Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Wiederholung der Modulprüfung Mathematik I

Fachrichtung: Computer Science in Engineering,
Computervisualistik, Informatik, Wirtschaftsinformatik

WS 2011/12

Datum 29.03.2012

Name	Vorname	Fachrichtg.	Matrikelnr.

Punkte Klausur

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$	Note
max. Punkte								
Punkte								

Bitte beachten!

- Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Matrikelnummer.
- Beginnen Sie jede Aufgabe mit einem neuen Blatt.
- Alle Aussagen müssen sorgfältig begründet werden.
- Bearbeitungszeit **120** Minuten.
- Erlaubte Hilfsmittel: **Keine.**

Viel Erfolg!

1. i) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ seien die Zahlen b_n rekursiv definiert durch $b_0 = 1, b_1 = \mathrm{i}$ und $b_n = 2b_{n-1} - b_{n-2} (n \geq 2)$. Beweisen Sie mit vollständiger Induktion $b_n = n\,\mathrm{i} - n + 1$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

   ii) Lösen Sie die Gleichung $(1-\mathrm{i})z^2 = 4\sqrt{2}\mathrm{i}$ in $\mathbb{C}$, und skizzieren Sie die Lösungen in der Gaußschen Zahlenebene.

[Lösung]

zu i) Induktionsanfang ist schon gegeben:
Induktionsschluss: $b_n = n\,\mathrm{i} - n + 1 \Rightarrow b_{n+1} = (n+1)\,\mathrm{i} - n$
Nach Definition (rekursiver) gilt:

$$\begin{aligned} b_{n+1} = 2b_n - b_{n-1} &= 2(n\,\mathrm{i} - n + 1) - ((n-1)\,\mathrm{i} - n + 2) \\ &= (n+1)\,\mathrm{i} - n \end{aligned}$$

zu ii) $(1-\mathrm{i})z^2 = 4\sqrt{2}\mathrm{i} \qquad |:(1-\mathrm{i})$

$z^2 = \frac{4\sqrt{2}\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} \cdot \frac{1+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = \frac{4\sqrt{2}\mathrm{i} - 4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}i - 2\sqrt{2}$

Also für $a = 2\sqrt{2}\mathrm{i} - 2\sqrt{2}$ ist $\varphi_a = \frac{3}{4}\pi$ und $r = \sqrt{8+8} = 4$, somit $a = 4e^{\mathrm{i}\frac{3}{4}\pi}$

Für die Lösungen (Wurzeln) ergibt sich:

$$\begin{array}{llll} & z_1 = \sqrt{4}e^{\mathrm{i}\frac{3}{8}\pi} & \text{und} & z_2 = 2e^{\mathrm{i}\frac{\frac{3}{4}+2}{2}\pi} \\ & z_1 = 2e^{\mathrm{i}\frac{3}{8}\pi} & & z_2 = 2e^{\mathrm{i}\frac{11}{8}\pi} \\ \text{oder} & z_1 = 2(\cos\frac{3}{8}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{3}{8}\pi) & & z_2 = 2(\cos\frac{11}{8}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{11}{8}\pi) \end{array}$$

2. Sei R eine binäre, reflexive und symmetrische Relation über der Menge $\mathbb{R}^2$ mit $(x_1, y_1)R(x_2, y_2)$ genau dann, wenn $x_1 - x_2 = y_1 - y_2$ gilt.

   (i) Zeigen Sie, dass R transitiv, also eine Äquivalenzrelation ist.

   (ii) Untersuchen Sie, ob die Äquivalenzklassen $[(0,0)]_R$ und $[(1,2)]_R$ Unterräume des $\mathbb{R}^2$ sind.

[Lösung]

zu (i) Transitivität: Es ist zu zeigen, dass für alle $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ gilt:
$(x_1, y_1)R(x_2, y_2) \wedge (x_2, y_2)R(x_3, y_3) \Rightarrow (x_1, y_1)R(x_3, y_3)$
Nach Definition von R gilt:
$((x_1, y_1)R(x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 - x_2 = y_1 - y_2) \wedge ((x_2, y_2)R(x_3, y_3)$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow x_2 - x_3 = y_2 - y_3) \quad &\Rightarrow \quad x_2 = x_1 - y_1 + y_2 \wedge x_2 = y_2 - y_3 + x_3 \\ \Rightarrow x_1 - y_1 + y_2 \quad &= \quad y_2 - y_3 + x_3 | - y_2 - x_3 + y_1 \\ \Rightarrow x_1 - x_3 \quad &= \quad y_1 - y_3 \\ \Leftrightarrow (x_1, y_1) \quad &R \quad (x_2, y_2) \end{aligned}$$

zu (ii) $[(0,0)]_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - 0 = y - 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\}$
$[(1,2)]_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - 1 = y - 2\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x + 1$
Beide Äquivalenzklassen sind Geraden, aber nur $[(0,0)]_R$ geht durch den Ursprung und ist damit ein Unterraum des $\mathbb{R}^2$.

3. Sei M die Menge der Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = ax + b$ mit den Koeffizienten $a, b \in \mathbb{Q}$ und $a \neq 0$, d.h. $M = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = ax + b, a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{Q}\}$.

   (i) Zeigen Sie, dass die assoziative Komposition $\circ$ von Abbildungen mit $f_1(x) \circ f_2(x) = f_1(f_2(x))$ abgeschlossen in M, aber nicht kommutativ ist.

   (ii) Bestimmen Sie das neutrale Element bzgl. $\circ$.

   (iii) Geben Sie das zu $f(x) = ax + b$ inverse Element bzgl.$\circ$ an.

   [Lösung]

zu (i) Für alle $f_1(x) = a_1x + b_1$ und $f_2(x) = a_2x + b_2$ gilt:

$$\begin{aligned} f_1(x) \circ f_2(x) &= a_2(a_1x + b) + b_2 \\ &= \underbrace{a_2a_1}_{\substack{\in\mathbb{Q} \\ \neq 0}} x + \underbrace{a_2b + b_2}_{\in\mathbb{Q}} \end{aligned}$$

Damit folgt $f_1(x) \circ f_2(x) \in M$.

zu (ii) Für ein neutrales Element $f_N(x) = a_N\, x + b_N$ muss gelten

$$\begin{aligned} f(x) \circ f_N(x) &= a_N(ax + b) + b_N = f(x) = ax + b \\ &\Leftrightarrow a_Nax + a_Nb + b_N = ax + b \end{aligned}$$

$\Rightarrow a_Na = a \wedge a_Nb + b_N = b$
$\Rightarrow a_N = 1 \wedge b_N = 0 \Rightarrow f_N(x) = x$ ist das neutrale Element.

zu (iii) Für ein inverses Element $f_I(x) = a_I\, x + b_I$ zu $f(x) = ax + b$ muss gelten

$$\begin{aligned} f(x) \circ f_I(x) &= a_I(ax + b) + b_I &= f_N(x) = x \\ &\Leftrightarrow a_Iax + a_Ib + b_I &= x \Rightarrow a_Ia = 1 \wedge a_Ib + b_I = 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow a_I = \frac{1}{a} \wedge b_I = -\frac{b}{a}$
$\Rightarrow f_I(x) = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$ ist das inverse Element.

4. Gegeben sei die Matrix A mit

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \\ 6 & \lambda & 13 \end{bmatrix}.$$

(i) Berechnen Sie $\det A$ in Abhängigkeit von $\lambda \in \mathbb{R}$.

(ii) Bestimmen Sie alle Werte für $\lambda \in \mathbb{R}$ für die die inverse Matrix A^{-1} nicht existiert.

(iii) Ermitteln Sie für den Fall $\lambda = 0$ die inverse Matrix.

[Lösung]

zu (i)

$$\begin{array}{ccc|cccllll}
2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & |:2 & |\cdot(-2) & |\cdot(-3) \\
4 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 & & \leftarrow & \\
6 & \lambda & 13 & 0 & 0 & 1 & & & \leftarrow \\
\hline
1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & & \leftarrow & \\
0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 & |:(-1) & |\cdot\frac{3}{2} & |(\lambda-9) \\
0 & \lambda-9 & 10 & -3 & 0 & 1 & & & \leftarrow \\
\hline
1 & 0 & 2 & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} & 0 & & \text{Hiermit folgt:} & \\
0 & 1 & -1 & 2 & -1 & 0 & & \text{zu (i) } \det A = 1\cdot 1\cdot(\lambda+1) = \lambda+1 & \\
0 & 0 & \lambda+1 & -2\lambda+15 & \lambda-9 & 1 & & \text{zu (ii) Also für } \lambda=-1 \text{ existiert } A^{-1} \text{ nicht} & \\
\hline
\multicolumn{3}{l|}{\text{Setze } \lambda=0:} & & & & & & \\
1 & 0 & 2 & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} & 0 & & & \leftarrow \\
0 & 1 & -1 & 2 & -1 & 0 & & \leftarrow & \\
0 & 0 & 1 & 15 & -9 & 1 & & |\cdot & |\cdot(-2) \\
\hline
1 & 0 & 0 & -\frac{65}{2} & \frac{39}{2} & -2 & & & \\
0 & 1 & 0 & 17 & -10 & 1 & & & \\
0 & 0 & 1 & 15 & -9 & 1 & & &
\end{array}$$

Probe:

$$\begin{array}{ccc|ccc}
 & & & -\frac{65}{2} & \frac{39}{2} & -2 \\
 & & & 17 & -10 & 1 \\
 & & & 15 & -9 & 1 \\
\hline
2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
4 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\
6 & 0 & 13 & 0 & 0 & 1
\end{array}$$

Das bedeutet

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{65}{2} & \frac{39}{2} & -2 \\ 17 & -10 & 1 \\ 15 & -9 & 1 \end{bmatrix}.$$

5.

a) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ Unterraum mit Basis $\mathbf{u_1}, \dots, \mathbf{u_k}$, und sei $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ mit $\langle \mathbf{u_i}, \mathbf{v} \rangle = 0$ für $i = 1, \dots, k$. Man zeige:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0 \text{ für alle } \mathbf{u} \in U.$$

b) Sei $U \subset \mathbb{R}^4$ der Unterraum gegeben durch

$$U = \operatorname{lin}\{(1,1,1,1)^\intercal, (-2,4,-8,16)^\intercal, (7,-5,19,-29)^\intercal\}.$$

i) Man bestimme $\dim U$ und eine Basis von U.

ii) Man bestimme ein $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^4$ mit $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ für alle $\mathbf{u} \in U$.

[Lösung] zu a). Sei $\mathbf{u} \in U$. Nach Satz 5.28 gibt es $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ mit $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{u_i}$. Aufgrund der Linearität des Skalarprodukts (siehe Def 7.1) und der Voraussetzung folgt:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{u_i}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{i=1}^k \lambda_i \langle \mathbf{u_i}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{i=1}^k (\lambda_i \cdot 0) = 0.$$

zu b). i) Zum Beispiel: Da der Unterraum von drei Vektoren erzeugt wird, ist $\dim U \leq 3$ (vgl. Satz 5.29). Andererseits sind die ersten beiden Vektoren $(1,1,1,1)^\intercal$, $(-2,4,-8,16)^\intercal$ sicherlich linear unabhängig, da sie keine Vielfachen voneinander sind. Also wissen wir auch $\dim U \geq 2$ (vgl. Satz 5.29). Somit bleibt zu entscheiden, ob die drei Vektoren linear abhängig oder linear unabhängig sind. Wegen

$$3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -8 \\ 16 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 19 \\ -29 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

sind die drei Vektoren linear abhängig und $\dim U = 2$. Insbesondere bilden $(1,1,1,1)^\intercal$ und $(-2,4,-8,16)^\intercal$ eine Basis von U.

ii) Nach der Lösung von i) bilden $\mathbf{u}_1 = (1,1,1,1)^\intercal$ und $\mathbf{u}_2 = (-2,4,-8,16)^\intercal$ eine Basis von U, und mit Teil a) reicht es ein $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^4$ zu bestimmen mit $\langle \mathbf{u_i}, \mathbf{v} \rangle = 0$, $i = 1, 2$, d.h. $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 0$ und $-2\, v_1 + 4, v_2 - 8\, v_3 + 16\, v_4 = 0$, wobei v_i die Koordinaten von $\mathbf{v}$ sind. Gesucht ist also eine Lösung des homogenen Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & -8 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

etwa $\mathbf{v} = (-2,1,1,0)^\intercal$.

6.

a) Für $z \in \mathbb{C}$ sei

$$A(z) = \begin{pmatrix} z+1 & -i & 1+i \\ 1 & 4i & z+1-i \\ i\,z+i & z & i-1 \end{pmatrix}.$$

Man zeige $\det A(z) = -z^3 + (i-1)z^2 + (i+2)z - 2i$ und bestimme alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\det A(z) = 0$.

b) Sei $\lambda \neq 0$ Eigenwert einer regulären Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Man zeige, dass λ^{-1} Eigenwert von A^{-1} ist.

[Lösung] zu a) Berechnen der Determinante liefert (Entwicklung nach der 2.ten Zeile)

$$\begin{aligned}
\det A(z) &= -1 \det \begin{pmatrix} -i & 1+i \\ z & i-1 \end{pmatrix} + 4i \begin{pmatrix} z+1 & 1+i \\ i\,z+i & i-1 \end{pmatrix} \\
&\quad - (z+1-i) \det \begin{pmatrix} z+1 & -i \\ i\,z+i & z \end{pmatrix} \\
&= -(1+i)(1-z) + 4i\,0 - (z+1-i)(z^2-1) \\
&= (1-z)\left((-1-i) + (z+1-i)(z+1)\right) \\
&= (1-z)(z^2 + (2-i)z - 2\,i) \\
&= (1-z)(z+2)(z-i) = -z^3 + (i-1)z^2 + (i+2)z - 2i.
\end{aligned}$$

Insbesondere ergibt sich aus der vorletzten Gleichung: $\det A(z) = 0$ genau dann, wenn $z \in \{1, -2, i\}$ (vgl. Satz 3.56).

zu b) Da λ Eigenwert von A ist, gibt es nach Def 9.15 einen Eigenvektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ mit $A\,\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Mit A regulär folgt

$$A^{-1}\,\mathbf{v} = A^{-1}\left(\lambda^{-1}(\lambda\mathbf{v})\right) = \lambda^{-1}A^{-1}(\lambda\mathbf{v}) = \lambda^{-1}A^{-1}(A\,\mathbf{v}) = \lambda^{-1}\,\mathbf{v}.$$

Also ist λ^{-1} Eigenwert von A^{-1}.