

Differentialgeometrie II  
SS 2000

Dirk Ferus

25. November 2004

# Inhaltsverzeichnis

1	Abstrakte Mannigfaltigkeiten	4
2	Integration von Vektorfeldern	6
3	Der Satz von Frobenius	10
4	Elementares über Liegruppen (I)	12
5	Elementares über Liegruppen (II)	14
6	Überlagerungen, Aktionen von Liegruppen	17
7	Homogene Räume	20
8	Riemannsche Mannigfaltigkeiten	22
9	Innere Metrik	25
10	Geodätische	27
11	Geodätische und Kürzeste I	31
12	Geodätische und Kürzeste II	34
13	Geodätische Konvexität	36
14	Der Satz von Hopf-Rinow	37
15	Jacobifelder	40
16	Krümmungstensor	42
17	Konstante Krümmung	45
18	Raumformen	47
19	Zweite Variation	50
20	Jacobifelder, der Satz von Jacobi	52
21	Die Sätze von Bonnet-Myers und Synge	54
22	Riemannsche Submersionen	59
23	Der komplexe projektive Raum	61

24 Vergleich von Jacobifeldern, Satz von Hadamard-Cartan	65
25 Vergleichssatz für Jacobifelder	70
26 Längen- und Winkelvergleich	71
27 Dreiecke maximalen Umfangs, Sphärensätze	73
28 Satz vom maximalen Durchmesser	75
29 Positiv gekrümmte Mannigfaltigkeiten mit großem Injektivitätsradius	77
30 Injektivitätsradius und Sphärensatz	80

# 1 Abstrakte Mannigfaltigkeiten

*Differenzierbarkeit* bedeutet Differenzierbarkeit vom Typ  $C^\infty$ .

**Definition.** Sei  $m \in \mathbb{N}$ . Eine *differenzierbare Mannigfaltigkeit* der Dimension  $m$  ist eine Menge  $M$  zusammen mit einer Familie injektiver Abbildungen

$$u_\alpha : M \supset U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^m, \alpha \in A,$$

so daß folgendes gilt:

(i)  $M = \bigcup U_\alpha$ .

(ii) Für alle  $\alpha, \beta \in A$  ist

$$u_\beta \circ u_\alpha^{-1} : \mathbb{R}^m \supset u_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow u_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{R}^m$$

ein Diffeomorphismus offener Teilmengen des  $\mathbb{R}^m$ .

(iii) Die Familie  $(u_\alpha, U_\alpha)_{\alpha \in A}$  ist maximal bezüglich der Eigenschaft (ii).

Die  $u_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^m$  heißen *Karten* für  $M$ , eine Familie  $(u_\alpha, U_\alpha)_{\alpha \in A}$  mit (i)-(ii) heißt ein *Atlas* für  $M$ , und ein maximaler Atlas heißt auch eine *differenzierbare Struktur* für  $M$ .

Die Abbildungen  $u_\beta \circ u_\alpha^{-1} : u_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow u_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$  heißen *Kartenwechsel*.

**Bemerkungen.** 1. Jeder Atlas ist in einem eindeutig bestimmten maximalen Atlas enthalten. Deshalb bezeichnet man auch eine Menge mit einem *nicht notwendig maximalen* Atlas als differenzierbare Mannigfaltigkeit.

2. Die Familie  $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$  bildet die Basis einer Topologie für  $M$  (kanonische Mannigfaltigkeitstopologie): Die offenen Mengen von  $M$  sind gerade die beliebigen Vereinigungen von Mengen  $U_\alpha$ .

3. Wir setzen stets voraus, daß unsere Mannigfaltigkeiten mit dieser Topologie das *Hausdorffsche Trennungsaxiom* erfüllen und eine *abzählbare Basis der Topologie* besitzen.

**Beispiel 1.** Die Untermannigfaltigkeiten Euklidischer Vektorräume aus Diffgeo I sind differenzierbare Mannigfaltigkeiten im neuen Sinne. Umgekehrt ist jede abstrakte Mannigfaltigkeit „diffeomorph“ zu einer solchen Untermannigfaltigkeit (Whitneyscher Einbettungssatz).

**Beispiel 2 (Reeller projektiver Raum  $\mathbb{R}P^m$ ).** Wir betrachten auf der Einheitsphäre  $S^m$  die Äquivalenzrelation  $x \sim \pm x$  und die Restklassenmenge

$$\mathbb{R}P^m = S^m / \sim.$$

Wir bezeichnen die Restklasse von  $x = (x_1, \dots, x_{m+1})$  mit  $[x]$  und setzen

$$U_\alpha := \{[x] \mid x_\alpha \neq 0\}$$

$$u_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^m, [x] \mapsto \left( \frac{x_1}{x_\alpha}, \dots, \frac{x_{\alpha-1}}{x_\alpha}, \frac{x_{\alpha+1}}{x_\alpha}, \dots, \frac{x_{m+1}}{x_\alpha} \right)$$

für  $\alpha = 1, \dots, m+1$ . Das ist dann ein Atlas für  $\mathbb{R}P^m$ .

**Definition.** Seien  $M, N$  differenzierbare Mannigfaltigkeiten,  $G \subset M$  offen. Eine Abbildung  $f : M \supset G \rightarrow N$  heißt *differenzierbar*, wenn für alle Karten  $u_\alpha$  von  $M$  und  $v_\beta$  von  $N$  die Abbildung  $v_\beta \circ f \circ u_\alpha^{-1}$  differenzierbar (im Sinne der Analysis II) ist.

**Definition.** Sei  $M$  eine  $m$ -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit und sei  $p \in M$ .

(i) Die Menge

$$C^\infty(p) := \{\phi : G \rightarrow \mathbb{R} \text{ differenzierbar; } G \text{ offene Umgebung von } p\}$$

trägt offensichtliche additive und multiplikative Strukturen. Identifiziert man zwei Funktionen in  $C^\infty(p)$ , wenn sie auf einer offenen Umgebung von  $p$  gleich sind, so erhält man eine Äquivalenzrelation und als Restklassenmenge nach dieser den Raum der *Keime differenzierbarer Funktionen in  $p$* .

(ii) Eine Abbildung  $v : C^\infty(p) \rightarrow \mathbb{R}, \phi \mapsto v \cdot \phi$  mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} v \cdot (\lambda\phi + \mu\psi) &= \lambda v \cdot \phi + \mu v \cdot \psi, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \\ v \cdot (\phi\psi) &= (v \cdot \phi)\psi(p) + \phi(p)(v \cdot \psi) \end{aligned}$$

heißt eine *Derivation* in  $p$ .

(iii) Die Menge der Derivationen in  $p$  bildet einen  $\mathbb{R}$ -Vektorraum, den *Tangentenraum*  $T_p M$  von  $M$  in  $p$ .

**Satz 1.** Sind  $M, p$  wie in der Definition, und ist  $u$  eine Karte für  $M$  um  $p$ , so sind die

$$\frac{\partial}{\partial u_i} \Big|_p : \phi \mapsto \frac{\partial(\phi \circ u^{-1})}{\partial x_i} \Big|_{u(p)}, \quad i = 1, \dots, m$$

*Derivationen in  $p$ . Sie bilden eine Basis für  $T_p M$ .*

*Wir bezeichnen mit  $du_i : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  die Vektoren der dualen Basis:*

$$v = \sum du_i(v) \frac{\partial}{\partial u_i} \Big|_p.$$

*Beweis.* 1. Aus der Definition der Derivation folgt  $v \cdot 1 = 0$  und damit  $v \cdot \lambda = 0$  für konstante Funktionen  $\lambda$ .

2. Nach einem Lemma aus Diffgeo I läßt sich  $\phi$  in einer Umgebung von  $p$  schreiben als

$$\phi = \phi(p) + (u_1 - a_1)(g_1 \circ u) + \dots + (u_m - a_m)(g_m \circ u),$$

wobei  $a = (a_1, \dots, a_m) = u(p)$ , und die  $g_i$   $C^\infty$ -Funktionen auf einer Umgebung von  $a$  mit

$$g_i(a) = \frac{\partial(\phi \circ u^{-1})}{\partial x_i}(a).$$

sind.

3. Daraus folgt

$$v \cdot \phi = v \cdot u_1 \frac{\partial(\phi \circ u^{-1})}{\partial x_1}(a) + \dots + v \cdot u_m \frac{\partial(\phi \circ u^{-1})}{\partial x_m}(a).$$

Daher ist  $v$  durch die  $v \cdot u_i$  vollständig bestimmt, die Abbildung

$$T_p M \rightarrow \mathbb{R}^m, v \mapsto (v \cdot u_1, \dots, v \cdot u_m)$$

ist injektiv. Sie besitzt ein Inverses:

$$(y_1, \dots, y_m) \mapsto y_1 \frac{\partial}{\partial u_1} \Big|_p + \dots + y_m \frac{\partial}{\partial u_m} \Big|_p.$$

□

**Satz 2.** Mit den Bezeichnungen des vorangehenden Lemmas seien  $TM$  die Vereinigung aller Tangentialräume an  $M$  und  $\pi : TM \rightarrow M$  die kanonische Projektion. Dann definiert für jede Karte  $u : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  von  $M$

$$\tilde{U} := \pi^{-1}(U), \tilde{u}_i := u_i \circ \pi, \tilde{u}_{m+i} := du_i$$

eine für  $TM$ . Die Menge dieser Karten bildet einen Atlas der  $TM$  zu einer  $2m$ -dimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeit macht.

**Definition.** Sei  $f : M \rightarrow N$  eine differenzierbare Abbildung zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten und sei  $p \in G$ . Dann definiert man das *Differential*  $d_p f : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$  durch

$$d_p f(v) \cdot \phi := v \cdot (\phi \circ f) \text{ für alle } v \in T_p M \text{ und } \phi \in C^\infty(f(p)).$$

Das ist eine lineare Abbildung.

## 2 Integration von Vektorfeldern

**Definition.** Sei  $X \in \Gamma(TM)$  ein differenzierbares Vektorfeld auf der Mannigfaltigkeit  $M$ . Eine Kurve  $c : \mathbb{R} \supset J \rightarrow M$  auf dem Intervall  $J$  heißt eine *Integralkurve* von  $X$ , wenn  $\dot{c}(t) = X_{c(t)}$  für alle  $t \in J$ .  $c$  heißt *maximal*, wenn es sich nicht als Integralkurve auf ein größeres Intervall fortsetzen läßt.

**Bemerkung.** Ist  $c$  eine Integralkurve von  $X$  und  $c(J) \subset U$  im Definitionsbereich einer Karte  $u : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ , so gilt

$$\begin{aligned} \dot{c} &= \sum du_i(\dot{c}) \frac{\partial}{\partial u_i} \Big|_c = \sum \frac{d(u_i \circ c)}{dt} \frac{\partial}{\partial u_i} \Big|_c, \\ X_c &= \sum X_i(c) \frac{\partial}{\partial u_i} \Big|_c = \sum (X_i \circ u^{-1})(u \circ c) \frac{\partial}{\partial u_i} \Big|_c. \end{aligned}$$

Daß  $c$  eine Integralkurve von  $X$  ist, ist also äquivalent zu dem folgenden System gewöhnlicher Differentialgleichungen:

$$\frac{dc_i}{dt} = (X_i \circ u^{-1})(c_1, \dots, c_n), \quad i = 1, \dots, n,$$

für die reellen Funktionen  $c_i := u_i \circ c$ . In diesem Sinne ist ein Vektorfeld eine Differentialgleichung. Aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen weiß man, daß ein solches System (mit differenzierbaren Funktionen  $X_i \circ u^{-1}$ ) bei gegebenen Anfangswerten  $c_i(a)$  eine Lösung hat, die bis auf eventuelle Erweiterung des Definitionsbereiches auch eindeutig ist. Genauer gilt:

**Satz 3 (Maximaler Fluß von Vektorfeldern).** Sei  $X$  ein differenzierbares Vektorfeld auf der Mannigfaltigkeit  $M$ . Dann gibt es eine offene Umgebung  $W$  von  $\{0\} \times M \subset \mathbb{R} \times M$  und eine differenzierbare Abbildung

$$\Phi : W \rightarrow M, (t, p) \mapsto \Phi(t, p) = \Phi_t(p)$$

mit folgenden Eigenschaften:

- (i) Für jedes  $p \in M$  ist  $J_p := \{t \mid (t, p) \in W\}$  ein offenes Intervall um 0.
- (ii)  $\Phi_0 = \text{Id}_M$
- (iii) Für jedes  $p \in M$  ist  $J_p \ni t \mapsto \Phi_t(p)$  eine maximale Integralkurve von  $X$ , insbesondere

$$\frac{d}{dt} \Phi_t(p) = X_{\Phi_t(p)}.$$

$W$  und  $\Phi$  sind durch diese Eigenschaften eindeutig bestimmt.  $\Phi$  heißt der maximale Fluß des Vektorfeldes  $X$ . (Ohne die Forderung der Maximalität ist  $\Phi$  bis auf den Definitionsbereich eindeutig.)

Ist  $M$  kompakt, oder hat  $X$  kompakten Träger, so gilt

$$\begin{aligned} W &= \mathbb{R} \times M, \\ \Phi_t : M &\rightarrow M \text{ ist für jedes } t \in \mathbb{R} \text{ ein Diffeomorphismus, und} \\ \Phi_{s+t} &= \Phi_s \circ \Phi_t \text{ für alle } s, t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{1}$$

Man sagt,  $\Phi$  ist eine 1-Parametergruppe von Diffeomorphismen.

Ist  $(t, p) \in W$ , so bildet  $\Phi_t$  im allgemeinen eine offene Umgebung von  $p$  diffeomorph ab und (1) gilt für hinreichend kleines  $|s|, |t|$  auf einer offenen Umgebung von  $p$ . Man nennt  $\Phi$  dann auch eine lokale 1-Parametergruppe von (lokalen) Diffeomorphismen.

**Bemerkung.** Dies ist im Kern ein Standardsatz aus der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen über maximale Lösungen und die differenzierbare Abhängigkeit solcher Lösungen von den Anfangsbedingungen. Für die Reduktion der differentialgeometrischen Formulierung auf die analytische vgl. [Gromoll, Klingenberg, Meyer: Riemannsche Geometrie im Großen, Springer LNM 55, 1968, §8]. Interpretiert man das Vektorfeld als Geschwindigkeitsfeld einer stationären Strömung, so liefert der Fluß gerade diese Strömung.

**Beispiel 3.** Seien  $M = S^2$ ,  $X_{(x,y,z)} := (-y, x, 0)$ . Dann ist

$$\Phi_t(x, y, z) = (\cos t x - \sin t y, \sin t x + \cos t y, z).$$

Für die Gaußfelder  $\frac{\partial}{\partial u_i}$  einer Karte sind die Integralkurven gerade die Koordinatenlinien. Hat man umgekehrt  $m$  überall linear unabhängige Vektorfelder, so kann man fragen, ob sie die Gaußfelder einer Karte sind, d.h ob ihre Integralkurven als Koordinatenlinien taugen. Im allgemeinen ist das nicht der Fall, weil Gaußfelder verschwindende Lieklammer haben. Das ist also eine notwendige Voraussetzung. Wir wollen im folgenden zeigen, daß sie auch hinreichend ist.

**Definition.** Ist  $X \in \Gamma(M)$  ein Vektorfeld auf  $M$  und  $f : M \rightarrow N$  ein Diffeomorphismus, so definieren wir  $f_*X \in \Gamma(N)$  durch

$$(f_*X)_q := df(X_{f^{-1}(q)}).$$

Offenbar sind  $X$  und  $f_*X$  dann  $f$ -verwandt.

**Lemma 1.** *Es gilt*

$$f_*g_*X = (fg)_*X$$

Ist  $\Phi$  der maximale Fluß von  $X$ , so ist

$$(\Phi_t)_*X = X,$$

wo beide Seiten definiert sind.

*Beweis.* Zunächst ist

$$(f_*g_*X)_p = df(g_*X_{f^{-1}(p)}) = df(dg(X_{g^{-1}(f^{-1}(p))})) = d(fg)(X_{(fg)^{-1}(p)}) = ((fg)_*X)_p.$$

Die zweite Behauptung folgt aus

$$\begin{aligned} (\Phi_{s*}X)_p &= d\Phi_s(X_{\Phi_{-s}(p)}) = d\Phi_s\left(\frac{d}{dt}\Big|_{-s} \Phi(p)\right) = \frac{d}{dt}\Big|_{-s} \Phi_s\Phi(p) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{-s} \Phi_{s+t}(p) = \frac{d}{dt}\Big|_0 \Phi(p) = X_p. \end{aligned}$$

□

**Satz 4 (Geometrische Interpretation der Lieklammer).** *Seien  $X, Y$  Vektorfelder auf der Mannigfaltigkeit  $M$ . Sei  $\Phi$  der maximale Fluß von  $X$ . Dann gilt*

$$[X, Y]_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \{Y_p - (\Phi_{t*}Y)_p\}.$$

*Beweis.* Sei  $\phi$  eine  $C^\infty$ -Funktion. Dann gilt

$$\begin{aligned} (Y_p - (\Phi_{t*}Y)_p) \cdot \phi &= (Y \cdot \phi)_p - (\Phi_{t*}Y \cdot \phi)_p \\ &= (Y \cdot \phi)_p - (d\Phi_t(Y_{\Phi_{-t}(p)})) \cdot \phi \\ &= (Y \cdot \phi)_p - Y_{\Phi_{-t}(p)} \cdot (\phi \circ \Phi_t) \end{aligned}$$

Wir benutzen nun wie schon im letzten Abschnitt, daß sich  $\phi \circ \Phi_t$  schreiben läßt als

$$\phi \circ \Phi_t = \phi + t\psi(t, \cdot)$$

mit einer differenzierbaren Funktion  $\psi$ , für die  $\psi(0, \cdot) = X \cdot \phi$ . Es folgt

$$\begin{aligned} (Y_p - (\Phi_{t*}Y)_p) \cdot \phi &= (Y \cdot \phi)_p - Y_{\Phi_{-t}(p)} \cdot (\phi + t\psi(t, \cdot)) \\ &= (Y \cdot \phi)_p - (Y \cdot \phi)_{\Phi_{-t}(p)} - tY_{\Phi_{-t}(p)} \cdot \psi(t, \cdot) \end{aligned}$$

Für den Grenzwert finden wir

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (Y_p - (\Phi_{t*}Y)_p) \cdot \phi &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} ((Y \cdot \phi)_p - (Y \cdot \phi)_{\Phi_{-t}(p)}) - \lim_{t \rightarrow 0} Y_{\Phi_{-t}(p)} \cdot \psi(t, \cdot) \\ &= X_p \cdot (Y \cdot \phi) - Y_p \cdot (X \cdot \phi) \\ &= [X, Y]_p \cdot \phi \end{aligned}$$

□

Durch Anwendung des letzten Satzes auf  $(\Phi_s)_*Y$  erhält man



**Korollar 1.** Für hinreichend kleines  $s$  gilt unter denselben Voraussetzungen

$$\begin{aligned} (\Phi_s)_*[X, Y] &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \{ (\Phi_s)_*Y - (\Phi_{s+t})_*Y \} \\ &= -\frac{d}{dt}\Big|_{t=s} (\Phi_t)_*Y. \end{aligned}$$

*Beweis.* Folgt aus Satz 4 und Lemma 1. □

**Satz 5.** Sind  $X, Y$  Vektorfelder auf  $M$  mit maximalen Flüssen  $\Phi, \Psi$ , so gilt

$$\Phi_t \circ \Psi_s = \Psi_s \circ \Phi_t \text{ für alle } s, t \iff [X, Y] = 0.$$

Wenn  $[X, Y] = 0$ , sagen wir die Vektorfelder  $X$  und  $Y$  kommutieren. Die Flüsse kommutieren also genau dann, wenn die Vektorfelder kommutieren.

*Beweis.* Für festes  $t$  erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \Phi_t \Psi_s \Phi_{-t}(p) &= d\Phi_t \left( \frac{d}{ds} \Psi_s(\Phi_{-t}(p)) \right) = d\Phi_t(Y_{\Psi_s \Phi_{-t}(p)}) \\ &= d\Phi_t(Y_{\Phi_{-t} \Phi_t \Psi_s \Phi_{-t}(p)}) = (\Phi_t)_* Y_{\Phi_t \Psi_s \Phi_{-t}(p)}. \end{aligned}$$

Kommutieren die Flüsse, so ist  $\Phi_t \circ \Psi_s \circ \Phi_{-t} = \Psi_s$ , also  $Y = (\Phi_t)_* Y$  und aus Satz 4 folgt  $[X, Y] = 0$ .

Ist umgekehrt  $[X, Y] = 0$ , so folgt aus dem Korollar  $(\Phi_t)_* Y = Y$ , und daher ist  $\Phi_t \circ \Psi_s \circ \Phi_{-t}$  der Fluß von  $Y$ , also  $\Phi_t \circ \Psi_s \circ \Phi_{-t} = \Psi_s$ . □

**Korollar 2.** Seien  $X_1, \dots, X_k$  punktweise linear unabhängige, paarweise kommutierende Vektorfelder auf  $M$ . Dann gibt es um jedes  $p$  eine Karte  $u : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  für  $M$ , so daß für  $1 \leq i \leq k$

$$X_i|_U = \frac{\partial}{\partial u_i}.$$

Ein Basisfeld ist also genau dann lokal ein Gaußsches Basisfeld, wenn die Vektorfelder paarweise kommutieren.

*Beweis.* Sei  $v : V \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine Karte um  $p$ . Wir können annehmen, daß  $v(p) = 0$ , und daß

$$X_1|_p, \dots, X_k|_p, \frac{\partial}{\partial v_{k+1}|_p}, \dots, \frac{\partial}{\partial v_m|_p}$$

linear unabhängig sind. Seien  $\Phi^1, \dots, \Phi^k$  die maximalen Flüsse von  $X_1, \dots, X_k$ . Definiere auf einer Umgebung von  $0 \in \mathbb{R}^m$ :

$$\phi(x_1, \dots, x_m) := \Phi_{x_1}^1 \circ \dots \circ \Phi_{x_k}^k (v^{-1}(0, \dots, 0, x_{k+1}, \dots, x_m)).$$

Dann gilt z.B.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_k} \phi(x_1, \dots, x_m) &= \frac{\partial}{\partial x_k} \Phi_{x_k}^k \circ \Phi_{x_2}^2 \circ \dots \circ \Phi_{x_{k-1}}^{k-1} (v^{-1}(0, \dots, 0, x_{k+1}, \dots, x_m)) \\ &= X_k|_{\Phi_{x_k}^k \circ \Phi_{x_2}^2 \circ \dots \circ \Phi_{x_{k-1}}^{k-1} (v^{-1}(0, \dots, 0, x_{k+1}, \dots, x_m))} \\ &= X_k|_{\phi((x_1, \dots, x_m))} \end{aligned}$$

und ebenso für jeden Index  $j \in \{1, \dots, k\}$ . Weiter gilt für  $j > k$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} \phi(0, \dots, 0) &= d_0 v^{-1} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial v_j|_p} . \end{aligned}$$

Also ist  $d_0 \phi$  ein Isomorphismus und  $\phi$  besitzt nach dem Umkehrsatz auf einer offenen Umgebung von  $p$  ein differenzierbares Inverses, welches eine Karte  $u$  mit den gewünschten Eigenschaften ist.  $\square$

**Beispiel 4 (Asymptotenkoordinaten).** Seien  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine Fläche mit konstanter negativer Krümmung  $K = -a^2$  und  $p \in M$ . Dann gibt es auf einer Umgebung von  $p$  definierte orthonormale Vektorfelder  $Y_1, Y_2$  mit

$$AY_i = \lambda_i Y_i, \quad \lambda_1 < 0 < \lambda_2,$$

wobei nach der Gaußgleichung dann  $\lambda_1 \lambda_2 = K$ . Definiere  $\mu := 1/\sqrt{a^2 + \lambda_1^2}$  und

$$X_1 := \mu(aY_1 - \lambda_1 Y_2), \quad X_2 := \mu(-aY_1 - \lambda_1 Y_2).$$

Nach einiger Rechnung ergibt sich  $[X_1, X_2] = 0$ , und weil die beiden Felder offenbar linear unabhängig sind, sind sie die Gaußfelder einer Karte um  $p$ . Weiter ist

$$\langle AX_i, X_i \rangle = \mu^2 \langle \pm a\lambda_1 Y_1 - \lambda_1 \lambda_2 Y_2, \pm aY_1 - \lambda_1 Y_2 \rangle = \mu^2 (a^2 \lambda_1 + \lambda_1 \underbrace{\lambda_1 \lambda_2}_{=-a^2}) = 0.$$

Also sind die Gaußfelder  $X_1, X_2$  Asymptotenrichtungen. Mit einem ähnlichen Argument findet man *Krümmungslinienparameter* um jeden Nicht-Nabelpunkt einer Fläche.

### 3 Der Satz von Frobenius

**Definition.** Sei  $M$  eine Mannigfaltigkeit. Ein *k-dimensionales Untervektorbündel*  $\Delta$  von  $TM$  ist eine Abbildung, die jedem Punkt  $p \in M$  einen  $k$ -dimensionalen Untervektorraum  $\Delta_p$  von  $T_p M$  zuordnet, der im folgenden Sinne differenzierbar vom Punkt abhängt: Um jedes  $p \in M$  gibt es eine offene Umgebung  $U$  und auf dieser differenzierbare Vektorfelder  $X_1, \dots, X_k$ , so daß für alle  $q \in U$  gilt:

$$\Delta_q = \text{Spann}(X_1|_q, \dots, X_k|_q).$$

Wir schreiben auch  $\Delta \subset TM$ .

**Bemerkung.** Aus historischen Gründen heißen Untervektorbündel von  $TM$  auch *Distributionen*, was aber nichts mit den ebenfalls Distributionen genannten verallgemeinerten Funktionen zu tun hat.

**Beispiel 5.** Auf  $M = \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$  sei  $\Delta_p := (\mathbb{R}p)^\perp \subset T_p M$ . Dann ist  $\Delta$  ein  $(m-1)$ -dimensionales Unterbündel von  $TM$ .

**Beispiel 6.** Sei  $(M, f, \xi)$  eine Hyperfläche im  $\mathbb{R}^{m+1}$ . Der 2. Fundamentaltensor  $A$  habe konstanten Rang  $r$ . Dann ist  $\Delta : p \mapsto \ker(A|_p)$  ein  $(m-r)$ -dimensionales Untervektorbündel von  $TM$ .

**Definition.** Sei  $\Delta \subset TM$  ein  $k$ -dimensionales Untervektorbündel.

- (i) Eine *Integralmannigfaltigkeit* von  $\Delta$  ist eine injektive Immersion  $f : N \rightarrow M$  einer zusammenhängenden Mannigfaltigkeit  $N$ , so daß für alle  $p \in N$  gilt

$$df(T_p N) = \Delta_{f(p)}.$$

Eine Integralmannigfaltigkeit  $f : N \rightarrow M$  von  $\Delta$  heißt *maximal*, wenn gilt: Ist  $\tilde{f} : \tilde{N} \rightarrow M$  eine Integralmannigfaltigkeit von  $\Delta$  mit  $N \subset \tilde{N}$  und  $\tilde{f}|_N = f$ , so folgt  $\tilde{N} = N$ .

- (ii)  $\Delta$  heißt (*vollständig*) *integabel*, wenn es zu jedem  $p \in M$  eine Integralmannigfaltigkeit  $f : N \rightarrow M$  von  $\Delta$  mit  $p \in f(N)$  gibt.

**Beispiel 7.** Für das Untervektorbündel  $\Delta$  aus dem Beispiel 5 ist für jedes  $r > 0$  die Inklusion der Sphäre vom Radius  $r$  eine Integralmannigfaltigkeit:

$$i_r : S^{m-1}(r) \rightarrow \mathbb{R}^m \setminus \{0\}.$$

Da diese  $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$  überdecken, ist  $\Delta$  integabel.

**Lemma 2.** Sei  $\Delta \subset TM$  ein integablen Untervektorbündel. Seien

$$X, Y \in \Gamma(\Delta) := \{Z \in \Gamma(TM); Z_p \in \Delta_p \text{ für alle } p\}.$$

Dann gilt

$$[X, Y] \in \Gamma(\Delta).$$

Untervektorbündel mit dieser Eigenschaft heißen *involutiv*. Integablen Untervektorbündel sind also involutiv.

*Beweis.* Sei  $p \in M$ . Sei  $f : N \rightarrow M$  eine Integralmannigfaltigkeit von  $\Delta$  durch  $p$  und  $f(q) = p$ . Dann ist  $\tilde{X} = X \circ f$  ein Vektorfeld längs  $f$ , das tangential ist. Deshalb gibt es lokal ein Vektorfeld  $X' \in \Gamma(TN)$  mit  $df(X') = \tilde{X}$ , d.h.  $X'$  und  $X$  sind  $f$ -verwandt. Analog für  $Y$ . Es folgt

$$[X, Y]_p = df([X', Y']_q) \in df(T_q N) = \Delta_p.$$

□

**Beispiel 8.** Sei  $\Delta := \ker(A)$ , das Bündel der Kerne der 2. Fundamentalform mit konstantem Rang, vgl. Beispiel 6 oben. Seien  $X, Y \in \Gamma(\Delta)$ . Nach der Codazzi-Gleichung gilt dann

$$A[X, Y] = \nabla_X(AY) - \nabla_Y(AX) = 0.$$

Also ist  $\Delta$  involutiv.

**Beispiel 9.** Sei  $M = SO(3)$  und  $\Delta_A = \{AM(u, v); u, v \in \mathbb{R}\}$ , wo

$$M(u, v) := \begin{pmatrix} 0 & -u & 0 \\ u & 0 & -v \\ 0 & v & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann sind die Vektorfelder  $X_A := AM(1, 0)$  und  $Y_A := AM(0, 1)$  in  $\Delta$ . Ihre Lieklammer, berechnet sich nach Diffgeo I einfach aus dem Matrixkommutator und ist

$$[X, Y]_A = A[M(1, 0), M(0, 1)] = A \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \notin \Delta_A.$$

Also ist  $\Delta$  nicht involutiv, und deshalb auch nicht integrierbar.

**Satz 6 (Satz von Frobenius, lokale Form).** Sei  $\Delta \subset TM$  ein  $k$ -dimensionales involutives Untervektorbündel. Dann ist  $\Delta$  integrabel. Genauer gibt es um jeden Punkt  $p$  von  $M$  eine Karte  $u : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ , so daß für alle  $q \in U$

$$\Delta_q = \text{Spann}\left(\frac{\partial}{\partial u_1}|_q}, \dots, \frac{\partial}{\partial u_k}|_q}\right).$$

Eine Integralmannigfaltigkeit durch  $q$  ist gegeben durch die Einschränkung von  $u^{-1}$  auf die  $u(q)$ -Zusammenhangskomponente von  $u(U) \cap (u(q) + \mathbb{R}^k)$ .

*Beweis.* Sei o.E.  $M = \mathbb{R}^m$ ,  $p = 0$  und  $\Delta_0 = \mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^m$ . Sei  $\pi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$  die kanonische Projektion. Weil  $d_0\pi|_{\Delta_0} = \text{Id}$ , ist  $d_q\pi|_{\Delta_q}$  für alle  $q$  in einer Umgebung  $U$  von  $0$  ein Isomorphismus von  $\Delta_q$  auf  $\mathbb{R}^k$ . Daher gibt es auf  $U$  Vektorfelder  $X_1, \dots, X_k \in \Gamma(\Delta)$  mit  $d\pi(X_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} \circ \pi$ . Offenbar sind die  $X_j$  punktweise linear unabhängig und  $\pi$ -verwandt zu den  $\frac{\partial}{\partial x_j}$ . Daher gilt

$$\begin{aligned} d\pi[X_i, X_j] &= \left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right] \circ \pi \\ &= 0. \end{aligned}$$

Aber  $[X_i, X_j] \in \Gamma(\Delta)$ , weil  $\Delta$  involutiv ist. Da  $d_q\pi|_{\Delta_q}$  ein Isomorphismus war, folgt  $[X_i, X_j] = 0$  und damit nach dem Korollar 2 die Behauptung.  $\square$

**Satz 7 (Satz von Frobenius, globale Form).** Sei  $\Delta \subset TM$  ein  $k$ -dimensionales involutives Untervektorbündel. Dann gibt es durch jedes  $p \in M$  genau eine maximale Integralmannigfaltigkeit von  $\Delta$ .

Für den Beweis vgl. z.B. [Spivak; Differential Geometry I, Theorem 6.6]. Der Beweis ist schwieriger, weil man die Integralmannigfaltigkeiten  $N$  erst einmal konstruieren muß. Im allgemeinen ist nämlich  $f(N)$  keine Untermannigfaltigkeit von  $M$ .

**Beispiel 10.** Auf dem Torus

$$M = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} = \mathbb{R}^4 \mid |z_1| = |z_2| = 1\}$$

ist für  $\rho \in \mathbb{R}$  durch  $\Delta_{(z_1, z_2)}^\rho := \mathbb{R}(iz_1, \rho iz_2)$  eine 1-dimensionale Distribution gegeben. Dann definiert  $f_\rho(t) := (e^{it}, e^{\rho it})$  eine Kurve in  $M$ , die überall tangential an  $\Delta_\rho$  ist. Für rationales  $\rho$  ist die Kurve periodisch und definiert eine injektive Immersion von  $S^1$  in  $M$ , welche eine maximale Integralmannigfaltigkeit von  $\Delta$  liefert. Für irrationales  $\rho$  hingegen ist  $f_\rho : \mathbb{R} \rightarrow M$  selbst eine maximale Integralmannigfaltigkeit. Man kann aber zeigen, daß in diesem Fall  $f_\rho(\mathbb{R})$  dicht in  $M$  liegt. Daher ist  $f_\rho(\mathbb{R})$  im Sinne unserer Definition keine Untermannigfaltigkeit von  $M$  oder  $\mathbb{R}^4$ .

## 4 Elementares über Liegruppen (I)

**Definition.** Eine *Liegruppe* ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit  $G$  mit einer Gruppenstruktur, so daß die Abbildung  $G \times G \rightarrow G, (g, h) \mapsto gh^{-1}$  differenzierbar ist. Das Einselement bezeichnen wir mit  $e$ .

**Beispiel 11 (Lineare Gruppen).**

$$\begin{aligned}GL(n, \mathbb{R}) &:= \{A \mid A \text{ reelle invertierbare } n \times n\text{-Matrix}\} \\GL(n, \mathbb{C}) &:= \{A \mid A \text{ komplexe invertierbare } n \times n\text{-Matrix}\} \\SL(n, \mathbb{R}) &:= \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \det A = 1\} \\O(n) &:= \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid AA^t = E\} \\SO(n) &:= \{A \in O(n) \mid \det A = +1\} \\U(n) &:= \{A \in GL(n, \mathbb{C}) \mid A\bar{A}^t = E\} \\SU(n) &:= \{A \in U(n) \mid \det A = 1\} \\O(n, 1) &:= \{A \in GL(n+1, \mathbb{R}) \mid \langle Ax, Ay \rangle_L = \langle x, y \rangle_L\}, \\&\text{wobei } \langle x, y \rangle_L := -x_0y_0 + x_1y_1 + \dots + x_ny_n.\end{aligned}$$

**Definition.** Eine *Liealgebra* ist eine (reeller) Vektorraum  $\mathfrak{g}$  zusammen mit einer schiefsymmetrischen bilinearen Abbildung  $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ , für die die sogenannte Jacobi-Identität gilt:

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

**Beispiel 12.** (i) Der Raum der Vektorfelder  $\Gamma(TM)$  auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit ist eine Liealgebra.

(ii) Der Raum der  $n \times n$ -Matrizen mit dem Kommutator  $[X, Y] = XY - YX$  ist eine Liealgebra.

**Beispiel 13.** Auf einer Liegruppe  $G$  hat man für jedes  $g \in G$  einen Diffeomorphismus  $L_g : G \rightarrow G, h \mapsto gh$ , die sogenannte *Linkstranslation* mit  $g$  und analog eine *Rechtstranslation*  $R_g$ . Ein Vektorfeld  $X \in \Gamma(TG)$  heißt *linksinvariant*, wenn  $X$  für jedes  $g \in G$  zu sich selbst  $L_g$ -verwandt ist, d.h. wenn für alle  $h \in G$

$$dL_g(X_h) = X_{L_g h}.$$

Das ist äquivalent zu  $L_{g*}X = X$ . Insbesondere ist dann also  $X_g = dL_g(X_e)$ , d.h.  $X$  ist durch seinen Wert in  $e$  eindeutig bestimmt. Auf diese Weise ist der Vektorraum der linksinvarianten Vektorfelder auf  $G$  isomorph zu  $T_e G$ .

Die linksinvarianten Vektorfelder einer Liegruppe sind abgeschlossen unter der Lieklammer und bilden deshalb eine Liealgebra  $\mathfrak{g}$ , genannt *die* Liealgebra von  $G$ . Es ist nämlich allgemein die Lieklammer mit der „ $f$ -Verwandtschaft“ verträglich. Also

$$\mathfrak{g} = \{X \in \Gamma(TG) \mid X \text{ linksinvariant}\} = T_e G.$$

Für  $SO(n)$  haben wir in Diffgeo I bereits gesehen, daß sich die Lieklammer linksinvarianter Vektorfelder und der Matrix-Kommutator in

$$\mathfrak{so}(n) = T_E SO(n) = \{X \mid X^t = -X\}$$

entsprechen. Das gilt für alle linearen Gruppen. In abstrakten Gruppen ist aber natürlich die Lieklammer auf  $T_e G$  nicht durch ein algebraisches Rezept vorgegeben, sondern man muß die Tangentialvektoren zu linksinvarianten Vektorfeldern erweitern, die Lieklammer bilden und deren Wert in  $e$  nehmen.

**Satz 8.** Sei  $X$  ein linksinvariantes Vektorfeld auf der Liegruppe  $G$ . Dann ist der maximale Fluß  $\Phi_t$  von  $X$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  definiert, und es gilt

$$\Phi_t(g) = L_g \Phi_t(e) = R_{\Phi_t(e)} g.$$

*Beweis.* Sei  $\epsilon > 0$  so, daß  $\Phi_t(e)$  für  $|t| < \epsilon$  definiert ist. Für jedes  $g \in G$  und  $|t| < \epsilon$  ist

$$\frac{d}{dt} L_g(\Phi_t(e)) = dL_g\left(\frac{d}{dt}\Phi_t(e)\right) = dL_g(X_{\Phi_t(e)}) = X_{L_g\Phi_t(e)},$$

d.h.  $t \mapsto L_g\Phi_t(e)$  ist eine für alle  $|t| < \epsilon$  definierte Integralkurve mit  $L_g\Phi_0(e) = g$ . Das bedeutet, daß man jede (einseitig) beschränkte Integralkurve immer noch ein Stück  $\epsilon/2$  verlängern kann. Also sind alle Integralkurven auf ganz  $\mathbb{R}$  definiert.  $\square$

**Definition.** Mit den Bezeichnungen des Satzes definieren wir die *Exponentialabbildung* von  $G$  wie folgt:

$$\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G, X \mapsto \Phi_1(e).$$

Wegen  $\frac{d}{dt}\Phi_{st}(e) = s \frac{d}{dt}\Big|_{st}\Phi(e)$  gilt

$$\exp(tX) = \Phi_t(e),$$

und  $t \mapsto \exp(tX)$  ist ein differenzierbarer Gruppenhomomorphismus von  $\mathbb{R}$  in  $G$ .

**Beispiel 14.** Für  $G = GL(n)$  ist  $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n) = M(n \times n)$  und für  $X \in \mathfrak{g}$  gilt

$$\exp(tX) = e^{tX}.$$

Entsprechendes gilt für die anderen linearen Gruppen, und das ist der Grund, warum die Liegruppen-Exponentialabbildung so heißt.

*Beweis.* Setze  $U(t) := \exp(tX) = \Phi_t(e)$ . Dann ist

$$\dot{U}(t) = X_{\Phi_t(e)} = \Phi_t(e)X = U(t)X.$$

Weiter ist  $U(0) = E$ . Aber dieses Anfangswertproblem für ein gewöhnliches lineares Differentialgleichungssystem hat  $U(t) = e^{tX}$  als eindeutig bestimmte Lösung.  $\square$

**Bemerkung.** Es gilt  $d_0 \exp = Id : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ . Insbesondere bildet  $\exp$  also eine Umgebung von  $0 \in \mathfrak{g}$  diffeomorph auf eine Umgebung von  $e$  in  $G$  ab.

## 5 Elementares über Liegruppen (II)

**Definition.** (i) Eine  $C^\infty$ -Abbildung  $\phi : G \rightarrow \tilde{G}$  zwischen Liegruppen mit

$$\phi(gh) = \phi(g)\phi(h)$$

heißt ein *Liegruppen-Homomorphismus*. Es folgt  $\phi(e) = e$  und  $\phi(g^{-1}) = \phi(g)^{-1}$ .

(ii) Eine lineare Abbildung  $\alpha : \mathfrak{g} \rightarrow \tilde{\mathfrak{g}}$  zwischen Liealgebren mit

$$\alpha([X, Y]) = [\alpha(X), \alpha(Y)]$$

heißt ein *Liealgebren-Homomorphismus*.

Entsprechend definiert man Isomorphismen, Endomorphismen und Automorphismen für Liegruppen und -algebren.

**Satz 9.** Sei  $\phi : G \rightarrow \tilde{G}$  eine Liegruppen-Homomorphismus. Dann definiert  $\phi$  einen Liealgebren-Homomorphismus

$$d\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \tilde{\mathfrak{g}}$$

vermöge

$$d\phi(X)_{\tilde{\mathfrak{g}}} := dL_{\tilde{g}}d\phi(X_e),$$

also

$$d\phi(X)_e = d\phi(X_e).$$

Offenbar sind  $X$  und  $d\phi(X)$  sind  $\phi$ -verwandt. Es gilt

$$\exp \circ d\phi = \phi \circ \exp, \quad (2)$$

*Beweis.* Zunächst gilt  $\phi(gh) = \phi(g)\phi(h)$  und daher

$$\phi \circ L_g = L_{\phi(g)} \circ \phi.$$

Wir setzen  $\tilde{X} = d\phi(X) = dL_{\tilde{g}}d\phi(X_e)$ . Dann sind  $X$  und  $\tilde{X}$   $\phi$ -verwandt, denn

$$\tilde{X}_{\phi(g)} = dL_{\phi(g)}d\phi(X_e) = d(L_{\phi(g)}\phi)(X_e) = d(\phi L_g)(X_e) = d\phi(dL_g(X_e)) = d\phi(X_g).$$

Daraus folgt die Homomorphie von  $d\phi$ :

$$d\phi([X, Y]_e) = [\tilde{X}, \tilde{Y}]_{\phi(e)} = [\tilde{X}, \tilde{Y}]_e.$$

Zum Beweis der Formel (2) beachte, daß  $t \mapsto \exp(td\phi(X))$  eine Integralkurve von  $\tilde{X}$  ist, die bei  $t = 0$  durch  $e \in \tilde{G}$  geht. Andererseits ist

$$\frac{d}{dt}\phi(\exp tX) = d\phi\left(\frac{d}{dt}\exp(tX)\right) = d\phi(X_{\exp(tX)}) = \tilde{X}_{\phi(\exp tX)}$$

eine Integralkurve mit derselben Eigenschaft. Daher sind beide gleich, und für  $t = 1$  folgt (2).  $\square$

Im folgenden Satz bezeichnen wir die Menge der Vektorraum-Automorphismen bzw. -Endomorphismen der Liealgebra mit  $GL(\mathfrak{g})$  bzw.  $gl(\mathfrak{g})$ .  $GL(\mathfrak{g})$  ist mit der Komposition als Verknüpfung eine Liegruppe der Dimension  $(\dim \mathfrak{g})^2$  und  $gl(\mathfrak{g})$  mit dem üblichen Kommutator als Lieklammer die zugehörige Liealgebra.

**Satz 10 (Adjungierte Darstellung).** Seien  $G$  eine Liegruppe und  $a_h$  für  $h \in G$  der zugehörige innere Automorphismus:

$$a_h g := hgh^{-1}.$$

Dann gilt

(i) Der von  $a_h$  induzierte Liealgebren-Homomorphismus

$$\text{Ad}_h := da_h : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$$

ist ein Automorphismus mit

$$\text{Ad}_h X = a_{h*}X. \quad (3)$$

(ii) Die Abbildung  $\text{Ad} : G \rightarrow GL(\mathfrak{g}), h \mapsto \text{Ad}_h$  ist ein Liegruppen-Homomorphismus, die sogenannte adjungierte Darstellung von  $G$ .

(iii) Für alle  $X, Y \in \mathfrak{g}$  und  $h \in G$  gilt:

$$(\text{Ad}_h X)_e = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 h \exp(tX) h^{-1}, \quad (4)$$

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_0 \text{Ad}_{\exp tX} = [X, Y]_e, \quad (5)$$

$$\exp \circ \text{Ad}_h = a_h \circ \exp. \quad (6)$$

(iv) Der von  $\text{Ad}$  induzierte Liealgebren-Homomorphismus

$$\text{ad} := \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}), X \mapsto \text{ad}_X$$

heißt die adjungierte Darstellung von  $\mathfrak{g}$ . Es gilt für alle  $X, Y \in \mathfrak{g}$

$$\text{ad}_X Y = [X, Y], \quad (7)$$

$$\text{Ad}_{\exp X} = e^{\text{ad}_X}. \quad (8)$$

*Beweis.* Zu (i). Weil  $a_h$  ein Automorphismus ist, ist auch  $d_e a_h$  invertierbar und damit ist  $\text{Ad}_h$  ein Automorphismus. Nach Satz 9 sind  $X$  und  $d\phi(X)$   $\phi$ -verwandt. Daraus folgt (3).

Zu (ii). Aus  $a_{gh} = a_g \circ a_h$  folgt die Homomorphie von  $\text{Ad} : G \rightarrow GL(\mathfrak{g})$ . Die Differenzierbarkeit folgt aus der von  $(g, h) \mapsto hgh^{-1}$ .

Zu (iii). Gleichung (4) folgt aus der Definition von  $\text{Ad}_h$  zusammen mit

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_0 \exp(tX) = X.$$

Nach Satz 8 ist  $\Phi_t = R_{\exp(tX)}$  der maximale Fluß von  $X$ . Benutzen wir die Formel für die Lieklammer aus Satz 4, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} [X, Y]_e &= \left. \frac{d}{dt} \right|_0 (-(\Phi_{t*} Y)_e)|_0 \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_0 (-(R_{\exp(tX)*} Y)_e)|_0 \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_0 (-dR_{\exp(tX)}(Y_{\exp(-tX)}))|_0 \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_0 (-dR_{\exp(tX)}(dL_{\exp(-tX)}(Y_e)))|_0 \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_0 (-da_{\exp(-tX)}(Y_e))|_0 \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_0 (\text{Ad}_{\exp(tX)} Y)|_0 \end{aligned}$$

Gleichung (6) schließlich ist Satz 9 angewendet auf  $a_h$ .

Zu (iv). Aus (5) folgt unmittelbar (7), und (8) ergibt sich durch Anwendung von Satz 9 auf  $\text{Ad} : G \rightarrow GL(\mathfrak{g})$ .  $\square$



**Beispiel 15.** Für die linearen Gruppen sind  $a_h$  und  $Ad_h$  durch die Konjugation mit  $h$  gegeben.

Wir schließen mit zwei Sätzen, die wir hier nicht beweisen können, die aber sehr nützlich bzw. interessant sind:

Ist  $H$  eine Lieuntergruppe der Liegruppe  $G$ , d.h. eine Untergruppe, versehen mit der Struktur einer Liegruppe, so daß die Inklusion  $i : H \subset G$  eine Immersion ist, so ist auf die offensibare Weise  $\mathfrak{h}$  eine Unteralgebra von  $\mathfrak{g}$ . Umgekehrt läßt sich jede Lieunteralgebra von  $\mathfrak{g}$  so realisieren, wie der folgende Satz zeigt:

**Satz 11.** *Seien  $G$  eine Liegruppe  $G$  und  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  eine Lieunteralgebra der Liealgebra von  $G$ . Dann gibt es genau eine zusammenhängende Lieuntergruppe  $H$  von  $G$  mit Liealgebra  $\mathfrak{h}$ .*

**Satz 12.** *Sei  $H$  eine Untergruppe der Liegruppe  $G$ . Ist  $H$  (als Teilmenge in  $G$ ) abgeschlossen, so ist  $H$  eine Lieuntergruppe von  $G$ .*

**Beispiel 16.** Für alle  $X, Y \in \mathfrak{g}$  ist die Funktion

$$GL(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathfrak{g}, F \mapsto F[X, Y] - [FX, FY]$$

stetig. Daher ist die Menge

$$\text{Aut}(\mathfrak{g}) := \{F \in GL(\mathfrak{g}) \mid F[X, Y] - [FX, FY] = 0 \text{ für alle } X, Y \in \mathfrak{g}\}$$

abgeschlossen. Sie ist offenbar auch eine Untergruppe, also eine Lieuntergruppe von  $GL(\mathfrak{g})$ , die *Automorphismengruppe* von  $\mathfrak{g}$ .

## 6 Überlagerungen, Aktionen von Liegruppen

**Definition.** Eine differenzierbare Abbildung  $f : N \rightarrow M$  heißt eine *Überlagerung*, wenn gilt:

Zu jedem  $p \in M$  gibt es eine offene Umgebung  $U$  von  $p$ , so daß  $f^{-1}(U)$  die disjunkte Vereinigung offener Mengen  $U_i \subset N$  ist, deren jede durch  $f$  diffeomorph auf  $U$  abgebildet wird.

Insbesondere ist  $f$  also surjektiv und haben  $N$  und  $M$  gleiche Dimension.

**Bemerkung:** Die Funktion  $p \mapsto \#f^{-1}(\{p\})$  ist lokal konstant auf  $M$  und heißt die Blätterzahl von  $f$ .

**Beispiel 17.**

- $\mathbb{R} \rightarrow S^1, x \mapsto \exp(ix)$
- $S^m \rightarrow \mathbb{R}P^m$ .
- Die 3-Sphäre  $S^3$  kann man als Menge der Quaternionen vom Betrage 1 betrachten: Sie bildet dann eine 3-dimensionale Liegruppe. Für  $q \in S^3$  ist bildet die Konjugation  $\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}, x \mapsto qxq^{-1}$  den zu  $\mathbb{R}^3$  isomorphen Raum der imaginären Quaternionen  $\text{Spann}\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$  in sich ab und induziert so eine orthogonale Abbildung  $A_q \in SO(3)$ . Die Abbildung  $S^3 \rightarrow SO(3), q \mapsto A_q$  ist eine 2-blättrige Überlagerung. Die Überlagerungseigenschaft beweist man leicht mit dem folgenden Satz.

**Satz 13 (Plattenwechsler-Satz).** Sei  $f : N \rightarrow M$  eine Submersion der kompakten Mannigfaltigkeit  $N$  in die gleich-dimensionale, zusammenhängende Mannigfaltigkeit  $M$ . Dann ist  $f$  eine Überlagerung.

*Beweis.* Nach dem Umkehrsatz ist  $f$  offen und lokal injektiv. Also ist  $f(N)$  offen, wegen Kompaktheit aber auch abgeschlossen in  $M$ . Also ist  $f$  surjektiv.

Sei  $p \in M$ . Wegen der Kompaktheit von  $N$  und der lokalen Injektivität von  $f$  ist

$$f^{-1}(\{p\}) = \{x_1, \dots, x_k\}$$

endlich. Nach dem Umkehrsatz und der Hausdorff-Eigenschaft gibt es paarweise disjunkte offene Umgebungen  $V_1, \dots, V_k$ , die durch  $f$  jeweils diffeomorph auf eine offene Umgebung  $V_i$  von  $p$  abgebildet werden. Setze

$$U := \left(\bigcap V_i\right) \setminus f(N \setminus \bigcup V_i).$$

$U$  ist sicher offen. Setze weiter

$$U_i := V_i \cap f^{-1}(U).$$

Offenbar sind die  $U_i$  offen, disjunkt und werden durch  $f$  diffeomorph auf  $U$  abgebildet. Ist schließlich  $x \in f^{-1}(U)$ , so liegt  $x$  nach Konstruktion nicht in  $N \setminus \bigcup V_i$ , d.h.  $x \in V_i$  für (genau) ein  $i$ . Da  $f$  die Menge  $V_i$  diffeomorph abbildet, und  $f(x) \in U$  nach Voraussetzung, folgt  $x \in U_i$ . Daher ist

$$f^{-1}(U) = \bigcup U_i.$$

□

**Definition.** Seien  $G$  eine Liegruppe und  $N$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit.

(i) Eine *Aktion* oder *Operation* von  $G$  auf  $N$  ist eine differenzierbare Abbildung

$$G \times N \rightarrow N, (g, x) \mapsto gx,$$

so daß  $g \mapsto gx$  für jedes  $x \in N$  ein Homomorphismus von  $G$  in die Gruppe der Diffeomorphismen von  $N$  ist. Man sagt dann,  $G$  operiert (von links) auf  $N$ .

Ist  $g \mapsto g^{-1}x$  ein Homomorphismus, so sagt man,  $G$  operiert von rechts auf  $N$  und schreibt  $xg$  statt  $gx$ .

Sei im folgenden  $G \times N \rightarrow N$  eine Aktion (von links).

(ii) Für  $x \in N$  heißt

$$Gx := \{gx; g \in G\}$$

der *Orbit* oder die *Bahn* von  $G$  durch  $x$  und

$$G_x := \{g \in G; gx = x\}$$

heißt die *Isotropiegruppe* des Punktes  $x$ .

(iii) Ist  $G_x = \{e\}$  für alle  $x \in N$ , so heißt die Aktion *frei* oder *fixpunktfrei*.

(iv) Ist  $Gx = N$  für ein  $x \in N$  (und dann für alle  $x$ ) so heißt die Aktion *transitiv*.

(v) Die Aktion heißt *eigentlich diskontinuierlich*, wenn gilt:

(a) Jedes  $x \in N$  hat eine Umgebung  $U$ , so daß

$$gU \cap U \neq \emptyset \implies g \in G_x \text{ und } gU = U.$$

(b) Für jedes  $x \in N$  ist  $G_x$  endlich.

(c) Zu  $x, y$  auf verschiedenen Orbits gibt es Umgebungen  $U, V$  mit

$$GU \cap GV = \emptyset.$$

(vi)  $M := N/G$  heißt der *Orbitraum* der Aktion. Im Falle der Operation von rechts schreibt man dafür  $G \backslash N$ .  $M$  ist im allgemeinen keine Mannigfaltigkeit, aber, versehen mit der Quotiententopologie, ein topologischer Raum.

**Satz 14.** Sei  $G \times N \rightarrow N$  eine freie, eigentlich diskontinuierliche Aktion. Dann besitzt  $M = N/G$  genau eine differenzierbare Struktur, so daß die kanonische Projektion  $\pi : N \rightarrow M$  eine Überlagerung ist.

*Beweis.* Weil eine Überlagerungsabbildung ein surjektiver lokaler Diffeomorphismus ist, gibt es höchstens eine solche differenzierbare Struktur.

Zu  $p \in N/G$  und  $x \in \pi^{-1}(\{p\})$  gibt es, weil die Operation eigentlich diskontinuierlich ist, eine offene Umgebung  $V$ , so daß  $V \cap gV = \emptyset$  für alle  $g \neq G_x$ . Weil die Aktion auch frei ist, heißt das

$$V \cap gV = \emptyset \text{ für alle } g \neq e.$$

Jeder Orbit schneidet  $V$  also höchstens in einem Punkt und  $\pi|_V$  ist injektiv. Wir können überdies annehmen, daß  $V$  der Definitionsbereich einer Karte  $v : V \rightarrow \mathbb{R}^m$  für  $N$  ist, und definieren durch  $u := v \circ (\pi|_V)^{-1} : \pi(V) \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine Karte für  $M$  um  $p = \pi(x)$ . Wir berechnen den Kartenwechsel zwischen zwei solchen Karten  $u_i := v_i \circ (\pi|_{V_i})^{-1}$ . Sei  $q = \pi(x_1) = \pi(x_2) \in \pi(V_1) \cap \pi(V_2)$  mit  $x_i \in V_i$ . Dann gibt es  $g \in G$  mit  $gx_1 = x_2$ , und für eine offene Umgebung  $W_1$  von  $x_1$  in  $V_1$  ist  $gW_1 \subset V_2$ . Dann ist  $u_1(\pi(W_1)) = v_1(W_1)$  eine offene Umgebung von  $u_1(q) = v_1(x_1)$  im Definitionsbereich  $u_1(\pi(V_1) \cap \pi(V_2))$  des Kartenwechsels  $u_2 \circ u_1^{-1} = v_2 \circ (\pi|_{V_2})^{-1} \circ \pi \circ v_1^{-1}$ . Insbesondere ist dieser Definitionsbereich also offen. Für  $a \in u_1(\pi(W_1))$  sind  $(\pi|_{V_2})^{-1} \circ \pi \circ v_1^{-1}(a)$  und  $gv_1^{-1}(a)$  beide in  $V_2$ , und es gilt

$$\begin{aligned} \pi((\pi|_{V_2})^{-1} \circ \pi \circ v_1^{-1}(a)) &= \pi(v_1^{-1}(a)) \\ &= \pi(gv_1^{-1}(a)). \end{aligned}$$

Nach Wahl von  $V_2$  folgt daraus  $(\pi|_{V_2})^{-1} \circ \pi \circ v_1^{-1}(a) = gv_1^{-1}(a)$  und

$$\begin{aligned} u_2 \circ u_1^{-1}(a) &= v_2 \circ (\pi|_{V_2})^{-1} \circ \pi \circ v_1^{-1}(a) \\ &= v_2(gv_1^{-1}(a)). \end{aligned}$$

Daher ist der Kartenwechsel differenzierbar, man erhält einen Atlas für  $M$ , und damit eine differenzierbare Struktur auf  $M$ . Sie ist hausdorffsch nach der Bedingung c) für eigentlich diskontinuierliche Aktionen und hat mit  $N$  eine abzählbare Basis der Topologie. Wegen

$$\pi|_V = u^{-1} \circ v$$

ist  $\pi$  ein lokaler Diffeomorphismus. Es ist

$$\pi^{-1}(\pi(V)) = \bigcup_g gV.$$

Dabei sind nach Konstruktion von  $V$  die  $gV$  paarweise disjunkt. Also ist  $\pi$  eine Überlagerungsabbildung.

□

**Beispiel 18.** Die Antipodenabbildung der Sphäre  $S^m$  liefert eine freie, eigentlich diskontinuierliche Aktion von  $\mathbb{Z}_2$  auf  $S^m$ . Der Quotient ist  $\mathbb{R}P^m$ .

**Beispiel 19.** Die offensichtliche Aktion von  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  auf  $\mathbb{R}^2$  liefert eine Überlagerung auf den Torus  $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ . Allgemeiner kann man hier  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^2$  durch ein beliebiges Gitter  $\Gamma$ , d.h durch eine von zwei linear-unabhängigen Vektoren erzeugte Untergruppe von  $\mathbb{R}^2$ , ersetzen.

## 7 Homogene Räume

**Satz 15.** Sei  $G$  eine  $n$ -dimensionale Liegruppe,  $H$  eine abgeschlossene  $k$ -dimensionale Lieuntergruppe und

$$\pi : G \rightarrow M := G/H = \{gH \mid g \in G\}$$

die kanonische Projektion. Dann besitzt  $M$  genau eine differenzierbare Struktur als  $(n-k)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit, so daß  $\pi$  eine Submersion ist. Für diese ist

$$G \times M \rightarrow M, (g_1, g_2H) \mapsto (g_1g_2)H$$

eine transitive differenzierbare Gruppenoperation.

Für den Beweis vergleiche [Chevalley: Theory of Lie Groups, p. 109-111 oder Wolf: Spaces of Constant Curvature, Theorem 1.5.6].

**Lemma 3.** Sind  $\mathfrak{g}$  und  $\mathfrak{h}$  die zugehörigen Liealgebren, so ist

$$\ker(d_e\pi : T_eG \rightarrow T_HM) = \mathfrak{h}.$$

Man kann  $T_HM$  also identifizieren mit einem zu  $\mathfrak{h}$  komplementären Unterraum von  $\mathfrak{g}$ .

*Beweis.* Es ist

$$d\pi(X) = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \pi \circ \exp(tX) = 0$$

für  $X \in \mathfrak{h}$ . Deshalb ist  $\mathfrak{h} \subset \ker d\pi$  und aus Dimensionsgründen gilt die Gleichheit.

□

**Definition.** Ein *homogener Raum* ist eine Mannigfaltigkeit  $M$  zusammen mit einer transitiven Gruppenoperation  $G \times M \rightarrow M$ .

**Lemma 4.** Sei  $G \times M \rightarrow M$  transitiv und sei  $p \in M$ . Dann sind die Abbildung

$$\Phi : G \rightarrow M, g \mapsto gp$$

eine Submersion und die Abbildung

$$\varphi : G/G_p \rightarrow M, gG_p \mapsto \varphi(gG_p) = gp$$

ein Diffeomorphismus.

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\Phi} & M \\ \pi \downarrow & \nearrow & \\ G/G_p & \xrightarrow{\varphi} & \end{array}$$

*Beweis.* Wegen

$$\Phi \circ L_{g_1}(g) = (g_1g)p = g_1(gp) = g_1\Phi(g)$$

ist

$$d_{g_1}\Phi \circ d_eL_{g_1} = d_p g_1 \circ d_e\Phi.$$

Aber  $L_{g_1} : G \rightarrow G$  und  $g_1 : M \rightarrow M$  sind Diffeomorphismen. Daher ist  $\Phi$  von konstantem Rang  $k = \text{Rang } d_e\Phi$ . Lokal bildet  $\Phi$  nach dem Rangsatz also in eine  $k$ -dimensionale Mannigfaltigkeit ab.

Annahme:  $k < m = \dim M$ . Sei  $u : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine Karte für  $M$ . Jeder Punkt  $x \in \Phi^{-1}(U)$  hat dann eine offene Umgebung  $U_x \subset \Phi^{-1}(U)$ , die durch  $u \circ \Phi$  in eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^m$ , also in eine Nullmenge abgebildet wird. Weil  $G$  eine abzählbare Basis der Topologie besitzt, ist  $\Phi^{-1}(U)$  die Vereinigung von abzählbar vielen solcher Umgebungen. Weil die abzählbare Vereinigung von Nullmengen wieder eine Nullmenge ist, ist daher  $u \circ \Phi(\Phi^{-1}(U)) \neq u(U)$  und  $\Phi(\Phi^{-1}(U)) \neq U$ . Also ist  $\Phi$  nicht surjektiv, und das widerspricht der Transitivität der Operation. Also war die Annahme falsch, und  $k = m$ . Nach dem Rangsatz ist  $\Phi$  daher eine Submersion.

Weiter ist  $\varphi$  offenbar eine Bijektion. Benutzt man diese zur Identifikation von  $G/G_p$  und  $M$ , so folgt aus der Einzigkeitsaussage in Satz 15, daß die differenzierbare Quotientenstruktur gerade die von  $M$  ist, d.h. daß  $\varphi$  ein Diffeomorphismus ist.  $\square$

**Bemerkung.** Das Lemma läßt sich verallgemeinern. Ist die Operation von  $G$  auf  $M$  nicht transitiv, so liefert  $\varphi$  immer noch eine injektive Immersion von  $G/G_p$  in  $M$ , deren Bild gerade der Orbit  $Gp$  ist.

Man kann also homogene Mannigfaltigkeiten konstruieren als Quotienten von Liegruppen nach abgeschlossenen Untergruppen. Oder man kann homogene Mannigfaltigkeiten „algebraisch interpretieren“ als Quotient der transitiven Gruppe nach der Isotropiegruppe eines (beliebig gewählten) Punktes.

**Beispiel 20.** Man hat eine kanonische Inklusionen

$$SO(n) \subset SO(n+1)$$

und damit eine homogene Mannigfaltigkeit  $SO(n+1)/SO(n)$  der Dimension

$$\binom{n+1}{2} - \binom{n}{2} = n.$$

Andrerseits operiert  $SO(n+1)$  transitiv auf der Sphäre  $S^n$ , und die Isotropiegruppe des Nordpols ist gerade  $SO(n)$ . Daher hat man einen Diffeomorphismus

$$SO(n+1)/SO(n) \cong S^n.$$

Diese Darstellung für  $S^n$  als homogener Raum ist aber keineswegs die einzige. Zum Beispiel ist auch die Operation von  $U(n)$  auf  $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$  transitiv; sie liefert

$$U(n)/U(n-1) \cong S^{2n-1}.$$

**Beispiel 21.** Auf der Menge der  $k$ -dimensionalen linearen Unterräume des  $\mathbb{R}^{n+k}$  operiert  $O(n+k)$  transitiv, und die Isotropiegruppe von  $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^{(n+k)}$  ist

$$O(n) \times O(k) \subset O(n+k).$$

Der Quotient

$$O(n+k)/O(n) \times O(k)$$

ist eine Mannigfaltigkeit der Dimension

$$\binom{n+k}{2} - \binom{n}{2} - \binom{k}{2} = nk,$$

die bijektiv der Menge der  $k$ -dimensionalen Unterräume des  $\mathbb{R}^{n+k}$  entspricht. Man kann diese Bijektion dazu benutzen, der Menge der Unterräume eine differenzierbare Struktur zu verpassen. Dann wird sie eine  $nk$ -dimensionale Mannigfaltigkeit, die *Grassmann-Mannigfaltigkeit*  $G_k(\mathbb{R}^{n+k})$  der  $k$ -Ebenen im  $\mathbb{R}^{n+k}$ . Ein anderes Modell dafür ist gegeben durch die Untermannigfaltigkeit

$$G_k(\mathbb{R}^{n+k}) := \{P \in GL(n+k); P^2 = P = P^*, \text{Spur } P = k\}$$

im Raum der  $(n+k)$ -reihigen quadratischen Matrizen.

**Beispiel 22.** Für die Grassmann-Mannigfaltigkeit hat man

$$\pi : O(n+k) \rightarrow G_k(\mathbb{R}^{n+k}) = O(n+k)/O(n) \times O(k).$$

Es ist

$$o(n+k) = \left\{ \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix} \mid U = -U^*, V = -V^* \right\} + \left\{ \begin{pmatrix} 0 & A \\ -A^* & 0 \end{pmatrix} \mid A \in M(n \times k) \right\}.$$

$d_E \pi$  liefert daher einen Isomorphismus zwischen  $M(n \times k)$  und  $T_{\pi(E)} G_k(\mathbb{R}^{n+k})$ .

## 8 Riemannsche Mannigfaltigkeiten

**Definition.** Eine *Riemannsche Mannigfaltigkeit*  $(M, g)$  ist eine  $C^\infty$ -differenzierbare Mannigfaltigkeit  $M$  zusammen mit einer Funktion  $g$ , die jedem Punkt  $p \in M$  eine euklidische Metrik  $g_p$  von  $T_p M$  zuordnet, und die differenzierbar vom Punkt abhängt: Sind  $X, Y \in \Gamma(TM)$  differenzierbare Vektorfelder auf einer offenen Teilmenge  $G \subset M$ , so ist  $M \rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto g_p(X_p, Y_p)$  differenzierbar. Die Funktion  $g$  heißt eine *Riemannsche Metrik* auf  $M$ .

Ist  $g_p$  nicht positiv-definit, sondern für jedes  $p$  eine nicht-degenerierte symmetrische Bilinearform, so heißt  $(M, g)$  eine *Pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit*. Ist hat  $g$  die Signatur  $(-, +, \dots, +)$ , so heißt  $(M, g)$  auch eine *Lorentzmannigfaltigkeit*.

**Beispiel 23.** Eine Immersion  $M \rightarrow \mathbb{R}^n$  induziert eine 1. Fundamentalform

$$f^* \langle \cdot, \cdot \rangle =: g,$$

und damit wird  $M$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit.

**Beispiel 24.** Auf jeder Mannigfaltigkeit (Hausdorff mit abzählbarer Basis der Topologie) gibt es eine Riemannsche Metrik. (Zerlegung der Eins).

**Beispiel 25.** Ist  $g$  eine Riemannsche Metrik auf  $M$  und  $\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}$  eine differenzierbare Funktion, so ist auch  $e^{2\lambda}g$  eine Riemannsche Metrik auf  $M$ . (Konforme Änderung der Metrik).

**Beispiel 26.** Auf der offenen Einheitskugel  $D^m$  im  $\mathbb{R}^m$  erhalten wir durch spezielle konforme Änderung der euklidischen Metrik eine neue Riemannsche Metrik

$$g_p(v, w) := \frac{4}{(1 - \|p\|^2)^2} \langle v, w \rangle.$$

$\mathbf{H}^m := (D^m, g)$  heißt der  $m$ -dimensionale hyperbolische Raum.

**Definition.** Mittels einer Riemannschen Metrik kann man Winkel zwischen sich schneidenden (regulären) Kurven und die Länge von Kurven messen. Es ist

$$L(c) := \int \sqrt{g_{c(t)}g(\dot{c}(t), \dot{c}(t))} dt.$$

**Beispiel 27.** Die Länge der Kurve  $c : [0, \tau] \rightarrow \mathbf{H}^m, t \mapsto tv$ , wo  $v$  ein fester Einheitsvektor im  $\mathbb{R}^m$  und  $0 < \tau < 1$  ist, ist gegeben durch

$$\int_0^\tau \frac{2}{1-t^2} dt = \ln \frac{1+\tau}{1-\tau}.$$

**Definition.** Sei  $f : M \rightarrow N$  eine Immersion der Mannigfaltigkeit  $M$  in die Riemannschen Mannigfaltigkeit  $(N, h)$ . Dann wird durch

$$f^*h(v, w) := h_{f(p)}(d_p f(v), d_p f(w))$$

eine Riemannsche Metrik auf  $M$  definiert. Besitzt  $M$  bereits eine Riemannsche Metrik  $g$ , so heißt  $f$  eine *isometrische Immersion*, wenn  $g = f^*h$ . Ist  $f$  überdies ein Diffeomorphismus, so heißt  $f$  eine *Isometrie*.

**Bemerkung.** Eine kovariante Ableitung auf  $M$  ist eine Abbildung

$$\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$$

mit den aus Diffgeo I geläufigen Eigenschaften ( $\mathbb{R}$ -Bilinearität, Produktregel). Wie im letzten Semester beweist man:

**Satz 16.** Auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit gibt es genau eine kovariante Ableitung  $\nabla$  mit

$$(\nabla_Z g)(X, Y) := Z \cdot g(X, Y) - g(\nabla_Z X, Y) - g(X, \nabla_Z Y) = 0 \quad (9)$$

$$T(X, Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0. \quad (10)$$

$\nabla$  heißt die kovariante Riemannsche (oder auch Levi-Civita-) Ableitung von  $(M, g)$ . Sie ist gegeben durch

$$\begin{aligned} 2g(X, \nabla_Z Y) &= Z \cdot g(X, Y) + Y \cdot g(X, Z) - X \cdot g(Y, Z) \\ &\quad + g(Z, [X, Y]) + g(Y, [X, Z]) - g(X, [Y, Z]) \end{aligned}$$

**Beispiel 28.** Ist  $\nabla$  die kovariante Riemannsche Ableitung zur Metrik  $g$ , so ist

$$\tilde{\nabla}_Z Y = \nabla_Z Y + (Z \cdot \lambda)Y + (Y \cdot \lambda)Z - g(Y, Z)\text{grad}^g \lambda$$

mit  $g(\text{grad}^g \lambda, X) := X \cdot \lambda$  die kovariante Riemannsche Ableitung zur Metrik

$$\tilde{g} := e^{2\lambda}g.$$

Insbesondere ergibt sich für  $\mathbf{H}^m$  die Ableitung

$$\nabla_Z Y = D_Z Y + \frac{2}{1 - \|x\|^2}(\langle Z, x \rangle Y + \langle Y, x \rangle Z - \langle Y, Z \rangle x).$$

*Beweis.* Es ist

$$\begin{aligned} & 2e^{2\lambda}g(X, \tilde{\nabla}_Z Y) \\ &= 2\tilde{g}(X, \tilde{\nabla}_Z Y) \\ &= Z \cdot \tilde{g}(X, Y) + Y \cdot \tilde{g}(X, Z) - X \cdot \tilde{g}(Y, Z) + \tilde{g}(Z, [X, Y]) + \tilde{g}(Y, [X, Z]) - \tilde{g}(X, [Y, Z]) \\ &= e^{2\lambda}\{2g(X, \nabla_Z Y) + 2(Z \cdot \lambda)g(X, Y) + (Y \cdot \lambda)g(X, Z) - g(X, \text{grad}^g \lambda)g(Y, Z)\} \\ &= 2e^{2\lambda}g(X, \nabla_Z Y + (Z \cdot \lambda)Y + (Y \cdot \lambda)Z - g(Y, Z)\text{grad}^g \lambda) \end{aligned}$$

Insbesondere gilt für den hyperbolischen Raum

$$\begin{aligned} e^{2\lambda} &= \frac{4}{(1 - \|x\|^2)^2} \Rightarrow \lambda = \ln 2 - \ln(1 - \|x\|^2) \\ &\Rightarrow X \cdot \lambda = \frac{2 \langle X, x \rangle}{1 - \|x\|^2} \\ &\Rightarrow \text{grad}_x^g \lambda = \frac{2}{1 - \|x\|^2}x. \end{aligned}$$

□

**Bemerkung.** Wie im Teil I wird der Begriff der kovarianten Ableitung erweitert auf Vektorfelder längs Abbildungen. Der folgende Satz ist fast wörtlich zitiert aus der Diffgeo I und wird ganz genauso bewiesen.

**Satz 17 (Kovariante Ableitung längs Abbildungen).**

*Sei  $\nabla$  eine kovariante Ableitung auf der Mannigfaltigkeit  $M$  (nicht notwendig die Levi-Civita-Ableitung einer Riemannschen Mannigfaltigkeit). Sei  $h : N \rightarrow M$  eine Abbildung. Dann gibt es genau eine Abbildung*

$$h^*\nabla : \Gamma(TN) \times \Gamma(h^*TM) \rightarrow \Gamma(h^*TM)$$

*mit folgenden Eigenschaften:*

*Für  $X, X_1, X_2 \in \Gamma(TN)$ ,  $Y, Y_1, Y_2 \in \Gamma(h^*TM)$ ,  $Z \in \Gamma(TM)$  und eine Funktion  $\phi \in C^\infty(N)$  gilt*

$$(h^*\nabla)_{X_1+X_2} Y = (h^*\nabla)_{X_1} Y + (h^*\nabla)_{X_2} Y, \quad (h^*\nabla)_{\phi X} Y = \phi(h^*\nabla)_X Y \quad (11)$$

$$(h^*\nabla)_X (Y_1 + Y_2) = (h^*\nabla)_X Y_1 + (h^*\nabla)_X Y_2, \quad (h^*\nabla)_X (\phi Y) = (X \cdot \phi)Y + \phi(h^*\nabla)_X Y \quad (12)$$

$$(h^*\nabla)_X (Z \circ h) = \nabla_{dh(X)} Z \quad (13)$$

*Aus (11) folgt, daß  $h^*\nabla$  im ersten Argument tensoriell ist, also für jedes  $p \in N$  eine Abbildung*

$$T_p N \times \Gamma(h^*TM) \rightarrow T_{h(p)} M, (v, Y) \mapsto (h^*\nabla)_v Y \quad (14)$$



definiert.

Statt  $h^*\nabla$  schreibt man meistens einfach wieder  $\nabla$ .

**Beispiel 29.** Wir betrachten die Kurve  $c(t) := tv$  in  $H^m$ , wobei  $v \in \mathbb{R}^m$  ein Einheitsvektor und  $t \in N := ]0, 1[$  sei.

Dann ist  $\dot{c} \in \Gamma(c^*TH^m)$  und  $\frac{d}{dt} \in \Gamma(TN)$ . Wegen  $\dot{c} = v$  gilt

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{\frac{d}{dt}} \dot{c} &= \underbrace{D_{\frac{d}{dt}} \dot{c}}_{=0} + \frac{2}{1-t^2} (\langle \dot{c}, c(t) \rangle \dot{c} + \langle \dot{c}, c(t) \rangle \dot{c} - \langle \dot{c}, \dot{c} \rangle c(t)) \\ &= \frac{2t}{1-t^2} \dot{c}. \end{aligned}$$

## 9 Innere Metrik

**Satz 18.** Sei  $(M, g)$  eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit. Definiere für  $p, q \in M$

$$d(p, q) := \inf\{L(c); c \text{ ist eine stückweise } C^\infty - \text{Kurve von } p \text{ nach } q\}.$$

Dann ist  $(M, d)$  ein metrischer Raum, und die induzierte Topologie ist die Mannigfaltigkeitstopologie.

*Beweis.* Weil  $M$  lokal diffeomorph zum  $\mathbb{R}^m$  ist, ist die Menge  $Z_p$  der Punkte, die sich mit  $p$  durch einen stückweise glatten Weg verbinden läßt, offen. Ist andererseits  $q \notin Z_p$ , so gibt es eine Umgebung von  $q$ , in der sich alle Punkte mit  $q$   $C^\infty$  verbinden lassen. Diese Umgebung trifft also  $Z_p$  nicht. Daher ist  $Z_p$  offen und abgeschlossen, also  $= M$ . Deshalb hat  $d$  endliche Werte. Die Eigenschaften

$$\begin{aligned} d(p, p) &= 0 \\ d(p, q) &= d(q, p) \\ d(p, r) &\leq d(p, q) + d(q, r) \end{aligned}$$

einer Metrik sind evident. Es bleibt zu zeigen, daß  $d(p, q) > 0$ , falls  $p \neq q$ .

**Zwischenbetrachtung.** Seien  $p \in M$  und  $(u, U)$  eine Karte um  $p$  mit  $u(p) = 0$ . Wir wählen  $\rho > 0$ , so daß die abgeschlossen Kugel  $B_\rho$  vom Radius  $\rho$  um 0 im  $\mathbb{R}^m$  ganz in  $u(U)$  liegt. Wir wollen die Länge von Kurven  $c$  in  $u^{-1}(B_\rho)$  mit der euklidischen Länge der Bildkurven  $u \circ c$  im  $\mathbb{R}^m$  vergleichen. Die Abbildung

$$B_\rho \times S^{m-1} \rightarrow \mathbb{R}, (x, v) \mapsto g_{u^{-1}(x)}(d_x u^{-1}(v), d_x u^{-1}(v))$$

ist stetig auf einem Kompaktum und nimmt deshalb ihr Minimum  $\delta$  und Maximum  $\Delta$  an. Offenbar ist  $\delta > 0$ . Für jedes  $q \in u^{-1}(B_\rho)$  und  $X \in T_q M$  gilt dann also

$$\delta \langle d_q u(X), d_q u(X) \rangle \leq g_q(X, X) \leq \Delta \langle d_q u(X), d_q u(X) \rangle$$

Daraus folgt

$$\sqrt{\delta} L_{\text{eukl}}(u \circ c) \leq L(c) \leq \sqrt{\Delta} L_{\text{eukl}}(u \circ c) \text{ für jedes } c \text{ in } u^{-1}(B_\rho), \quad (15)$$

und

$$\rho\sqrt{\delta} \leq L(c) \text{ für jedes in } p \text{ beginnende } c, \text{ welches } u^{-1}(B_\rho) \text{ verläßt.} \quad (16)$$

Seien nun  $p, q \in M, p \neq q$ . Dann gibt es  $(u, U)$  und  $\rho$  wie oben, und wegen der Hausdorff-Eigenschaft können wir annehmen, daß  $q \notin U$ . Nach (16) ist dann

$$d(p, q) \geq \rho\sqrt{\delta} > 0.$$

Ist  $q \in M$  mit  $d(p, q) < \rho\sqrt{\delta}$ , so liefert (16) auch, daß  $q \in u^{-1}(B_\rho) \subset U$ . Also enthält jede Kartenumgebung  $U$  von  $p$  eine offene  $d$ -Kugel um  $p$  und daher sind die offenen Teilmengen von  $M$  auch offen bezüglich  $d$ .

Wir zeigen, daß umgekehrt die offenen  $d$ -Kugeln auch in der Mannigfaltigkeitstopologie offen sind. Sei dazu wieder  $u : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine Karte um  $p$  wie oben. Dann liegt nach dem bereits Bewiesenen für hinreichend kleines  $\epsilon > 0$  die  $d$ -Kugel vom Radius  $\epsilon$  um  $p$  in  $u^{-1}(B_\rho) \subset U$ . Nach (15) gilt für alle  $x \in \mathbb{R}^m$  mit  $\|x\| < \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \epsilon$ , daß

$$d(p, u^{-1}(x)) \leq \sqrt{\Delta}\|x\| < \epsilon.$$

Also ist das (offene!)  $u$ -Urbild der offenen Kugel vom Radius  $\frac{1}{\sqrt{\Delta}} \epsilon$  enthalten in der offenen  $d$ -Kugel vom Radius  $\epsilon$  um  $p$ . Daher sind zunächst alle hinreichend kleinen, damit dann aber *alle* offenen  $d$ -Kugeln auch offen in der Mannigfaltigkeitstopologie.

Damit stimmen beide Topologien überein. □

**Beispiel 30.** Im euklidischen Raum erzeugt die kanonische Riemannsche Metrik gerade die übliche Euklidische Metrik.

**Beispiel 31.** Auf der Einheitsphäre  $S^m$  ist die von der kanonischen Riemannschen Metrik induzierte innere Metrik gegeben durch

$$d(p, q) = \arccos \langle p, q \rangle .$$

**Beispiel 32.** Wir betrachten die offene Einheitskreisscheibe  $\mathbf{H}^2$  mit der hyperbolischen Metrik

$$g_z(v, w) = \frac{4}{(1 - |z|^2)^2} \langle v, w \rangle .$$

Dafür gilt:

- (i) Die gebrochen-linearen Transformationen

$$f(z) := e^{i\alpha} \frac{z + z_0}{1 + z\bar{z}_0}, \quad |z_0| < 1,$$

bilden  $\mathbf{H}^2$  isometrisch auf sich ab.

- (ii) Der Abstand zwischen 0 und  $z \in \mathbf{H}^2$  wird durch die monoton parametrisierte Strecke von 0 nach  $z$  realisiert. Er ist

$$d(0, z) = \ln \frac{1 + |z|}{1 - |z|},$$

vgl. letzte Vorlesung.

- (iii) Der Abstand zweier beliebiger Punkte  $z_1, z_2 \in \mathbf{H}^2$  ist

$$d(z_1, z_2) = \ln \frac{1 + \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - z_1\bar{z}_2} \right|}{1 - \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - z_1\bar{z}_2} \right|}.$$

*Beweis.* Zu (i). Wir beschränken uns auf den Fall  $\alpha = 0$ , weil die Rotationen um den Ursprung offensichtlich Isometrien sind. Wir rechnen nicht nach, daß  $f$  eine Bijektion der offenen Kreisscheibe auf sich liefert.

Es gilt  $d_z f(v) = f'(z)v$ , wobei rechts das Produkt komplexer Zahlen steht. Wir finden

$$f'(z) = \frac{1 + z\bar{z}_0 - z\bar{z}_0 - z_0\bar{z}_0}{(1 + z\bar{z}_0)^2} = \frac{1 - z_0\bar{z}_0}{(1 + z\bar{z}_0)^2}$$

und damit

$$\begin{aligned} g_{f(z)}(d_z f(v), d_z f(w)) &= \frac{4}{(1 - |\frac{z+z_0}{1+z\bar{z}_0}|^2)^2} \left| \frac{1 - z_0\bar{z}_0}{(1 + z\bar{z}_0)^2} \right|^2 \langle v, w \rangle \\ &= \frac{4(1 - z_0\bar{z}_0)^2}{(|1 + z\bar{z}_0|^2 - |z + z_0|^2)^2} \langle v, w \rangle \\ &= \frac{4(1 - z_0\bar{z}_0)^2}{(1 - z_0\bar{z}_0)^2(1 - z\bar{z})^2} \langle v, w \rangle \\ &= \frac{4}{(1 - z\bar{z})^2} \langle v, w \rangle \\ &= g_z(v, w). \end{aligned}$$

Zu (ii). Wir wissen aus der letzten Vorlesung, daß

$$d(0, z) \leq \ln \frac{1 + |z|}{1 - |z|}.$$

Sei nun  $c : [a, b] \rightarrow \mathbf{H}^2$  eine Kurve von 0 nach  $z$ . Wir können annehmen, daß  $0 \notin c([a, b])$ , und daß  $c$  in differenzierbaren Polarkoordinaten gegeben ist:

$$c(t) = r(t)e^{i\phi(t)}.$$

Dann ist  $\dot{c} = (\dot{r} + ir\dot{\phi})e^{i\phi}$  und

$$\begin{aligned} L(c) &= \int_a^b \frac{2}{1 - r^2} \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2} dt \geq \int_a^b \frac{2}{1 - r^2} \sqrt{\dot{r}^2} dt = \int_a^b \frac{2|\dot{r}|}{1 - r^2} dt \\ &\geq \int_a^b \frac{2\dot{r}}{1 - r^2} dt = \ln \frac{1 + r}{1 - r} \Big|_a^b = \ln \frac{1 + |z|}{1 - |z|}. \end{aligned}$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn  $\phi$  konstant und  $r$  monoton wachsend ist.

Zu (iii). Definiere  $f(z) = \frac{z - z_2}{1 - z\bar{z}_2}$ . Dann ist  $f$  eine  $d$ -Isometrie. Es gilt

$$d(z_1, z_2) = d(f(z_1), f(z_2)) = d(f(z_1), 0) = \ln \frac{1 + \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - z_1\bar{z}_2} \right|}{1 - \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - z_1\bar{z}_2} \right|}.$$

□

## 10 Geodätische

Vergleiche Vorlesung 24 der Diffgeo I.

**Definition.** Sei  $(M, g)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Levi-Civita-Ableitung  $\nabla$ . Eine *Geodätische* ist eine Kurve  $c : \mathbb{R} \supset J \rightarrow M$  mit

$$\nabla_D \dot{c} = 0.$$

Dabei sei  $D = \frac{d}{dt}$ .

**Bemerkung.** Wegen  $Dg_c(\dot{c}, \dot{c}) = 2g_c(\nabla_D \dot{c}, \dot{c}) = 0$  sind Geodätische mit konstanter Geschwindigkeit, also proportional zur Bogenlänge parametrisiert.

Verschiedene Beispiele sind bereits aus Diffgeo I bekannt.

**Beispiel 33 (Geodätische unter Isometrien).** Isometrien erhalten die Levi-Civita-Ableitung. Es gilt daher

$$d_c f(\nabla_D \dot{c}) = \nabla_D df(\dot{c}) = \nabla_D (f \circ c), \quad (17)$$

vgl. auch die Übungen. Deshalb ist mit  $c$  auch  $f \circ c$  eine Geodätische.

**Beispiel 34 (Hyperbolischer Raum).** Ist  $c$  eine Prägeodätische, d.h. gilt

$$\nabla_D \dot{c} = \phi(t)\dot{c}(t),$$

so ist die Umparametrisierung von  $c$  auf konstante Geschwindigkeit eine Geodätische. Wir haben früher für die Kurve  $\tilde{c} : [0, 1] \rightarrow H^m, t \mapsto tv$  mit  $\|v\| = 1$  die Levi-Civita-Ableitung des  $H^m$  ausgerechnet:

$$\nabla_D \dot{\tilde{c}} = \frac{2t}{1-t^2} \dot{\tilde{c}}.$$

Sie ist also eine Prägeodätische. Die Kurve  $c(t) = \tilde{c}(\psi(t))$  hat die Geschwindigkeit

$$g(\dot{c}, \dot{c}) = \frac{4}{(1-|\psi(t)|^2)^2} \langle \dot{\psi}(t)v, \dot{\psi}(t)v \rangle = \frac{4\dot{\psi}(t)^2}{(1-\psi(t)^2)^2}$$

Daher ist

$$c(t) = \tanh \frac{t}{2} v$$

eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve, denn  $(\tanh)' = 1 - \tanh^2$ .

Die im letzten Abschnitt notierten Isometrien von  $H^2$  führen Durchmesser der Kreisscheibe in zum Rand orthogonale Kreise über. Also sind Kreise senkrecht zum Rand der Kreisscheibe bei geeigneter Parametrisierung Geodätische der hyperbolischen Ebene. Das bleibt auch im  $H^m$  richtig.

**Beispiel 35 (Fixkurven von Isometrien).** Seien  $c : \mathbb{R} \supset J \rightarrow M$  eine mit konstanter Geschwindigkeit parametrisierte Kurve und  $f : M \rightarrow M$  eine Isometrie, die  $c$  fest läßt:  $f \circ c = c$ . Weiter gelte

$$\ker(\text{Id} - d_{c(t)} f) = \mathbb{R}\dot{c}$$

für alle  $t$ . Dann ist  $c$  eine Geodätische. Insbesondere gilt das für Meridiankurven von Rotationsflächen.

*Beweis.* Aus (17) folgt wegen  $f \circ c = c$ , daß  $d_c f(\nabla_D \dot{c}) = \nabla_D \dot{c}$ . Also ist

$$d_c f(\nabla_D \dot{c}) \in \mathbb{R}\dot{c}.$$

Andrerseits folgt aus  $g(\dot{c}, \dot{c}) = \text{const.}$  durch Differenzieren

$$0 = Dg(\dot{c}, \dot{c}) = 2g(\nabla_D \dot{c}, \dot{c}),$$

und deshalb ist  $\nabla_D \dot{c} = 0$ . □

**Beispiel 36 (Bilinvariante Metriken auf Liegruppen).** Ist  $g$  eine bilinvariante Metrik auf einer Liegruppe  $G$ , d.h. sind Links- und Rechtstranslationen  $L_g$  und  $R_g$  Isometrien, so ist  $Ad_g : d(L_g \circ R_{g^{-1}}) : T_e G \rightarrow T_e G$  für alle  $g \in G$  eine orthogonale Abbildung von  $(T_e G, g_e)$ . Daher ist

$$ad_X = d_e Ad(X) : T_e G \rightarrow T_e G, Y \mapsto [X, Y]$$

schiefsymmetrisch bezüglich  $g_e$ :

$$g([X, Y], Z) + g(Y + [X, Z]) = 0. \quad (18)$$

Sei nun  $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Definiert man für für linksinvariante Vektorfelder  $X, Y \in \mathfrak{g}$  und  $\varphi \in C^\infty(M)$

$$\nabla_X \varphi Y := c(X \cdot \varphi)Y + c[X, Y],$$

so definiert das eine kovariante Ableitung auf  $G$ . (Beachte, daß man jedes Vektorfeld auf  $G$  als  $C^\infty(M)$ -Linearkombination von linksinvarianten Vektorfeldern schreiben kann.) Für linksinvariante Vektorfelder ist also  $\nabla_X \varphi Y := c[X, Y]$ . Der Torsionstensor wird

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = c[X, Y] - c[Y, X] - [X, Y] = (2c - 1)[X, Y].$$

Für  $c = 1/2$  wird der Torsionstensor also  $= 0$ . Weiter ist, wieder für linksinvariante Vektorfelder,

$$X \cdot \underbrace{g(Y, Z)}_{=const} - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z) = -c^{-1}(g([X, Y], Z) + g(Y, [X, Z])) \stackrel{(18)}{=} 0.$$

Dann verschwindet der Ausdruck aber auch für beliebige Vektorfelder. Also ist die Levi-Civita-Ableitung einer bilinvarianten Metrik auf einer Liegruppe gegeben durch

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y], \quad X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Ist  $X \in \mathfrak{g}$  ein linksinvariantes Vektorfeld, so folgt für seine Integralkurve  $c(t) = \exp(tX)$

$$\nabla_D \dot{c} = (\nabla_X X)_c = \frac{1}{2}[X, X]_c = 0.$$

Die Integralkurven von linksinvarianten Vektorfeldern sind also Geodätische der bilinvarianten Metrik.

**Beispiel 37 (Spezielle Orthogonale Gruppe).** Auf  $SO(n)$  definiert

$$g(X, Y) := \text{Spur}(XY^*) = -\text{Spur}(XY), \quad X, Y \in \mathfrak{so}(n)$$

eine bilinvariante Metrik. Die Kurven  $c(t) = e^{tX}$  für  $X \in \mathfrak{so}(n)$  sind darin Geodätische.

**Geodätischengleichung in lokalen Koordinaten.** Sei  $(u, U)$  eine Karte für  $M$ . Dann ist  $\nabla$  gegeben durch die Christoffelsymbole

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial u_i}} \frac{\partial}{\partial u_j} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial u_k}.$$

Beschreibt man die Kurve  $c$  in  $U$  durch die Komponentenfunktionen in der Karte, d.h. setzt man  $c_i := u_i \circ c$ , so lautet die Bedingung dafür, daß  $c$  eine Geodätische ist

$$\ddot{c}_k + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k(c) \dot{c}_i \dot{c}_j = 0.$$

Das ist eine (nichtlineare) gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung. Als gibt es zu gegebenen Anfangswerten  $c(a), \dot{c}(a)$  lokal genau eine Geodätische.

**Satz 19 (Exponentialabbildung).** *Sei  $(M, g)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Tangentialbündel  $TM$ . Dann gibt es genau eine  $C^\infty$ -Abbildung  $\exp : W \rightarrow M$  einer offenen Teilmenge  $W \subset TM$  mit folgender Eigenschaften:*

Für alle  $p \in M, v \in T_p M$  ist

$$J_v := \{t; tv \in W\}$$

ein offenes Intervall um 0, und  $c_v : J_v \rightarrow M, t \mapsto \exp tv$  ist die eindeutig bestimmte maximale Geodätische mit  $\dot{c}_v(0) = v$ .

$W_p := W \cap T_p M$  ist eine offene sternförmige Umgebung von  $0 \in T_p M$  und es gilt

$$d_0(\exp|_{T_p M}) = \text{Id}_{W \cap T_p M}.$$

Inbesondere bildet  $\exp$  eine Umgebung von 0 in  $T_p M$  diffeomorph auf eine Umgebung von  $p$  in  $M$  ab.

Die Abbildung  $\exp$  heißt die Exponentialabbildung von  $(M, g)$ .

*Beweis.* Wir formulieren die Geodätischengleichung um als Differentialgleichung 1.Ordnung auf  $TM$  und wenden dann den Satz über den maximalen Fluß eines Vektorfeldes an.

1. Das Tangentialbündel. Die Menge  $TM$  der Tangentialvektoren einer  $m$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit  $M$  ist eine  $2m$ -dimensionale Mannigfaltigkeit. Sei  $\pi : TM \rightarrow M$  die Fußpunktprojektion. Jede Karte  $u(U)$  induziert eine Karte  $(\tilde{u}, \tilde{U} = u^{-1}(U))$  wie folgt:

$$\tilde{u}(v) := (u_1(\pi(v)), \dots, u_m(\pi(v)), du_1(v), \dots, du_m(v)). \quad (19)$$

Man kann zeigen, daß dies Atlas eine differenzierbare Struktur für  $TM$  induziert, und zwar die einzige, in der  $\pi$  eine Submersion wird.

2. Der geodätische Spray. Zu  $v \in TM$  sei  $c_v$  eine Geodätische mit  $\dot{c}_v(0) = v$ . Dann hat man  $\dot{c}_v : J \rightarrow TM$  und wir setzen

$$\tilde{X}_v := \frac{d}{dt} \dot{c}_v(0). \quad (20)$$

Da  $c_v$  bis auf den Definitionsbereich eindeutig ist, ist  $\tilde{X}$  ein wohldefiniertes Vektorfeld auf  $TM$ , der sogenannte geodätische Spray von  $(M, g)$ . Wir wollen zeigen, daß es differenzierbar ist. Dazu reicht der Nachweis, daß  $\tilde{X}\tilde{u}$  für die in (1) definierten Karten differenzierbar ist. Dann sind die Koeffizienten von  $\tilde{X}$  in der Karte  $\tilde{u}$  differenzierbar.

$$\begin{aligned} \tilde{X}\tilde{u}_k &= \frac{d}{dt} \dot{c}_v(0) \tilde{u}_k = \frac{d}{dt} (\tilde{u}_k \circ \dot{c}_v)(0) \\ &= \frac{d}{dt} (u_k(\pi(\dot{c}_v)))(0) = \frac{d}{dt} (u_k \circ c_v)(0) \\ &= du_k(\dot{c}_v(0)) = du_k(v) = \tilde{u}_{m+k}(v). \end{aligned}$$

Ebenso

$$\begin{aligned}\tilde{X}\tilde{u}_{m+k} &= \frac{d}{dt}(\tilde{u}_{m+k} \circ \dot{c}_v)(0) = \frac{d}{dt}(du_k(\dot{c}_v)) = \ddot{c}_{vk} \\ &= -\sum \Gamma_{ij}^k(c_v(0))\dot{c}_{vi}(0)\dot{c}_{vj}(0) = -\sum(\Gamma_{ij}^k \circ \pi)\tilde{u}_{m+i}\tilde{u}_{m+j}(v).\end{aligned}$$

3. Integralkurven von  $\tilde{X}$  und Geodätische. Ist  $c$  eine Geodätische, so ist  $c_{\dot{c}(t_0)}(t) = c(t + t_0)$ . Also ist

$$\tilde{X}_{\dot{c}(t_0)} = \frac{d}{dt}\dot{c}(t + t_0)(0) = \frac{d}{dt}\dot{c}(t_0).$$

Also ist  $\dot{c}$  eine Integralkurve von  $\tilde{X}$ .

Sei umgekehrt  $\tilde{c}$  eine Integralkurve von  $\tilde{X}$ . Sei  $c$  eine Geodätische mit  $\dot{c}(t_0) = \tilde{c}(t_0)$ . Dann ist auch  $\dot{c}$  eine Integralkurve von  $\tilde{X}$ , also stimmen  $\tilde{c}$  und  $\dot{c}$  auf einer Umgebung von  $t_0$  überein. Es folgt, daß  $\pi \circ \tilde{c} = \pi \circ \dot{c} = c$  eine Geodätische ist.

4. Die Exponentialabbildung. Sei  $\tilde{\Phi} : \mathbb{R} \times TM \supset \tilde{W} \rightarrow TM$  der maximale Fluß von  $\tilde{X}$ . Wir setzen

$$\begin{aligned}W &:= \{v; (1, v) \in \tilde{W}\} \\ \exp : W &\rightarrow M, v \mapsto \pi \circ \tilde{\Phi}(1, v).\end{aligned}$$

Offenbar sind  $W$  mit  $\tilde{W}$  offen und  $\exp$  differenzierbar. Weiter gilt

$$\exp(tv) = \pi \circ \tilde{\Phi}(1, tv) = c_{tv}(1) = c_v(t) = \pi \circ \tilde{\Phi}(t, v).$$

Deshalb ist  $J_v \rightarrow M, t \mapsto \exp(tv)$  die maximale Geodätische mit  $\dot{c} = v$ .

Offenbar ist  $W_p$  offen und sternförmig bezüglich 0 in  $T_pM$ . Schließlich ist

$$d_0 \exp(v) = D \exp(tv)|_0 = Dc_v(0) = v.$$

## 11 Geodätische und Kürzeste I

**Definition.** Sei  $(M, g)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und  $c : [a, b] \rightarrow M$  eine Kurve.

(i) Sei  $J \subset \mathbb{R}$  ein offenes Intervall um 0.

$$V : [a, b] \times J \rightarrow M, (t, \tau) \mapsto V(t, \tau) = c_\tau(t)$$

heißt eine *Variation* von  $c$ , wenn  $c = c_0$ . Gilt überdies

$$c_\tau(a) = c(a), \quad c_\tau(b) = c(b) \quad \text{für alle } \tau,$$

so heißt  $V$  eine *Variation mit festen Endpunkten*.

(ii) Sei  $V$  eine Variation von  $c$ . Seien  $\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial \tau}$  die beiden konstanten Einheitsvektorfelder in Richtung der kanonischen Basis auf  $\mathbb{R}^2$ . Wir definieren Vektorfelder längs  $V$  durch

$$\begin{aligned}X_{(t,\tau)} &:= d_{(t,\tau)}V\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}V_{(t,\tau)} = \dot{c}_\tau(t) \\ Y_{(t,\tau)} &:= d_{(t,\tau)}V\left(\frac{\partial}{\partial \tau}\right) = \frac{\partial}{\partial \tau}V_{(t,\tau)}\end{aligned}$$

$Y$  heißt das *Variationsvektorfeld* von  $V$ .

**Satz 20 (Erste Variation der Bogenlänge).** Sei  $V$  eine Variation der nach der Bogenlänge parametrisierten Geodätischen  $c : [a, b[ \rightarrow M$ , und sei

$$L(\tau) := L(c_\tau) = \int_a^b \sqrt{g_{c_\tau(t)}(\dot{c}_\tau(t), \dot{c}_\tau(t))} dt.$$

Dann gilt für  $X$  und  $Y$  wie oben

$$\frac{\partial}{\partial \tau} L(0) = g(Y, X)|_{(a,0)}^{(b,0)}.$$

Insbesondere ist für Variationen mit festen Endpunkten wegen  $Y_{(a,0)} = 0$ ,  $Y_{(b,0)} = 0$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} L(0) = 0.$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} L(\tau) &= \frac{\partial}{\partial \tau} \int_a^b \sqrt{g_{c_\tau(t)}(\dot{c}_\tau(t), \dot{c}_\tau(t))} dt \\ &= \int_a^b \frac{1}{2\|\dot{c}_\tau(t)\|} \frac{\partial}{\partial \tau} g_{c_\tau(t)}(\dot{c}_\tau(t), \dot{c}_\tau(t)) dt \\ &= \int_a^b \frac{1}{2\|X_{(t,\tau)}\|} \frac{\partial}{\partial \tau} g(X, X)_{(t,\tau)} dt \\ &= \int_a^b \frac{1}{\|X_{(t,\tau)}\|} g(\nabla_{\frac{\partial}{\partial \tau}} X, X)_{(s,t)} dt \end{aligned}$$

Aber nach der 23. Vorlesung Diffgeo I hat man

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial \tau}} X - \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} Y = \nabla_{\frac{\partial}{\partial \tau}} dV\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) - \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} dV\left(\frac{\partial}{\partial \tau}\right) = dV\left(\left[\frac{\partial}{\partial \tau}, \frac{\partial}{\partial t}\right]\right) = 0.$$

Es folgt

$$\frac{d}{d\tau} L(\tau) = \int_a^b \frac{1}{\|X_{(t,\tau)}\|} g(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} Y, X)_{(t,\tau)} dt$$

und

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} L(0) &= \int_a^b g(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} Y, X)_{(t,0)} dt \\ &= \int_a^b \left( \frac{\partial}{\partial t} g(Y, X)_{(t,0)} - g(Y, \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} X)_{(t,0)} \right) dt \\ &= \int_a^b \left( \frac{\partial}{\partial t} g(Y, X)_{(t,0)} - g(Y_{(t,0)}, (\nabla_D \dot{c})_s) \right) dt \\ &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} g(Y, X)_{(t,0)} dt \\ &= g(Y, X)|_{(a,0)}^{(b,0)}. \end{aligned}$$

□



Im folgenden Satz betrachten wir die Einschränkung der Exponentialabbildung auf einen Tangentialraum  $T_p M$ , genauer auf die offene Teilmenge  $W_p = W \cap T_p M$  davon. Dann ist für  $x \in W_p$

$$T_p M \cong T_x(T_p M) \subset T_x(TM),$$

und in diesem Sinne  $d_x \exp : T_p M \rightarrow M$ .

**Satz 21 (Gauß-Lemma).** *Die Exponentialabbildung der Riemannschen Mannigfaltigkeit  $(M, g)$  ist in jedem Punkt radialisometrisch: Ist  $W_p$  der Definitionsbereich von  $\exp|_{T_p M}$ , so gilt für alle  $x \in W_p$  und  $v, w \in T_p M$  mit  $\underline{v} \in \mathbb{R}x$ :*

$$g_{\exp x}(d_x \exp(v), d_x \exp(w)) = g_p(v, w).$$

Für hinreichend kleines  $\delta > 0$  werden also die Sphären  $\{x \in T_p M \mid g_p(x, x) = \delta^2\}$  durch  $\exp$  diffeomorph auf Untermannigfaltigkeiten von  $M$  abgebildet, die die von  $p$  ausgehenden Geodätischen senkrecht schneiden.

*Beweis.* Trivial für  $x = 0$ , weil  $d_0 \exp|_{T_p M} = \text{Id}$ .

Sei also  $x \neq 0$  und o.E.  $v = x$ . Dann ist  $\gamma : t \mapsto tv$  eine Kurve in  $T_p M$  mit  $\dot{\gamma}(1) = v \in T_x T_p M$ , und  $d_x \exp(v) = \frac{d}{dt} \exp \circ \gamma(1)$  ist der Tangentialvektor an die Geodätische  $t \mapsto \exp(tv)$  an der Stelle  $t = 1$ . Dieser ist von der Länge  $\|v\|$ .

Es genügt, die Behauptung für die beiden Fälle  $w = v$  und  $w \perp v$ ,  $\|v\| = \|w\|$  zu beweisen.

1. Fall:  $v = w$ . Dann ist  $g_{\exp x}(d_x \exp(v), d_x \exp(v)) = \|v\|^2 = g_p(v, v)$ , weil Geodätische von konstanter Geschwindigkeit sind.

2. Fall:  $v \perp w$ ,  $\|v\| = \|w\|$ . Für ein hinreichend kleines Intervall  $J$  um 0 ist

$$V : [0, 1] \times J \rightarrow M, (t, \tau) \mapsto \exp(t(v \cos \tau + w \sin \tau))$$

definiert. Die Kurven  $V(\cdot, \tau) = c_\tau$  sind sämtlich Geodätische der Länge  $\|x\|$ . Daher folgt aus der 1. Variationsformel

$$\begin{aligned} g_p(v, w) = 0 &= \frac{d}{d\tau} L(0) = g(Y, X)_{(\|x\|, 0)} - g(Y, X)_{(0, 0)} \\ &= g_{\exp x}(d_x \exp(w), d_x \exp(v)) - g_p(0, v) \\ &= g_{\exp x}(d_x \exp(w), d_x \exp(v)). \end{aligned}$$

□

**Satz 22 (Geodätische sind lokal Kürzeste I).** *Sei  $(M, g)$  eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit. Seien  $p \in M$  und  $\epsilon > 0$ . Die Menge*

$$W_\epsilon := \{x \in T_p M \mid \|x\| < \epsilon\}$$

*werde durch  $\exp$  diffeomorph in  $M$  abgebildet. Dann ist für alle  $x \in W_\epsilon$*

$$d(p, \exp x) = \|x\|$$

*und*

$$\exp(W_\epsilon) = \{q \in M; d(p, q) < \epsilon\}.$$

*Die Kurve  $c : [0, 1] \rightarrow M, s \mapsto \exp(sx)$  ist die (bis auf monotone Umparametrisierung) eindeutig bestimmte kürzeste Kurve von  $p$  nach  $\exp x$ .*

*Beweis.* Wir wissen bereits, daß  $c : [0, 1] \rightarrow M$  eine Kurve der Länge  $\|x\|$  von  $p$  nach  $\exp x$  ist. Es bleibt zu zeigen: Ist  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  eine Kurve von  $p$  nach  $\exp x$ , so ist

$$L(\gamma) \geq \|x\|.$$

Wir nehmen zunächst an, daß  $\gamma = \exp \tilde{\gamma}$  für eine Kurve  $\tilde{\gamma}$  in  $W_\epsilon$ . Wir können weiter annehmen, daß  $\tilde{\gamma}(s) \neq 0$  für  $t > a$ . Wir bezeichnen mit  $\tilde{R} : y \mapsto \frac{y}{\|y\|}$  das radiale Einheitsvektorfeld auf  $W_\epsilon \setminus \{0\}$  und mit  $R = \exp_* \tilde{R}$  das korrespondierende Feld auf  $\exp(W_\epsilon \setminus \{0\})$ . Beachte, daß  $R$  nach dem Gauß-Lemma ein Einheitsfeld ist. Dann gilt

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_a^b \sqrt{g_\gamma(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})} dt \geq \int_a^b |g_\gamma(\dot{\gamma}, R_\gamma)| dt \\ &= \int_a^b |g_p(\dot{\tilde{\gamma}}, \tilde{R}_{\tilde{\gamma}})| dt = \int_a^b |g_p(\tilde{\gamma}', \frac{\tilde{\gamma}}{\|\tilde{\gamma}\|})| dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} \|\tilde{\gamma}\| dt = \|\tilde{\gamma}(b)\| = \|x\|. \end{aligned}$$

Gleichheit erhält man nur, wenn  $\dot{\gamma}$  stets ein positives Vielfaches von  $R \circ \gamma$  ist, d.h. wenn  $\gamma = c$  bis auf monotone Umparametrisierung.

Verläßt die Kurve  $\gamma$  die Menge  $\exp(W_\epsilon)$ , so „verläßt ihr ( $\exp|_{W_\epsilon}$ )-Urbild“ die Kugel  $W_\epsilon$ , und nach der vorstehenden Rechnung ist ihre Länge  $\epsilon$ .

Damit ist der Satz vollständig bewiesen. □

## 12 Geodätische und Kürzeste II

**Lemma 5.** *Seien  $(M, g)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und  $p \in M$ . Dann gibt es  $\epsilon > 0$  und eine Umgebung  $U$  von  $p$  in  $M$ , so daß für alle  $q \in U$  die Menge*

$$W_\epsilon(q) := \{v \in T_q M \mid \|v\| < \epsilon\}$$

*durch  $\exp$  diffeomorph in  $M$  abgebildet wird.*

*Beweis.* Wir schreiben in diesem Beweis  $0_q$  für den Nullvektor in  $T_q M$  und bezeichnen mit  $\exp : TM \supset W \rightarrow M$  die Exponentialabbildung von  $(M, g)$ . Definiere

$$E : TM \supset W \rightarrow M \times M, v \mapsto E(v) = (\pi(v), \exp v).$$

Dann gilt für alle  $q \in M$

$$E(0_q) = (q, q), \tag{21}$$

$$d_{0_q} E = (d_{0_q} \pi, d_{0_q} \exp) \quad \text{ist ein Isomorphismus.} \tag{22}$$

Zum Beweis von (22) betrachte für  $v \in T_q M$  die Kurven  $a : t \mapsto 0_{\exp(tv)}$  und  $b : t \mapsto tv$  in  $TM$ . Dann gilt

$$E(a(t)) = (\exp(tv), \exp(tv)) \quad \implies \quad d_0 E(\dot{a}(0_q)) = (v, v)$$

$$E(b(t)) = (q, \exp(tv)) \quad \implies \quad d_0 E(\dot{b}(0_q)) = (0, v).$$

Daher ist  $E$  in allen Punkten  $0_q$  ein lokaler Diffeomorphismus und es gibt eine offene Umgebung  $\tilde{W}$  von  $0_p$ , die durch  $E$  diffeomorph abgebildet wird. Dazu gibt es eine Umgebung  $U$  in  $M$  und ein  $\epsilon > 0$ , so daß

$$\{v \in TM \mid \pi(v) \in U \wedge \|v\| < \epsilon\} \subset \tilde{W}.$$

Dann ist  $E|_{W_\epsilon(q)}$  für alle  $q$  ein Diffeomorphismus auf

$$E(W_\epsilon(q)) = \{q\} \times \exp(W_\epsilon(q))$$

Also ist auch  $\exp|_{W_\epsilon(q)}$  ein Diffeomorphismus.  $\square$

**Satz 23 (Geodätische sind lokal Kürzeste II).** *Sei  $c : [a, b] \rightarrow M$  eine Geodätische in der zusammenhängenden Riemannschen Mannigfaltigkeit  $(M, g)$ . Dann gibt es zu jedem  $t \in [a, b]$  eine offene Umgebung  $J$  in  $[a, b]$ , so daß für alle  $t_1, t_2 \in J$  mit  $t_1 \leq t_2$  gilt:*

$$d(c(t_1), c(t_2)) = L(c|_{[t_1, t_2]}),$$

und  $c|_{[t_1, t_2]}$  ist bis auf Parametrisierung die einzige Kürzeste zwischen  $c(t_1)$  und  $c(t_2)$ .

Wegen der Kompaktheit von  $[a, b]$  gibt es also eine endliche Zerlegung  $a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = b$ , so daß  $c|_{[t_{i-1}, t_i]}$  für jedes  $i$  die (bis auf Parametrisierung eindeutig bestimmte) Kürzeste zwischen den Endpunkten ist.

*Beweis.* Wähle zu  $t$  eine Umgebung  $U$  von  $p = c(t)$  und ein  $\epsilon$  wie im Lemma. Wähle eine Umgebung  $J$  von  $t$  mit  $c(J) \subset U \cap \exp(W_{\epsilon/2}(c(t)))$ .

Nach Satz 22 ist dann  $d(c(t_i), c(t)) < \epsilon/2$ , also  $d(c(t_1), c(t_2)) < \epsilon$ .

Nach demselben Satz ist dann  $c(t_2) \in \exp(W_\epsilon(c(t_1)))$  und die Geodätische bis auf Parametrisierung die einzige Kürzeste.  $\square$

**Satz 24 (Kürzeste sind Prägeodätische).** *Seien  $(M, g)$  eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit und  $p, q \in M$ . Sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  eine stückweise- $C^\infty$ -Kurve von  $p$  nach  $q$  mit  $d(p, q) = L(\gamma)$ . Dann gibt es eine nach der Bogenlänge parametrisierte Geodätische  $c : [0, L(\gamma)] \rightarrow M$  und eine stückweise- $C^\infty$ -Funktion  $\phi : [a, b] \rightarrow [0, L(\gamma)]$  mit*

$$\gamma = c \circ \phi.$$

*Beweis.* Weil  $\gamma([a, b])$  kompakt ist, gibt es nach dem Lemma 5 ein  $\epsilon > 0$ , so daß jedes  $W_\epsilon(c(t))$  durch  $\exp$  diffeomorph abgebildet wird. Wähle eine Zerlegung

$$a = t_0 \leq \dots \leq t_k = b,$$

so daß  $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$  differenzierbar und

$$d(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_{i+1})) < \epsilon. \quad (23)$$

Weil  $\gamma$  Kürzeste ist, gilt nach der Dreiecksungleichung für  $s < t$

$$L(\gamma|_{[s, t]}) = d(\gamma(s), \gamma(t)). \quad (24)$$

Aus (23), (24) folgt nach dem Satz 22

$$\gamma|_{[t_{i-1}, t_{i+1}]} \subset \exp(W_\epsilon(\gamma(t_{i-1})))$$

und  $\gamma|_{[t_{i-1}, t_{i+1}]}$  ist eine monoton umparametrisierte Geodätische:

$$\begin{aligned}\gamma|_{[t_{i-1}, t_{i+1}]} &= c_{i-1} \circ \phi_{i-1}, \\ \phi_{i-1} : [t_{i-1}, t_{i+1}] &\rightarrow \mathbb{R} \text{ stückweise } C^\infty.\end{aligned}$$

Insbesondere hat  $\gamma$  an der Stelle  $t_i$  keinen echten Knick! Wir nehmen o.E. an, daß  $c_{i-1}$  nach der Bogenlänge parametrisiert ist:  $\|\dot{c}_{i-1}\| = 1$ . Dann hat das Definitionsintervall von  $c_{i-1}$  die Länge  $L(\gamma|_{[t_{i-1}, t_{i+1}]}) = L(\gamma|_{[t_0, t_{i+1}]} - L(\gamma|_{[t_0, t_{i-1}]})$ . Wir können deshalb annehmen, daß

$$c_{i-1} : [L(\gamma|_{[t_0, t_{i-1}]}), L(\gamma|_{[t_0, t_{i+1}]})] \rightarrow M.$$

Auf  $[L(\gamma|_{[t_0, t_i]}), L(\gamma|_{[t_0, t_{i+1}]})]$  sind dann sowohl  $c_{i-1}$  als auch  $c_i$  definierte, nach der Bogenlänge parametrisierte kürzeste Geodätische von  $\gamma(t_i)$  nach  $\gamma(t_{i+1})$ . Also stimmen sie auf diesem Intervall überein, und die  $c_i$  setzen sich zu einer nach der Bogenlänge parametrisierten Geodätischen  $c : [0, L(\gamma)] \rightarrow M$  zusammen. Offenbar setzen sich auch die  $\phi_i$  zu einer stetigen, stückweise differenzierbaren Abbildung  $\phi : [a, b] \rightarrow [0, L(\gamma)]$  zusammen.  $\square$

### 13 Geodätische Konvexität

Die folgenden Definitionen benötigen wir momentan nur im Beweis von Satz 25. Weil sie aber auch sonst von Interesse ist, sei sie hier angegeben.

**Definition.** Seien  $(M, g)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und  $\phi$  eine differenzierbare Funktion auf  $M$ .

- (i) Der *Gradient* von  $\phi$  ist das Vektorfeld definiert durch

$$g(\text{grad}_p \phi, v) := d_p \phi(v) = v \cdot \phi$$

für alle  $p \in M, v \in T_p M$ .

- (ii) Die *Hessesche* von  $\phi$  ist das Bilinearformenfeld definiert durch

$$\text{hess } \phi(v, w) := g(\nabla_v \text{grad } \phi, w)$$

für alle  $p \in M, v, w \in T_p M$ .

**Lemma 6.** *Es gilt*

- (i)  $\text{hess } \phi(v, w) = \text{hess } \phi(w, v)$ .

- (ii) *Ist  $\text{grad}_p \phi = 0$ , so gilt für ein beliebiges Vektorfeld  $Y$  mit  $Y_p = w$ :*

$$\text{hess } \phi(v, w) = v \cdot (Y \cdot \phi).$$

*Beweis.* Seien  $X, Y$  Vektorfelder mit  $X_p = v, Y_p = w$ . Dann ist

$$\begin{aligned}g(\nabla_X \text{grad } \phi, Y) &= X \cdot g(\text{grad } \phi, Y) - g(\text{grad } \phi, \nabla_X Y) \\ &= X \cdot (Y \cdot \phi) - (\nabla_X Y) \cdot \phi\end{aligned}$$

Ist  $0 = \text{grad}_p \phi$ , so folgt daraus (ii). Im allgemeinen können wir wegen der Torsionsfreiheit weiter schließen

$$\begin{aligned}
g(\nabla_X \text{grad} \phi, Y) &= X \cdot (Y \cdot \phi) - (\nabla_Y X + [X, Y]) \cdot \phi \\
&= X \cdot (Y \cdot \phi) - (\nabla_Y X) \cdot \phi - X \cdot (Y \cdot \phi) + Y \cdot (X \cdot \phi) \\
&= Y \cdot (Y \cdot \phi) - (\nabla_Y X) \cdot \phi \\
&= g(\nabla_Y \text{grad} \phi, X).
\end{aligned}$$

Daraus folgt die Symmetrie der Hesseschen.  $\square$

**Satz 25 (Geodätisch-konvexe Umgebungen).** *Sei  $(M, g)$  eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann gibt es zu jedem Punkt  $p \in M$  ein  $\delta_0 > 0$ , so daß für alle  $\delta \in ]0, \delta_0[$  die offene  $d$ -Kugel  $U_\delta(p)$  vom Radius  $\delta$  um  $p$  geodätisch konvex ist: je zwei Punkte  $x, y \in U_\delta(p)$  lassen sich durch genau eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kürzeste von  $x$  nach  $y$  verbinden, und diese liegt in  $U_\delta(p)$ .*

*Beweis. A.* Sei  $\epsilon_0 > 0$  so gewählt, daß  $\exp|_{\overline{W_{\epsilon_0}(p)}}$  ein Diffeomorphismus ist. Dann gibt es nach dem Lemma 5 zu der kompakten Menge  $C := \exp(\overline{W_{\epsilon_0}(p)})$  ein  $\epsilon > 0$ , so daß  $\exp|_{W_\epsilon(q)}$  für jedes  $q \in C$  ein Diffeomorphismus ist. Wir wählen ein solches  $\epsilon$  mit  $\epsilon < \epsilon_0$ , und setzen  $\delta_0 = \epsilon/3$ . Sei  $0 < \delta < \delta_0$ . Dann gilt für  $q, r \in \exp(W_\delta(p))$ , daß  $q \in C$  und  $d(q, r) < 2\delta < \epsilon$ . Daher gibt es eine bis auf Parametrisierung eindeutig bestimmte Kürzeste  $c : [a, b] \rightarrow M$  von  $q$  nach  $r$ . Es gilt nach der Dreiecksungleichung  $c([a, b]) \subset \exp(W_\epsilon(p))$ , aber im allgemeinen nicht  $c([0, b]) \subset \exp(W_\delta(p))$ .

**B.** Für eine Geodätische  $c$  und eine  $C^\infty$ -Funktion  $\phi$  auf  $M$  gilt mit  $D = \frac{d}{dt}$

$$D^2(\phi \circ c) = Dg(\text{grad}_c \phi, \dot{c}) = g(\nabla_D \text{grad}_c \phi, \dot{c}) + g(\text{grad}_c \phi, \underbrace{\nabla_D \dot{c}}_{=0}) = \text{hess} \phi(\dot{c}, \dot{c}).$$

Wir betrachten auf  $\exp(W_\epsilon(p))$  die Funktion  $\phi := d(p, \cdot)^2 = \|(\exp|_{W_\epsilon(p)})^{-1}\|^2$ . Für die Geodätische  $c_v : t \mapsto \exp(tv)$  mit  $v \in T_p M$  gilt

$$D^2(\phi \circ c_v) = D^2\|tv\|^2 = 2\|v\|^2.$$

Die letztere Formel zeigt, daß  $\text{hess} \phi$  in  $p$  positiv-definit ist. Wählt man  $\epsilon$  klein genug, so ist  $\text{hess}_q \phi$  positiv-definit für alle  $q \in \exp(W_{\epsilonpsilon}(p))$ , d.h.  $\phi \circ c$  ist für alle Geodätischen in  $\exp(W_{\epsilonpsilon}(p))$  eine konvexe Funktion. Also nimmt  $d(p, c)^2$  sein Maximum am Rande des Intervalls  $[0, L]$  an, und es gilt  $d(p, c) < \delta$ .  $\square$

## 14 Der Satz von Hopf-Rinow

**Definition.** Die Riemannsche Mannigfaltigkeit  $(M, g)$  heißt (geodätisch) *vollständig*, wenn es einen Punkt  $p \in M$  gibt, so daß  $\exp$  auf ganz  $T_p M$  definiert ist, d.h. so daß jede Geodätische durch  $p$  sich auf ganz  $\mathbb{R}$  fortsetzen läßt.

**Lemma 7.** *Sei  $(M, g)$  geodätisch vollständig bezüglich  $p$  und zusammenhängend. Dann gibt es zu jedem  $q \in M$  eine Geodätische  $c$  von  $p$  nach  $q$  mit*

$$L(c) = d(p, q).$$

*Beweis.* Wir setzen  $r := d(p, q)$ . Sei  $\epsilon > 0$ , so daß  $\exp$  den abgeschlossenen Ball  $\overline{W_\epsilon(p)}$  diffeomorph auf eine Menge  $B(p) \subset M$  abbildet, und sei

$$S(p) = \exp(\{w \in T_p M \mid \|w\| = \epsilon\}).$$

Wir können annehmen, daß  $q \notin B(p)$ , weil wir andernfalls schon fertig sind. Die stetige Funktion  $d(\cdot, q)$  nimmt auf der kompakten Menge  $S(p)$  ihr Minimum in einem Punkt  $x_0 = \exp(\epsilon v)$  mit  $v \in T_p M, \|v\| = 1$  an. Wir wollen zeigen, daß

$$\exp(rv) = q. \quad (25)$$

Zunächst halten wir fest, daß

$$d(p, q) = \epsilon + d(x_0, q), \quad (26)$$

denn nach der Dreiecksungleichung ist  $d(p, q) \leq \epsilon + d(x_0, q)$ . Stünde hier eine echte Ungleichung, so gäbe es eine Kurve der Länge  $< \epsilon + d(x_0, q)$  von  $p$  nach  $q$ . Diese träge  $S(p)$  in einem Punkt  $x_1$  und hätte daher die Länge  $\geq \epsilon + d(x_1, q) \geq \epsilon + d(x_0, q)$ . Widerspruch!

Wir setzen  $c_v(t) := \exp(tv)$  und betrachten die Menge

$$A = \{s \in [0, r] \mid d(c_v(s), q) = r - s\}.$$

Die Menge  $A$  ist nicht leer, weil  $0 \in A$ . Weil  $c_v$  und  $d(\cdot, q)$  stetig sind, ist  $A$  abgeschlossen in  $[0, r]$ . Ist weiter  $s_0 \in A$ , so ist  $[0, s_0] \subset A$ , denn nach der Dreiecksungleichung gilt  $r = d(p, q) \leq d(p, c_v(s)) + d(c_v(s), q) \leq s + d(c_v(s), q)$ , also

$$d(c_v(s), q) \geq r - s \text{ für alle } s.$$

Andrerseits ist

$$d(c_v(s), q) \leq d(c_v(s), c_v(s_0)) + d(c_v(s_0), q) = s_0 - s + r - s_0 = r - s.$$

Wir zeigen, daß

$$s_0 + \epsilon' \in A \quad (27)$$

für hinreichend kleine  $\epsilon' > 0$ . Dann ist  $A$  auch offen in  $[0, r]$ , also  $A = [0, r]$ . Insbesondere ist  $r \in A$ , und es folgt (25).

Sei  $p' = c_v(s_0)$  und sei  $\epsilon' > 0$  so klein, daß  $\exp$  auf  $\overline{W_{\epsilon'}(p')}$  ein Diffeomorphismus ist. Sei weiter  $\epsilon' < r - s_0$ . Wir definieren  $B'(p'), S'(p')$  und  $x'_0 \in S'(p')$  wie oben:  $d(\cdot, q)|_{S'(p')}$  nimmt in  $p'$  sein Minimum an. Es genügt zu zeigen, daß

$$x'_0 = c_v(s_0 + \epsilon'). \quad (28)$$

Wie in (26) gilt nämlich

$$r - s_0 = d(c_v(s_0), q) = \epsilon' + d(x'_0, q), \quad (29)$$

und mit (28) folgt daraus  $r - (s_0 - \epsilon') = d(c_v(s_0 + \epsilon'), q)$ , also (27).

Zum Beweis von (28): Die Dreiecksungleichung liefert

$$r = d(p, q) \leq d(p, x'_0) + d(x'_0, q) \stackrel{(29)}{=} d(p, x'_0) + (r - s_0 - \epsilon'),$$

also

$$d(p, x'_0) \geq s_0 + \epsilon'.$$

Die Kurve von  $p$  nach  $x'_0$ , die bis  $c_v(s_0)$  der Geodätischen  $c_v$  und dann dem geodätischen Strahl von  $c_v(s_0)$  nach  $x'_0$  folgt, hat die Länge  $s_0 + \epsilon'$ , also ist  $d(p, x'_0) \leq s_0 + \epsilon'$ . Es folgt Gleichheit, und deshalb ist die beschriebene Kurve eine Geodätische, insbesondere nicht gebrochen. Daraus folgt (28).  $\square$

**Satz 26. (Hopf-Rinow).** Sei  $(M, g)$  eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit mit innerer Metrik  $d$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i)  $(M, g)$  ist geodätisch vollständig.
- (ii) Jede abgeschlossene und beschränkte Teilmenge von  $(M, d)$  ist kompakt.
- (iii)  $(M, d)$  ist vollständig.

In diesem Fall lassen sich je zwei Punkte  $p, q \in M$  durch eine Geodätische  $c$  mit  $L(c) = d(p, q)$  verbinden und jede Geodätische läßt sich auf ganz  $\mathbb{R}$  fortsetzen.

*Beweis.* (i)  $\implies$  (ii). Sei  $\exp$  auf ganz  $T_p M$  definiert. Sei  $A \subset M$  abgeschlossen und beschränkt. Weil  $A$  beschränkt ist, gibt es nach dem Lemma ein  $r > 0$ , so daß  $A \subset \exp(\overline{W_r(p)})$ . Die letztere Menge ist als stetiges Bild einer kompakten Menge kompakt. Als abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge ist dann auch  $A$  kompakt.

(ii)  $\implies$  (iii). (Diese Implikation gilt in beliebigen metrischen Räumen.) Sei  $(p_n)$  eine  $d$ -Cauchyfolge in  $M$ . Dann ist  $A := \overline{\{p_n\}}$  eine abgeschlossene und beschränkte Menge. Also besitzt  $(p_n)$  nach Voraussetzung eine gegen  $p \in A$  konvergente Teilfolge. Die Eigenschaft von Cauchyfolgen impliziert, daß die Folge  $(p_n)$  selbst gegen  $A$  konvergiert.

(iii)  $\implies$  (i). Sei  $c : [0, b[ \rightarrow M$  eine nach rechts maximal fortgesetzte, nach der Bogenlänge parametrisierte Geodätische. Es genügt zu zeigen, daß dann  $b = \infty$ . Dann läßt sich jede Geodätische auf ganz  $\mathbb{R}$  fortsetzen und  $(M, g)$  ist insbesondere geodätisch vollständig.

Annahme:  $b < \infty$ . Sei  $(t_n)$  eine von unten gegen  $b$  konvergente Folge. Wegen

$$d(c(s), c(t)) \leq |t - s| \tag{30}$$

ist  $(c(t_n))$  eine Cauchyfolge, also konvergent gegen einen Punkt  $q \in M$ . Die Menge  $\{c(t_n)\} \cup \{q\}$  ist kompakt. Nach dem Lemma 5 gibt es  $\epsilon > 0$ , so daß  $\exp|_{W_\epsilon(c(t_n))}$  für alle  $n$  ein Diffeomorphismus ist. Wähle  $n$  mit  $b - t_n < \epsilon$ . Dann ist  $c|_{[t_n, b]}$  eine Geodätische in  $W_\epsilon(c(t_n))$  der Länge  $< \epsilon$ , läßt sich also über  $b$  hinaus verlängern. Widerspruch zur Annahme!  $\square$

**Satz 27 (Riemannsche Überlagerungen).** Seien  $(\tilde{M}, \tilde{g}), (M, g)$  zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeiten gleicher Dimension.  $(\tilde{M}, \tilde{g})$  sei vollständig und  $\pi : (\tilde{M}, \tilde{g}) \rightarrow (M, g)$  eine isometrische Immersion, d.h. für alle  $\tilde{p} \in \tilde{M}$  ist  $d_{\tilde{p}}\pi : T_{\tilde{p}}\tilde{M} \rightarrow T_p M$  eine Isometrie. Dann ist  $\pi$  eine Überlagerung.

*Beweis.* Als Immersion zwischen gleichdimensionalen Mannigfaltigkeiten ist  $\pi$  ein lokaler Diffeomorphismus, also eine lokale Isometrie. Insbesondere bildet  $\pi$  Geodätische in Geodätische ab.

A)  $(M, g)$  ist vollständig. Seien  $\tilde{p} \in \tilde{M}, p := \pi(\tilde{p})$  und  $v \in T_p M$ . Dann gibt es  $\tilde{v} \in T_{\tilde{p}}\tilde{M}$  mit  $d\pi(\tilde{v}) = v$ , und  $t \mapsto \pi(\exp(t\tilde{v}))$  ist eine Geodätische in  $(M, g)$  mit  $\dot{c}(0) = d\pi(\tilde{v}) = v$ . Daraus folgt, daß auch  $(M, g)$  vollständig ist und daß

$$\pi \circ \exp^{\tilde{M}} = \exp^M \circ d\pi. \tag{31}$$

B)  $\pi$  ist surjektiv. Seien  $\tilde{p} \in \tilde{M}, p := \pi(\tilde{p})$  und  $q \in M$ . Wir wollen zeigen, daß  $q \in \pi(\tilde{M})$ . Nach dem Satz von Hopf-Rinow gibt es dann  $v \in T_p M$  mit  $\exp v = q$ . Sei  $\tilde{v} \in T_{\tilde{p}} \tilde{M}$  mit  $d\pi(\tilde{v}) = v$ . Dann ist nach (31)

$$\pi(\exp \tilde{v}) = \exp v = q.$$

C)  $\pi$  ist eine Überlagerung. Sei  $p \in M$ . Wähle dazu  $\epsilon > 0$ , so daß  $\exp$  auf  $W_{2\epsilon}(p)$  ein Diffeomorphismus ist und definiere

$$U := \exp^M(W_\epsilon(p)), \quad U_{\tilde{p}} := \exp^{\tilde{M}}(W_\epsilon(\tilde{p}))$$

für alle  $\tilde{p} \in \pi^{-1}(\{p\})$ .

Es genügt zu zeigen:

Für alle  $\tilde{p} \in \pi^{-1}(\{p\})$  ist  $U_{\tilde{p}}$  offen und  $\pi|_{U_{\tilde{p}}} : U_{\tilde{p}} \rightarrow U$  ein Diffeomorphismus. (32)

$$\pi^{-1}(U) = \bigcup U_{\tilde{p}}. \quad (33)$$

Für  $\tilde{p} \neq \tilde{q}$  mit  $\pi(\tilde{p}) = \pi(\tilde{q}) = p$  ist  $U_{\tilde{p}} \cap U_{\tilde{q}} = \emptyset$ . (34)

Zu (32). Aus (31) folgt, daß  $\pi \circ \exp^{\tilde{M}}$ , also erst recht  $\exp^{\tilde{M}}$ , auf  $W_\epsilon(\tilde{p})$  ein Diffeomorphismus ist. Daher ist  $U_{\tilde{p}}$  offen und

$$\pi|_{U_{\tilde{p}}} : U_{\tilde{p}} \rightarrow U$$

ein Diffeomorphismus.

Zu (33). Nach (32) ist  $\pi^{-1}(U) \supset \bigcup U_{\tilde{p}}$ . Sei umgekehrt  $\tilde{x} \in \pi^{-1}(U)$  und  $x := \pi(\tilde{x}) \in U$ . Dann gibt es ein  $v \in W_\epsilon(x)$  mit  $\exp^M(v) = p$ . Sei  $d\pi(\tilde{v}) = v$  für ein  $\tilde{v} \in T_{\tilde{x}} \tilde{M}$ . Aus (31) folgt

$$\pi(\exp^{\tilde{M}}(\tilde{v})) = p.$$

Also ist  $\tilde{p} := \exp^{\tilde{M}}(\tilde{v}) \in \tilde{p} \in \pi^{-1}(\{p\})$ , und wegen  $d(\tilde{x}, \tilde{p}) < \epsilon$  ist  $\tilde{x} \in U_{\tilde{p}}$ . Es folgt  $\pi^{-1}(U) \subset \bigcup U_{\tilde{p}}$ .

Zu (34). Seien  $\tilde{p}, \tilde{q} \in \pi^{-1}(\{p\})$  und  $\tilde{r} \in U_{\tilde{p}} \cap U_{\tilde{q}}$ . Dann ist nach der Dreiecksungleichung

$$\tilde{d}(\tilde{p}, \tilde{q}) \leq \tilde{d}(\tilde{p}, \tilde{r}) + \tilde{d}(\tilde{r}, \tilde{q}) < 2\epsilon.$$

Die Argumente im Beweis von (32) gelten aber auch mit  $2\epsilon$  anstelle von  $\epsilon$ . D.h.  $\pi$  ist ein Diffeomorphismus auf  $\exp(W_{2\epsilon}(\tilde{p}))$ . Deshalb folgt  $\tilde{p} = \tilde{q}$ . □

## 15 Jacobifelder

Wir berechnen nun das Differential der Exponentialabbildung auch senkrecht zur radialen Richtung.

**Definition.** Sei  $c : J \rightarrow M$  eine Geodätische in der Riemannschen Mannigfaltigkeit  $(M, g)$ . Ein Vektorfeld  $Y : J \rightarrow TM$  längs  $c$  heißt ein *Jacobifeld*, wenn

$$\ddot{Y} + R(Y, \dot{c})\dot{c} = 0. \quad (35)$$



Dabei ist  $\ddot{Y} := \nabla_D \nabla_D Y$ , und  $R$  bezeichnet den Riemannsche Krümmungstensor:

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z.$$

**Bemerkung.** Nach Diffgeo I gibt es längs  $c$  orthonormale Vektorfelder  $E_1, \dots, E_m$ , die parallel sind:  $\nabla_D E_i = 0$ . Bezüglich dieser schreibt sich  $Y$  als  $Y = \sum_k Y_k E_k$  mit gewissen differenzierbaren Funktionen  $Y_k$ , und (35) wird

$$\ddot{Y}_k + \sum_j Y_j g(R(E_j, \dot{c})\dot{c}, E_k) = 0.$$

Also ist (35) eine lineare(!) Differentialgleichung 2. Ordnung und es gibt zu  $v, w \in T_{c(s_0)}M$  genau ein Jacobifeld  $Y$  längs  $c$  mit  $Y(s_0) = v$ ,  $\dot{Y}(s_0) = w$ .

**Beispiel 38.** Sei  $(M, g)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Sei  $p \in M$  und sei  $c : [0, b] \rightarrow M, t \mapsto \exp(tv)$  eine Geodätische,  $c(0) = p, \dot{c}(0) = v$ . Sei  $w \in T_p M$ . Dann ist für hinreichen kleines  $|\tau|$

$$V(t, \tau) := \exp(t(v + \tau w))$$

definiert und eine Variation der Geodätischen  $c$ . Das Variationsvektorfeld  $Y(t) = \frac{\partial}{\partial \tau} V(t, 0)$  ist das Jacobifeld längs  $c$  mit  $Y(0) = 0, \dot{Y}(0) = w$ .

*Beweis.* Zunächst ist

$$Y(0) = 0, \quad \dot{Y}(0) = \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} dV\left(\frac{\partial}{\partial \tau}\right) = \nabla_{\frac{\partial}{\partial \tau}} \underbrace{dV\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)}_{=X_{(0, \tau)} = \tau w} = w.$$

Weiter ist  $Y$  ein Jacobifeld:

$$\begin{aligned} \ddot{Y} &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial}{\partial \tau} V|_{t=0} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial \tau}} \frac{\partial}{\partial t} V|_{t=0} \\ &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial \tau}} \frac{\partial}{\partial t} V|_{t=0} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial \tau}} \underbrace{\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial}{\partial t} V|_{t=0}}_{=0} - \nabla_{\underbrace{\left[\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t}\right]}_{=0}} \frac{\partial}{\partial t} V|_{t=0} \\ &= R\left(\frac{\partial}{\partial t} V, \frac{\partial}{\partial \tau} V\right) \frac{\partial}{\partial t} V|_{t=0} = -R(Y, \dot{c})\dot{c}. \end{aligned}$$

□

**Satz 28 (Differential der Exponentialabbildung).** Seien  $(M, g)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit,  $p \in M$ ,  $v, w \in T_p M$  und  $\exp v$  definiert. Dann gilt

$$d_v \exp(w) = Y(1).$$

Dabei bezeichnet  $Y$  das Jacobifeld längs  $c : t \mapsto \exp(tv)$  mit  $Y(0) = 0, \dot{Y}(0) = w$ .

*Beweis.* Folgt aus dem vorstehenden Beispiel, weil

$$Y(1) = \frac{\partial}{\partial \tau} V|_{(1, 0)} = d_v \exp(w).$$

□

## 16 Krümmungstensor

Aus dem letzten Semester wiederholen wir folgende Definitionen:

**Definition.** Sei  $(M, g)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Für Vektorfelder  $X, Y, Z$  definiere

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z.$$

Dann ist  $R$  in allen Argumenten linear bezüglich der Multiplikation mit Funktionen, und definiert daher ein (3,1)-Tensorfeld, d.h. für jedes  $p \in M$  eine 3-lineare Abbildung von  $T_p M$  in sich

$$(u, v, w) \mapsto R(u, v)w := R(X, Y)Z$$

für beliebige Vektorfelder mit  $X_p = u, Y_p = v, Z_p = w$ .  $R$  heißt der Riemannsche Krümmungstensor von  $(M, g)$ .

Für eine (2-dimensionale) Ebene  $\sigma \subset T_p M$  mit einer ON-Basis  $u, v$  definiere die Riemannsche Schnittkrümmung auf  $\sigma$  durch

$$K(\sigma) = g(R(u, v)v, u).$$

Das ist unabhängig von der Wahl der ON-Basis, vgl. 25. Vorlesung Diffgeo I.

**Bemerkungen** Identitäten für Tensoren muß man nur auf Basisvektoren beweisen. Daher können die folgenden zwei Bemerkungen oft erhebliche Vereinfachungen der Beweise bedeuten:

1. Lokal gibt es immer Basen mit verschwindenden Lieklammern (Gaußsche Basisfelder).
2. Man kann einen Tangentialvektor  $v \in T_p M$  stets lokal zu einem Vektorfeld  $X$  fortsetzen, für welches  $(\nabla X)_p = 0$ . (Aber Vorsicht bei zweiten Ableitungen!). Zum Beweis betrachten wir ein lokales Vektorfeld  $X = \sum X_k \frac{\partial}{\partial k}$ . Dann ist

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial i}} X = \sum_k \left( \frac{\partial X_k}{\partial u_i} + \sum_j X_j \Gamma_{ij}^k \right) \frac{\partial}{\partial k}.$$

Daher kann man  $X$  zum Beispiel definieren durch

$$X_k := v_k - \sum_{i,j} v_j \Gamma_{ij}^k(p) (u_i - u_i(p)).$$

**Satz 29.** Für  $f : N \rightarrow M$ , ein Vektorfeld  $\zeta$  längs  $f$  und Vektorfelder  $X, Y$  auf  $N$  gilt die sogenannte Strukturgleichung

$$R(df(X), df(Y))\zeta = \nabla_X \nabla_Y \zeta - \nabla_Y \nabla_X \zeta - \nabla_{[X, Y]}\zeta. \quad (36)$$

*Beweis.* Wir benutzen die definierenden Gleichung

$$(f^* \nabla)_X (Z \circ f) = \nabla_{df(X)} Z$$

für die kovariante Ableitung  $f^* \nabla$  von Vektorfeldern längs Abbildungen, vgl. Diffgeo I. Seien  $p \in N$  und  $E_1, \dots, E_m$  Basisvektorfelder auf einer Umgebung von  $f(p)$ , für die

$$(\nabla E_i)_{f(p)} = 0.$$

Wir schreiben

$$\zeta = \sum \zeta_i(E_i \circ f), \quad df(X) = \sum X_i(E_i \circ f), \quad df(Y) = \sum Y_i(E_i \circ f).$$

Dann erhalten wir im Punkt  $p$

$$\begin{aligned} \nabla_X \nabla_Y \zeta &= \nabla_X \nabla_Y \sum_i \zeta_i E_i \circ f = \sum_i \nabla_X ((Y \cdot \zeta_i)(E_i \circ f) + \zeta_i \nabla_{df(Y)} E_i) \\ &= \sum_i \left( X \cdot (Y \cdot \zeta_i)(E_i \circ f) + (Y \cdot \zeta_i) \underbrace{\nabla_{df(X)} E_i}_{=0} + (X \cdot \zeta_i) \underbrace{\nabla_{df(Y)} E_i}_{=0} + \zeta_i \nabla_X \left( \sum_j Y_j \nabla_{E_j} E_i \right) \right) \\ &= \sum_i X \cdot (Y \cdot \zeta_i)(E_i \circ f) + \sum_{i,j} \zeta_i Y_j \nabla_{df(X)} (\nabla_{E_j} E_i) \\ &= \sum_i X \cdot (Y \cdot \zeta_i)(E_i \circ f) + \sum_{i,j,k} \zeta_i Y_j X_k (\nabla_{E_k} \nabla_{E_j} E_i) \circ f. \end{aligned}$$

Wegen

$$\nabla_{[X,Y]} \zeta_i(E_i \circ f) = ([X, Y] \cdot \zeta_i)(E_i \circ f) + \zeta_i \underbrace{\nabla_{df([X,Y])} E_i}_{=0}$$

folgt

$$\begin{aligned} \nabla_X \nabla_Y \zeta - \nabla_Y \nabla_X \zeta - \nabla_{[X,Y]} \zeta &= \sum_{i,j,k} \zeta_i Y_j X_k (\nabla_{E_k} \nabla_{E_j} E_i) \circ f - \sum_{i,j,k} \zeta_i X_j Y_k (\nabla_{E_k} \nabla_{E_j} E_i) \circ f \\ &= \sum_{i,j,k} \zeta_i Y_j X_k R(E_i, E_j) E_k \circ f \\ &= R(df(X), df(Y)) \zeta. \end{aligned}$$

□

**Satz 30 (Krümmungsidentitäten).** Für Vektorfelder  $X, Y, Z, U$  auf  $M$  gilt:

$$R(X, Y) = -R(Y, X) \quad (37)$$

$$R(X, Y)Z + R(Z, X)Y + R(Y, Z)X = 0 \quad (1. \text{ Bianchi - Identität}) \quad (38)$$

$$g(R(X, Y)Z, U) = -g(R(X, Y)U, Z) \quad (39)$$

$$g(R(X, Y)Z, U) = g(R(Z, U)X, Y) \quad (40)$$

*Beweis.* (37) ist trivial.

Zu (38). Wir nehmen an, daß die Lieklammern der Vektorfelder  $X, Y, Z$  verschwinden. Dann gilt wegen der Torsionsfreiheit  $\nabla_Y Z = \nabla_Z Y$  usw. und man erhält:

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z = \nabla_X \nabla_Z Y - \nabla_Y \nabla_X Z \\ R(Z, X)Y &= \nabla_Z \nabla_X Y - \nabla_X \nabla_Z Y = \nabla_Z \nabla_Y X - \nabla_X \nabla_Z Y \\ R(Y, Z)X &= \nabla_Y \nabla_Z X - \nabla_Z \nabla_Y X = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_Z \nabla_Y X. \end{aligned}$$

Bei der Addition der drei Gleichungen heben sich die Terme paarweise weg.

Zu (39). Wir nehmen an, daß alle beteiligten Vektorfelder in  $p$  kovariante Ableitung  $\bar{0}$  haben. Das gilt dann auch für die Lieklammern in  $p$ .

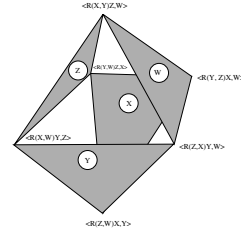
$$\begin{aligned} g(\nabla_X \nabla_Y Z, U) &= Xg(\nabla_Y Z, U) - \underbrace{g(\nabla_Y Z, \nabla_X U)}_{=0} \\ &= XYg(Z, U) - Xg(Z, \nabla_Y U) \\ &= XYg(Z, U) - g(Z, \nabla_X \nabla_Y U). \end{aligned}$$

Der erste Term in der letzten Gleichung ist wegen  $[X, Y]_p = 0$  symmetrisch in  $X$  und  $Y$ . Deshalb folgt

$$\begin{aligned} g(R(X, Y)Z, U) &= -g(Z, \nabla_X \nabla_Y U) + g(Z, \nabla_Y \nabla_X U) \\ &= -g(Z, R(X, Y)U). \end{aligned}$$

Zu (40). Dies ist eine algebraische Folge der Gleichungen (2), (3), (4).

Nach diesen Identitäten ist die Summe der Terme an den Ecken eines jeden schattierten Dreiecks in dem Oktaeder = 0. Bei der Summation über die oberen und das Negative der unteren Dreiecke heben sich die äquatorialen Terme weg, und es bleibt zweimal der obere minus zweimal der untere Term. Daraus folgt (5). (Beweis nach Milnor).



□

**Beispiel 39.** Im  $\mathbb{R}^m$  ist  $R = 0$  und  $K = 0$ .

**Beispiel 40.** Sei  $S^m(r)$  = die Sphäre vom Radius  $r$ . Mit der Gauß-Gleichung folgt

$$R(X, Y)Z = r^{-2}(g(Y, Z)X - g(X, Z)Y)$$

und  $K = r^{-2}$ .

**Beispiel 41.**  $H^m(r) := \{x \in \mathbb{R}^{m+1}; g(x, x) = -r^2, x_0 > 0\}$  mit der von der Lorentzmetrik  $g(x, y) = -x_0y_0 + x_1y_1 + \dots + x_my_m$  induzierten Metrik ist eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, der  $m$ -dimensionale hyperbolische Raum. Wie im Euklidischen Fall ist die Levi-Civita-Ableitung von  $H^m(r)$  einfach die Tangentialprojektion der kanonischen Ableitung im  $\mathbb{R}^{m+1}$ . Darum kann man den Krümmungstensor genauso ausrechnen wie für die Sphäre und erhält

$$R(X, Y)Z = -r^{-2}(g(Y, Z)X - g(X, Z)Y),$$

sowie  $K = -r^{-2}$ .

**Beispiel 42.**  $(M, g)$  = Liegruppe mit biinvarianter Metrik. Dann ist  $\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y]$  für linksinvariante Vektorfelder  $X, Y$ , vgl. Beispiel 36. Daraus folgt

$$R(X, Y)Z = -\frac{1}{4}[[X, Y], Z]$$

und für orthonormale  $X, Y$

$$K(X \wedge Y) = \frac{1}{4}\|[X, Y]\|^2.$$

Man zeigt leicht, daß  $K$  für  $SO(3)$  positiv und konstant ist. Für  $SO(n), n > 3$  hingegen nimmt  $K \geq 0$  auch den Wert 0 an.

**Beispiel 43.** Für  $\dim M = 2$  ist

$$R(X, Y)Z = K(g(Y, Z)X - g(X, Z)Y),$$

wobei  $K : M \rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto K(T_p M)$  die Schnittkrümmung ist.

*Beweis.* Es genügt,  $R(X, Y)$  für eine ON-Basis  $(X, Y)$  zu kennen. Dazu genügt es,  $R(X, Y)X$  und  $R(X, Y)Y$  zu kennen. Weil aber  $R(X, Y)$  schiefadjungiert ist, ist

$$R(X, Y)X = g(R(X, Y)X, Y)Y = -KY = K(g(Y, X)X - g(X, X)Y)$$

und ebenso  $R(X, Y)Y = K(g(Y, Y)X - g(X, Y)Y)$ . □

**Beispiel 44.** Ändert man die Metrik konform durch

$$\tilde{g} = e^{2\lambda} g$$

und definiert die Hessesche bezüglich  $g$  durch

$$\text{Hess}_\lambda X = \nabla_X \text{grad } \lambda, \quad \text{hess } \lambda(X, Y) = g(\text{Hess}_\lambda X, Y),$$

so erhält man für den neuen Krümmungstensor:

$$\begin{aligned} \tilde{R}(X, Y)Z = & R(X, Y)Z \\ & + \text{hess } \lambda(X, Z)Y - \text{hess } \lambda(Y, Z)X \\ & + g(X, Z) \text{Hess}_\lambda Y - g(Y, Z) \text{Hess}_\lambda X \\ & + ((Y \cdot \lambda)(Z \cdot \lambda) - g(Y, Z) \|\text{grad } \lambda\|^2)X \\ & - ((X \cdot \lambda)(Z \cdot \lambda) - g(X, Z) \|\text{grad } \lambda\|^2)Y \\ & + ((X \cdot \lambda)g(Y, Z) - (Y \cdot \lambda)g(X, Z)) \text{grad } \lambda. \end{aligned}$$

Das folgt aus der Formel für die Änderung der Levi-Civita-Ableitung bei konformer Änderung der Metrik.

## 17 Konstante Krümmung

**Lemma 8.** Seien  $R, \tilde{R}$  zwei trilineare Abbildungen des euklidischen Vektorraums  $(T, g)$ , welche die Krümmungsidentitäten der letzten Vorlesung erfüllen. Für alle orthonormalen  $u, v \in T$  sei

$$g(R(u, v)v, u) = g(\tilde{R}(u, v)v, u) =: K(u \wedge v). \quad (41)$$

Dann folgt  $R = \tilde{R}$ .

*Beweis.*

Offenbar genügt es, den Beweis für  $\tilde{R} = 0$  zu führen: betrachte  $R - \tilde{R}$ . Mittels der Krümmungsidentitäten beweist man

$$0 = g(R(x, y+z)(y+z), x) = 2g(R(x, y)z, x).$$

Dann ersetzt man in dieser Gleichung  $x$  durch  $x+u$  und findet nach einiger Rechnung  $g(R(x, y)z, u) = 0$  für alle  $x, y, z, u$ .

Eleganterer Beweis: Für einen  $n$ -dimensionalen  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $T$  bezeichne  $\Lambda^2 T$  den Vektorraum der alternierenden 2-Formen auf  $T^*$ . Das ist ein  $\binom{n}{2}$ -dimensionaler Vektorraum erzeugt von den Formen

$$v \wedge w(\alpha, \beta) := \alpha(v)\beta(w) - \beta(v)\alpha(w). \quad (42)$$

Jede bilineare Abbildung  $A : T^2 \rightarrow W$  induziert eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung  $\hat{A} : \Lambda^2 T \rightarrow W$  mit

$$\hat{A}(x \wedge y) = A(x, y).$$

Auf dem Vektorraum  $\Lambda^2 T$  hat man eine kanonische Metrik  $\hat{g}$ , gegeben durch

$$\hat{g}(x \wedge y, z \wedge u) := g(x, z)g(y, u) - g(x, u)g(y, z).$$

$R$  definiert nach den Krümmungsidentitäten einen selbstadjungierten Endomorphismus  $\hat{R} : \Lambda^2 T \rightarrow \Lambda^2 T$  durch

$$\hat{g}(\hat{R}(x \wedge y), z \wedge u) := g(R(x, y)z, u).$$

Ist  $g(R(x, y)y, x) = 0$  für alle  $x \wedge y$ , so ist die quadratische Form zu  $\hat{R}$  gleich 0, und daraus folgt  $\hat{R} = 0$ , also  $R = 0$ .  $\square$

**Satz 31.** *Ist  $(M, g)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit konstanter Schnittkrümmung  $K$ , so gilt für den Krümmungstensor:*

$$R(X, Y)Z = K(g(Y, Z)X - g(X, Z)Y).$$

*Beweis.* Trivial, weil die rechte Seite die Krümmungsidentitäten erfüllt und Schnittkrümmung  $K$  hat.  $\square$

**Lemma 9 (Schur).** *Ist  $(M, g)$  eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit,  $\dim M \geq 3$ , und ist die Schnittkrümmung in jedem Punkt unabhängig von der Ebene, so ist die Schnittkrümmung auch vom Punkt unabhängig.*

Für den Beweis braucht man die folgende 2. Bianchi-Identität. Deren Beweis (wie den des Lemmas von Schur) überlasse ich den Übungen.

**Lemma 10 (2. Bianchi-Identität).** *Definiere den Tensor  $\nabla R$  durch*

$$(\nabla_X R)(Y, Z)U := \nabla_X(R(Y, Z)U) - R(\nabla_X Y, Z)U - R(Y, \nabla_X Z)U - R(Y, Z)\nabla_X U$$

*Dann gilt*

$$(\nabla_X R)(Y, Z)U + (\nabla_Y R)(Z, X)U + (\nabla_Z R)(X, Y)U = 0$$

**Definition.** Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit konstanter Schnittkrümmung heißt auch einfach eine *Mannigfaltigkeit konstanter Krümmung* oder ein *Raum konstanter Krümmung*. Vollständige Mannigfaltigkeiten konstanter Krümmung heißen *Raumformen*.

**Lemma 11 (Jacobifelder in Räumen konstanter Krümmung).** *In Räumen konstanter Schnittkrümmung  $K$  sind die Jacobifelder mit*

$$Y(0) = 0, \quad \dot{Y}(0) \perp \dot{c}(0)$$

*längs nach der Bogenlänge parametrisierten Geodätischen  $c : s \mapsto \exp sv$ ,  $\|v\| = 1$  von der Form*

$$Y(s) = \sin_K s W(s)$$

*mit parallelem  $W(s)$ ,  $W(0) = \dot{Y}(0)$ . Dabei ist*

$$\sin_K s = \begin{cases} s & K = 0 \\ \frac{\sin \sqrt{K}s}{\sqrt{K}} & K > 0 \\ \frac{\sinh \sqrt{-K}s}{\sqrt{-K}} & K < 0. \end{cases}$$

*Beweis.* Es gilt

$$\frac{d^2}{dt^2}(\sin_K) + K \sin_K = 0, \quad \sin_K 0 = 0, \quad \frac{d}{dt} \sin_K(0) = 1.$$

Damit ist

$$g(Y, \dot{c})\dot{c} = \sin_K s g(W, \dot{c}) = \sin_K s g(W(0), \dot{c}(0)) = 0$$

und

$$\ddot{Y} = -KY = -K(g(\dot{c}, \dot{c})Y - g(Y, \dot{c})\dot{c}).$$

Also ist  $Y$  ein Jacobifeld, und aus  $Y(0) = 0$  und  $\dot{Y}(0) = W(0)$  folgt die Behauptung.  $\square$

**Satz 32 (Lokale Klassifikation von Mannigfaltigkeiten konstanter Krümmung).** *Je zwei Riemannsche Mannigfaltigkeiten gleicher Dimension und gleicher konstanter Krümmung sind lokal isometrisch. Also ist jede solche lokal isometrisch zu  $\mathbb{R}^m$ ,  $S^m(r)$  oder  $H^m(r)$ .*

*Beweis.* Seien  $(M, g), (\tilde{M}, \tilde{g})$  gleichdimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeiten gleicher konstanter Schnittkrümmung  $K$ . Seien  $p \in M, \tilde{p} \in \tilde{M}$ , und sei  $\epsilon > 0$  so gewählt, daß  $\exp$  die offenen Kugeln  $W_\epsilon(p)$  und  $W_\epsilon(\tilde{p})$  diffeomorph abbildet. Wähle eine Isometrie  $j : T_p M \rightarrow T_{\tilde{p}} \tilde{M}$ . Dann ist

$$\Phi := \exp \circ j \circ (\exp)^{-1}$$

ein Diffeomorphismus von  $\exp(W_\epsilon(p))$  auf  $\exp(W_\epsilon(\tilde{p}))$ . Nach dem Lemma von Gauß ist  $\Phi$  radial isometrisch. Sind andererseits  $v, w_1, w_2 \in T_p M, w_i \perp v, \|v\| = 1$  und

$$Y_i(t) = \sin_K t W_i(t), \quad W_i' = 0$$

die Jacobifelder längs  $\exp(tv)$  mit  $Y_i(0) = 0, \dot{Y}_i(0) = w_i$  wie im Lemma, so folgt

$$\begin{aligned} g(d_{tv} \exp t w_1, d_{tv} \exp t w_2) &= g(Y_1(t), Y_2(t)) \\ &= \sin_K^2 t g(W_1(t), W_2(t)) \\ &= \sin_K^2 t g(W_1(0), W_2(0)) \\ &= \sin_K^2 t g(w_1, w_2). \end{aligned}$$

Das ist unabhängig von der Mannigfaltigkeit, und deshalb folgt die Behauptung.  $\square$

## 18 Raumformen

Zunächst ohne Beweis ein bißchen Topologie, die wir der Einfachheit halber für Mannigfaltigkeiten und differenzierbare Abbildungen formulieren. (Für Details, Beweise und allgemeinen Rahmen vgl. z.B. Spanier, Algebraic Topology)

**Definition.** Eine Mannigfaltigkeit heißt *einfach-zusammenhängend*, wenn sich in ihr jede geschlossene Kurve stetig auf einen Punkt zusammenziehen läßt.

**Satz 33. (Liftungssatz)** *Seien  $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$  eine Überlagerung,  $f : N \rightarrow M$  eine  $C^\infty$ -Abbildung,  $N$  zusammenhängend,  $p \in N$  und  $\tilde{q} \in \tilde{M}$  mit  $\pi(\tilde{q}) = f(p)$ . Dann gibt es höchstens eine  $C^\infty$ -Abbildung  $F : N \rightarrow \tilde{M}$  mit  $F(p) = \tilde{q}$ , so daß*

$$\pi \circ F = f.$$

*Ist  $N$  einfach-zusammenhängend (z.B. ein Intervall), so gibt es genau einen solchen Lift.*

**Satz 34. (Universelle Überlagerung)** Sei  $M$  eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit. Dann gibt es eine Überlagerung  $\hat{\pi} : \hat{M} \rightarrow M$  mit zusammenhängendem und einfach-zusammenhängendem  $\hat{M}$ . Diese hat folgende „universelle“ Eigenschaft: Ist  $\tilde{\pi} : \tilde{M} \rightarrow M$  eine Überlagerung von  $M$  mit zusammenhängendem  $\tilde{M}$ , sind  $p \in M$  und  $\tilde{p} \in \tilde{\pi}^{-1}(\{p\})$  bzw.  $\hat{p} \in \hat{\pi}^{-1}(\{p\})$ , und ist  $\eta : \hat{M} \rightarrow \tilde{M}$  der eindeutige Lift von  $\hat{\pi} : \hat{M} \rightarrow M$  mit  $\eta(\hat{p}) = \tilde{p}$ , so ist  $\eta$  eine Überlagerung. Insbesondere ist  $\hat{\pi} : \hat{M} \rightarrow M$  bis auf Diffeomorphie „über  $M$ “ eindeutig bestimmt und überlagert jede Überlagerung von  $M$ .  $\hat{\pi} : \hat{M} \rightarrow M$  heißt die universelle Überlagerung von  $M$ .

**Bemerkung.** Jede Überlagerung  $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$  einer Riemannschen Mannigfaltigkeit  $M$  ist auf kanonische Weise eine Riemannsche Überlagerung: der Raum  $\tilde{M}$  hat genau eine Riemannsche Metrik, so daß  $\pi$  eine isometrische Immersion ist.

**Satz 35. (Universelle Überlagerung von Raumformen)** Sei  $(M, g)$  eine zusammenhängende vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit konstanter Schnittkrümmung (Raumform). Dann ist die universelle Überlagerung von  $(M, g)$  isometrisch zum Euklidischen oder hyperbolischen Raum oder der Sphäre der gleichen Schnittkrümmung. Ist  $(M, g)$  überdies einfach-zusammenhängend, so ist  $(M, g)$  selbst zum entsprechenden Standardraum isometrisch.

Der Beweis benutzt das folgende, auch für sich sehr interessante

**Lemma 12.** Sind  $f, g : M \rightarrow N$  zwei Isometrien Riemannscher Mannigfaltigkeiten, ist  $M$  zusammenhängend und gibt es  $p \in M$  mit

$$f(p) = g(p), \quad d_p f = d_p g,$$

so folgt  $f = g$ .

*Beweis des Lemmas.* Weil (lokale) Isometrien Geodätische in Geodätische abbilden, gilt für  $v \in T_p M$  und hinreichend kleine  $|t|$ :

$$f \circ \exp tv = \exp t d_p f(v) = g \circ \exp tv.$$

Folglich ist die Menge  $\{q \in M \mid f(p) = g(p) \text{ und } d_p f = d_p g\}$  offen in  $M$ . Sie ist trivialerweise auch abgeschlossen und enthält  $p$ . Daher ist sie  $= M$ .  $\square \quad \square$

*Beweis des Satzes.* Sei  $K$  die Schnittkrümmung von  $(M, g)$ .

Sei  $p \in M$  und  $\pi := \exp|_{T_p M} : T_p M \rightarrow M$ . Nach dem Lemma 11 sind die Jacobifelder mit  $Y(0) = 0, Y'(0) \perp c'(0)$  gegeben durch

$$Y(s) = \sin_K s W(s)$$

mit parallelem  $W(s)$ .

1. Fall:  $K \leq 0$ . Dann haben die obigen Jacobifelder auf  $]0, \infty[$  keine Nullstellen, und weil  $\exp$  nach dem Gauß-Lemma radial isometrisch ist, ist die Exponentialabbildung  $\pi$  auf  $T_p M$  eine Immersion. Wir versehen  $T_p M$  mit der von  $\pi$  induzierten Riemannschen Metrik. Dann wird  $\exp$  eine isometrische Immersion. Die linear parametrisierten Geraden durch  $0 \in T_p M$  sind Geodätische bezüglich dieser Metrik. Also ist  $T_p M$  mit dieser Metrik vollständig, und nach Satz 27 ist  $\pi$  eine Riemannsche Überlagerung. Weil  $T_p M$  einfach-zusammenhängend ist, ist das die universelle



Überlagerung. Für den Fall  $(M, g) = \mathbb{R}^m$  oder  $(M, g) = H^m(1/\sqrt{-K})$  ist  $\pi$  eine Isometrie. Aber die induzierte Metrik auf  $T_p M$  ist allein durch  $K$  bestimmt:

$$\begin{aligned} (\pi^*g)_x(v, w) &= \frac{\sin_K^2 \|x\|}{\|x\|^2} g_p(v, w) \text{ falls } v, w \perp x, \\ (\pi^*g)_x(v, w) &= g_p(v, w) \text{ falls } v \in \mathbb{R}x. \end{aligned}$$

Daher ist  $T_p M$  mit der induzierten Metrik isometrisch zu  $\mathbb{R}^m$  bzw.  $H^m(r)$  mit derselben Krümmung.

2. Fall:  $K > 0$ . Dann verschwinden alle Jacobifelder

$$Y(s) = \sin_K s W(s), \quad \nabla_D W = 0, \quad W \perp \dot{c},$$

das erste Mal wieder bei  $s = \epsilon := \frac{\pi}{\sqrt{K}}$ . Daher ist  $\exp|_{W_\epsilon(p)}$  eine Immersion, aber die Sphäre  $S_\epsilon(p)$  vom Radius  $\epsilon$  im Tangentialraum  $T_p M$  wird in einen Punkt abgebildet.

Wir betrachten nun neben  $(M, g)$  die Sphäre  $(\tilde{M}, \tilde{g}) = S^m(1/\sqrt{K})$  derselben Krümmung und in dieser einen Punkt  $\tilde{p}$ . Wir wählen eine lineare Isometrie  $\phi : T_{\tilde{p}} \tilde{M} \rightarrow T_p M$ . Dann ist

$$\pi := \exp^M \circ \phi \circ (\exp^{\tilde{M}}|_{W_\epsilon(\tilde{p})})^{-1}$$

eine isometrische Immersion von  $\tilde{M} \setminus \{-\tilde{p}\}$  auf  $\exp_p(W_\epsilon(p)) \subset M$ . Wir wählen nun einen Punkt  $\tilde{p}_1 \in \tilde{M} \setminus \{\tilde{p}, -\tilde{p}\}$  und setze  $p_1 := \pi(\tilde{p}_1)$ . Sei  $\phi_1 := d_{\tilde{p}_1} \pi : T_{\tilde{p}_1} \tilde{M} \rightarrow T_{p_1} M$ . Dann erhalten wir wie oben eine isometrische Immersion

$$\pi_1 := \exp^M \circ \phi_1 \circ (\exp^{\tilde{M}}|_{W_\epsilon(\tilde{p}_1)})^{-1}$$

von  $\tilde{M} \setminus \{-\tilde{p}_1\}$  auf  $\exp_p(W_\epsilon(p_1)) \subset M$ . Es gilt aber

$$d_{\tilde{p}_1} \pi_1 = d_{\tilde{p}_1} \pi.$$

• Daraus folgt  $\pi_1 = \pi$  auf  $\tilde{M} \setminus \{-\tilde{p}, -\tilde{p}_1\}$ . Insbesondere stimmen also  $\pi_1$  und  $\pi$  auf einer punktierten Umgebung von  $-\tilde{p}$  überein. Mit  $\pi_1$  läßt sich daher auch  $\pi$  als isometrische Immersion in  $-\tilde{p}$  fortsetzen. Weil  $\tilde{M} = S^m(\sqrt{K})$  kompakt und  $M$  zusammenhängend ist, ist  $\pi$  eine Überlagerung. Weil  $\tilde{M} = S^m(\sqrt{K})$  einfach-zusammenhängend ist, ist es die universelle Überlagerung von  $M$ .  $\square$

**Clifford-Kleinsches Raumformenproblem.** Das Problem, alle (zusammenhängenden) Raumformen einer vorgegebenen Krümmung zu bestimmen, ist damit auf das Problem reduziert, welche Mannigfaltigkeiten sich isometrisch von einem der obigen Standardräume überlagern lassen. Das hat zu tun mit der Bestimmung der frei und eigentlich diskontinuierlich operierenden Untergruppen der jeweiligen Isometrie-Gruppe und ist nicht vollständig gelöst.

Einige Resultate:

**(Hantzsche-Wendt 1935)** Für  $n = 3$  und  $K = 0$  gibt es bis auf Homöomorphie zehn kompakte und acht nicht-kompakte Raumformen.

**(Hopf 1926)** Für  $n \equiv 0 \pmod{2}$  und  $K > 0$  gibt es bis auf Isometrie nur zwei Raumformen, nämlich die Sphäre  $S^m$  und den reellen projektiven Raum  $RP^m$ .

**(J.A. Wolf 1967)** Vollständige Klassifikation bis auf Isometrie für  $n \geq 4$  und  $K > 0$ .

## 19 Zweite Variation

Für die Frage, ob Geodätische Minima der Länge bei Vergleich mit Nachbarkurven darstellen, ist es naheliegend, nicht nur die 1. Ableitung des Längenfunktional (vgl. Satz 20), sondern auch die 2. Ableitung zu untersuchen.

**Definition.** Seien  $(M, g)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und  $c : [a, b] \rightarrow M$  eine Geodätische in  $M$  mit  $\|\dot{c}\| = r > 0$ . Definiere für  $C^\infty$ -Vektorfelder  $Y_1, Y_2$  längs  $c : [a, b] \rightarrow M$  die *Indexform*

$$I(Y_1, Y_2) := \frac{1}{r} g(\dot{Y}_1, Y_2)|_a^b - \frac{1}{r} \int_a^b g(\ddot{Y}_1 + R(Y_1, \dot{c})\dot{c}, Y_2) dt.$$

**Lemma 13.**

$$I(Y_1, Y_2) = \frac{1}{r} \int_a^b \left( g(\dot{Y}_1, \dot{Y}_2) + g(R(Y_1, \dot{c})Y_2, \dot{c}) \right) dt$$

*Insbesondere ist I symmetrisch.*

*Beweis.*

$$\begin{aligned} I(Y_1, Y_2) &= \frac{1}{r} \int_a^b \left( \frac{\partial}{\partial t} g(\dot{Y}_1, Y_2) - g(\ddot{Y}_1, Y_2) - g(R(Y_1, \dot{c})\dot{c}, Y_2) \right) dt \\ &= \frac{1}{r} \int_a^b \left( g(\dot{Y}_1, \dot{Y}_2) + g(R(Y_1, \dot{c})Y_2, \dot{c}) \right) dt. \end{aligned}$$

□

□

Wir schreiben im folgenden

$$\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}, \partial_\tau = \frac{\partial}{\partial \tau}$$

**Satz 36 (Formel von Synge für die 2. Variation).** *Seien  $V$  eine Variation der Geodätischen  $c$ ,  $\|\dot{c}\| =: r$  und*

$$L(\tau) := L(c_\tau) = \int_a^b \sqrt{g_{c_\tau(t)}(\dot{c}_\tau(t), \dot{c}_\tau(t))} dt.$$

*Seien  $X = \partial_t V$ ,  $Y = \partial_\tau V \in \Gamma(V^*TM)$  und  $Y^\perp \in \Gamma(c^*TM)$  die zu  $\dot{c}$  orthogonale Komponente von  $Y(., 0)$ . Dann gilt*

$$\frac{d^2}{d\tau^2} L(0) = \frac{1}{r} g(\nabla_{\partial_\tau} Y, X) \Big|_{(a,0)}^{(b,0)} + I(Y^\perp, Y^\perp). \quad (43)$$

*Für Variationen mit festen Endpunkten verschwindet der erste Term rechts. Die 2. Ableitung der Bogenlänge ist dann also gleich der (quadratischen) Indexform auf der Normalkomponente des Variationsvektorfeldes.*

*Beweis.* Wir erinnern an

$$\nabla_{\partial_t} Y = \nabla_{\partial_t} \partial_\tau V = \nabla_{\partial_\tau} \partial_t V = \nabla_{\partial_\tau} X.$$

Es folgt wie früher

$$\begin{aligned}\partial_\tau L &= \int_a^b \partial_\tau \|X\| dt = \int_a^b \frac{1}{2\|X\|} 2\partial_\tau g(X, X) dt \\ &= \int_a^b \frac{1}{\|X\|} g(\nabla_{\partial_\tau} X, X) dt = \int_a^b \frac{1}{\|X\|} g(\nabla_{\partial_t} Y, X) dt,\end{aligned}$$

wobei der Integrand hier wie im folgenden an der Stelle  $(t, \tau)$  genommen wird. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}\partial_\tau^2 L &= \partial_\tau \int_a^b \frac{1}{\|X\|} g(\nabla_{\partial_t} Y, X) dt \\ &= \int_a^b -\frac{1}{\|X\|^3} g(\nabla_{\partial_t} Y, X)^2 dt + \int_a^b \frac{1}{\|X\|} \partial_\tau g(\nabla_{\partial_t} Y, X) dt \\ &= -\int_a^b \frac{1}{\|X\|^3} g(\nabla_{\partial_t} Y, X)^2 dt + \int_a^b \frac{g(\nabla_{\partial_\tau} \nabla_{\partial_t} Y, X)}{\|X\|} dt + \int_a^b \frac{g(\nabla_{\partial_t} Y, \nabla_{\partial_\tau} X)}{\|X\|} dt \\ &= -\int_a^b \frac{1}{\|X\|^3} g(\nabla_{\partial_t} Y, X)^2 dt + \int_a^b \frac{g(R(Y, X)Y, X)}{\|X\|} dt \\ &\quad + \int_a^b \frac{g(\nabla_{\partial_t} \nabla_{\partial_\tau} Y, X)}{\|X\|} dt + \int_a^b \frac{g(\nabla_{\partial_t} Y, \nabla_{\partial_\tau} X)}{\|X\|} dt.\end{aligned}$$

Für  $\tau = 0$  folgt

$$\begin{aligned}\partial_\tau^2 L(0) &= -\frac{1}{r} \int_a^b \frac{1}{r^2} g(\dot{Y}, \dot{c})^2 dt + \frac{1}{r} \int_a^b g(R(Y, \dot{c})Y, \dot{c}) dt \\ &\quad + \frac{1}{r} \int_a^b g(\nabla_{\partial_t} \nabla_{\partial_\tau} Y, X) dt + \frac{1}{r} \int_a^b g(\dot{Y}, \dot{Y}) dt \\ &= \frac{1}{r} \int_a^b g(\dot{Y}^\perp, \dot{Y}^\perp) dt + \frac{1}{r} \int_a^b g(R(Y, \dot{c})Y, \dot{c}) dt \\ &\quad + \frac{1}{r} \int_a^b (\partial_t g(\nabla_{\partial_\tau} Y, X) - \underbrace{g(\nabla_{\partial_\tau} Y, \nabla_{\partial_t} X)}_{=0}) dt.\end{aligned}$$

Weil  $c$  Geodätische ist, ist längs  $c$

$$\widehat{Y}^\perp = \nabla_{\partial_t} (Y^\perp) = \nabla_{\partial_t} (Y - \frac{1}{r^2} g(Y, \dot{c}) \dot{c}) = \dot{Y} - \frac{1}{r^2} g(\nabla_{\partial_t} Y, \dot{c}) \dot{c} = \dot{Y}^\perp.$$

Aus den Krümmungsidentitäten folgt

$$g(R(Y, \dot{c})Y, \dot{c}) = -g(R(Y, \dot{c})\dot{c}, Y) = -g(R(Y, \dot{c})\dot{c}, Y^\perp) = -g(R(Y^\perp, \dot{c})\dot{c}, Y^\perp).$$

Einsetzen liefert die Behauptung.  $\square$   $\square$

Gelegentlich ist es nützlich, Variationen (und mit diesen Variationsvektorfelder) zu betrachten, die nur stückweise- $C^\infty$  sind:

**Definition.** Eine stetige Variation  $V(t, \tau)$ ,  $t \in [a, b]$ ,  $\tau \in ]-\epsilon, \epsilon[$ , einer Kurve  $c = V(\cdot, 0)$  heißt *stückweise glatt* oder *stückweise- $C^\infty$* , wenn es eine Zerlegung  $a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k = b$  gibt, so daß jedes  $V|_{[t_{j-1}, t_j] \times ]-\epsilon, \epsilon[}$  eine  $C^\infty$ -Abbildung ist. Das Variationsvektorfeld  $Y = \partial_\tau V|_{\tau=0}$  ist dann ein stückweise- $C^\infty$  Vektorfeld. (Statt *stückweise- $C^\infty$*  sagt man auch *gebrochen*.)

**Definition.** Für stetige, stückweise- $C^\infty$  Vektorfelder  $Y_1, Y_2$  längs  $c : [a, b] \rightarrow M$  definiere

$$I(Y_1, Y_2) := \frac{1}{r} \sum_i g(\dot{Y}_1, Y_2)|_{t_{i-1}+0}^{t_i-0} - \frac{1}{r} \int_a^b g(\ddot{Y}_1 + R(Y_1, \dot{c})\dot{c}, Y_2) dt,$$

wobei  $Y_1$  und  $Y_2$  außerhalb der  $t_i$   $C^\infty$ -differenzierbar seien. (Beachte: Sind beide Vektorfelder  $C^\infty$  an einer Stelle  $t_i$ , so liefert diese in der Summe keinen Beitrag.)

**Satz 37.** *Lemma 13 und Satz 36 bleiben richtig für stückweise  $C^\infty$ -Vektorfelder bzw. Variationen.*

*Beweis.* Folgt einfach durch Aufsummieren über die glatten Intervalle. □

## 20 Jacobifelder, der Satz von Jacobi

Zunächst stellen wir noch ein paar Eigenschaften von Jacobifeldern, d.h. Lösungen der Jacobigleichung

$$\ddot{Y} + R(Y, \dot{c})\dot{c} = 0$$

zusammen.

**Lemma 14.** *Seien  $(M, g)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und  $c : [a, b] \rightarrow M$  eine Kurve in  $M$ .*

- (i) *Ist  $Y$  das Variationsvektorfeld einer Variation  $V(s, t) =: c_t(s)$ , für die alle  $c_t$  Geodätische sind, so ist  $Y$  ein Jacobifeld.*
- (ii) *Jedes Jacobifeld  $Y$  längs einer Geodätischen  $c$  kann man wie in (i) erhalten.*

*Beweis.*

Zu (i). Den Beweis aus Abschnitt 15 kann man wörtlich übernehmen.

Zu (ii). Sei  $Y$  ein Jacobifeld längs  $c : [0, b] \rightarrow M$  und  $\gamma : [0, \epsilon] \rightarrow M$  eine Geodätische mit  $\dot{\gamma}(0) = Y(0)$ . Seien weiter  $X_0, X_1$  parallele Vektorfeld längs  $\gamma$  mit  $X(0) = \dot{c}(0)$  und  $X_1(0) = \dot{Y}(0)$ . Definiere

$$V(t, \tau) := \exp(t(X_0(\tau) + \tau X_1(\tau))) =: c_\tau(t).$$

Offenbar sind alle  $c_\tau$  Geodätische und ist  $c_0 = c$ . Daher ist das Variationsvektorfeld  $Z$  von  $V$  ein Jacobifeld. Es genügt den Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} Z(0) &= \partial_\tau V(0, 0) = \dot{\gamma}(0) = Y(0) \\ \dot{Z}(0) &= \nabla_{\partial_t} \partial_\tau V(0, 0) \\ &= \nabla_{\partial_\tau} \partial_t V(0, 0) \\ &= \nabla_{\partial_\tau} (X_0(\tau) + tX_1(\tau)) = X_1(0) = \dot{Y}(0). \end{aligned}$$

Daraus folgt  $Z = Y$ . □

**Lemma 15.** *Ist  $Y$  ein Jacobifeld längs  $c$ , so sind auch die Tangentialkomponente und Normalkomponente*

$$Y^T := \|\dot{c}\|^{-2} g(Y, \dot{c}) \dot{c}$$

$$Y^\perp := Y - \|\dot{c}\|^{-2} g(Y, \dot{c}) \dot{c}$$

*Jacobifelder. Deshalb bleibt ein Jacobifeld mit zu  $\dot{c}$  orthogonalen Anfangsbedingungen immer orthogonal zu  $\dot{c}$ . Solche Jacobifelder heißen normale Jacobifelder. Die Tangentialkomponente ist von der Form  $Y^T(t) = (\alpha + t\beta)\dot{c}(t)$ .*

*Beweis.* Sei  $r := \|\dot{c}\|$ . Zunächst gilt

$$r^2(\hat{\hat{Y}}^T) = (\nabla_D)^2(g(Y, \dot{c})\dot{c}) = g(\ddot{Y}, \dot{c})\dot{c} = g(-R(Y, \dot{c})\dot{c}, \dot{c}) = 0 = -R(r^2 Y^T, \dot{c})\dot{c}.$$

Daher ist  $Y^T$  und damit auch  $Y^\perp$  ein Jacobifeld. Die Anfangsbedingungen von  $Y^T$  sind dann von der Form  $Y^T(0) = \alpha \dot{c}(0)$ ,  $\hat{Y}^T(0) = \beta \dot{c}(0)$ .

Weiter gilt

$$(\nabla_D)^2((\alpha + s\beta)\dot{c}) = 0 = -R((\alpha + s\beta)\dot{c}, \dot{c})\dot{c}.$$

Daher ist  $(\alpha + s\beta)\dot{c}$  ein Jacobifeld mit denselben Anfangsbedingungen.  $\square$

**Definition.**

- (i) Sei  $c : [a, b] \rightarrow M$  eine nicht-konstante Geodätische.  $t_0, t_1 \in [a, b]$  heißen *konjugiert längs  $c$* , wenn es ein nicht-verschwindendes Jacobifeld  $Y$  längs  $c$  gibt, für das  $Y(t_0) = 0$  und  $Y(t_1) = 0$ . ( $Y$  ist dann zwangsläufig normal.) Man nennt dann auch  $c(t_0)$  und  $c(t_1)$  längs  $c$  konjugiert.
- (ii)  $v \in T_p M$  heißt zu  $p$  *konjugiert*, wenn  $\exp v$  definiert und  $d_v(\exp|_{T_p M})$  nicht injektiv ist. Das ist genau dann der Fall, wenn 0 und 1 konjugiert längs  $t \mapsto \exp tv$  sind.

**Satz 38 (Jacobi).** *Sei  $c : [a, b] \rightarrow M$  eine nicht-konstante Geodätische und sei  $t^* \in ]a, b[$  zu  $a$  konjugiert. Dann gibt es eine gebrochene Variation  $V(t, \tau) =: c_\tau(t)$  von  $c$  mit festen Endpunkten, so daß  $L(c) > L(c_\tau)$  für alle  $\tau \neq 0$ : Nach dem ersten konjugierten Punkt ist keine Geodätische mehr Kürzeste.*

*Beweis.* Sei  $Y$  ein (normales) Jacobifeld  $\neq 0$  mit  $Y(0) = 0, Y(t^*) = 0$ , und sei  $w := \dot{Y}(t^*)$ . Dann ist  $w \neq 0$ , denn sonst wäre  $Y = 0$ . Wir definieren ein gebrochenes Jacobifeld durch

$$\hat{Y}(t) := \begin{cases} Y(t) & \text{für } a \leq t \leq t^* \\ 0 & \text{für } t^* \leq t \leq b. \end{cases}$$

Wir wählen weiter ein differenzierbares normales Vektorfeld  $X$  längs  $c$  mit

$$X(a) = 0, \quad X(b) = 0, \quad g(w, X(t^*)) = 1.$$

Wir wählen ein  $\epsilon > 0$  und definieren ein gebrochenes Vektorfeld

$$Z := -\frac{1}{\epsilon} \hat{Y} + \epsilon X.$$

Dieses Vektorfeld ist das Variationsvektorfeld einer Variation

$$V(t, \tau) = \exp \tau Z(t)$$

der Geodätischen  $c$  mit festen Endpunkten. Für sie gilt nach der Syngeformel

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} L(0) &= I(Z, Z) \\ &= \frac{1}{\epsilon^2} I(\hat{Y}, \hat{Y}) - 2I(\hat{Y}, X) + \epsilon^2 I(X, X) \\ &= 0 - 2g(\dot{Y}(t^* - 0), X(t^*)) - 2g(\dot{Y}(t^* + 0), X(t^*)) + \epsilon^2 I(X, X) \\ &= 0 - 2g(\dot{Y}(t^*), X(t^*)) - 2g(0, X(t^*)) + \epsilon^2 I(X, X) \\ &= -2 + \epsilon^2 I(X, X). \end{aligned}$$

Für hinreichend kleines  $\epsilon$  ist dies negativ, und  $L$  hat in 0 ein striktes lokales Maximum.  $\square$

## 21 Die Sätze von Bonnet-Myers und Synge

**Satz 39 (Satz von Bonnet-Myers: 1.Version).** *Sei  $(M, g)$  eine vollständige, zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit,  $\dim M \geq 2$ . Es gebe  $\delta > 0$ , so daß*

$$K \geq \delta > 0$$

*für die Schnittkrümmungsfunktion  $K$  von  $(M, g)$ . Dann ist  $M$  kompakt. Es gilt*

$$\text{diam}(M) := \sup\{d(p, q); p, q \in M\} \leq \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}.$$

*Beweis.* Seien  $p, q \in M$  und  $c : [0, l] \rightarrow M$  eine nach der Bogenlänge parametrisierte kürzeste Geodätische von  $p$  nach  $q$ . Sei  $E$  ein paralleles normales Einheitsvektorfeld längs  $c$ . Setze

$$Y(t) := \sin \frac{\pi t}{l} E(t)$$

und

$$V(t, \tau) := \exp(\tau Y(t)).$$

Weil  $c$  Kürzeste ist, gilt dann für die Längenfunktion  $L$  zu  $V$ , daß  $\partial_\tau L(0) = 0$  und

$$\begin{aligned} 0 &\leq \partial_\tau^2 L(0) \\ &= - \int_0^l g(\ddot{Y} + R(Y, \dot{c})\dot{c}, Y) dt \\ &= - \int_0^l \left\{ -\frac{\pi^2}{l^2} g(E, E) + g(R(E, \dot{c})\dot{c}, E) \right\} \sin^2 \frac{\pi t}{l} dt \\ &= \int_0^l \underbrace{\left\{ \frac{\pi^2}{l^2} - K(E \wedge \dot{c}) \right\}}_{\leq \frac{\pi^2}{l^2} - \delta} \sin^2 \frac{\pi t}{l} dt. \end{aligned}$$

Also

$$d(p, q) = l \leq \frac{\pi}{\sqrt{\delta}},$$

und daraus folgt mit Hopf-Rinow die Behauptung.  $\square$

**Definition.** Sei  $(M, g)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Für  $p \in M$ ,  $X, Y \in T_p M$  und eine Orthonormalbasis  $E_1, \dots, E_m$  von  $T_p M$  definiere den *Ricci-Tensor*  $\text{Ric} : T_p M \rightarrow T_p M$  durch

$$\text{Ric } X := \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m R(X, E_i)E_i.$$

Diese Definition ist unabhängig von der Basiswahl, vgl. nachstehende Bemerkung. Weiter definiert man

$$\text{ric}(X, Y) := g(\text{Ric } X, Y).$$

Der Tensor Ric ist selbstadjungiert und ric ist symmetrisch, wie sofort aus den Krümmungsidentitäten folgt.

Schließlich heißt die Funktion

$$\text{scal} : M \rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto \frac{1}{m} \text{Spur}(\text{Ric}_p)$$

die *Skalarkrümmung* von  $(M, g)$ .

**Bemerkung.** Zum besseren Verständnis von Ric und ric beachte man: Offensichtlich ist Ric durch ric bestimmt. Weiter ist ric als symmetrische Bilinearform vollständig bestimmt durch die Werte  $\text{ric}(X, X)$  mit  $X \in T_p M$ ,  $\|X\| = 1$ . Sei also  $X \in T_p M$  mit  $\|X\| = 1$  und  $E_i$  eine ON-Basis mit  $X = E_1$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \text{ric}(X, X) &= \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m g(R(X, E_i)E_i, X) = \frac{1}{m-1} \sum_{i=2}^m g(R(X, E_i)E_i, X) \\ &= \frac{1}{m-1} \sum_{i=2}^m g(R(E_i, X)X, E_i) = \frac{1}{m-1} \text{Spur } r_X, \end{aligned}$$

wobei  $r_X : X^\perp \rightarrow X^\perp$ ,  $Y \mapsto R(Y, X)X$  ein selbstadjungierter Endomorphismus von  $X^\perp$  ist, für den

$$g(r_X Y, Y), \quad \|Y\| = 1,$$

gerade die Schnittkrümmung auf der Ebene durch  $X$  und  $Y$  liefert. Die diskrete Mittelung über die Schnittkrümmung kann man auch kontinuierlich machen, vgl. das folgende Lemma. Danach ist  $\text{ric}(X, X)$  das Mittel aller Schnittkrümmungen auf Ebenen durch  $X$  und  $\text{scal}$  das Mittel dieser Mittel, wenn  $X$  die Einheitssphäre in  $T_p M$  durchläuft.

**Lemma 16.** Sei  $A$  ein selbstadjungierter Endomorphismus des  $\mathbb{R}^n$ . Dann ist

$$\frac{1}{n} \text{Spur } A = \frac{1}{\text{vol}(S^{n-1})} \int_{S^{n-1}} \langle Ax, x \rangle d\sigma_{S^{n-1}}$$

*Beweis.* Wir schreiben  $A = \sum \lambda_i P_i$ , wobei die  $\lambda_i$  die Eigenwerte und die  $P_i$  die Orthogonalprojektionen auf die Eigenräume sind. Dann ist

$$\begin{aligned} \int_{S^{n-1}} \langle Ax, x \rangle d\sigma_{S^{n-1}} &= \sum \lambda_i \int \langle P_i x, x \rangle d\sigma_{S^{n-1}} \\ &= \sum \lambda_i \frac{1}{n} \int (\langle P_1 x, x \rangle + \dots + \langle P_n x, x \rangle) d\sigma_{S^{n-1}} \\ &= \frac{1}{n} (\text{Spur } A) \text{vol}(S^{n-1}). \end{aligned}$$

□

**Satz 40 (Satz von Bonnet-Myers: 2. Version).** Sei  $(M, g)$  eine vollständige, zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension  $\geq 2$ . Es gebe  $\delta > 0$ , so daß

$$\text{ric}(X, X) \geq \delta \|X\|^2$$

für alle  $X \in TM$ . Dann ist  $M$  kompakt. Es gilt

$$\text{diam}(M) := \sup\{d(p, q); p, q \in M\} \leq \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}.$$

*Beweis.* Seien  $p, q$  und  $c$  wie im obigen Beweis. Sei  $E_1 = \frac{\dot{c}}{\|\dot{c}\|}, E_2, \dots, E_m$  ein paralleles ON-Basisfeld längs  $c$ . Dann folgt durch Anwendung des obigen Schlusses auf  $E_2, \dots, E_m$  und Summation:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^l \sum_{i=2}^m \left\{ \frac{\pi^2}{l^2} g(E_i, E_i) - g(R(E_i, \dot{c})\dot{c}, E_i) \right\} \sin^2 \frac{\pi t}{l} dt \\ &\leq \int_0^l \left\{ \frac{\pi^2}{l^2} (m-1) - (m-1) \text{ric}(\dot{c}, \dot{c}) \right\} \sin^2 \frac{\pi t}{l} dt. \end{aligned}$$

Wie oben folgt die Behauptung.  $\square$

**Bemerkung.** Die Voraussetzungen der obigen Sätze gelten natürlich auch für die universelle Überlagerung. Diese ist damit ebenfalls kompakt und daher endlichblättrig.

**Satz 41 (Lemma von Synge).** Sei  $(M, g)$  eine orientierbare Riemannsche Mannigfaltigkeit gerader Dimension mit positiver Schnittkrümmung  $K > 0$ . Sei  $c : [0, L] \rightarrow M$  eine glatt-geschlossene Geodätische der Länge  $L(c) = L > 0$ . Dann gibt es eine Variation  $V(t, \tau) = c_\tau(t)$  von  $c$ , so daß alle Nachbarkurven  $c_\tau, \tau \neq 0$  glatt geschlossen und kürzer als  $L$  sind.

*Beweis.* Die Parallelverschiebung von Vektoren  $X \in T_{c(0)}M$  mit  $X \perp c'(0)$  längs  $c$  liefert eine orthogonale Abbildung  $\Phi$  von  $T_{c(0)}M$  auf  $T_{c(L)}M = T_{c(0)}M$ . Eine Orientierung von  $M$  liefert eine solche von  $T_{c(0)}M$ , und  $\Phi$  ist orientierungstreu. Daher besitzt  $\Phi$  einen Eigenvektor zum Eigenwert  $+1$ , d.h. einen Fixvektor  $\neq 0$ . Sei  $X$  das durch Parallelverschiebung dieses Vektors erhaltene Vektorfeld. Beachte, daß  $X$  glatt geschlossen ist. Dann ist

$$V(s, t) := \exp(tX(s))$$

eine Variation von  $c$ , und für die 2. Ableitung des Längenfunctionals gilt nach der Formel von Synge

$$\begin{aligned} \ddot{L}(0) &= I(X, X) \\ &= - \int_0^L g(R(X, c')c', X) ds \\ &= - \int_0^L K \|X\|^2 ds \\ &< 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung.  $\square$

**Satz 42 (Satz von Synge).** Eine zusammenhängende, kompakte, orientierbare Riemannsche Mannigfaltigkeit  $(M, g)$  gerader Dimension mit positiver Schnittkrümmung  $K > 0$  ist einfach-zusammenhängend.



Der Beweis ist eine einfache Konsequenz aus dem Lemma von Synge und dem nachstehenden Lemma. Zunächst die folgende

**Definition.** Zwei geschlossene Kurven  $c_0, c_1 : [a, b] \rightarrow M$  heißen (in  $M$ ) *frei homotop*, wenn es eine Abbildung  $H : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow M$  gibt, so daß gilt

$$H(t, 0) = c_0(t), \quad H(t, 1) = c_1(t) \quad \text{für alle } t, \quad (44)$$

$$H(a, \tau) = H(b, \tau) \quad \text{für alle } \tau. \quad (45)$$

Freie Homotopie ist eine Äquivalenzrelation. Die Äquivalenzklassen heißen *freie Homotopieklassen*.

**Bemerkung.** Diese Definition macht Sinn für einen beliebigen topologischen Raum  $M$  und stetige Abbildungen  $c_i, H$ . Ist  $M$  eine Mannigfaltigkeit, so gibt es in jeder freien Homotopieklasse eine geschlossene  $C^\infty$ -Kurve, und je zwei solche sind durch eine  $C^\infty$ -Homotopie verbunden. Man kann sich dann also auf „glatte Homotopieklassen“ beschränken.

**Lemma 17.** *Sei  $(M, g)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann gibt es in jeder freien Homotopieklasse eine glatt-geschlossene Geodätische, die die Länge in der Homotopieklasse minimiert.*

*Beweis.* Kurven seien im folgenden stückweise  $C^\infty$ .

Weil  $M$  kompakt ist, gibt es eine endliche offene Überdeckung  $(U_k)$  von  $M$  durch geodätisch-konvexe offenen Mengen. Weiter gibt es nach dem Lemma von Lebesgue ein  $\epsilon > 0$ , so daß jede Menge vom Durchmesser  $< \epsilon$ , insbesondere also jede Kurve der Länge  $< \epsilon$ , in einem der  $U_k$  enthalten ist.

Definition. Eine geschlossene Kurve  $c : [0, 1] \rightarrow M$  heißt *speziell*, wenn eine Zerlegung

$$0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_N = 1$$

mit folgender Eigenschaft existiert:

Für alle  $j$  ist  $c|_{[t_{j-1}, t_j]}$  eine kürzeste Geodätische zwischen  $c(t_{j-1})$  und  $c(t_j)$  von der Länge  $< \epsilon$ .

1. Schritt: Zu jeder geschlossenen Kurve  $c : [0, 1] \rightarrow M$  gibt es eine homotope spezielle Kurve, deren Länge nicht größer ist.

Beweis: Wähle eine Zerlegung

$$0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_N = 1,$$

so daß  $L(c|_{[t_{j-1}, t_j]}) < \epsilon$  für alle  $j$ . Dann ist  $c|_{[t_{j-1}, t_j]}$  eine Kurve in einer der geodätisch konvexen Mengen  $U_k$  und läßt sich deshalb homotop deformieren in die kürzeste Geodätische von  $c(t_{j-1})$  nach  $c(t_j)$ . Auf diese Weise erhält man eine zu  $c$  homotope und nicht längere geschlossene Kurve.

2. Schritt: Sei  $\alpha$  eine freie Homotopieklasse und  $l$  das Infimum der Längen von Kurven in  $\alpha$ . Dann gibt es eine Folge geschlossener Kurven  $c_i$  in  $\alpha$ , deren Längen gegen  $l$  konvergieren, und die sämtlich speziell sind (1. Schritt). Wir können weiter annehmen, daß keine dieser Kurven länger als  $2l$  ist.

3. Schritt: Man kann die Folge der  $c_i$  so wählen, daß sie sämtlich dieselbe Anzahl  $N$  von Teilpunkten

$$0 = t_0^i \leq t_1^i \leq \dots \leq t_N^i = 1$$

haben.

Beweis: Wir betrachten eine spezielle Kurve  $c = c_i$  mit einer Zerlegung

$$0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_N = 1.$$

Wir betrachten folgende Teilkurven:

$$\gamma_r := c|_{[t_{2r}, t_{2r+2}]}, \quad r = 0, \dots, \lfloor \frac{N}{2} \rfloor - 1.$$

Hat jede dieser Kurven eine Länge  $\geq \epsilon$ , so ist

$$2l \geq L(c) \geq \sum L(\gamma_r) \geq \lfloor \frac{N}{2} \rfloor \epsilon,$$

i.e.

$$N \leq 2\left(\frac{2l}{\epsilon} + 1\right).$$

Das bedeutet aber: Ist umgekehrt  $N > N_0 := \lfloor 2(\frac{2l}{\epsilon} + 1) \rfloor$ , so ist wenigstens ein  $\gamma_r$  kürzer als  $\epsilon$  und damit in einem  $U_k$  enthalten. Also kann man  $\gamma_r$  homotop ersetzen durch die kürzeste Geodätische von  $\gamma_r(2r)$  nach  $\gamma_r(2r+2)$  und hat  $c$  durch eine homotope spezielle Kurve ersetzt, die einen Teilpunkt weniger hat. Man kann daher annehmen, daß kein  $c_i$  mehr als  $N_0$  Teilpunkte hat. Weil man aber beliebig Teilpunkte einfügen kann, kann man sogar annehmen, daß alle  $c_i$  genau  $N_0$  Teilpunkte haben.

4. Schritt: Nach Wahl einer Teilfolge der  $c_i$  können wir annehmen, daß für alle  $j \in \{1, \dots, N\}$  der Grenzwert

$$p_j = \lim_i c_i(t_j^i)$$

existiert. Die kürzesten Geodätischen zwischen diesen Grenzpunkten bilden eine geschlossene Kurve  $c$  der Länge  $l$ .

Beweis:

$$\begin{aligned} L(c) &= \sum d(p_j, p_{j+1}) \\ &= \sum d(\lim_i c_i(t_j^i), \lim_i c_i(t_{j+1}^i)) \\ &= \sum \lim_i d(c_i(t_j^i), c_i(t_{j+1}^i)) \\ &= \sum \lim_i L(c_i|_{[t_j^i, t_{j+1}^i]}) \\ &= \lim_i L(c_i) \\ &= l. \end{aligned}$$

5. Schritt: Wählt man eingangs die  $U_k$  so, daß jedes  $\bar{U}_k$  in einem offenen geodätisch-konvexen  $W_k$  liegt, so ist  $c \in \alpha$ .

Beweis: Wir betrachten einen festen Index  $j$ . Jedes  $c_i([t_j^i, t_{j+1}^i])$  liegt in einem  $U_k$ . Da es davon aber nur endlich viele gibt, gibt es ein  $k(j)$ , so daß  $c_i([t_j^i, t_{j+1}^i]) \subset U_{k(j)}$  für unendlich viele  $i$ , nach Wahl einer Teilfolge der sogar für alle  $i$ . Weil es nur endlich viele Indices  $j$  gibt, können wir dies simultan für alle  $j$  annehmen: Für alle  $i$  und  $j$  gilt

$$c_i([t_j^i, t_{j+1}^i]) \subset U_{k(j)} \subset W_{k(j)}.$$

Dann liegen aber  $p_j$  und  $p_{j+1}$  in  $\bar{U}_{k(j)} \subset W_{k(j)}$ . Daher kann man  $c_i$  homotop in  $c$  deformieren längs kürzester Geodätischer zwischen Punkten gleicher Parameterwerte.  $\square$

## 22 Riemannsche Submersionen

**Definition.** Sei  $\pi : (\tilde{M}, \tilde{g}) \rightarrow (M, g)$  eine Submersion von Riemannschen Mannigfaltigkeiten.

(i) Für  $p \in M$  ist

$$\tilde{M}_p := \pi^{-1}(\{p\}) \subset \tilde{M}$$

eine Untermannigfaltigkeit der Dimension  $\dim \tilde{M} - \dim M$ , die *Faser* über  $p$ .

(ii) Für  $\tilde{p} \in \tilde{M}$  definiere

$$\begin{aligned} V_{\tilde{p}}\tilde{M} &:= T_{\tilde{p}}\tilde{M}_{\pi(\tilde{p})} = \ker d_{\tilde{p}}\pi \\ H_{\tilde{p}}\tilde{M} &:= (T_{\tilde{p}}\tilde{M}_{\pi(\tilde{p})})^\perp \end{aligned}$$

$V_{\tilde{p}}\tilde{M}$  und  $H_{\tilde{p}}\tilde{M}$  heißen der *Vertikalraum* bzw. der *Horizontalraum* von  $\pi$ . Es ist

$$T_{\tilde{p}}\tilde{M} = V_{\tilde{p}}\tilde{M} \oplus H_{\tilde{p}}\tilde{M},$$

und wir bezeichnen mit  $X = X^v + X^h$  die entsprechende Zerlegung. Ein Tangentialvektor  $\tilde{v} \in T_{\tilde{p}}\tilde{M}$  heißt *horizontal*, wenn  $\tilde{v} \in H_{\tilde{p}}\tilde{M}$ . Analog definiert man *vertikal* und auf die offensichtliche Weise die Begriffe *horizontales Vektorfeld*, *horizontale Kurve* etc.

(iii)  $\pi$  heißt eine *Riemannsche Submersion*, wenn für alle  $\tilde{p} \in \tilde{M}$

$$d_{\tilde{p}}\pi|_{H_{\tilde{p}}\tilde{M}} : H_{\tilde{p}}\tilde{M} \rightarrow T_{\pi(\tilde{p})}M$$

eine lineare Isometrie ist.

Sei in folgenden  $\pi : (\tilde{M}, \tilde{g}) \rightarrow (M, g)$  eine Riemannsche Submersion.

**Lemma 18.** (i) Ein Vektorfeld  $X$  auf  $M$  besitzt einen eindeutigen horizontalen Lift, d.h. es gibt genau ein Vektorfeld  $\tilde{X}$  auf  $\tilde{M}$ , welches horizontal ist, und für welches  $d\pi(\tilde{X}) = X \circ \pi$  gilt.

(ii) Ist  $c : J \rightarrow M$  eine Kurve,  $t_0 \in J$  mit  $\dot{c}(t_0) \neq 0$  und  $\tilde{p} \in \tilde{M}_{c(t_0)}$ , so gibt es um  $t_0$  einen eindeutigen lokalen horizontalen Lift von  $c$  mit Anfangswert  $\tilde{p}$ . D.h. es gibt eine eindeutig bestimmte horizontale Kurve  $\tilde{c} : ]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[ \rightarrow \tilde{M}$  mit  $\tilde{c}(t_0) = \tilde{p}$  und  $\pi \circ \tilde{c} = c$ .

*Beweis.*

Zu (i). Trivial.

Zu (ii). Nach dem Rangsatz können wir  $J$  erforderlichenfalls durch ein kleineres Intervall (wieder  $J$  genannt) um den Punkt  $t_0$  ersetzen, so daß  $N := c(J)$  eine Untermannigfaltigkeit von  $M$  ist, auf der  $\dot{c}$  ein nicht-verschwindendes Vektorfeld  $X$  definiert. Wegen der Submersionseigenschaft von  $\pi$  ist  $\tilde{N} := \pi^{-1}(N)$  eine Untermannigfaltigkeit von  $\tilde{M}$ , und  $\pi|_{\tilde{N}} : \tilde{N} \rightarrow N$  ist eine Riemannsche Submersion. Die Integralkurve  $\tilde{c}$  mit  $\tilde{c}(t_0) = \tilde{p}$  des horizontalen Lifts  $\tilde{X}$  von  $X$  in  $\tilde{N}$  mit ist eine horizontale Kurve. Wir behaupten:

$$\pi \circ \tilde{c} = c.$$

Dazu betrachten wir die Umkehrfunktion  $\rho : N \rightarrow \mathbb{R}$  von  $c : J \rightarrow c(J)$ . Aus  $\rho(c(t)) = t$  folgt  $d\rho(X) = 1$ . Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho \circ \pi \circ \tilde{c} &= d\rho \circ d\pi(\tilde{X} \circ \tilde{c}) \\ &= d\rho(X) \circ \pi \circ \tilde{c} \\ &= 1 \\ &= \frac{d}{dt} \rho \circ c. \end{aligned}$$

Wegen  $\pi \circ \tilde{c}(t_0) = c(t_0)$ , folgt daraus  $\pi \circ \tilde{c} = c$ .  $\square$

**Lemma 19.** (i)  $\pi$  erhält die Länge von horizontalen Kurven und verkürzt die Länge anderer Kurven.

(ii) Ist  $c : J \rightarrow M$  eine Geodätische, so ist ein (lokaler) horizontaler Lift von  $c$  ebenfalls eine Geodätische.

(iii) Ist  $\tilde{c} : J \rightarrow \tilde{M}$  eine Geodätische mit horizontalem  $\dot{\tilde{c}}(t_0)$ , so ist  $\tilde{c}$  horizontal, und  $\pi \circ \tilde{c}$  ist eine Geodätische in  $M$ .

(iv) Ist  $(\tilde{M}, \tilde{g})$  vollständig, so auch  $(M, g)$ .

*Beweis.* Zu (i). Folgt aus

$$\|d\pi(X)\|^2 = \|d\pi(X^v + X^h)\|^2 = \|d\pi(X^h)\|^2 = \|X^h\|^2 \leq \|X\|^2.$$

Zu (ii). Sei  $\tilde{c}$  ein lokaler horizontaler Lift von  $c$ . Weil  $c$  lokal Kürzeste ist, ist nach (i) auch  $\tilde{c}$  lokal Kürzeste. Außerdem ist  $\tilde{c}$  mit konstanter Geschwindigkeit parametrisiert, weil dasselbe für  $c$  gilt. Daher ist  $\tilde{c}$  Geodätische.

Zu (iii). Sei  $c$  die Geodätische mit  $\dot{c}(t_0) = d\pi(\dot{\tilde{c}}(t_0))$ . Dann ist der lokale horizontale Lift von  $c$  durch  $t_0$  mit Anfangswert  $\tilde{c}(0)$  eine Geodätische mit demselben Anfangspunkt wie  $\tilde{c}$ . Aber der horizontale Lift von  $\dot{c}(t_0)$  ist  $\dot{\tilde{c}}(t_0)$ . Also hat der horizontale Lift von  $c$  auch denselben Anfangsvektor wie  $\tilde{c}$ . Daher ist  $\tilde{c}$  der horizontale Lift von  $c$  und  $c = \pi \circ \tilde{c}$  auf dem gemeinsamen Definitionsintervall um  $t_0$ . Damit ist die Menge der Parameterwerte, für die  $\tilde{c}$  horizontal ist, eine offene Menge in  $J$ . Sie ist aber auch abgeschlossen, und daher ist  $\tilde{c}$  horizontal. Da weiter ist  $c = \pi \circ \tilde{c}$  global eine Geodätische.

Zu (iv). Trivial nach Hopf-Rinow.  $\square$

**Lemma 20.** Seien  $X, Y$  Vektorfelder auf  $M$  mit horizontalen Lifts  $\tilde{X}, \tilde{Y}$ . Dann gilt:

$$(i) [\tilde{X}, \tilde{Y}]^h = \widetilde{[X, Y]}, \quad [\tilde{X}, \tilde{Y}]^v = [\tilde{X}, \tilde{Y}] - \widetilde{[X, Y]}$$

$$(ii) \nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y} = \widetilde{\nabla_X Y} + \frac{1}{2} [\tilde{X}, \tilde{Y}]^v, \text{ also } \nabla_X Y = d\pi(\nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y}).$$

(iii) Sind  $X, Y$  orthonormal, so gilt für die Schnittkrümmungen

$$K(X \wedge Y) = \tilde{K}(\tilde{X} \wedge \tilde{Y}) + \frac{3}{4} \|[\tilde{X}, \tilde{Y}]^v\|^2 \quad (\text{Formel von O'Neill})$$

*Beweis.* Hausaufgabe

(i) trivial

(ii) mit (i) und der Levi-Civita-Formel

(iii) vgl. Gallot, Hulin, Lafontaine □

## 23 Der komplexe projektive Raum

Im  $\mathbb{C}^{m+1}$  betrachten wir das hermitesche Skalarprodukt

$$(x, y) := \sum x_i \bar{y}_i.$$

Das Euklidische Skalarprodukt auf  $\mathbb{C}^{m+1} = \mathbb{R}^{2m+2}$  ist dann gegeben durch

$$\langle x, y \rangle = \operatorname{Re}(x, y) = \frac{1}{2}((x, y) + (y, x)).$$

Wir betrachten weiter den reellen Vektorraum  $\operatorname{End}(\mathbb{C}^{m+1})$  der Endomorphismen des  $\mathbb{C}^{m+1}$  als reellen Vektorraum mit dem Skalarprodukt

$$\langle A, B \rangle := \frac{1}{2} \operatorname{Re} \operatorname{Spur}_{\mathbb{C}}(AB^*).$$

Wir betrachten die Abbildung

$$\pi : \mathbb{C}^{m+1} \supset S^{2m+1} \rightarrow H(m+1), x \mapsto \pi(x) := (\cdot, x)x.$$

Beachte, daß  $\pi(x)$  wegen

$$((u, x)x, v) = (u, x)(x, v) = (u, x)\overline{(v, x)} = (u, (v, x)x)$$

selbstadjungiert ist. Es ist die unitäre Orthogonalprojektion auf  $\mathbb{C}x$  und  $\pi$  liefert so eine Submersion von  $S^{2m+1}$  auf den komplexen projektiven Raum  $\mathbb{C}P^m \subset \operatorname{End}(\mathbb{C}^{m+1})$ . Die Faser ist  $\pi^{-1}(\{\pi(x)\}) = \mathbb{C}x \cap S^{2m+1} = \{e^{i\phi}x\}$ , und es gilt

$$\begin{aligned} T_x S^{2m+1} &= \{v \mid \operatorname{Re}(v, x) = 0\}, \\ V_x &= \{v \mid v = \lambda ix, \lambda \in \mathbb{R}\}, \\ H_x &= \{v \mid (v, x) = 0\} \cong T_{\pi(x)} \mathbb{C}P^m. \end{aligned}$$

Für  $v, w \in H_x$  gilt

$$\langle d_x \pi(v), d_x \pi(w) \rangle = \langle v, w \rangle.$$

Damit ist  $\pi : S^{2m+1} \rightarrow \mathbb{C}P^m$  eine Riemannsche Submersion.

*Beweis.*

$$\begin{aligned}
2 \langle d_x \pi(v), d_x \pi(w) \rangle &= \operatorname{Re} \operatorname{Spur}[d_x \pi(v) \circ d_x \pi(w)] \\
&= \operatorname{Re} \operatorname{Spur}[(\langle \cdot, v \rangle x + \langle \cdot, x \rangle v) \circ (\langle \cdot, w \rangle x + \langle \cdot, x \rangle w)] \\
&= \operatorname{Re} \operatorname{Spur}[(\langle \cdot, w \rangle x + \langle \cdot, x \rangle w, v) x + (\langle \cdot, w \rangle x + \langle \cdot, x \rangle w, x) v] \\
&= \operatorname{Re} \operatorname{Spur}[(\langle \cdot, x \rangle w, v) x + (\langle \cdot, w \rangle x, x) v] \\
&= \operatorname{Re} \operatorname{Spur}[\langle \cdot, x \rangle (w, v) x + \langle \cdot, w \rangle (x, x) v] \\
&= \operatorname{Re} \operatorname{Spur}[\langle \cdot, x \rangle (w, v) x + \langle \cdot, w \rangle (x, x) v] \\
&= \operatorname{Re}[(w, v) + \sum (e_i, w)(v, e_i)] \\
&= \operatorname{Re}[(w, v) + (v, w)] \\
&= 2 \langle v, w \rangle .
\end{aligned}$$

□

**(Fast)komplexe Struktur.**  $H_x$  ist ein komplexer Untervektorraum von  $\mathbb{C}^{m+1}$ , und die Multiplikation mit  $i$  in diesem Vektorraum induziert auf  $T\mathbb{C}P^m$  ein Endomorphismenfeld  $J : T\mathbb{C}P^m \rightarrow T\mathbb{C}P^m$ . Dafür gilt

$$\nabla J = 0,$$

d.h.

$$\nabla_X(JY) = J\nabla_X Y.$$

Mit  $J$  wird jedes  $T_p\mathbb{C}P^m$  ein komplexer Vektorraum und  $\mathbb{C}P^m$  eine sogenannte *fastkomplexe* Mannigfaltigkeit.  $\mathbb{C}P^m$  ist sogar eine komplexe Mannigfaltigkeit: Es gibt einen Atlas komplexer Karten mit holomorphen Kartenwechseln, aber darauf gehen wir nicht ein.

*Beweis.*

$$\begin{aligned}
\nabla_X(JY) &= d\pi(\nabla_{\tilde{X}} \tilde{J}\tilde{Y}) = d\pi(\nabla_{\tilde{X}} i\tilde{Y}) = d\pi((D_{\tilde{X}} i\tilde{Y})^T) \\
&= d\pi((iD_{\tilde{X}} \tilde{Y})^T) = d\pi(iD_{\tilde{X}} \tilde{Y} - \langle iD_{\tilde{X}} \tilde{Y}, x \rangle x).
\end{aligned}$$

Andrerseits gilt

$$\begin{aligned}
J\nabla_X Y &= d\pi(i\nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y}) = d\pi(i(D_{\tilde{X}} \tilde{Y})^h) = d\pi(i(D_{\tilde{X}} \tilde{Y} - \langle D_{\tilde{X}} \tilde{Y}, x \rangle x)^h) \\
&= d\pi(i(D_{\tilde{X}} \tilde{Y} - \langle D_{\tilde{X}} \tilde{Y}, x \rangle x - \langle D_{\tilde{X}} \tilde{Y}, ix \rangle ix)) \\
&= d\pi(iD_{\tilde{X}} \tilde{Y} - \underbrace{\langle D_{\tilde{X}} \tilde{Y}, x \rangle ix - \langle iD_{\tilde{X}} \tilde{Y}, x \rangle x}_{\text{vertikal}})
\end{aligned}$$

□

**Geodätische.** Die horizontalen Geodätischen in  $S^{2m+1}$  sind von der Form

$$\tilde{c}(s) = \cos s x + \sin s v$$

mit  $v \in H_x$ , d.h.  $\langle v, x \rangle = 0$  und  $\|v\| = 1$ . Sie projizieren sich (doppelt) auf (ebenfalls geschlossene) Geodätische in  $\mathbb{C}P^m$  von der Länge  $\pi$ . Das liefert alle Geodätischen in  $\mathbb{C}P^m$ . Zwei Geodätische aus  $\pi(x)$  schneiden sich nach der Länge  $\pi/2$ , wenn ihre Anfangsvektoren (bezüglich  $J$ ) komplex linear abhängig sind. Andernfalls schneiden sie sich nur im Ausgangspunkt.

*Beweis.* Sind  $v, w \in H_x$  Einheitsvektoren, so ist

$$\pi(\cos s x + \sin s v) = \pi(\cos t x + \sin t w)$$

genau dann, wenn

$$\cos s x + \sin s v = \lambda(\cos t x + \sin t w)$$

für ein  $\lambda \in \mathbb{C}$  mit  $|\lambda| = 1$ . Es folgt

$$\cos s - \lambda \cos t = 0,$$

d.h.  $\cos s = \pm \cos t$  und  $\lambda = \pm 1$ , oder  $\cos s = \cos t = 0$ . Im ersten Fall folgt  $\sin s = \pm \sin t$  und

- $v$  und  $w$  sind reell linear abhängig. Dann fallen die Geodätischen in  $\mathbb{C}P^m$  zusammen. Oder
- $\sin s = \sin t = 0$ . Das ist der nach Voraussetzung gemeinsame Punkt der beiden Geodätischen.

Im zweiten Fall ist  $s = t = \frac{\pi}{2}$  und  $v$  und  $w$  sind komplex linear abhängig. Umgekehrt ist bei linearer Abhängigkeit von  $v$  und  $w$  natürlich

$$\pi(v) = \pi(w).$$

□

**Projektive Geraden.** Für  $x \in S^{2m+1}$  und  $v \in H_x$  ist  $\mathbb{C}x + \mathbb{C}v$  eine komplexe Ebene, die  $S^{2m+1}$  in einer Groß- $S^3$  trifft. Das  $\pi$ -Bild dieser  $S^3$  besteht aus allen Orthogonalprojektionen auf (komplexe) Geraden in  $\mathbb{C}x + \mathbb{C}v$ , ist also ein  $\mathbb{C}P^1 \subset \mathbb{C}P^m$ , eine sogenannte (komplexe) projektive Gerade  $g$ . Diese ist gleichzeitig das  $\pi$ -Bild aller (horizontalen) Geodätischen aus  $x$  mit Anfangsrichtung in  $\mathbb{C}v \subset H_x$ , also das Bild aller Geodätischen in  $\mathbb{C}P^m$  aus  $\pi(x)$  mit Anfangsrichtung in  $\text{Spann}\{d\pi(v), Jd\pi(v)\} = \mathbb{C}d\pi(v)$ . Weil  $J$  parallel ist, bleibt  $(\dot{c}, J\dot{c})$  eine Basis des Tangentialraums an  $g$  längs  $c(t) = \exp tv$ , d.h. es gilt allgemein: Ist  $p \in \mathbb{C}P^m$  ein Punkt einer komplexen Geraden  $g$  und  $u \in T_p \mathbb{C}P^m$  tangential an  $g$ ,  $u \neq 0$ , so ist

$$g = \exp(\mathbb{C}u) = \exp(T_p g).$$

$g$  ist eine sogenannte totalgeodätische Untermannigfaltigkeit. Nach dem vorangehenden Abschnitt ist  $g$  eine Kreisscheibe vom Radius  $\pi/2$ , bei der der Rand zu einem Punkt kontrahiert ist, also eine 2-Sphäre vom Umfang  $\pi$ .

**Jacobifelder.** Für orthonormale  $x, v, w$  mit  $(x, v) = (x, w) = 0$  ist

$$c_\tau(t) = \cos t x + \sin t(\cos \tau v + \sin \tau w)$$

eine Variation von  $c = c_0$  durch horizontale Geodätische. Das zugehörige Jacobifeld ist  $Z(t) = \sin t w$ . (Beachte, daß  $w$  ein konstantes, an  $S^{2m+1}$  tangentiales Vektorfeld längs  $c$  ist.) Die horizontale Komponente von  $Z$  ist

$$Z(t)^h = \sin t w - \langle \sin t w, ic(t) \rangle ic(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sin 2t ic(t), & \text{falls } w = iv \\ \sin t w, & \text{falls } w \perp \mathbb{C}v. \end{cases}$$

*Beweis.*

$$c(t) = \cos t x + \sin t v.$$

2. Fall:  $(v, w) = 0$ .

$$\begin{aligned}
\tilde{Y}(t)^h &= \sin t w - \langle \sin t w, ic(t) \rangle ic(t) \\
&= \sin t w - \langle \sin t w, i \cos t x + i \sin t v \rangle i(\cos t x + \sin t v) \\
&= \sin t w - \sin^2 t \langle w, iv \rangle i(\cos t x + \sin t v) \\
&= \sin t w.
\end{aligned}$$

1. Fall:  $w = iv$ . Dann erhält man wie oben

$$\begin{aligned}
\tilde{Y}(t)^h &= \sin t iv - \sin^2 t i(\cos t x + \sin t v) \\
&= i \sin t (v - \sin t \cos t x - \sin^2 t v) \\
&= i \sin t \cos t (-\sin t x + \cos t v) \\
&= \sin t \cos t i\dot{c}(t).
\end{aligned}$$

□

Das Jacobifeld der Variation  $\pi \circ c_\tau$  von  $\pi \circ c$  ist offenbar  $Y = d_c \pi(Z) = d_c \pi(Z^h)$ . Wir finden daher

$$\begin{aligned}
\dot{Y} &= d_c \pi(\nabla_D \tilde{Y}) = d_c \pi(\nabla_D Z^h) \\
&= \begin{cases} d_c \pi(\cos 2t i\dot{c}) = 2 \cot 2t Y & \text{für } w = iv, \\ d_c \pi(\cos t w) = \cot t Y & \text{für } w \perp \mathbb{C}v. \end{cases}
\end{aligned}$$

Es folgt im zweiten Fall

$$\ddot{Y} = -\frac{1}{\sin^2 t} Y + \cot^2 t Y = \frac{1 - \cos^2 t}{\sin^2 t} Y = -Y$$

und ähnlich im ersten Fall. Man erhält:

$$\ddot{Y} = \begin{cases} -4Y & \text{für } w = iv, \\ -Y & \text{für } w \perp \mathbb{C}v. \end{cases}$$

**Krümmungstensor.** Für  $p \in \mathbb{C}P^m$  und orthonormale  $X, Y \in T_p \mathbb{C}P^m$  sei  $\Pi_Y$  die euklidische Orthogonalprojektion auf  $\text{Spann}\{Y, JY\} = \mathbb{C}Y$ . Dann gilt für den Krümmungstensor von  $\mathbb{C}P^m$ :

$$R(X, Y)Y = X + 3\Pi_Y(X). \quad (46)$$

Insbesondere liegt die Schnittkrümmung zwischen 1 und 4, vgl. die Formel von O'Neill.

*Beweis.* Nach dem vorigen Absatz und der Jacobigleichung ist

$$\begin{aligned}
R(X, Y)Y &= \begin{cases} 4X & \text{falls } Y = iX \\ X & \text{falls } Y \perp \mathbb{C}X \end{cases} \\
&= X + 3\Pi_Y(X) \quad \text{falls } Y = iX \text{ oder } \perp \mathbb{C}X.
\end{aligned}$$

Aus der Linearität beider Seiten folgt die Behauptung dann für alle  $X \perp Y$ . □



## 24 Vergleich von Jacobifeldern, Satz von Hadamard-Cartan

Wir erinnern daran, daß die normalen Jacobifelder in Räumen konstanter Krümmung  $\kappa$  mit den Anfangsbedingungen  $Y(0) = 0, Y'(0) = w$  gegeben sind durch  $Y(s) = \sin_\kappa s W$ , wobei  $W$  durch Parallelverschiebung von  $w$  entsteht, während

$$\sin_\kappa s = \begin{cases} \frac{\sin \sqrt{\kappa} s}{\sqrt{\kappa}} & \text{für } \kappa > 0, \\ s & \text{für } \kappa = 0, \\ \frac{\sinh \sqrt{-\kappa} s}{\sqrt{-\kappa}} & \text{für } \kappa < 0. \end{cases}$$

**Satz 43 (Vergleichssatz von Rauch<sup>1</sup> und Buser/Karcher<sup>2</sup>).** *Sei  $(M, g)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit,  $c : [0, b[ \rightarrow M$  eine nach der Bogenlänge parametrisierte Geodätische,  $Y$  ein normales Jacobifeld längs  $c$  mit  $Y(0) = 0, Y'(0) \neq 0$ .  $K$  bezeichne die Schnittkrümmung von  $M$ .*

*Sei  $c_\kappa : [0, b[ \rightarrow M_\kappa$  eine nach der Bogenlänge parametrisierte Geodätische in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit konstanter Krümmung  $\kappa$  und  $Y_\kappa$  ein normales Jacobifeld längs  $c_\kappa$  mit  $Y_\kappa(0) = 0, \|Y'_\kappa(0)\| = \|Y'(0)\|$ .*

Seien  $\delta, \Delta \in \mathbb{R}$ .

(i) *Ist  $K \leq \Delta$  und in  $]0, b[$  kein zu 0 konjugierter Punkt von  $c_\Delta$ , so gilt*

$$\|Y_\Delta\| \leq \|Y\| \quad \text{auf } [0, b[.$$

(ii) *Ist  $K \geq \delta$  und in  $]0, b[$  kein zu 0 konjugierter Punkt von  $c$ , so gilt*

$$\|Y\| \leq \|Y_\delta\| \quad \text{auf } [0, b[.$$

*Beweis.*

Wir schreiben die Jacobigleichung in Koordinaten: Seien  $E_1, \dots, E_m$  orthonormal und parallel längs  $c$  mit  $E_1 = c'$ . Dann gilt

$$Y = \sum_{i=2}^m Y_i E_i$$

$$Y'' = \sum_{i=2}^m Y_i'' E_i.$$

Weiter

$$R(Y, c')c' = \sum_i Y_i R(E_i, c')c' = \sum_{i,j} \underbrace{g(R(E_i, c')c', E_j)}_{=: R_{ij}} Y_i E_j,$$

wobei  $R_{ij} = R_{ji}$  nach den Krümmungsidentitäten. Damit schreibt sich die Jacobigleichung als

$$Y_i'' + \sum_j R_{ij} Y_j = 0.$$

<sup>1</sup>Ann. Math. 1951

<sup>2</sup>Gromov's almost flat manifolds. Asterisque 81, 148 p. (1981).

Ist  $\delta \leq K \leq \Delta$ , so folgt

$$\delta \leq g(R(X, c')c', X) = \sum R_{ij} X_i X_j \leq \Delta$$

für alle  $X$ , so daß  $X, c'$  orthonormal sind. Beachten wir außerdem, daß die Jacobi-gleichung linear ist, so daß mit  $Y$  auch  $Y/\|Y'(0)\|$  eine Lösung ist, so reduziert sich der Beweis des Vergleichssatzes auf folgenden

**Satz. (Analytischer Vergleichssatz)** Sei  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein euklidischer Vektorraum und sei  $R : ]0, b[ \rightarrow \text{End}(V)$  eine  $C^\infty$ -Abbildung, so daß  $R(s)$  für alle  $s$  selbstadjungiert ist.  $Y : ]0, b[ \rightarrow V$  erfülle die Jacobi-gleichung

$$Y'' + RY = 0 \quad (47)$$

mit

$$Y(0) = 0, \quad \|Y'(0)\| = 1. \quad (48)$$

Dann gilt:

(i) Ist  $R \leq \Delta$ , d.h.  $\langle RX, X \rangle \leq \Delta \|X\|^2$  für alle  $X$ , und ist  $\sin_\Delta |_{]0, b[} > 0$ , so gilt

$$\sin_\Delta \leq \|Y\| \quad \text{auf } ]0, b[. \quad (49)$$

(ii) Ist  $\delta \leq R$  und  $\|\tilde{Y}\| > 0$  auf  $]0, b[$  für alle  $\tilde{Y}$  mit

$$\tilde{Y}'' + R\tilde{Y} = 0, \quad \tilde{Y}(0) = 0 \neq \tilde{Y}'(0),$$

so gilt

$$\|Y\| \leq \sin_\delta \quad \text{auf } ]0, b[. \quad (50)$$

Beweis zu (i).

Wir zeigen

$$\lim_{s \searrow 0} \frac{\|Y(s)\|}{\sin_\Delta s} = 1 \quad (51)$$

$$\left( \frac{\|Y(s)\|}{\sin_\Delta s} \right)' \geq 0. \quad (52)$$

Daraus folgt dann offenbar (3).

Zunächst ist nach der Definition der Differenzierbarkeit

$$\begin{aligned} Y(s) &= s(Y'(0) + \alpha(s)) && \text{mit } \lim_{s \searrow 0} \alpha(s) = 0 \\ \sin_\Delta s &= s(1 + \beta(s)) && \text{mit } \lim_{s \searrow 0} \beta(s) = 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt (5).

Weiter ist  $\|Y\| > 0$  auf  $]0, \epsilon[$  für hinreichend kleines  $\epsilon \in ]0, b[$ , so daß dort  $\|Y\|$  eine  $C^\infty$ -Funktion ist. Es folgt

$$\begin{aligned} \|Y\|' &= \sqrt{\langle Y, Y \rangle} = \langle Y', \frac{Y}{\|Y\|} \rangle \\ \|Y\|'' &= \langle Y'', \frac{Y}{\|Y\|} \rangle + \frac{1}{\|Y\|^3} \underbrace{\{\|Y'\|^2 \|Y\|^2 - \langle Y, Y' \rangle^2\}}_{\geq 0} \geq \langle Y'', \frac{Y}{\|Y\|} \rangle. \end{aligned} \quad (53)$$

Wegen

$$(u'v - uv')' = u''v - uv''$$

kann man die Quotientenregel auch so schreiben:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{1}{v^2} \left( \int_a (u''v - uv'') + (u'v - uv')|_a \right).$$

Damit erhalten wir auf  $]0, \epsilon[$  wegen  $\sin''_\Delta + \Delta \sin_\Delta = 0$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\|Y\|}{\sin_\Delta}\right)' &= \frac{1}{(\sin_\Delta)^2} \int \|Y\|'' \sin_\Delta + \Delta \|Y\| \sin_\Delta \\ &= \frac{1}{(\sin_\Delta)^2} \int (\|Y\|'' + \Delta \|Y\|) \underbrace{\sin_\Delta}_{\geq 0} \\ &\stackrel{(7)}{\geq} \frac{1}{(\sin_\Delta)^2} \int \frac{\sin_\Delta}{\|Y\|} \{ \langle Y'', Y \rangle + \Delta \langle Y, Y \rangle \} \\ &= \frac{1}{(\sin_\Delta)^2} \int \frac{\sin_\Delta}{\|Y\|} \underbrace{\langle Y'' + \Delta Y, Y \rangle}_{= \langle (\Delta - R)Y, Y \rangle \geq 0} \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt (6), also auch (3), auf  $]0, \epsilon[$ , und offenbar kann man  $\epsilon = b$  annehmen.

Beweis zu (ii). Zunächst stellen wir fest, daß wir o.E.  $\sin_\delta > 0$  auf  $]0, b[$  annehmen können. Ist nämlich  $\delta \leq 0$ , so ist das sowieso der Fall. Und haben wir für  $\delta > 0$  die Behauptung (4) auf  $]0, b[ \cap ]0, \pi/\sqrt{\delta}[$  bewiesen, so folgt, daß für  $b > \pi/\sqrt{\delta}$  die Voraussetzung über  $\tilde{Y}$  sicher nicht erfüllt ist.

Wir betrachten eine Matrixlösung der Jacobigleichung, d.h.  $Z : [0, b[ \rightarrow \text{End}(V)$  mit

$$\begin{aligned} Z'' + RZ &= 0 \\ Z(0) &= 0, \quad Z'(0) = Id. \end{aligned}$$

Dann ist  $Y = Zv$  für  $v \in V$  die vektorwertige Lösung der Jacobigleichung mit Anfangsbedingungen  $Y(0) = 0$ ,  $Y'(0) = v$ . Also müssen wir zeigen, daß für  $\|v\|=1$ :

$$\|Z(s)v\| \leq \sin_\delta s \tag{54}$$

auf  $[0, b[$ .

Zwischenbemerkung:  $Z(s_0)$  ist für alle  $s_0 \in ]0, b[$  invertierbar. Andernfalls wäre für  $v \neq 0$  im Kern von  $Z(s_0)$  das Feld  $\tilde{Y} = Zv$  eine nichttriviale Lösung der Jacobigleichung mit Nullstellen in 0 und  $s_0$  im Widerspruch zur Voraussetzung von (ii). Also ist  $Z$  auf  $]0, b[$  invertierbar und  $\|Z(s)v\|$  eine differenzierbare Funktion.

Wie in (i) genügt (für  $v \neq 0$ ) der Nachweis der beiden Aussagen

$$\lim_{s \searrow 0} \frac{\|Z(s)v\|}{\sin_\delta s} = 1 \tag{55}$$

$$\left(\frac{\|Z(s)v\|}{\sin_\delta s}\right)' \leq 0 \quad \text{auf } ]0, b[. \tag{56}$$

Dabei folgt wie oben aus der Definition der Differenzierbarkeit

$$\lim_{s \searrow 0} \frac{1}{\sin_\delta s} Z(s) = Id \tag{57}$$

und daraus (9).

Der Beweis von (10) ist erheblich schwieriger:

Zunächst ist

$$\begin{aligned} \|Zv\|' &= \frac{1}{\|Zv\|} \langle Z'v, Zv \rangle \\ \left(\frac{\|Zv\|}{\sin_\delta}\right)' &= \frac{1/\|Zv\| \langle Z'v, Zv \rangle \sin_\delta - \|Zv\| \sin'_\delta}{\sin_\delta^2} = \frac{\langle Z'v, Zv \rangle \sin_\delta - \|Zv\|^2 \sin'_\delta}{\|Zv\| \sin_\delta^2} \end{aligned}$$

Daher genügt der Nachweis von

$$\langle Z'(s)v, Z(s)v \rangle \sin_\delta s - \|Z(s)v\|^2 \sin'_\delta s \leq 0 \quad (58)$$

für alle  $s \in ]0, b[$  und  $v \in V$ . Wir ersetzen darin  $Z(s)v$  (für festes  $s$ ) durch  $v$  und nehmen überdies an, daß  $\|v\| = 1$ . Wir müssen also zeigen, daß für alle  $s$  und  $v$  mit  $\|v\| = 1$  gilt

$$F(s) := \langle Z'(s)Z^{-1}(s)v, v \rangle \sin_\delta s - \sin'_\delta s \leq 0. \quad (59)$$

Dazu wollen wir zeigen, daß

$$\lim_{s \searrow 0} F(s) = 0 \quad \text{und} \quad (60)$$

$$F' \leq 0. \quad (61)$$

Zunächst ist nach (11)

$$\sin_\delta s Z^{-1}(s) \rightarrow Id. \quad (62)$$

Mit  $\|v\| = 1$  folgt

$$\lim F(s) = \lim(\langle Z'(s)(\sin_\delta s)Z^{-1}(s)v, v \rangle - \sin'_\delta s) = 1 - 1 = 0.$$

Damit ist (14) bewiesen.

Für die Berechnung der Ableitung interessiert uns die Ableitung von

$$U := Z'Z^{-1}.$$

Dafür erhalten wir

$$\begin{aligned} U' &= Z''Z^{-1} - Z'Z^{-1}Z'Z^{-1} \\ &= -RZZ^{-1} - U^2 \\ &= -R - U^2. \end{aligned}$$

Wir stellen weiter fest, daß  $U$  selbstadjungiert ist: Es ist nämlich für  $v, w \in V$

$$\begin{aligned} \langle Z'v, Zw \rangle - \langle Zv, Z'w \rangle &= 0 \quad \text{an der Stelle } 0 \text{ und} \\ (\langle Z'v, Zw \rangle - \langle Zv, Z'w \rangle)' &= \langle Z''v, Zw \rangle - \langle Zv, Z''w \rangle \\ &= \langle -RZv, Zw \rangle + \langle Zv, RZw \rangle \\ &= 0, \quad \text{da } R \text{ selbstadjungiert.} \end{aligned}$$

Also gilt  $\langle Z'v, Zw \rangle - \langle Zv, Z'w \rangle = 0$  überall, und durch Anwenden auf  $Z^{-1}v$  und  $Z^{-1}w$  anstelle von  $v$  und  $w$  folgt die Symmetrie von  $U$ .

Damit berechnen wir die Ableitung von  $F$ :

$$\begin{aligned}
F' &= \langle U'v, v \rangle \sin_\delta + \langle Uv, v \rangle \sin'_\delta - \sin''_\delta \\
&= - \langle Rv, v \rangle \sin_\delta - \langle U^2v, v \rangle \sin_\delta + \langle Uv, v \rangle \sin'_\delta + \delta \sin_\delta \\
&\leq (\delta - \langle Rv, v \rangle) \sin_\delta - \langle Uv, v \rangle^2 \sin_\delta + \langle Uv, v \rangle \sin'_\delta \\
&\leq - \langle Uv, v \rangle (\langle Uv, v \rangle \sin_\delta - \sin'_\delta) \\
&= - \langle Uv, v \rangle F,
\end{aligned}$$

also

$$F' + \langle Uv, v \rangle F \leq 0. \quad (63)$$

Dabei haben wir neben der Voraussetzung von (ii) benutzt, daß  $\|v\| = 1$  und deshalb

$$\langle Uv, v \rangle^2 \leq \|Uv\|^2 = \langle Uv, Uv \rangle = \langle U^2v, v \rangle$$

ist. Leider haben wir das Ziel, nämlich die Ungleichung (15), nicht erreicht. Wir werden stattdessen beweisen, daß

$$\lim_{s \searrow 0} \langle U(s)v, v \rangle = +\infty. \quad (64)$$

Die eigentlich gesuchte Ungleichung (13) ergibt sich dann mit (14), (17), (18) aus folgendem

**Lemma.** Sind  $F, G : ]0, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar mit  $\lim_{s \searrow 0} F(s) = 0$  und  $\lim_{s \searrow 0} G(s) = +\infty$  und gilt

$$F' + GF \leq 0,$$

so folgt  $F \leq 0$ .

Beweis des Lemmas: Wir betrachten  $F e^{\int G}$ . Dafür gilt nach Voraussetzung

$$(F e^{\int G})' = (F' + FG) e^{\int G} \leq 0.$$

Das impliziert für beliebige  $0 < t < s < b$

$$F(s) e^{\int_t^s G} \leq F(t) e^{\int_t^t G} = F(t),$$

oder

$$F(s) \leq F(t) e^{-\int_t^s G}. \quad (65)$$

Nach Voraussetzung gibt es  $t_0 < s$  mit  $G(t) \geq 0$  für alle  $t < t_0$ . Daher ist

$$0 \leq e^{-\int_t^s G} = e^{-\int_t^{t_0} G} e^{-\int_{t_0}^s G} \leq e^{-\int_{t_0}^s G},$$

also  $e^{-\int_t^s G}$  für  $t \searrow 0$  beschränkt. Aus (19) folgt deshalb die Behauptung des Lemmas.

Schließlich müssen wir noch (18) beweisen. Das folgt aber sofort aus (16), denn

$$\langle U(s)v, v \rangle = \frac{1}{\sin_\delta s} \langle Z'(s)(\sin_\delta s)Z^{-1}(s)v, v \rangle.$$

□

**Korollar 1.** Ist  $K \leq 0$ , so gibt es keine konjugierten Punkte, d.h. die Exponentialabbildung ist eine Immersion.

**Satz 44 (Hadamard/Cartan).** Sei  $(M, g)$  eine vollständige, zusammenhängende  $m$ -dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit nicht-positiver Krümmung. Dann ist für  $p \in M$  die Exponentialabbildung  $\exp|_{T_p M} : T_p M \rightarrow M$  eine Überlagerungsabbildung. Ist  $M$  einfach-zusammenhängend, so ist  $M$  also diffeomorph zum  $\mathbb{R}^m$ .

*Beweis.* Nach dem 1. Korollar ist  $\pi := \exp|_{T_p M}$  eine Immersion und bezüglich der Metrik  $\pi^*g$  eine isometrische Immersion gleichdimensionaler Mannigfaltigkeiten. Die linear parametrisierten Gerade durch 0 in  $T_p M$  bleiben Geodätische bezüglich dieser neuen Metrik. Deshalb ist  $(T_p M, \pi^*g)$  vollständig. Aus Satz 27 folgt daher die Behauptung.  $\square$

**Korollar 2.** Ist  $K \geq \delta > 0$ , so ist keine Geodätische der Länge  $> \pi/\sqrt{\delta}$  eine Kürzeste. Falls  $M$  vollständig ist, ist also  $\text{diam}(M) \leq \pi/\sqrt{\delta}$ . (Satz von Bonnet-Myers).

## 25 Vergleichssatz für Jacobifelder

Ich gebe hier noch eine alternative Version des Vergleichssatzes. Darin bezeichnet  $\cos_\kappa$  analog zu  $\sin_\kappa$  die Lösung von  $y'' + \kappa y = 0$  mit den Cosinus-Anfangsbedingungen  $y(0) = 1, y'(0) = 0$ .

**Satz 45 (Vergleichssatz für Jacobifelder, 2. Version).** Sei  $(M, g)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit,  $c : ]0, L[ \rightarrow M$  eine nach der Bogenlänge parametrisierte Geodätische,  $Y$  ein normales Jacobifeld längs  $c$  mit

$$\|Y\|(0) = a, \quad \|Y\|'(0) = b.$$

Dabei ist  $\|Y\|'(0)$  die rechtsseitige Ableitung. (Existiert!). Für die Schnittkrümmung von  $M$  gelte

$$\delta \leq K \leq \Delta.$$

Dann gilt

$$a \cos_\Delta + b \sin_\Delta \leq \|Y\| \leq a \cos_\delta + b \sin_\delta,$$

falls die linke Seite auf  $]0, L[$  positiv ist.

**Bemerkungen.** 1. Beachten Sie, daß wir hier obere und untere Krümmungsschranken gleichzeitig fordern. Das vereinfacht insbesondere die Voraussetzungen für die rechte Ungleichung.

2. Für den früher behandelten Fall  $a = 0$  zeigt man  $\|Y\|'(0) = \|Y'(0)\|$ , so daß wir dieselben Ungleichungen erhalten.

3. Der Beweis dieser Version des Vergleichssatzes ist für die linke Ungleichung ganz analog zum Beweis der 1. Version. Der Beweis der rechten Ungleichung ist schwieriger, vgl. [H.Karcher, Riemannian Center of Mass ..., Comm. Pure Appl. Math. 30(1977), Appendix A]. Wir werden den Satz nur im Spezialfall  $b = 0$  verwenden, für den auch die rechte Ungleichung analog dem früheren Fall zu beweisen ist.

4. In den beiden Fällen mit  $a = 0$  oder  $b = 0$  ist  $a \cos_\kappa + b \sin_\kappa = \|Y_\kappa\|$ , wo  $\kappa \in \{\Delta, \delta\}$  und  $Y_\kappa$  das entsprechende „Vergleichsfeld“ ist.

## 26 Längen- und Winkelvergleich

**Satz 46 (Längenvergleichssatz von Rauch).** Sei  $(M_0, g_0)$  eine  $m$ -dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung  $K_0$ . Es gelte

$$\delta \leq K_0 \leq \Delta.$$

Seien  $M_\delta$  und  $M_\Delta$  die  $m$ -dimensionalen Standardräume konstanter Krümmung  $\delta$  bzw.  $\Delta$ .

Seien  $p_0 \in M_0, p_\delta \in M_\delta, p_\Delta \in M_\Delta$  und für  $\alpha \in \{0, \delta, \Delta\}$

$$j_\alpha : \mathbb{R}^m \rightarrow T_{p_\alpha} M_\alpha$$

eine lineare Isometrie.

Sei  $\epsilon > 0$ , so daß die Exponentialabbildung von  $M_0$  auf der offenen  $\epsilon$ -Kugel um  $0 \in T_{p_0} M_0$  definiert ist. Falls  $\Delta > 0$  sei  $\epsilon < \pi/\sqrt{\Delta}$ .

Sei  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine Kurve mit  $\|c\| < \epsilon$  und  $\gamma_\alpha := \exp \circ j_\alpha \circ c : [a, b] \rightarrow M_\alpha$ . Dann gilt

$$L(\gamma_\Delta) \leq L(\gamma_0) \leq L(\gamma_\delta).$$

*Beweis.* Für ein festes  $t \in [a, b]$  sei  $Y_\alpha$  das Jacobifeld längs  $s \mapsto \exp(sj_\alpha \circ c(t))$  mit

$$Y_\alpha(0) = 0, \quad \dot{Y}_\alpha(0) = j_\alpha(\dot{c}(t)^\perp).$$

Dann ist

$$\dot{\gamma}_\alpha(t)^2 = (\dot{c}(t)^{\text{radial}})^2 + \|Y_\alpha(1)\|^2.$$

Aus dem Vergleichssatz für Jacobifelder folgt, weil die Tangentialkomponenten der Jacobifelder von der Krümmung unabhängig sind,

$$\|\dot{\gamma}'_\Delta\| \leq \|\dot{\gamma}'_0\| \leq \|\dot{\gamma}'_\delta\|$$

und daraus die Behauptung.  $\square$

**Bemerkung.** Das hat zum Beispiel zur Folge, daß die Geodätischen aus einem Punkt um so stärker divergieren, je kleiner die Krümmung ist.

**Satz 47. (Längenvergleichssatz von M. Berger)** Sei  $(M_0, g_0)$  eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung  $K_0$ . Es gelte

$$\delta \leq K_0 \leq \Delta.$$

Seien  $M_\Delta$  und  $M_\delta$  wie oben und  $c_\alpha : [0, b] \rightarrow M_\alpha$  nach der Bogenlänge parametrisierte Geodätische mit parallelem Einheitsvektorfeld  $W_\alpha$ . Die Konstante  $g_\alpha(W_\alpha, c'_\alpha)$  sei unabhängig von  $\alpha$ . Sei  $f : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine nicht-negative differenzierbare Funktion. Wir definieren Kurven  $\gamma_\alpha$  durch

$$\gamma_\alpha(s) = \exp(f(s)W_\alpha(s)).$$

Es gelte

$$\cos_\Delta > 0 \quad \text{auf } [0, \sup f[, \quad \text{d.h. } f \leq \frac{\pi}{2\sqrt{\Delta}}, \quad \text{falls } \Delta > 0.$$

Dann gilt

$$L(\gamma_\Delta) \leq L(\gamma_0) \leq L(\gamma_\delta).$$

*Beweis.* Wir unterdrücken den Index  $\alpha$  und betrachten

$$V(s, t) := \exp(tf(s)W(s)).$$

Dann ist  $\gamma(s) = V(s, 1)$  und  $\gamma'(s) = Y_s(1)$ , wobei  $Y_s$  das Variationsvektorfeld der geodätischen Variation  $V$  der Geodätischen  $\mu_s : t \mapsto \exp(tf(s)W(s))$  ist.  $Y_s$  ist also ein Jacobifeld längs  $\mu_s$  mit den Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} Y_s(0) &= \partial_s V(s, 0) = c'(s) = g(c'(s), W(s))W(s) + (c'(s))^\perp \\ Y_s'(0) &= \nabla_{\partial_t} \partial_s V(s, t)|_{t=0} \\ &= \nabla_{\partial_s} \partial_t V(s, t)|_{t=0} \\ &= \nabla_{\partial_s} f(s)W(s) \\ &= f'(s)W(s). \end{aligned}$$

Wir können  $Y_s$  schreiben als Summe  $Y_s = Y_s^T + Y_s^\perp$  eines tangentialen und eines normalen Jacobifeldes längs  $\mu_s$  mit Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} Y_s^T(0) &= g(c'(s), W(s))W(s) & Y_s^\perp(0) &= (c'(s))^\perp \\ (Y_s^T)'(0) &= f'(s)W(s) & (Y_s^\perp)'(0) &= 0. \end{aligned}$$

Daher erhalten wir

$$\|Y_s(1)\|^2 = [g(c'(s), W(s)) + f'(s)]^2 + \|Y_s^\perp(1)\|^2,$$

Der erste Term ist unabhängig von der Krümmung, also vom Index  $\alpha$ . Der zweite Term hingegen läßt sich mit der 2. Version des Vergleichssatzes für Jacobifelder abschätzen, solange  $\cos \Delta > 0$ . Daraus folgt die Behauptung.  $\square$

**Satz 48 (Winkelvergleichssatz von Toponogov).** *Seien  $(M, g)$  eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit der Schnittkrümmung  $K$  mit  $\delta \leq K \leq \Delta$  und  $\Delta ABC$  ein Dreieck in  $M$  mit minimalen Geodätischen als Seiten und den Eckwinkeln  $\alpha, \beta, \gamma$  in der üblichen Anordnung. Für den Umfang  $U$  des Dreiecks gelte im Falle  $\delta > 0$ , daß  $U < \frac{2\pi}{\sqrt{\delta}}$ .*

*Sei  $M_\delta$  die einfach-zusammenhängende, vollständige Fläche der konstanten Krümmung  $\delta$ . Dann gibt es in  $M_\delta$  ein Dreieck  $\underline{\Delta A B C}$  mit denselben Seitenlängen wie  $\Delta ABC$ . Für dessen Winkel gilt:*

$$\underline{\alpha} \leq \alpha, \quad \underline{\beta} \leq \beta, \quad \underline{\gamma} \leq \gamma.$$

*Beweis.* Wir verwenden die üblichen Bezeichnungen am Dreieck.

Offenbar o.E.  $\Delta > 0$ .

Fall A:  $\delta \leq 0$ .

(i) Der Satz gilt für die Winkel  $\beta, \gamma$  von „schmalen“ Dreiecken, d.h. solchen mit  $d(B, C) \leq \frac{\pi}{2\sqrt{\Delta}}$ .

Dazu betrachten wir eine nach der Bogenlänge parametrisierte Geodätische  $\underline{c}$  der Länge  $L(\underline{c}) := d(A, B)$  in  $M_\delta$ , Endpunkte  $\underline{A}, \underline{B}$ , und dazu ein paralleles Einheitsvektorfeld  $\underline{W}$ , das mit  $\underline{c}$  den Winkel  $\beta$  einschließt. Setze  $C_0 = \exp(d(B, C)\underline{W})(d(A, B))$ . Dann gibt es nach Euklidischer oder Hyperbolischer Geometrie eine (monoton wachsende) Funktion  $f : [0, d(A, B)] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $0 \leq f \leq \frac{\pi}{2\sqrt{\Delta}}$ , so daß

$$\underline{b}(s) := \exp(f(s)\underline{W}(s))$$



die Seite  $\underline{A}C_0$  im Dreieck  $\Delta\underline{A}\underline{B}C_0$  parametrisiert.

Wir verschieben nun die Richtung  $BC$  parallel längs der minimalen Geodätischen  $c$  von  $A$  nach  $B$  und konstruieren damit und mit der Funktion  $f$  eine Verbindungskurve  $b$  von  $A$  nach  $C$  wie im Vergleichssatz von Berger. Nach diesem ist dann  $d(A, C) \leq L(b) \leq L(\underline{b})$ . Man muß also den Punkt  $C_0$  auf  $\underline{A}$  zu bewegen, um die die Länge der Seite zu verkleinern. Dabei verkleinert sich der gegenüberliegende Winkel  $\beta$ .

(ii) Beliebige Dreieck.

Wir zerlegen das Dreieck  $\Delta ABC$  in schmale Dreiecke. Durch Aneinandersetzen von Vergleichsdreiecken in  $M_\delta$  erhält man eine Figur mit gebrochener Seite  $\underline{BC}$ , wobei sich nach (i) aufeinanderfolgende Winkel (gegenüber von  $A$ ) zu höchstens  $\pi$  addieren. Durch „Ausstrecken“ der Seite zu einer glatten Geodätischen werden die Winkel  $\underline{\beta}, \underline{\gamma}$  weiter verkleinert.

Fall B:  $\delta > 0$ .

Der Beweis funktioniert wie oben, wenn die Seiten kurz sind. Die Voraussetzung  $U < \frac{2\pi}{\sqrt{\delta}}$  garantiert das aber nicht, und man bekommt das Problem, daß die Funktion  $f$  nicht monoton ist. Daher ist nicht notwendig  $f \leq \frac{\pi}{2\sqrt{\Delta}}$ , wenn dies für die Seite  $BC$  gilt, so daß man den Satz von Berger nicht anwenden kann. (Betrachte gleichschenklige Dreiecke in der Einheitssphäre mit großem Winkel  $\alpha$ .)

Die Bedingung garantiert allerdings, daß die Seitenlängen  $\leq \frac{1}{2}U < \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}$  sind. Man zeigt dann die Existenz eines  $\epsilon := \epsilon(U, \delta, \Delta) > 0$  mit  $\sup f < \frac{\pi}{2\sqrt{\Delta}}$ , falls  $d(B, C) < \epsilon$ .

Damit zeigt man wie oben die Behauptung für alle Dreiecke mit Umfang  $\tilde{U} < U$  und  $d(\tilde{B}, \tilde{C}) < \epsilon(U, \delta, \Delta)$ . Ein Dreieck vom Umfang  $U$  zerlegt man schließlich in Teildreiecke mit dieser Eigenschaft.  $\square$

## 27 Dreiecke maximalen Umfangs, Sphärensätze

**Satz 49 (Dreiecke von maximalem Umfang, Toponogov).** *Unter den Voraussetzungen von Satz 3 der letzten Vorlesung mit  $\delta > 0$  gilt:*

*Es gibt in  $M$  keine Dreiecke mit Umfang  $U > \frac{2\pi}{\sqrt{\delta}}$ .*

*Ist  $U = \frac{2\pi}{\sqrt{\delta}}$ , so ist entweder eine Seite von der Länge  $\frac{\pi}{\sqrt{\delta}}$  und der gegenüberliegende Winkel  $= \pi$ , das Dreieck also ein Zweieck, oder alle Seiten sind kürzer als  $\frac{\pi}{\sqrt{\delta}}$  und alle Winkel  $= \pi$  das Dreieck also eine glatt geschlossenen Geodätische.*

*Beweis.* Fall A:  $U = \frac{2\pi}{\sqrt{\delta}}$ . Dann ist also  $d(A, B) \leq \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}$ . Sei zunächst

$$d(A, B) = \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}. \quad (66)$$

Dann ist  $d(A, C) + d(C, B) = U - d(A, B) = \frac{\pi}{\sqrt{\delta}} = d(A, B)$ , also hat die gebrochene Geodätische  $ACB$  bei  $C$  keinen Knick, das Dreieck ist ein geodätisches Zweieck. Entsprechendes gilt, wenn eine andere Seite die Länge  $\frac{\pi}{\sqrt{\delta}}$  hat. Länger kann aber keine Seite sein. Wir brauchen also nur noch folgende Situation zu betrachten:

$$\text{Alle Seiten kürzer als } \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}. \quad (67)$$

Wähle dann  $D$  auf der Seite  $AB$ , so daß

$$d(C, A) + d(A, D) = d(D, B) + d(B, C) = \frac{U}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}.$$

Fall(a):  $d(C, D) < \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}$ . Dann haben die Teildreiecke  $\triangle CAD$  und  $\triangle CDB$  einen Umfang  $< \frac{2\pi}{\sqrt{\delta}}$ . Nach Toponogov hat also das Vergleichsviereck  $\underline{C} \underline{A} \underline{D} \underline{B}$  mit  $\underline{C}$  im Nordpol der Sphäre bei  $\underline{D}$  einen Innenwinkel  $\leq \pi$ . Läßt man  $\underline{D}$  längs des Meridians zum Südpol  $-\underline{C}$  wandern, so wächst der Umfang des Vierecks  $\underline{C} \underline{A} \underline{D} \underline{B}$  streng monoton bis zum Wert  $\frac{2\pi}{\sqrt{\delta}}$ . Er ist aber von Anfang an  $= \frac{2\pi}{\sqrt{\delta}}$ . Widerspruch! Daher gibt es nur den

$$\text{Fall(b): } d(C, D) = \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}.$$

Dann kann man (1) anwenden auf die beiden Teildreiecke  $\triangle CAD$  und  $\triangle CDB$  und findet  $\alpha = \pi, \beta = \pi$ . Dies haben wir bewiesen unter den Voraussetzungen  $U = \frac{2\pi}{\sqrt{\delta}}$  und (67). Daher folgt ebenso  $\gamma = \pi$ : Das Dreieck ist eine glatt-geschlossene Geodätische.

$$\text{Fall B: } U > \frac{2\pi}{\sqrt{\delta}}.$$

Verkürzt man die Seiten  $CA$  und  $CB$  durch Teilpunkte  $A', C'$  so, daß  $U(\triangle CA'B') = \frac{2\pi}{\sqrt{\delta}}$ , so folgt aus dem Fall A, daß  $\triangle CA'B'$  ein geodätisches Zweieck oder eine geschlossene Geodätische ist. Im letzteren Fall ist  $\gamma = \pi$ . Das gilt aber auch beim Zweieck, weil nach Konstruktion  $d(C, A') < d(C, A) \leq \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}$  (Bonnet-Myers) und ebenso  $d(C, B') < \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}$ . Aus Symmetriegründen folgt  $\alpha = \beta = \pi$ , das Dreieck ist also eine glatt-geschlossene Geodätische.

Wähle einen Punkt  $D$  darauf, der mit  $C$  die Länge halbiert.  $D$  liegt notwendig zwischen  $A$  und  $B$ . Wir behaupten:

$$U(\triangle CAD) < \frac{2\pi}{\sqrt{\delta}} \quad (68)$$

Beweis: Wäre Winkel( $ACD$ ) gleich  $\pi$ , so wäre die Geodätische  $CBD$  eine Kürzeste von  $C$  nach  $D$ , also nach Bonnet-Myers  $\frac{1}{2}U = d(C, B) + d(B, D) = d(C, D) \leq \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}$ . Widerspruch zu  $U > \frac{2\pi}{\sqrt{\delta}}$ . Ebenso findet man, daß auch Winkel( $ADC$ )  $\neq \pi$ . Nach dem bisher für diesen Fall bewiesenen ist also  $\tilde{U} := U(\triangle CAD) \leq \frac{2\pi}{\sqrt{\delta}}$ , denn andernfalls wären alle Winkel in diesem Dreieck  $= \pi$ .

Wäre  $\tilde{U} = \frac{2\pi}{\sqrt{\delta}}$ , so nach Fall A das Teildreieck  $\triangle CAD$  ein geodätisches Zweieck mit  $d(C, D) = \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}$ . Es folgt

$$\frac{2\pi}{\sqrt{\delta}} = \tilde{U} = \underbrace{d(C, A) + d(A, D)}_{> \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}} + \underbrace{d(D, C)}_{= \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}} > \frac{2\pi}{\sqrt{\delta}}.$$

Das ist ein Widerspruch, und deshalb gilt (3). Ebenso beweist man natürlich  $U(\triangle DBC) < \frac{2\pi}{\sqrt{\delta}}$ .

Darum läßt sich auf die beiden Teildreiecke  $\triangle CAD$  und  $\triangle DBC$  des Vierecks  $CADB$  der Satz von Toponogov anwenden. Die entsprechende Vergleichsfigur in der Sphäre hat dann bei  $\underline{D}$  einen Winkel  $< \pi$ , und bei der Bewegung von  $\underline{D}$  auf der Kürzesten nach  $-\underline{C}$  wächst der Umfang des Vierecks  $\underline{C} \underline{A} \underline{D} \underline{B}$  streng monoton von  $U > \frac{2\pi}{\sqrt{\delta}}$  bis  $\frac{2\pi}{\sqrt{\delta}}$ . Widerspruch! Der Fall B kann also nicht auftreten.  $\square$

## Ausblick auf die Sphärensätze.

### Satz 50. (Sphärensatz von Rauch 1954, Berger 1960, Klingenberg 1961)

Sei  $(M, g)$  eine vollständige, einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit der Dimension  $m$ . Sei  $\Delta > 0$  und sei

$$\frac{1}{4}\Delta \leq K < \Delta. \quad (69)$$

Dann ist  $M$  homöomorph zur Sphäre  $S^m$ .

**Bemerkungen.** 1. Die reellen projektiven Räume haben positive *konstante* Schnittkrümmung, erfüllen also sicher (1). Damit ist klar, daß man die Voraussetzung „einfachen zusammenhängend“ nicht streichen kann.

2. Ist  $\frac{1}{4}\Delta < K \leq \Delta$ , so folgt die Kompaktheit von  $M$  und damit ist  $\max K < \Delta$ . Daher kann man ein  $\tilde{\Delta} < \Delta$  finden, so daß  $\frac{1}{4}\tilde{\Delta} \leq K < \tilde{\Delta}$ . Es genügt also, wenn in (1) rechts oder links eine echte Ungleichung steht. Das ist aber auch nötig: die Krümmung des (einfach zusammenhängenden) komplexen projektiven Raumes erfüllt  $1 \leq K \leq 4$ . Aber es gilt der

**Satz 51. (Starrheitssatz von Berger 1961)** Sei  $(M, g)$  eine vollständige, einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit der Dimension  $m$ . Sei  $\Delta > 0$  und sei

$$\frac{1}{4}\Delta \leq K \leq \Delta. \quad (70)$$

Ist  $M$  nicht homöomorph zur Sphäre  $S^m$ , so ist  $(M, g)$  isometrisch zu einem Riemannschen symmetrischen Raum vom Rang 1, d.h. zu einem komplexen oder quaternionalen projektiven Raum oder zur Cayleyebene.

Unter den Voraussetzungen von Satz 1 ist  $(M, g)$  offenbar nicht unbedingt isometrisch zur Standardsphäre. Man kann fragen ob es wenigstens diffeomorph dazu ist. Dazu muß man natürlich wissen, ob es Mannigfaltigkeiten vom Homöomorphietyp der Sphäre gibt, die nicht diffeomorph zur Sphäre sind. Anders ausgedrückt: Ob es auf der  $m$ -dimensionalen Sphäre verschiedene differenzierbare Strukturen gibt (Exotische Sphären). Solche gibt es wenigstens für  $m > 4$ , nicht aber für  $m = 2, 3$ .

### Satz 52. (Differenzierbarer Sphärensatz, Gromoll 1966, Ruh 1971 u.a.)

Es gibt eine Zahl  $\delta \in ]0, 1[$  mit folgender Eigenschaft: Ist  $(M, g)$  eine vollständige, einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit und  $\Delta > 0$  mit

$$\frac{1}{4}\Delta \leq K < \Delta, \quad (71)$$

so ist  $M$  diffeomorph zur Sphäre.

Für  $\delta$  hat Ruh den Wert 0.8 angegeben. Möglicherweise gibt es heute einen besseren (=kleineren) Wert. Andererseits ist es ein offenes Problem, ob auf exotischen Sphären überhaupt Metriken positiver Schnittkrümmung existieren. Es ist also möglich, daß man  $\delta = \frac{1}{4}$  wählen kann, d.h. daß man im Satz 1 „homöomorph“ durch „diffeomorph“ ersetzen kann.

## 28 Satz vom maximalen Durchmesser

**Satz 53 (Satz vom maximalen Durchmesser, Toponogov 1959).** Sei  $(M, g)$  zusammenhängend und vollständig und  $K \geq \delta > 0$ . Dann ist nach Bonnet-Myers

$\text{diam}(M) \leq \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}$ . Ist nun

$$\text{diam}(M) = \frac{\pi}{\sqrt{\delta}},$$

so ist  $(M, g)$  isometrisch zur Sphäre vom Radius  $\frac{1}{\sqrt{\delta}}$ .

*Beweis.* Nach dem Satz von Bonnet-Myers ist  $M$  kompakt, und es gibt ein Punktpaar  $p, q$  maximalen Abstands  $d(p, q) = \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}$ . Sei  $x \in M$  beliebig. Dann gilt

$$\frac{2\pi}{\sqrt{\delta}} \stackrel{\text{Toponogov}}{\geq} \underbrace{d(p, q)}_{\frac{\pi}{\sqrt{\delta}}} + d(q, x) + d(x, p) \geq 2d(p, q) = \frac{2\pi}{\sqrt{\delta}}$$

Daher ist

$$d(p, x) + d(x, q) = d(p, q),$$

also  $pxq$  eine Kürzeste und damit glatt. Deshalb geht jede Geodätische von  $p$  aus durch  $q$  und ist bis dahin Kürzeste. Wir identifizieren mittels linearer Isometrie die Tangentialräume von  $S_{r=1/\sqrt{\delta}}^m$  im Nordpol und von  $M$  in  $p$ . Mittels der beiden Exponentialabbildungen erhalten wir dann eine Abbildung

$$f : S_{r=1/\sqrt{\delta}}^m \setminus \{\text{Südpol}\} \rightarrow M \setminus \{q\}.$$

$f$  ist injektiv. Andernfalls könnte man einen Punkt  $x \in M$  durch zwei verschiedenen Kürzeste mit  $p$  verbinden. Dann könnte man aber eine geknickte Kürzeste von  $p$  nach  $q$  finden. Widerspruch!

$f$  ist surjektiv auf  $M \setminus \{q\}$ . Klar

$f$  ist isometrisch. Das ist klar in radialer Richtung. Sei nun  $c : [0, \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}] \rightarrow M$  eine nach der Bogenlänge parametrisierte Geodätische von  $p$  nach  $q$ . Dann ist  $c$  Kürzeste, also  $0 \leq I(X, X)$  für alle Vektorfelder  $X$ , die an den Endpunkten von  $c$  verschwinden. Wir wählen

$$X(s) = \sin_\delta s V(s),$$

wobei  $V$  ein normales, paralleles Einheitsfeld längs  $c$  ist. Dann ist

$$\begin{aligned} 0 \leq I(X, X) &= - \int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{\delta}}} \langle -\delta \sin_\delta t V(t) + \sin_\delta t R(V(t), c'(t))c'(t), \sin_\delta t V(t) \rangle dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{\delta}}} \sin_\delta^2 t \left\{ \delta - \underbrace{\langle R(V(t), c'(t))c'(t), V(t) \rangle}_{\geq \delta} \right\} dt. \end{aligned}$$

Es folgt  $\langle R(V(t), c'(t))c'(t), V(t) \rangle = \delta$  für alle  $t$ . Daher erfüllen die normalen Jacobifelder längs  $c$  dieselbe Jacobigleichung wie die auf  $S_{r=1/\sqrt{\delta}}^m$ , und  $f$  ist auch orthogonal zur radialen Richtung isometrisch.

Damit ist  $M \setminus \{q\}$ , also auch  $M$  von konstanter Krümmung  $\delta$ . Ferner ist  $M$  homöomorph zur Sphäre, also einfach zusammenhängend, und deshalb isometrisch zur Sphäre der Krümmung  $\delta$ .  $\square$

Das folgende Lemma wird zum Beweis der Sphärensätze benötigt, es ist aber auch für sich von Interesse:

**Lemma 21 (Berger).** Sei  $(M, g)$  vollständig. Seien  $p, q \in M$ , so daß  $d(p, \cdot)$  in  $q$  ein lokales Maximum hat. Sei  $v \in T_q M \setminus \{0\}$ . Dann gibt es eine Kürzeste  $c : [0, d(p, q)] \rightarrow M$  von  $q$  nach  $p$  mit Winkel  $(v, c'(0)) \leq \frac{\pi}{2}$ .

Insbesondere gibt es also zwischen  $p$  und  $q$  keine eindeutig bestimmte Kürzeste..

*Beweis.* Sei  $\gamma(t) := \exp(tv)$  die Geodätische aus  $q$  mit Anfangsvektor  $v$ . Für eine Folge  $(t_i)$  mit  $t_i \searrow 0$  und nach der Bogenlänge parametrisierten Kürzesten  $c_i : [0, L_i] \rightarrow M$  von  $q_i := \gamma(t_i)$  nach  $p$  bezeichne  $\alpha_i$  den Winkel zwischen  $c'_i(0)$  und  $\gamma'(t_i)$ . Wir zeigen, daß wir  $(t_i)$  und  $(c_i)$  so wählen können, daß

$$\alpha_i \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{für alle } i. \quad (72)$$

Dann kann man o.E. annehmen, daß  $c'_i(0) \rightarrow w \in T_p M$  mit Winkel  $(w, v) \leq \frac{\pi}{2}$  und  $L_i \rightarrow L$ . Die Geodätische  $c : [0, L] \rightarrow M, s \mapsto \exp(sw)$  geht dann von  $q$  nach  $\lim \exp(c'_i(0)L_i) = p$ . Ihre Länge ist  $L = \lim L_i = \lim d(p, \gamma(t_i)) = d(p, q)$ . Also bleibt nur noch der Beweis von (1).

Wäre (1) falsch, so gäbe es  $t_0$ , so daß für alle  $t \in ]0, t_0[$  und alle Kürzesten  $c_t : [0, L_t] \rightarrow M$  von  $\gamma(t)$  nach  $p$  der Anfangswinkel  $> \frac{\pi}{2}$  ist. Wir wählen ein solches  $c_t$  und eine Variation  $V(s, t + \theta) = c_{t+\theta}(s)$ , so daß  $c_{t+\theta}$  von  $\gamma(t + \theta)$  nach  $p$  geht. (Existiert!) Dann ist nach der Formel für die erste Variation

$$\frac{d}{d\theta} L(c_{t+\theta})|_{\theta=0} = - \langle \gamma'(t), c'_t(0) \rangle > 0,$$

also  $L(c_{t+\theta})$  streng monoton wachsend. Beachte, daß die Nachbarkurven  $c_{t+\theta}$  nicht unbedingt Kürzeste sind. Aber natürlich ist dann  $d(p, \gamma(t + \theta)) < d(p, \gamma(t))$  für  $\theta < 0, |\theta|$  klein. D.h.  $t \mapsto d(p, \gamma(t))$  ist auf  $]0, t_0[$  streng monoton wachsend. Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung über  $q$ .  $\square$

## 29 Positiv gekrümmte Mannigfaltigkeiten mit großem Injektivitätsradius

Sei  $(M, g)$  vollständige, zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit. Für  $p \in M$  und  $r > 0$  bezeichnen wir mit

$$W_p(r) := \{v \in T_p M; g(v, v) < r^2\}$$

die offene  $r$ -Kugel um den Ursprung in  $T_p M$ .

**Definition.** Für  $p \in M$  heißt

$$i_p := \sup\{r \in \mathbb{R}; \exp|_{W_p(r)} \text{ ist injektiv}\}$$

der *Injektivitätsradius* von  $(M, g)$  in  $p$ . Der Injektivitätsradius ist also eine Funktion  $i : M \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ .

**Bemerkung:** Aus dem Satz von Jacobi folgt, daß  $\exp|_{W_p(i_p)}$  ein Diffeomorphismus ist.

**Satz. (Provisorischer Sphärensatz)** Sei  $(M, g)$  eine vollständige, zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit mit positiver unterer Krümmungsschranke

$$0 < \delta \leq K.$$

Für den Injektivitätsradius gelte

$$i > \frac{\pi}{2\sqrt{\delta}}.$$

Dann ist  $M$  homöomorph zur Sphäre.

Im Beweis benötigt man das folgende

**Lemma 22.** *Sei  $(M, g)$  vollständige, zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Krümmungsschranken*

$$0 < \delta \leq K \leq \Delta.$$

Sei  $p, q$  ein Punktepaar mit maximalem Abstand. Dann gilt nach Bonnet-Myers  $d(p, q) \leq \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}$ . Für alle  $x \in M$  ist

$$\min\{d(p, x), d(q, x)\} \leq \frac{\pi}{2\sqrt{\delta}}.$$

*Beweis.* Wir verbinden  $x$  mit  $p$  und  $q$  durch Kürzeste und dann  $p$  und  $q$  durch eine Kürzeste, so daß für den Winkel  $\alpha$  bei  $p$  gilt  $\alpha \leq \frac{\pi}{2}$ . (Lemma von Berger.)

1. Fall:  $U = U(\Delta pqr) = \frac{2\pi}{\sqrt{\delta}}$ . Nach dem Satz von Toponogov über Dreiecke maximalen Umfangs können nicht alle Seiten  $< \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}$  sein, weil ein Winkel  $\neq \pi$  ist. Wäre  $d(q, x) = \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}$ , so wäre auch  $d(p, q) = \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}$ , weil diese Punkte maximalen Abstand haben. Andererseits wäre dann  $d(p, q) = U - d(q, x) - d(p, x) < \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}$ . Widerspruch. Also  $d(q, x) < \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}$ . Aus demselben Grund ist  $d(p, x) < \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}$ , und deshalb bleibt nur  $d(p, q) = \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}$ . Dann ist aber

$$d(q, x) + d(p, x) = U - d(p, q) = \frac{\pi}{\sqrt{\delta}},$$

und einer der Summanden links ist  $\leq \frac{\pi}{\sqrt{2\delta}}$ .

2. Fall:  $U = U(\Delta pqr) < \frac{2\pi}{\sqrt{\delta}}$ . Beachte, daß der Fall  $U > \frac{2\pi}{\sqrt{\delta}}$  nicht möglich ist. Sei

$$\frac{\pi}{2\sqrt{\delta}} < d(p, x) \leq d(p, q). \quad (73)$$

Wir müssen dann zeigen, daß  $d(q, x) \leq \frac{\pi}{2\sqrt{\delta}}$ .

Wir betrachten ein Vergleichsdreieck mit gleichen Seiten in  $S^2_{r=\sqrt{\delta}}$ .  $\Delta PQX$ . Da  $d(P, Q) = d(p, q) \geq d(P, X) = d(p, x) > \frac{\pi}{2\sqrt{\delta}}$ , ist

$$\langle P, X \rangle < 0 \quad \text{und} \quad \langle P, Q \rangle < 0. \quad (74)$$

Wegen  $\alpha \leq \frac{\pi}{2}$  ist

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle Q - \delta \langle Q, P \rangle P, X - \delta \langle X, P \rangle P \rangle \\ &= \langle Q, X \rangle - 2\delta \langle Q, P \rangle \langle X, P \rangle + \delta^2 \langle P, Q \rangle \langle X, P \rangle \underbrace{\langle P, P \rangle}_{=1/\delta} \\ &= \langle Q, X \rangle - \delta \langle Q, P \rangle \langle X, P \rangle \end{aligned} \quad (75)$$

Aus (2) und (3) folgt  $\langle Q, X \rangle > 0$ , also  $d(q, x) = d(Q, X) < \frac{\pi}{2\sqrt{\delta}}$ .  $\square$

*Beweis des provisorischen Sphärensatzes.* Sei  $p, q$  ein Punktepaar maximalen Abstandes. Dann ist keine Geodätische von  $p$  nach  $q$  jenseits von  $q$  noch Kürzeste. Deshalb ist  $d(p, q) \geq i_p$  und aus dem Satz von Bonnet-Myers und der Voraussetzung über  $i$  folgt

$$\frac{\pi}{\sqrt{\delta}} \geq d(p, q) > \frac{\pi}{2\sqrt{\delta}}. \quad (76)$$

Wir definieren den Äquator von  $M$  als

$$E := \{x \in M; d(p, x) = d(q, x)\} \quad (77)$$

und setzen  $\rho := \min\{i_p, i_q\}$ . Offenbar ist für alle  $x \in E$

$$0 < d(p, x) = d(q, x) \leq \frac{\pi}{2\sqrt{\delta}} < \rho, \quad (78)$$

und deshalb

$$E \subset \exp W_p(\rho) \cap \exp W_q(\rho). \quad (79)$$

Wir definieren nun durch

$$H_p(x) := \frac{\exp^{-1} x}{d(p, x)} = \frac{\exp^{-1} x}{\|\exp^{-1} x\|}.$$

eine Abbildung  $H_p : E \rightarrow S_p \subset T_p M$ , wo  $S_p$  die Einheitskugel im Tangentialraum  $T_p M$  bezeichnet. Man hat dann

$$\exp(d(p, x)H_p(x)) = x. \quad (80)$$

Offenbar ist  $H_p$  stetig.

$H_p$  ist surjektiv: Für  $v \in S_p$  betrachte  $\gamma(t) := \exp(tv)$ . Dann ist  $d(p, \gamma(t)) = t$  für  $0 \leq t \leq \rho$ . Insbesondere ist  $d(p, \gamma(\rho)) = \rho > \frac{\pi}{2\sqrt{\delta}}$ , und deshalb nach dem Lemma  $d(q, \gamma(\rho)) \leq \frac{\pi}{2\sqrt{\delta}} < d(p, \gamma(\rho))$ . Aus Stetigkeitsgründen gibt es daher ein  $t_0 \in ]0, \rho[$ , genauer sogar  $t_0 \in ]0, \frac{\pi}{2\sqrt{\delta}}]$ , mit  $x = \gamma(t_0) \in E$ . Nach Konstruktion ist dann  $H_p(x) = v$ .

$H_p$  ist injektiv: Andernfalls gäbe es  $v \in S_p$  und  $t_1, t_2$  mit  $0 < t_1 < t_2 \leq \frac{\pi}{2\sqrt{\delta}}$  mit

$$x_1 := \exp(t_1 v) \in E \quad \text{und} \quad x_2 := \exp(t_2 v) \in E.$$

Dann wäre

$$\begin{aligned} d(q, x_2) &= d(p, x_2) \\ &= d(p, x_1) + d(x_1, x_2) \\ &= d(q, x_1) + d(x_1, x_2) \end{aligned}$$

Also ist die gebrochene Geodätische  $qx_1x_2$  glatt und  $q = p$ . Widerspruch.

Da  $E$  kompakt ist, ist  $H_p$  ein Homöomorphismus von  $E$  auf  $S_p$ . Wir definieren eine Abbildung der abgeschlossenen Einheitskugel  $B_p \subset T_p M$  in  $M$  durch

$$h_p(tv) := \exp(td(p, H_p^{-1}(v))v)$$

für  $v \in S_p$  und  $0 \leq t \leq 1$ . Diese Abbildung bildet die offene/abgeschlossene Einheitskugel homöomorph auf  $\{x \in M; d(p, x) < d(q, x)\}$  bzw.  $\{x \in M; d(p, x) \leq d(q, x)\}$  ab und es gilt

$$h_p(v) = H_p^{-1}(v) \quad (81)$$

für  $v \in S_p$ .

Analog definieren wir  $H_q$  und  $h_q$ . Wir wählen eine lineare Isometrie

$$j_p : \mathbb{R}^m \rightarrow T_p M$$

und definieren

$$j_q : \mathbb{R}^m \rightarrow T_q M$$

durch

$$j_q(tv) = tH_q \circ H_p^{-1} \circ j_p(v), \quad \|v\| = 1, t \geq 0.$$

Weil  $H_q \circ H_p^{-1}$  ein Homöomorphismus der Einheitskugeln ist, ist auch  $j_q$  ein (nicht-linearer, radial isometrischer) Homöomorphismus. Es gilt für  $\|v\| = 1$

$$h_q(j_q(v)) = H_q^{-1}(j_q(v)) = H_p^{-1}(j_p(v)) = h_p(j_p(v)).$$

Deshalb liefert

$$h(x_0, x_1, \dots, x_m) := \begin{cases} h_p(j_p(x_1, \dots, x_m)), & \text{falls } x_0 \geq 0 \\ h_q(j_q(x_1, \dots, x_m)), & \text{falls } x_0 \leq 0 \end{cases}$$

eine stetige, injektive und surjektive Abbildung, also einen Homöomorphismus von  $S^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$  auf  $M$ .  $\square$

## 30 Injektivitätsradius und Sphärensatz

Sei  $(M, g)$  eine vollständige, zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit.

**Lemma 23.** Sei  $c : [0, \infty[ \rightarrow M$  eine nach der Bogenlänge parametrisierte Geodätische, und sei

$$L := \sup\{s; d(c(0), c(s)) = s\} < \infty.$$

*Beachte:*  $L$  ist der Parameter, bei dem  $c$  aufhört, Kürzeste zu sein. Wir setzen  $p = c(0)$ ,  $q = c(L)$ . Dann ist  $L$  der erste zu 0 konjugierter Parameter von  $c$  (vgl. den Satz von Jacobi, 16. Vorlesung), oder es gibt eine von  $c$  verschiedene Kürzeste von  $p$  nach  $q$ .

*Beweis.* Wir betrachten eine positive Nullfolge  $(\epsilon_j)$ . Dann gibt es eine Folge von nach der Bogenlänge parametrisierten Kürzesten  $\gamma_j$  von  $p$  nach  $c(L + \epsilon_j)$ . Nach Wahl einer Teilfolge können wir annehmen, daß  $\gamma_j'(0) \rightarrow v$  konvergiert. Sei  $\gamma(s) := \exp(sv)$ . Aus Stetigkeitsgründen ist  $\gamma$  eine Kürzeste von  $p$  nach  $\lim c(L + \epsilon_j) = q$ . Ihre Länge ist also  $L$ . Ist  $\gamma \neq c$ , so sind wir fertig. Andernfalls müssen wir zeigen, daß  $\exp|_{T_p M}$  in  $Lc'(0)$  singular ist. Dann ist  $L$  zu 0 konjugiert, und nach Definition von  $L$  und dem Satz von Jacobi auch der erste zu 0 konjugierte Parameter längs  $c$ .

Sei also  $v = c'(0)$ . Nun ist  $c|_{[0, L + \epsilon_j]}$  keine Kürzeste mehr. Also gilt  $\gamma_j(L + \epsilon_j') = c(L + \epsilon_j)$  für ein  $\epsilon_j'$  mit  $\epsilon_j' < \epsilon_j$ . Wäre  $\exp|_{T_p M}$  in  $Lc'(0)$  regulär, so würde es eine Umgebung  $U$  von  $Lc'(0)$  diffeomorph auf eine Umgebung von  $q$  abbilden. Für hinreichend großes  $j$  liegen aber  $(L + \epsilon_j)c'(0)$  und  $(L + \epsilon_j')\gamma_j'(0)$  in  $U$ . Widerspruch!  $\square$



**Lemma 24.** Seien  $c_0, c_1 : [0, 1] \rightarrow M$  Geodätische von  $p$  nach  $q$  mit Winkel  $(c'_0(1), c'_1(1)) \neq 0$ . Es sei 1 für keine der beiden ein konjugierter Parameter. Dann ist Winkel  $(c'_0(1), c'_1(1)) = \pi$ , oder es gibt Geodätische  $\bar{c}_0, \bar{c}_1 : [0, 1] \rightarrow M$  von  $p$  nach  $\bar{q}$  (i.a.  $\neq q$ ), so daß

$$L(\bar{c}_0) = L(c_0) \quad \text{und} \quad L(\bar{c}_1) < L(c_1).$$

*Beweis.* Wir nehmen an, daß Winkel  $(c'_0(1), c'_1(1)) < \pi$ .

Wir setzen  $v := c'_0(0), w := c'_1(0)$ . Weil 1 nicht konjugierter Parameter ist, ist  $\exp|_{T_p M}$  in  $v$  und  $w$  regulär und  $d_v \exp$  bildet  $v^\perp$  auf die Hyperebene von  $T_q M$  orthogonal zu  $c'_0(1)$  ab (Lemma von Gauß). Daher gibt es  $\hat{v}$  mit  $\|\hat{v}\| = \|v\|$  und  $g(\hat{v}, v) = 0$ , so daß  $g_q(d_v \exp(\hat{v}), c'_1(1)) \neq 0$ .

Definiere für hinreichend kleines  $|s|$

$$c(s) := \exp(v \cos s + \hat{v} \sin s).$$

Weil  $\exp|_{T_p M}$  auch in  $w$  regulär ist, gibt es eine Kurve  $\phi(s)$  durch  $\phi(0) = w$  mit

$$\exp(\phi(s)) = c(s).$$

Wegen  $c'(0) = d_v \exp(\hat{v})$  und dem Gauß Lemma, diesmal bei  $w$ , schneidet  $\phi$  die Gerade  $\mathbb{R}w$  bei  $w$  unter einem Winkel  $\neq \frac{\pi}{2}$ . Also gibt es ein  $s_0$  nah bei 0, so daß  $\|\phi(s_0)\| < \|w\|$ . Setze dann

$$\begin{aligned} \bar{v} &:= v \cos s_0 + \hat{v} \sin s_0 \\ \bar{w} &:= \phi(s_0) \\ \bar{c}_0(t) &:= \exp(t\bar{v}) \\ \bar{c}_1(t) &:= \exp(t\bar{w}) \end{aligned}$$

□

**Bemerkung.** Ist  $L(c_0) = L(c_1) = i_p$ , so ist nach Definition des Injektivitätsradius  $i_p$  die zweite Möglichkeit ausgeschlossen, und es folgt  $c'_0(1) = \lambda c'_1(1)$  für ein  $\lambda < 0$ .

**Satz 54 (Klingenberg).** Sei  $(M, g)$  eine zusammenhängende, kompakte, orientierbare Mannigfaltigkeit gerader Dimension mit

$$0 < K \leq \Delta.$$

Dann gilt für den Injektivitätsradius  $i$  von  $M$ :

$$i \geq \frac{\pi}{\sqrt{\Delta}}.$$

*Beweis.* Wir wählen einen Punkt  $p$  in  $M$  mit  $i_p = \inf_{q \in M} i_q$ . Einen solchen Punkt gibt es, weil  $M$  kompakt und  $i$  stetig ist. (Haben wir nicht bewiesen.) Sei  $q \in M$  mit  $d(p, q) = i_p$  ein Punkt, so daß die Kürzeste von  $p$  nach  $q$  maximal ist. (Gibt es nach Definition von  $i_p$ .)

Annahme:  $d(p, q) < \frac{\pi}{\sqrt{\Delta}}$ . Wir wollen dies zum Widerspruch führen. Nach dem Vergleichssatz für Jacobifelder ist  $q$  nicht konjugiert zu  $p$  längs der Kürzesten von  $p$  nach  $q$ . Nach Lemma 1 gibt es zwei verschiedene Kürzeste von  $p$  nach  $q$ . Nach Lemma 2 und der anschließenden Bemerkung haben diese bei  $q$  den Winkel  $\pi$ . Aber

Lemma 2 läßt sich auch vom Punkt  $q$  aus anwenden, und man erhält, daß auch der Winkel bei  $p$  ein gestreckter ist. Die beiden Kürzesten lassen sich also als geschlossene Geodätische  $c$  der Länge  $< \frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}}$  parametrisieren. Nach dem Lemma von Synge (17. Vorlesung) gibt es eine Variation  $c_t$  von  $c$  durch glatt geschlossene Kurven  $c_t$  mit  $L(c_t) < L(c)$  für alle  $t \neq 0$ .

Sei  $q_t$  ein Punkt auf  $c_t$  mit maximalem Abstand von  $c_t(0)$ . Dann ist

$$d(q_t, c_t(0)) \leq \frac{1}{2}L(c_t) < \frac{1}{2}L(c) = d(p, q) = \inf i.$$

Daher gibt es eine eindeutig bestimmte Kürzeste  $\gamma_t$  von  $q_t$  nach  $c_t(0)$ . Aus Kompaktheitsgründen gibt es dann eine Nullfolge  $(t_j)$ , für die  $(q_{t_j})$  und  $(\gamma'_{t_j}(0))$  konvergieren. Weil  $q$  der eindeutig bestimmte Punkt maximaler Distanz von  $p = \lim c_{t_j}(0)$  auf  $c$  ist, gilt  $\lim q_{t_j} = q$ , also  $w = \lim \gamma'_{t_j}(0) \in T_q M$ . Aus Stetigkeitsgründen ist  $\gamma : t \mapsto \exp(tw)$  dann eine Kürzeste von  $q$  nach  $p$ .

Weil  $d(q_t, c_t(0)) < \inf i \leq i_{c_t(0)}$  ist  $c_t$  im diffeomorphen exp-Bild einer Kugel aus  $T_q M$  enthalten. Aus dem Gauß-Lemma folgt, daß  $c_t$  und  $\gamma_t$  in  $q_t$  orthogonal zueinander sind. Dann ist aber auch  $\gamma'(0)$  orthogonal zu  $c$  in  $q$  und wir erhalten drei Kürzeste von  $p$  nach  $q$ . Aber nach dem Vergleichssatz für Jacobifelder und der Annahme  $d(p, q) < \frac{\pi}{\sqrt{\Delta}}$  sind  $p$  und  $q$  längs keiner Kürzesten konjugiert. Nach der Bemerkung zu Lemma 2 müßten ihre Tangentialvektoren in  $q$  daher sämtlich linear abhängig sein. Widerspruch!  $\square$

**Bemerkung.1.** Ist  $0 < \delta \leq K < 4\delta$ , so gibt es wegen der Kompaktheit eine obere Krümmungsschranke  $\Delta < 4\delta$ , und man erhält  $i > \frac{\pi}{2\sqrt{\delta}}$ . Mit dem Satz der 25. Vorlesung ergibt sich also für den Fall gerader Dimension der Sphärensatz von Rauch, Berger und Klingenberg (23. Vorlesung).

2. Im Fall gerader Dimension impliziert nach dem Satz von Synge (17. Vorlesung) die Orientierbarkeit von  $M$ , daß  $M$  einfach zusammenhängend ist. Bei vorausgesetztem einfachen Zusammenhang gilt der obige Satz von Klingenberg auch für ungerade Dimension. Allerdings ist der Beweis schwieriger, vgl. z.B. [Gromoll, Klingenberg, Meyer: Riemannsche Geometrie in Großen] oder [do Carmo: Riemannian Geometry].

ENDE DES ZWEITEN TEILS