Mathematik I WS 2013/2014 **Übung 3**

OvG-U Magdeburg

Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 3.1 *Skizzieren Sie die folgenden Mengen in geeigneter Weise (z.B. auf einem Zahlenstrahl, in einem x-y-Koordinatensystem bzw. x-y-z-Koordinatensystem):*

i) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2x = 3 - y^2\}$

ii) $A = \{\frac{n+1}{n^2} : n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \leq 6\}$

iii) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 1 + 2\lambda, y = 1 - \lambda, z = 3\lambda, \lambda \in \mathbb{R} \text{ mit } \lambda \geq 3\}$

Aufgabe 3.2 *Gegeben seien die Menge $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und $N = \{1, 3, 5, 7, 13\}$.*

i) *Bestimmen Sie alle Mengen A, für die gilt: $\{1, 2\} \subseteq A \subseteq M$.*

ii) *Bestimmen Sie die Mengen B, für die gilt: $B \cap M = \emptyset \wedge B \cup M = N$.*

Aufgabe 3.3 *Gegeben seien die Mengen $A = \{(2k - 1) \cdot 2^l : k, l \in \mathbb{N}\}$ und $B = \{2 \cdot n : n \in \mathbb{N}\}$. Zeigen Sie $A = B$.*

Aufgabe 3.4 *Gegeben seien die Menge $M = \{1, 2, 3, 4\}$ und die binäre Relation $R \subset M \times M$ mit $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (x, y), (4, 4)\}$.*

i) *Bestimmen Sie x, y so, dass die Relation R nur reflexiv und nicht symmetrisch und transitiv wird.*

ii) *Bestimmen Sie x, y so, dass die Relation R nur symmetrisch und nicht reflexiv und transitiv wird.*

iii) *Bestimmen Sie x, y so, dass die Relation R nur transitiv und nicht reflexiv und symmetrisch wird.*

Aufgabe 3.5 *Untersuchen Sie, ob folgende binäre Relationen $R \subset M \times M$ auf der Menge M Äquivalenzrelationen sind. Bestimmen bzw. veranschaulichen Sie gegebenenfalls die Äquivalenzklassen.*

i) $M = \mathbb{R}$, $x_1 \, R \, x_2 \Leftrightarrow \lceil x_1 \rceil = \lceil x_2 \rceil$, *wobei $\lceil x \rceil$ die kleinste ganze Zahl k mit $k \geq x$ bedeutet.*

ii) $M = \mathbb{R}$, $(a, b) \, R \, (c, d) \Leftrightarrow a - d = c - b$.

iii) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$, $(x_1, y_1) \, R \, (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$.

Votierungswoche: 04.11. - 08.11.2013

Mathematik I WS 2013/2014 **Übung 2**
OvG-U Magdeburg
Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 2.1 *Beweisen Sie folgende Aussagen:*

i) *Mithilfe eines indirekten Beweises zeige:* $\sqrt{5}$ *ist irrational.*

ii) *Sei* n *eine natürliche Zahl. Mithilfe eines direkten Beweises und mithilfe der vollständigen Induktion zeige:* $n + n^2$ *ist eine gerade Zahl.*

Aufgabe 2.2 *Zeigen Sie mithilfe vollständiger Induktion:*

i) *Für alle natürlichen Zahlen* n *gilt:* $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

ii) *Für alle natürlichen Zahlen* $n \geq 10$ *gilt:* $n! > 2^n > n^3$.

Aufgabe 2.3 *Mit* A, B, C *werden die folgenden Punktmengen der* x, y*-Ebene bezeichnet:*

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1\right\},\ B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\ \vee\ x = -y\right\},$$
$$C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y\right\}.$$

Stellen Sie folgende Mengen in der x, y*-Ebene dar:*

i) A, B, C *und* $A \cap B \cap C$

ii) $(B \cup C) \setminus A$, $B \cup (A \setminus C)$ *und* $A \setminus (B \cup C)$.

Aufgabe 2.4 *Sei*

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\ \vee\ x = 3\}, \\ B &= \{y \in \mathbb{R} : 1 < y \leq 3\ \vee\ y = 4\ \vee\ 5 \leq y < 6\}. \end{aligned}$$

Skizzieren Sie $A \times B$ *in der* x, y*-Ebene.*

Aufgabe 2.5 *Gegeben seien die Menge* $A = \{(a,b), (b,a), (c,c)\}$ *und die Menge* $B = \{\emptyset, \{1\}\}$.

i) *Bestimmen Sie die Potenzmenge* $P(A)$ *der Menge* A .

ii) *Bestimmen Sie die Potenzmenge der Potenzmenge von* B.

Votierungswoche: 28.10. - 01.11.2013

Mathematik I WS 2013/2014 **Übung 1**

OvG-U Magdeburg

Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 1.1 *Gegeben seien die folgenden Aussagen:*

A: Der Studierende hat am Vorkurs zur Mathematik teilgenommen.

B: Der Studierende kommt ausgeschlafen zur Lehrveranstaltung.

C: Der Studierende besucht die Vorlesung zur Mathematik.

E: Der Studierende kann die Übungsaufgaben in der Übung vorrechnen.

F: Der Studierende beschäftigt sich rechtzeitig vor der Übung mit den Übungsaufgaben.

i) *Beschreiben Sie unter Verwendung dieser Aussagen symbolisch :*

   a) *Wenn der Studierende am Vorkurs teilgenommen hat und ausgeschlafen zur Lehrveranstaltung kommt, kann er die Übungsaufgaben vorrechnen.*

   b) *Wenn der Studierende nicht am Vorkurs teilgenommen hat und nicht die Vorlesung besucht, aber sich mit den Übungsaufgaben rechtzeitig beschäftigt, kann er die Übungsaufgaben vorrechnen.*

   c) *Der Studierende kann genau dann die Übungsaufgaben nicht vorrechnen, wenn er den Vorkurs nicht besucht hat oder nicht ausgeschlafen die Vorlesung besucht oder sich nicht mit den Übungsaufgaben beschäftigt.*

ii) *Bilden Sie die Negation der Aussageverbindung unter (i)(a) und formulieren Sie diese in Worten.*

Aufgabe 1.2 *Eine Aussageverbindung wird Tautologie genannt, wenn sie unabhängig vom Wahrheitswert der zugrundeliegenden Bestandteile immer wahr ist. Zeigen Sie mit Hilfe von Wahreheitstafeln, dass die folgenden Aussagen Tautologien sind:*

i) $(\overline{\overline{A} \vee B}) \Longleftrightarrow (A \wedge \overline{B})$

ii) $(\overline{A} \Longrightarrow B) \Longleftrightarrow (A \vee B)$

iii) $(A \Longrightarrow (B \Longrightarrow C)) \Longleftrightarrow ((A \wedge B) \Longrightarrow C))$

Aufgabe 1.3 *Zum Beweis eines mathematischen Satzes in Form einer Implikation $A \Longrightarrow B$ kann die Gültigkeit hierzu äquivalenter Aussageverbindungen nachgewiesen werden. Begründen Sie dieses Vorgehen, indem Sie zeigen, dass die folgenden Aussageverbindungen Tautologien sind:*

i) $(A \Longrightarrow B) \Longleftrightarrow (\overline{B} \Longrightarrow \overline{A})$ *(Beweis der Kontraposition)*

ii) $(A \Longrightarrow B) \Longleftrightarrow ((A \wedge \overline{B}) \Longrightarrow (C \wedge \overline{C}))$ *(Indirekter Beweis/Wiederspruchsbeweis)*

Aufgabe 1.4 *Seien x und c reelle Zahlen ($x, c \in \mathbb{R}$). Bestimmen Sie den Wahrheitswert der folgenden Aussagen:*

i) $\exists c \; \forall x \; [(x^2 + x + c = 0) \Longrightarrow (x \leq 0)]$

ii) $\forall x \; \exists c \; [(x^2 + x + c = 0) \Longrightarrow (x \leq 0)]$

iii) $\forall c \; \forall x \; [(x^2 + x + c = 0) \Longrightarrow (x \leq 0)]$

Votierungswoche: 21.10. - 25.10.2013

Mathematik I WS 2013/2014 **Übung 0**

OvG-U Magdeburg

Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 0.1 *Vereinfachen Sie folgende Terme:*

i) $\left(\frac{2a^2x^2}{3b^2y^2}\right)^3 \cdot \left(\frac{4b^3x^2}{3a^3y^3}\right)^4 \cdot \left(\frac{9a^3y^6}{8b^3x^3}\right)^2, \quad a, b, x, y > 0$

ii) $\frac{(2ax+2ay)^m(bx-by)^n}{(cx^2-cy^2)^{m+2}}, \quad |x| \neq |y| \ldots$

iii) $\sqrt{a^2-b^2}\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}, \quad a > b > 0$

iv) $\frac{\sqrt{a+b}\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^4-b^4}}, \quad a > b > 0$

v) $\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}, \quad a, b > 0$

Aufgabe 0.2 *Sei x eine reelle Zahl ($x \in \mathbb{R}$). Ermitteln Sie x aus den folgenden Gleichungen:*

i) $\frac{3x-10}{5x-10} + \frac{x-8}{x-2} = 2 - \frac{5x-2}{7x-14}$

ii) $\frac{bx-a}{a+bx} - \frac{3b+bx}{bx-a} = \frac{3ab-b^2}{a^2-b^2x^2}$

iii) $||x+1|-2| = 1$

iv) $\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x} = 2\sqrt{x-1}$

v) $\left(\frac{3}{4}\right)^{3x-7} = \left(\frac{4}{3}\right)^{7x-3}$

Aufgabe 0.3 *Bestimmen Sie x aus den Gleichungen:*

i) $\log_3(x-4) + \log_3(x+4) = 3$

ii) $2\log_2(4-x) + 4 = \log_2(x+5) - 1$

iii) $\log_5 x = \log_5 6 - 2\log_5 3$

Aufgabe 0.4 *Vereinfachen Sie:*

$$\text{i)}\sin^4 x - \cos^4 x, \qquad \text{ii)}\sin^4 x + \frac{1}{2}\sin^2(2x) + \cos^4 x.$$

Aufgabe 0.5 *Berechnen Sie für die Polynome $P_1(x) = 2x^5 - 6x^4 - 6x^3 + 22x^2 - 12x$ und $P_2(x) = (x-1)^2$ den Quotienten $P_1(x)/P_2(x)$.*

Besprechung in der ersten Vorlesungswoche