

Fakultät für Mathematik  
Institut für Algebra und Geometrie  
Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

## Modulprüfung Mathematik II

Fachrichtung: Computer Science in Engineering,  
Computervisualistik, Informatik, Wirtschaftsinformatik

SS 2007  
17.11.2007

Name	Vorname	Fachrichtg.	Matrikelnr.

### Punkte Klausur

Aufgabe	1	2	3	4	5	6
max. Punkte	5	5	5	5	5	5
Punkte						

Punkte Klausur	Bonuspunkte	$\Sigma$	Note

### Bitte beachten!

- Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Matrikelnummer.
- Beginnen Sie jede Aufgabe mit einem neuen Blatt.
- Alle Aussagen müssen sorgfältig begründet werden.
- Bearbeitungszeit 120 Minuten.

**Viel Erfolg!**

1. Man untersuche die Folgen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  auf Konvergenz/(bestimmte)Divergenz, und berechne gegebenenfalls den Grenzwert:

i)  $a_n = \frac{\sqrt{n} - 6n}{3n + 1}$ ,    ii)  $a_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{3n}$ ,    iii)  $a_n = n - \sqrt{n^2 - n + 1}$ .

2.

- i) Man bestimme den Grenzwert der folgenden Reihe:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3^k}.$$

- ii) Bestimmen Sie den Konvergenzbereich und den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-x)^{k-1}}{k}.$$

3.

- i) Zeigen Sie, dass die folgende Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  im Punkt 0 nicht stetig ist:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

- ii) Sei  $c > 0$ , und sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion mit der Eigenschaft  $|f(x) - f(y)| \leq c \cdot |x - y|$  für alle  $x, y \in \mathbb{R}$ . Zeigen Sie, dass  $f$  stetig ist.
- iii) Zeigen Sie mithilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung:  $|\ln x - \ln y| \leq |x - y|$  für alle  $x, y \in [1, \infty)$ .

4.

- i) Bestimmen Sie den Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x^2$ .
- ii) Bestimmen Sie das Taylorpolynom 3.ten Grades der Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = e^{x/a}$  an der Stelle  $x^* = a$ .

5. Sei  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = e^{-x^2}$ .

- i) Man bestimme die Extrema der Funktion  $f$ .
- ii) Man bestimme die Wendepunkte der Funktion  $f$ .
- iii) Man skizziere den Graphen der Funktion.

**6.**

i) Sei  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 1$ . Berechnen Sie

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\cos(kx))^2 dx.$$

ii) Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$f(x) = e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{3}}.$$

Für eine Konstante  $c \in \mathbb{R}$  bestimme man eine Stammfunktion  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $F(0) = c$ .