–19.

Adresse der Autoren

Martin Henk
Technische Universität Wien
Wiedner Hauptstraße 8-10/1142
A-1040 Wien, Austria
`henk@tuwien.ac.at`

Annegret Wagler
Konrad-Zuse-Zentrum (ZIB) Berlin
Takustraße 7
D-14195 Berlin, Germany
wagler@zib.de