

Differentialgeometrie I

WS 1999/2000

Dirk Ferus

Inhaltsverzeichnis

1. Vorlesung: Einführung	3
2. Vorlesung: Differentialrechnung, Kurven	3
3. Vorlesung: Gerahmte Kurven	5
4. Vorlesung: Normalform, Frenetrahmen	7
5. Vorlesung: Existenz- und Eindeutigkeit, Isoperimetrische Ungleichung	10
6. Vorlesung: Isoperimetrische Ungleichung, Umlaufzahl	11
7. Vorlesung: Umlaufsatz von Hopf	15
8. Vorlesung: Mannigfaltigkeiten	19
9. Vorlesung: Mannigfaltigkeiten, differenzierbare Abbildungen	20
10. Vorlesung: Tangentialraum, Differential	22
11. Vorlesung: Immersionen	25
12. Vorlesung: 1. Fundamentalform, Vektorfelder	27
13. Vorlesung: Orientierte Hyperflächen, 2. Fundamentalform	30
14. Vorlesung: Orientierte Hyperflächen, 2. Fundamentalform	32
15. Vorlesung: Krümmungsgrößen	34
16. Vorlesung: Rotationsflächen konstanter Krümmung	37
17. Vorlesung: Kurven in Hyperflächen	38

18. Vorlesung: Kurven auf Flächen	40
19. Vorlesung: Regelflächen	44
20. Vorlesung: Minimalflächen	48
21. Vorlesung: Intermezzo: Komplexe Funktionentheorie	52
22. Vorlesung: Minimalflächen und Funktionentheorie	56
23. Vorlesung: Lieklammer	59
24. Vorlesung: Levi-Civita-Ableitung	60
25. Vorlesung: Strukturgleichungen, Krümmungstensor	66
26. Vorlesung: Eindeutigkeitssatz, Starrheit	69
27. Vorlesung: Kompakte Flächen konstanter Krümmung	72
28. Vorlesung: Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten	75

1 Einführung

Themen der Differentialgeometrie

Kurven, Flächen.

Krümmung ebener und räumlicher Kurven (Beschleunigung, Krümmungsradius),
Kurven konstanter Krümmung, Kurven vorgeschriebener Krümmung. Totalkrümmung.

Gaußsche Krümmung von Flächen, von der Kugel. Flächen konstanter Gaußscher
Krümmung.

Hauptkrümmungen, mittlere Krümmung.

Berechnung der Gaußschen Krümmung aus inneren Größen:

$$F = 2\pi r^2(1 - \cos \theta) = \pi(r\theta)^2 - \frac{\pi}{12}(r\theta)^4 K + \dots$$

Innere und Äußere Differentialgeometrie, intrinsisch, extrinsisch.

Satz von Gauß-Bonnet: $\int K = 2\pi\chi = 2\pi(E - K + F)$.

Willmoreflächen: $\int H^2 = \min$

Literatur zur Vorlesung:

Do Carmo, M.: Differentialgeometrie von Kurven und Flächen, vieweg

Kühnel, W.: Differentialgeometrie, vieweg

Klingenberg, W. : Eine Vorlesung über Differentialgeometrie, Springer

Spivak, M.: A Comprehensive Introduction to Differential Geometry I-V, Publish or Perish

Differentialrechnung II

Differential von Abbildungen in endlich-dim. normierten Vektorräumen.

Beispiel. $\det : M(n \times n, \mathbb{R}) \supset GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbf{R}$

$$d_A \det(B) = \det A \operatorname{Spur}(A^{-1}B).$$

C^∞ -Abbildungen.

Bemerkung: *Differenzierbar* wird bei uns häufig für C^∞ stehen.

2 Differentialrechnung, Kurven

Noch zur Differentialrechnung

”Differenzierbar” bedeutet in folgenden C^∞ .

Definition. Sei $f : V \supset M \rightarrow W$ eine differenzierbare Abbildung der (beliebigen) Teilmenge M des n -dimensionalen normierten Vektorraums V in den n -dimensionalen normierten Vektorraum W . Gibt es zu jedem Punkt von M eine offene Umgebung U in V und eine differenzierbare Abbildung $F : U \rightarrow W$ mit

$$F|_{U \cap M} = f|_{U \cap M}$$

so heißt f differenzierbar. (Differential aber i.a. nicht definiert!)

Definition. $f : V \supset M \rightarrow N \subset W$ heißt ein *Diffeomorphismus* von M auf N , wenn $f : M \rightarrow N$ bijektiv und differenzierbar mit differenzierbarem Inversen ist.

Beispiel 1. Die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x$ gibt einen Diffeomorphismus von $\{(x, y) \mid y = x^2\}$ auf \mathbb{R} . Als Abbildung von $\{(x, y) \mid y = |x|\}$ auf \mathbb{R} ist sie differenzierbar und bijektiv, aber kein Diffeomorphismus.

Satz 1. (Rangatz) Sei $f : V \supset G \rightarrow W$ eine differenzierbare Abbildung der offenen Menge G des n -dimensionalen Vektorraums V in den n -dimensionalen Vektorraum W . Sei $p \in G, k \in \mathbb{N}$ und für alle q in einer Umgebung von p

$$\text{Rang } d_q f = k.$$

Dann gibt es Umgebungen \tilde{V} von p und \tilde{W} von $f(p)$ und Diffeomorphismen \tilde{v}, \tilde{w} , so daß mit

$$f_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$$

das folgende Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{array}{ccc} V \supset G & \xrightarrow{f} & W \\ \cup & & \cup \\ \tilde{V} & & \tilde{W} \\ \tilde{v} \uparrow & & \uparrow \tilde{w} \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{f_0} & \mathbb{R}^m \end{array}$$

Beweis: z.B. Dieudonne, Foundations of Modern Analysis, Bd. I, Kap. X.3 oder Bröcker/Jänich, Einführung in die Differentialtopologie, §5.

Beispiel 2. Ist das Differential von f lokal injektiv bzw. surjektiv, so ist auch f lokal injektiv bzw. surjektiv.

Beispiel 3. Für $k = m = n$ der folgt daraus der Umkehrsatz.

Kurven und ihre Länge

Definition. (i) Eine (*parametrisierte*) *Kurve* c in einem euklidischen Vektorraum V ist eine stetige Abbildung $c : J \rightarrow V$ eines Intervalls $J \subset \mathbb{R}$.

(ii) Eine differenzierbare Kurve c heißt *regulär*, wenn $\dot{c}(t) \neq 0$ für alle t .

(iii) Ist $c : J \rightarrow V$ eine stetig differenzierbare Kurve, $t_0 \in J$, so heißt die Funktion

$$s(t) := \int_{t_0}^t \|\dot{c}\|$$

die *Bogenlänge der Kurve von t_0 aus*. Gilt $s(t) = t - t_0$ für alle t , so heißt c *nach der Bogenlänge parametrisiert*.

Beispiel 4. Die Funktion $\phi(t) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}} & t > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ ist C^∞ . Die Kurve

$$c : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (\phi(1-t), \phi(t-1))$$

ist in 1 nicht regulär. Ihr Bild hat dort einen Winkel von $\pi/2$.

Bemerkungen

- Parameterinvarianz, Intervall-Additivität.
- Die Voraussetzungen der Definition lassen sich erheblich abschwächen. Die Bogenlänge ist auch definiert für nur stückweise stetig differenzierbare Kurven, allgemeiner für rektifizierbare Kurven.
- c ist nach der Bogenlänge parametrisiert $\Leftrightarrow \|\dot{c}\| = 1$.

Satz 2. (Parametrisierung nach der Bogenlänge) Sei $c : J \rightarrow V$ eine reguläre, stetig differenzierbare Kurve mit der Bogenlängenfunktion $s : J \rightarrow \mathbb{R}$. Dann ist $\dot{s} = \|\dot{c}\| > 0$, also existiert $s^{-1} : s(J) \rightarrow J$, und $\tilde{c} := c \circ s^{-1}$ ist nach der Bogenlänge parametrisiert. Für beliebige differenzierbaren Funktionen f gilt:

$$(f \circ s^{-1})'(s(t)) = \frac{1}{\dot{s}(t)} \frac{df}{dt}(t) = \frac{1}{\|\dot{c}(t)\|} \frac{df}{dt}(t).$$

Deshalb heißt für reguläre Kurven c der Differentialoperator $\frac{d}{ds} = \frac{1}{\|\dot{c}\|} \frac{d}{dt}$ die Ableitung nach der Bogenlänge.

3 Gerahmte Kurven

$c : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ reguläre C^∞ -Kurve, $t_0 \in J$, $\frac{d}{ds} = (\cdot)'$ die zugehörige Ableitung nach der Bogenlänge.

Definition. 1. Ein (differenzierbarer orthogonaler) Rahmen für c ist eine differenzierbare Abbildung $F = (F_1, \dots, F_n) : J \rightarrow SO(n)$ mit $c' = F_1$. Das Paar (c, F) heißt dann eine gerahmte Kurve.

2. Ist (c, F) eine gerahmte Kurve, so heißt die durch

$$F' = FA \tag{1}$$

definierte matrixwertige Funktion A die Ableitungsmatrix oder Zusammenhangsmatrix und (1) die Ableitungsgleichung von (c, F) .

Beachte, daß A die Änderung von F bezüglich F beschreibt:

$$F'_i = a_{1i}F_1 + \dots + a_{ni}F_n.$$

Lemma.

$$A : J \rightarrow \mathfrak{so}(n).$$

Beispiele: 1. $n = 2$. Dann gibt es zu c genau einen Rahmen $F = (c', ic')$, und es ist

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa \\ \kappa & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Funktion $\kappa : J \rightarrow \mathbb{R}$ heißt die *Krümmung* von c .

$$c'' = \kappa ic' \quad \kappa = \langle c'', ic' \rangle.$$

Geraden sind charakterisiert durch $\kappa = 0$, Kreise vom Radius r durch $\kappa = \text{const} = 1/r$.

2. Ein Rahmen für die Schraubenlinie $c(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$. (Frenet-Rahmen)

E.g. Für die Schraubenlinie (Helix) $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto (a \cos t, a \sin t, bt)$ mit $a > 0$ sind die Ableitung nach der Bogenlänge, ein Rahmen F und seine Ableitungsmatrix gegeben wie folgt:

$$\dot{c} = (-a \sin t, a \cos t, b), \quad \|\dot{c}\| = \sqrt{a^2 + b^2} =: \mu, \quad \frac{d}{ds} = \frac{1}{\mu} \frac{d}{dt},$$

$$F = \begin{pmatrix} \frac{-a}{\mu} \sin t & -\cos t & \frac{b}{\mu} \sin t \\ \frac{a}{\mu} \cos t & -\sin t & \frac{-b}{\mu} \cos t \\ \frac{b}{\mu} & 0 & \frac{a}{\mu} \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{ds} F = F \begin{pmatrix} 0 & \frac{-a}{\mu^2} & 0 \\ \frac{a}{\mu^2} & 0 & \frac{-b}{\mu^2} \\ 0 & \frac{b}{\mu^2} & 0 \end{pmatrix}.$$

□

3. $n > 2$. Dann ist die Richtungsänderung in Abhängigkeit von der Bogenlänge

$$(F_1)' = F_2 a_{21} + \dots + F_n a_{n1}. \quad (2)$$

Der Betrag $\kappa = \|(F_1)'\| = \sqrt{a_{21}^2 + \dots + a_{n1}^2} = \frac{1}{\|\dot{c}\|} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\|\dot{c}\|} \frac{dc}{dt} \right)$ heißt die *Krümmung* von c .

4. Eichtransformationen $\tilde{F} = FG$ mit $G : J \rightarrow SO(n)$ und $G e_1 = e_1$. Dann $\tilde{A} = AG + G'$.

5. Paralleler Rahmen:

$$A = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & -a_{21} & \dots & -a_{n1} \\ \hline a_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \dots & 0 \end{array} \right) \quad (3)$$

Für $n = 2$ ist der einzige existierende Rahmen parallel.

Im Fall $n = 3$ definiert man die komplexe Krümmung $\psi := a_{21} + ia_{31}$. Dann ist $|\psi| = \kappa$, und man definiert $\tau := \frac{d}{ds} \arg \psi$ als die *Torsion* von c . (Nur definiert, wo $\kappa \neq 0$. Unabhängig vom parallelen Rahmen. Achtung: Bei do Carmo hat τ entgegengesetztes Vorzeichen!).

6. Paralleler Rahmen für die Schraubenlinie. $\Rightarrow \kappa = \frac{a}{a^2 + b^2}, \tau = \frac{b}{a^2 + b^2}$.

Beweis. Wir betrachten die Schraubenlinie

$$c = (a \cos t, a \sin t, bt)$$

mit dem obigen Rahmen $F = (F_1, F_2, F_3)$. Für diesen gilt

$$F'_2 = \frac{-a}{\mu^2} F_1 + \frac{b}{\mu^2} F_3, \quad F'_3 = \frac{-b}{\mu^2} F_2.$$

Um einen parallelen Rahmen zu finden, untersuchen wir

$$M = \cos \phi F_2 + \sin \phi F_3.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} M' &= -\phi' \sin \phi F_2 + \cos \phi F'_2 + \phi' \cos \phi F_3 + \sin \phi F'_3 \\ &= (-\phi' \sin \phi + \frac{-b}{\mu^2} \sin \phi) F_2 + (\phi' \cos \phi + \frac{b}{\mu^2} \cos \phi) F_3 + \frac{-a}{\mu^2} \cos \phi F_1 \end{aligned}$$

Ist also $\phi' + \frac{b}{\mu^2} = 0$, d.h. $\dot{\phi} = -\frac{b}{\mu}$, so hat M' nur eine c' -Komponente. Wir wählen

$$\phi(t) = -\frac{b}{\mu} t$$

und erhalten mit

$$\begin{aligned} f_1 &= c' \\ f_2 &= \cos \frac{bt}{\mu} F_2 - \sin \frac{bt}{\mu} F_3 \\ f_3 &= \sin \frac{bt}{\mu} F_2 + \cos \frac{bt}{\mu} F_3 \end{aligned}$$

einen parallelen Rahmen. Für diesen gilt:

$$c'' = F'_1 = \frac{-a}{\mu^2} F_2 = \frac{-a}{\mu^2} (\cos \frac{bt}{\mu} f_2 + \sin \frac{bt}{\mu} f_3).$$

Die komplexe Krümmung ist

$$\psi = \frac{-a}{\mu^2} e^{i \frac{bt}{\mu}},$$

und wir erhalten

$$\kappa = |\psi| = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad \tau = \frac{d}{ds} \left(\frac{bt}{\mu} \right) = \frac{1}{\mu} \frac{b}{\mu} = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

□

4 Normalform, Frenetrahmen

Satz 3. (Lokale Normalform) Sei $(c : J \rightarrow \mathbb{R}^3, F)$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte, gerahmte Kurve. Sei $0 \in J$ und F so gewählt, daß

$$F'_1(0) = a_{21}(0)F_2(0), a_{21}(0) \geq 0$$

(konstante Eichtransformation). Weiter sei $\kappa(0) \neq 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} c(s) &= c(0) + F_1(0) \left(s - \frac{\kappa^2(0)}{6} s^3 \right) \\ &\quad + F_2(0) \left(\frac{\kappa(0)}{2} s^2 + \frac{\kappa'(0)}{6} s^3 \right) + F_3(0) \frac{\kappa(0)\tau(0)}{6} s^3 + \text{Rest höherer Ordnung.} \end{aligned}$$

Beweis. Sei o.E. $F = (F_1, F_2, F_3)$ ein paralleler Rahmen, vgl. nächste Vorlesung. Wir bezeichnen die Ableitungsmatrix so, daß

$$F_1' = k_2 F_2 + k_3 F_3.$$

Dann gilt

$$F_1'' = k_2' F_2 + k_2 F_2' + k_3' F_3 + k_3 F_3'$$

und in 0 folgt wegen $k_2 + ik_3 = \kappa e^{i \int \tau}$, $k_3(0) = 0$

$$F_1''(0) = \kappa' F_2 + \kappa(-\kappa F_1) + k_3' F_3|_0.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} k_2' + ik_3' &= \kappa' e^{i \int \tau} + i\kappa\tau e^{i \int \tau} \\ \frac{k_2' + ik_3'}{k_2 + ik_3} &= \frac{\kappa'}{\kappa} + i\tau, \end{aligned}$$

also

$$k_3'(0) = \kappa\tau,$$

und damit

$$F_1''(0) = \kappa'(0)F_2(0) - \kappa^2(0)F_1(0) + \kappa(0)\tau(0)F_3(0).$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} c(s) &= c(0) + c'(0)s + c''(0)\frac{s^2}{2} + c'''(0)\frac{s^3}{6} + \dots \\ &= c(0) + F_1(0)s + F_1'(0)\frac{s^2}{2} + F_1''(0)\frac{s^3}{6} + \dots \\ &= c(0) + F_1(0)\left(s - \frac{\kappa^2(0)}{6}s^3\right) + F_2(0)\left(\frac{\kappa(0)}{2}s^2 + \frac{\kappa'(0)}{6}s^3\right) + F_3(0)\frac{\kappa(0)\tau(0)}{6}s^3 \\ &\quad + \text{Rest höherer Ordnung.} \end{aligned}$$

□

Definition. Sei (c, F) gerahmte Kurve. F heißt *Frenetrahmen*, wenn für alle $j < n$

$$\text{Spann}(F_1, \dots, F_j) = \text{Spann}(\dot{c}, \dots, \overset{(j)}{c})$$

bei gleicher Orientierung. Dann

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa_1 & 0 & \dots & 0 \\ \kappa_1 & 0 & -\kappa_2 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & \kappa_{n-2} & 0 & -\kappa_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & \kappa_{n-1} & 0 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Eine Kurve heißt *Frenetkurve*, wenn sie einen Frenetrahmen besitzt, d.h. wenn ihre ersten $n - 1$ Ableitungen nach der Bogenlänge linear unabhängig sind. Der Frenetrahmen ist dann eindeutig bestimmt: Bis auf den letzten Vektor ist er das Ergebnis des Schmidtschen Orthonormalisierungsprozesses.

Die κ_i heißen die *Frenetkrümmungen* von c . Es ist $\kappa_1 = \kappa$ und $\kappa_j > 0$ für alle $j < n - 1$. Die letzte: κ_{n-1} kann auch nicht-positiv sein.

Beweis für (4). Nach der Definition ist für alle $j < n$

$$F_j = \sum_{i=1}^j \lambda_{ij} \overset{(i)}{c} \quad \text{mit } \lambda_{jj} > 0.$$

Wir setzen für $j < n$

$$L_j := \text{Spann}(F_1, \dots, F_j) = \text{Spann}(\overset{(1)}{c}, \dots, \overset{(j)}{c}).$$

Es folgt für alle $j < n$

$$\overset{(j)}{c} = \frac{1}{\lambda_{jj}} F_j \quad \text{mod } L_{j-1},$$

und daher für alle $j < n - 1$

$$\begin{aligned} F'_j &= \frac{\lambda_{jj}}{\|\dot{c}\|} \overset{(j+1)}{c} \quad \text{mod } L_j \\ &= \underbrace{\frac{\lambda_{jj}}{\|\dot{c}\|} \frac{1}{\lambda_{j+1,j+1}}}_{=:\kappa_j > 0} F_{j+1} \quad \text{mod } L_j. \end{aligned}$$

Daher ist in $A = (a_{ij})$

$$\begin{aligned} a_{j+1,j} &> 0 \quad \text{für } j < n - 1 \\ a_{ij} &= 0 \quad \text{für alle } i > j + 1 < n. \end{aligned}$$

Aus der Schiefsymmetrie folgt die Behauptung. \square

Lemma. Ist F ein Frenetrahmen für $c : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $\tilde{c} = c \circ h : \tilde{J} \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Umparametrisierung von c mit $\frac{dh}{dt} > 0$, so ist $\tilde{F} = F \circ h$ ein Frenetrahmen für \tilde{c} mit Ableitungsmatrix $\tilde{A} = A \circ h$.

Beweis. Wie oben zeigt man durch Induktion, daß für $j < n$

$$\text{Spann}(\overset{(1)}{\tilde{c}}, \dots, \overset{(j)}{\tilde{c}}) = \text{Spann}(\dot{c} \circ h, \dots, \overset{(j)}{c} \circ h)$$

mit gleicher Orientierung. Daraus folgt, daß $\tilde{F} = F \circ h$ ein Frenetrahmen für \tilde{c} ist. Aus der Invarianz der Bogenlänge, d.h. aus

$$\frac{d}{d\tilde{s}}(\tilde{f}) = \frac{1}{\|(c \circ h)\|} \frac{d}{dt}(f \circ h) = \frac{1}{\|(\dot{c} \circ h)\dot{h}\|} (\dot{f} \circ h)\dot{h} = \frac{1}{\|(\dot{c} \circ h)\|} (\dot{f} \circ h) = \frac{df}{ds} \circ h$$

folgt die Behauptung über A :

$$\underbrace{\tilde{F}\tilde{A}}_{=(F \circ h)\tilde{A}} = \frac{d}{d\tilde{s}} \tilde{F} = \frac{dF}{ds} \circ h = (FA) \circ h = (F \circ h)(A \circ h).$$

\square

Beispiele. 1. Im Fall $n = 2$ ist der einzige existierende Rahmen ein Frenetrahmen.

2. $n = 3$. Dann ist

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

wobei κ, τ die Krümmung und Torsion sind.

Beweis. Nach dem Lemma dürfen wir annehmen, daß c nach der Bogenlänge parametrisiert ist. Dann ist

$$\begin{aligned} c' &= F_1 \\ c'' &= F_1' = \kappa F_2 \\ c''' &= \kappa' F_2 + \kappa F_2' = \kappa' F_2 - \kappa F_1 + \tau F_3, \end{aligned}$$

wobei κ, τ die Größen aus (5) sind. Die Taylorentwicklung von c sieht daher genauso aus wie in Satz 1. Daraus folgt die Behauptung. \square

5 Existenz- und Eindeutigkeit, Isoperimetrische Ungleichung

Satz 4. (Lineare Differentialgleichungen) Seien V ein endlich-dimensionaler normierter Vektorraum, $t_0 \in J, y_0 \in V$ und seien $L : J \rightarrow L(V, V)$ und $b : J \rightarrow V$ differenzierbare Abbildungen. Dann gibt es genau eine Lösung $y : J \rightarrow V$ des Anfangswertproblems

$$\dot{y} = Ly + b, \quad y(t_0) = y_0. \quad (6)$$

Für den Beweis vgl. z.B. W. Walter, Gewöhnliche Differentialgleichungen, §14.

Beispiel. Seien $J = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^2$ und $L(t) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}, b(t) = 0$. Dann gibt es genau ein Funktionenpaar (x, y) , definiert auf ganz \mathbb{R} , so daß

$$\begin{aligned} x(0) &= 1, & y(0) &= 0 \\ x' &= -y, & y' &= x. \end{aligned}$$

Welches wohl?

Satz 5. (Hauptsatz über gerahmte Kurven) Seien $A : J \rightarrow so(n)$ differenzierbar, $t_0 \in J, p_0 \in V$ und $F_0 \in SO(n)$. Dann gibt es genau eine nach der Bogenlänge parametrisierte gerahmte Kurve (c, F) mit

$$F' = FA \quad (7)$$

$$c(t_0) = p_0 \quad F(t_0) = F_0. \quad (8)$$

Ohne die Anfangsbedingungen ist (c, F) bis auf eine orientierungstreue Bewegung des \mathbb{R}^n eindeutig bestimmt: Jede Lösung ist von der Form $\tilde{c}(t) = Bc(t) + b, \tilde{F} = BF$ mit $b \in \mathbb{R}^n, B \in SO(n)$.

Korollar 1. Zu vorgegebener Krümmungsfunktion $\kappa : J \rightarrow \mathbb{R}$ gibt es eine bis auf orientierungstreue Bewegung eindeutige nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve in \mathbb{R}^2 mit dieser Krümmung.

Korollar 2. Zu vorgegebener Krümmungs- und Torsionsfunktion $\kappa : J \rightarrow \mathbb{R}^+, \tau : J \rightarrow \mathbb{R}$ gibt es eine bis auf orientierungstreue Bewegung eindeutige nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve in \mathbb{R}^3 mit dieser Krümmung und Torsion.

Satz 6. (Parallelverschiebung im Normalenbündel) Sei $c : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ regulär, $t_0 \in J, v_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $\langle v_0, \dot{c}(t_0) \rangle = 0$. Dann gibt es genau ein $v : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit

$$\langle v, \dot{c} \rangle = 0 \quad (9)$$

$$\dot{v} \in \mathbb{R} \dot{c} \quad (10)$$

$$v(t_0) = v_0. \quad (11)$$

Jedes v mit (3),(4) heißt ein paralleles Normalenfeld längs c .

Beweis. Erfüllt v die Voraussetzungen, so gilt wegen $\langle v, \dot{c} \rangle = 0$

$$\dot{v} = \langle \dot{v}, \dot{c} \rangle \frac{\dot{c}}{\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle} = - \frac{\langle v, \ddot{c} \rangle}{\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle} \dot{c}.$$

Das ist eine lineare Differentialgleichung für v , die für gegebenen Anfangswert v_0 genau eine Lösung besitzt.

Ist umgekehrt v eine Lösung, so folgt

$$\langle v, \dot{c} \rangle = \langle \dot{v}, \dot{c} \rangle + \langle v, \ddot{c} \rangle = - \langle v, \ddot{c} \rangle + \langle v, \ddot{c} \rangle = 0.$$

□

Lemma 1. Sind v_1, v_2 parallele Normalenfelder längs c , so ist $\langle v_1, v_2 \rangle$ konstant.

Korollar 3. Jede reguläre Kurve gestattet parallele Rahmen. Je zwei solche unterscheiden sich durch eine konstante Transformation in $SO(n-1)$ (Drehung um F_1).

Globale Kurventheorie

Definition. Eine (glatt) geschlossene Kurve ist eine differenzierbare Kurve $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ die sich differenzierbar und periodisch mit Periode $b - a$ auf ganz \mathbb{R} fortsetzen läßt. Ein solche heißt *einfach geschlossen*, wenn $c|_{[a, b[}$ injektiv ist.

Satz 7. (Isoperimetrische Ungleichung) Sei c eine einfach geschlossene reguläre Kurve der Länge l im \mathbb{R}^2 , und sei A der Flächeninhalt des von c eingeschlossenen Gebiets. Dann gilt

$$4\pi A \leq l^2,$$

mit Gleichheit genau dann, wenn c ein Kreis ist.

Beweis in der nächsten Vorlesung.

6 Isoperimetrische Ungleichung, Umlaufzahl

Satz 8. (Isoperimetrische Ungleichung) Sei c eine einfach geschlossene reguläre Kurve der Länge l im \mathbb{R}^2 , und sei A der Flächeninhalt des von c eingeschlossenen Gebiets. Dann gilt

$$4\pi A \leq l^2,$$

mit Gleichheit genau dann, wenn c ein Kreis ist.

Bemerkung: Die Existenz „des von c eingeschlossenen Gebiets“ folgt aus dem Jordanschen Kurvensatz. Die implizite Verwendung dieses schwierigen Satzes kann man vermeiden durch eine alternative Formulierung: Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine C^∞ -Abbildung der Einheitskreisscheibe und $c(t) = f(e^{2\pi it/l})$. Dann gilt der Satz für $A = A(f) = \int_D df_1 \wedge df_2$.

Beweis der isoperimetrischen Ungleichung nach E. Schmidt/do Carmo.

Wir benutzen die folgende Flächeninhaltsformel für ebene, von einer positiv durchlaufenen einfach geschlossenen Kurve berandete Bereiche

$$A = \int_B dx \wedge dy = \int_{\partial B} x dy = - \int_{\partial B} y dx = \frac{1}{2} \int_{\partial B} (x dy - y dx). \quad (12)$$

Die ist eine Folgerung aus dem Integralsatz von Stokes.

Sei nun $c = (x, y) : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$ einfach geschlossen, positiv durchlaufen und nach der Bogenlänge parametrisiert. Wir nehmen o.E. an, daß

$$x([0, l]) = [-r, r]. \quad (13)$$

Sei $\tilde{c} = (\tilde{x}, \tilde{y}) : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein positiv durchlaufener Kreis vom Radius r mit $\tilde{x} = x$.

Bemerkung: Warum gibt es das wohl? Warum ist \tilde{y} differenzierbar? Die übliche Argumentation mit Bildchen beantwortet diese Frage nicht wirklich! Für einen exakten Beweis muß man vermutlich folgendes zeigen:

- Man kann annehmen, daß $\{t \in [0, l] \mid x(t) = \pm r\} = \{t_+, t_-\}$ mit $0 < t_+, t_- < l$ und $\kappa(t_\pm) \neq 0$. Hierfür zeigt man, daß $\{c'(t) \mid \kappa(t) \neq 0\}$ eine Nullmenge in S^1 ist. Das ist eine einfache Version des Satzes von Sard, die im wesentlichen auf der gleichmäßigen Stetigkeit von ϕ' beruht, wenn $c' = e^{i\phi}$. Dann gibt es (viele) Tangentenrichtungen mit $\kappa \neq 0$. Man schließt c durch parallele Tangenten in einer solchen Richtung ein, und nach etwas Wackeln kann man überdies annehmen, daß jede von diesen nur einmal berührt.
- In den Berührungspunkten ist nach Konstruktion $x(t_\pm) = \pm r, \dot{x}(t_\pm) = 0$ und deshalb

$$r \mp x(t) = (t - t_\pm)^2 h_\pm(t) \quad (14)$$

mit C^∞ -Funktionen $h_\pm(t_\pm)$, für die $h_\pm > 0$. Deshalb ist auch

$$\tilde{y} = \sqrt{r^2 - x^2} = \sqrt{(r-x)(r+x)} := (t - t_\pm) \sqrt{h_\pm(t)(r \pm x(t))}$$

an diesen Stellen differenzierbar.

Zum Beweis von (14): Ist $f(0) = 0$, so gilt $f(t) = th(t)$ mit der C^∞ -Funktion $h(t) = \int_0^1 f'(st) ds$.

Aus $A = \int_0^l x(t) \dot{y}(t) dt$ und $\pi r^2 = \tilde{A} = - \int_0^l \tilde{y}(t) \dot{x}(t) dt$, vgl. (12), folgt

$$A + \pi r^2 = \int_0^l (x \dot{y} - \tilde{y} \dot{x}) dt \quad (15)$$

$$\leq \int_0^l \sqrt{\tilde{y}^2 + x^2} \underbrace{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}_{=1} dt \quad (16)$$

$$= lr. \quad (17)$$

Aus der Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel folgt

$$\sqrt{A} \sqrt{\pi r^2} \leq \frac{1}{2} (A + \pi r^2) \leq \frac{1}{2} lr, \quad (18)$$

und daraus

$$4\pi A \leq l^2. \quad (19)$$

Nehmen wir Gleichheit an, so folgt Gleichheit in der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung (15). Daher ist

$$(-\tilde{y}, x) = \lambda(\dot{x}, \dot{y}) \text{ für } \lambda > 0. \quad (20)$$

Offenbar ist dann $\lambda = r$, und daher insbesondere

$$x^2 = r^2 \dot{y}^2. \quad (21)$$

Dieselbe Überlegung unter Vertauschung von x und y liefert

$$y^2 = \hat{r}^2 \dot{x}^2. \quad (22)$$

Dabei ist aber $\hat{r} = r$, denn die Gleichheit in (18) impliziert $A = \pi r^2$ und daher $2\pi r = l$, so daß r durch l eindeutig bestimmt ist. Es folgt

$$x^2 + y^2 = r^2(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = r^2, \quad (23)$$

und $c = (x, y)$ beschreibt einen Kreis. \square

Wir benutzen folgenden Satz aus der Analysis (vgl. Forster III, p. 202, oder Barner/Flohr II, p. 336):

Satz (Integrabilitätsbedingung). *Ist $X = (X_1, \dots, X_n)$ ein C^∞ -Vektorfeld auf der offenen und sternförmigen (oder einfach zusammenhängenden) Menge $G \subset \mathbb{R}^n$ mit der Integrabilitätsbedingung*

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_j} = \frac{\partial X_j}{\partial x_i}$$

für alle i, j , so besitzt X ein bis auf eine additive Konstante bestimmtes Potential $\Phi : G \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = X_i.$$

Satz 9. *Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ eine sternförmige Menge und sei $H : G \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ eine C^∞ -Abbildung. Dann gibt es eine C^∞ -Funktion $\Phi : G \rightarrow \mathbb{R}$ mit*

$$H = |H| e^{i\Phi}.$$

Φ heißt eine Argumentfunktion von H . Sie ist eindeutig bestimmt bis auf eine additive Konstante $\in 2\pi\mathbb{Z}$.

Beweis. Einzigkeit mod 2π . Aus

$$e^{i\Phi_1(t)} = H(t)/|H(t)| = e^{i\Phi_2(t)}$$

folgt $\Phi_1(t) = \Phi_2(t) + 2k(t)\pi, k \in \mathbb{Z}$. Sind die Φ_i aber stetige Funktionen, so muß $k(t)$ konstant sein.

Existenz. Wir untersuchen zunächst, welche Eigenschaften Φ hat, falls es existiert. Sei $H = (u, v) = u + iv$ mit $u, v : G \rightarrow \mathbb{R}$. Wir nehmen an, daß es eine Argumentfunktion gibt und wollen die Gleichung $\frac{H}{|H|} = e^{i\Phi}$ differenzieren. Es ist

$$\begin{aligned} \left(\frac{H}{|H|} \right)_x &= \frac{u_x + iv_x}{\sqrt{u^2 + v^2}} - \frac{uu_x + vv_x}{\sqrt{u^2 + v^2}^3} (u + iv) \\ &= \frac{(u_x + iv_x)(u^2 + v^2) - (uu_x + vv_x)(u + iv)}{\sqrt{u^2 + v^2}^3} \\ &= \frac{(u_x v - uv_x)(v - iu)}{\sqrt{u^2 + v^2}^3} = i \frac{uv_x - u_x v}{u^2 + v^2} \frac{u + iv}{\sqrt{u^2 + v^2}} \\ &= i \frac{uv_x - u_x v}{u^2 + v^2} \frac{H}{|H|}. \end{aligned} \quad (24)$$

Andrerseits ist

$$(e^{i\Phi})_x = i\Phi_x e^{i\Phi} = i\Phi_x \frac{H}{|H|}.$$

Daraus ergibt sich Φ_x und entsprechend auch Φ_y . Wir definieren daher

$$X = (X_1, X_2) := \left(\frac{uv_x - vu_x}{u^2 + v^2}, \frac{uv_y - vu_y}{u^2 + v^2} \right).$$

Dann ist

$$\begin{aligned} (X_1)_y &= \frac{(uv_x - vu_x)_y (u^2 + v^2) - (uv_x - vu_x)(u^2 + v^2)_y}{(u^2 + v^2)^2} \\ &= \frac{(u_y v_x - v_y u_x)(u^2 + v^2) - (uv_x - vu_x)(2uu_y + 2vv_y)}{(u^2 + v^2)^2} + \frac{uv_{xy} - vu_{xy}}{u^2 + v^2}, \end{aligned}$$

wobei in S alle gemischten Ableitungen $(\cdot)_{xy}$ stehen. Weiter ist

$$\begin{aligned} (X_1)_y &= \frac{u_y v_x (u^2 + v^2 - 2u^2) - v_y u_x (u^2 + v^2 - 2v^2) - 2uvv_x v_y + 2uvu_x u_y}{(u^2 + v^2)^2} + \frac{uv_{xy} - vu_{xy}}{u^2 + v^2} \\ (X_1)_y &= \frac{u_y v_x (v^2 - u^2) + v_y u_x (v^2 - u^2) - 2uvv_x v_y + 2uvu_x u_y}{(u^2 + v^2)^2} + \frac{uv_{xy} - vu_{xy}}{u^2 + v^2}. \end{aligned}$$

Das ist symmetrisch in den x - und y -Ableitungen. Also ist $(X_1)_y = (X_2)_x$ und X besitzt ein Potential Φ . Wir wählen die additive Konstante von Φ so, daß in einem Punkt $p_0 \in G$ gilt

$$H(p_0) = |H(p_0)| e^{i\Phi(p_0)}.$$

Schließlich zeigen wir, daß $e^{-i\Phi} \frac{H}{|H|}$ verschwindende partielle Ableitungen hat, also konstant ist. Daraus folgt dann die Existenz einer Argumentfunktion. Nach (24) ist

$$\left(e^{-i\Phi} \frac{H}{|H|} \right)_x = e^{-i\Phi} \left(-i\Phi_x + i \frac{uv_x - u_x v}{u^2 + v^2} \right) = 0$$

und ebenso für die y -Ableitung. \square

Korollar 4. Sei $c : J \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ eine C^∞ -Kurve. Dann gibt es eine C^∞ -Funktion $\phi : J \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$c = |c| e^{i\phi}.$$

ϕ heißt eine Argumentfunktion von c und ist bis auf ein additives ganzzahliges Vielfaches von 2π eindeutig bestimmt.

Beweis. Es gibt ein offenes Intervall \tilde{J} mit $J \subset \tilde{J}$ und eine C^∞ -Kurve $\tilde{c} : \tilde{J} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ mit $\tilde{c}|_J = c$. Setze $G = \tilde{J} \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ und $H(x, y) := c(\tilde{x})$. Ist dann Φ eine Argumentfunktion für H , so ist $\phi(t) := \Phi(t, 0), t \in J$, eine solche für c . \square

Definition. Sei $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ eine geschlossene C^∞ -Kurve mit Argumentfunktion ϕ . Dann ist

$$\gamma(c, 0) := \frac{1}{2\pi}(\phi(b) - \phi(a))$$

eine von der Argumentfunktion unabhängige ganze Zahl, die *Umlaufzahl* von c um 0 . Ist $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ geschlossen und $p \notin c([a, b])$, so definiert man $\gamma(c, p) := \gamma(c - p, 0)$.

Bemerkung: In der Funktionentheorie definiert man

$$\gamma(c, 0) := \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{dz}{z} := \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\dot{c}(t)}{c(t)} dt.$$

Ist aber $c = |c|e^{i\phi}$, so folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\dot{c}}{c} dt &= \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \left(\frac{|c|\dot{e}^{i\phi}}{|c|e^{i\phi}} + \frac{i\dot{\phi}|c|e^{i\phi}}{|c|e^{i\phi}} \right) dt = \frac{1}{2\pi i} \left((\ln|c|)_a^b + i \int_a^b \dot{\phi} \right) dt \\ &= 0 + \frac{1}{2\pi}(\phi(b) - \phi(a)). \end{aligned}$$

7 Umlaufsatz von Hopf

Satz 10 (Homotopieinvarianz der Umlaufzahl). Seien $c_0, c_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ zwei in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ homotope geschlossene Wege. D.h. es gebe eine C^∞ -Abbildung

$$H : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

mit folgenden Eigenschaften:

$$H(t, 0) = c_0(t), \quad H(t, 1) = c_1(t) \quad \text{für alle } t, \quad (25)$$

$$H(a, \tau) = H(b, \tau) \quad \text{für alle } \tau. \quad (26)$$

Dann ist $\gamma(c_0, 0) = \gamma(c_1, 0)$

Bemerkung: Es ist wichtig, daß das Bild von H in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ liegt, in \mathbb{R}^2 sind je zwei geschlossene Wege homotop.

Beweis. Ist Φ eine Argumentfunktion für H , so sind $\Phi(\cdot, 0)$ und $\Phi(\cdot, 1)$ Argumentfunktionen für c_0 bzw. c_1 . Wegen (26) gilt $\Phi(b, \tau) - \Phi(a, \tau) \in 2\pi\mathbb{Z}$. Wegen der Stetigkeit dieser Funktion in τ ist sie daher konstant, also

$$\gamma(c_0, 0) = \frac{1}{2\pi}(\Phi(b, 0) - \Phi(a, 0)) = \frac{1}{2\pi}(\Phi(b, 1) - \Phi(a, 1)) = \gamma(c_1, 0).$$

\square

Definition. Sei $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine geschlossene reguläre Kurve. Dann ist auch $\dot{c} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ eine geschlossene Kurve. Ihre Umlaufzahl $\gamma(\dot{c}, 0)$ heißt der (*Tangenten-*) *Rotationsindex* von c .

Lemma 2. Der Rotationsindex von c ist auch gegeben durch $\gamma(c', 0)$. Es gilt

$$\gamma(c', 0) = \frac{1}{2\pi} \int_c \kappa(s) ds := \frac{1}{2\pi} \int_a^b \kappa(t) \|\dot{c}(t)\| dt.$$

Deswegen bezeichnet man $2\pi\gamma(c', 0)$ auch als Totalkrümmung der Kurve.

Beweis. Zunächst liefert

$$H(t, \tau) := \frac{1}{\tau \|\dot{c}\| + 1 - \tau} \dot{c}$$

eine Homotopie von \dot{c} nach c' . Daher sind die Umlaufzahlen gleich.

Weiter sei $c' = e^{i\phi}$. Dann ist $c'' = i\phi' e^{i\phi} = i\phi' c'$. Also ist $\kappa \|\dot{c}\| = \phi' \|\dot{c}\| = \dot{\phi}$ \square

Satz 11 (Hopfscher Umlaufsatz). Der Rotationsindex einer einfach geschlossenen Kurve ist ± 1 .

Beweis. Sei $c(t) = x(t) + iy(t)$, $a \leq t \leq b$ die Kurve. Wir können o.E. annehmen, daß

$$y(a) = \min\{y(t) \mid a \leq t \leq b\},$$

Wir nehmen zur Vereinfachung der Notation an, daß $a = 0$, und setzen die Kurve mit Periode b auf \mathbb{R} fort.

Die auf ganz \mathbb{R}^2 definierte C^∞ -Funktion

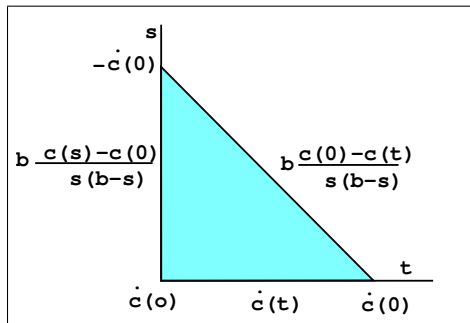
$$H(t, s) := \int_0^1 (\dot{c}(t + sx) - \dot{c}(t + b + (s - b)x)) dx$$

hat für $s \notin \{0, b\}$ den Wert

$$H(t, s) = \frac{c(t+s) - c(t)}{s} - \frac{c(t+s) - c(t+b)}{b-s} = b \frac{c(t+s) - c(t)}{s(b-s)}.$$

Durch Integration oder Grenzwertbildung ergeben sich die weiteren in der Skizze angegebenen Werte von H auf dem Dreieck

$$\Delta := \{(t, s) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq t, s \leq b, s+t \leq b\}$$



Insbesondere ist $H(s, t)$ auf einer offenen sternförmigen Umgebung $G \supset \Delta$ nirgends 0 und besitzt deshalb eine Argumentfunktion Φ . Wegen $H(t, 0) = \dot{c}(t)$ gilt

$$\begin{aligned} \gamma(\dot{c}, 0) &= \frac{1}{2\pi} (\Phi(b, 0) - \Phi(0, 0)) \\ &= \frac{1}{2\pi} (\Phi(b, 0) - \Phi(0, b)) + \frac{1}{2\pi} (\Phi(0, b) - \Phi(0, 0)). \end{aligned}$$

Das ist die Summe der Umlaufzahlen der beiden Sekanten-Wege auf dem linken bzw. rechten Rand des Dreiecks. Diese Sekanten weisen überall nach oben bzw. unten, und in den Endpunkten gehen sie in Tangenten entgegengesetzter Richtung über. Deshalb ist

$$|\Phi(0, b) - \Phi(0, 0)| = \pi,$$

und zwar ist $\Phi(0, b) - \Phi(0, 0) = \pm\pi$ wenn $\dot{x}(0) > 0$ bzw. < 0 . Entsprechend ist auch $\Phi(b, 0) - \Phi(0, b) = \pm\pi$, und daraus folgt die Behauptung. \square

Korollar 5. Für eine einfach geschlossene reguläre Kurve $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ in der Ebene ist die totale Absolutkrümmung $\geq 2\pi$:

$$\int_a^b |\kappa(t)| \cdot |\dot{c}(t)| dt \geq 2\pi.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn κ nicht das Vorzeichen wechselt.

Die Bedingung, daß κ nicht das Vorzeichen wechselt, ist eine von vielen äquivalenten Bedingungen für die *Konvexität* der einfach geschlossenen Kurve. Die folgende Definition der Konvexität ist etwas technisch. Sie drückt aus, daß eine konvexe Kurve in jeder Richtung genau zwei parallele Tangenten hat, zwischen denen sie liegt, und die sie in entgegengesetzter Richtung berührt. Trifft die Kurve eine Tangente noch einmal, so bleibt sie zwischen durch *auf* der Tangente.

Definition. Eine einfach geschlossene reguläre Kurve $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ heißt *konvex*, wenn für alle $t_1 < t_2 \in [a, b]$ gilt:

$$c'(t_1) = c'(t_2) \implies c' \text{ konstant auf } [t_1, t_2] \text{ oder } [a, b] \setminus]t_1, t_2[.$$

Lemma 3. Eine einfach geschlossene reguläre Kurve $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist konvex genau dann, wenn ihre Krümmung nicht das Vorzeichen wechselt.

Beweis. Sei $c'(t) = e^{i\phi(t)}$. Wechselt $\kappa = \phi'$ nicht das Vorzeichen, so ist ϕ monoton und nach dem Hopfschen Satz $\phi(b) - \phi(a) = \pm 2\pi$. Ist $c'(t_1) = c'(t_2)$, also $\phi(t_1) = \phi(t_2)$ für $a \leq t_1 < t_2 < b$, so ist ϕ und damit c' konstant auf $[t_1, t_2]$ oder $[a, b] \setminus]t_1, t_2[$.

Wechselt andererseits κ das Vorzeichen, so ist ϕ nicht monoton, und es gibt $a \leq t_1 < t_2 < b$, so daß ϕ weder auf $[t_1, t_2]$ noch auf seinem Komplement konstant ist. \square

Satz 12 (Vierscheitelsatz). Eine einfach geschlossene reguläre Kurve in der Ebene hat mindestens vier Scheitel, d.h. vier Punkte, in denen die Krümmung stationär ist ($\kappa' = 0$).

Bemerkung: Die oft gemachte Konvexitäts-Voraussetzung vereinfacht den Beweis erheblich, ist aber nicht nötig.

Beweis im konvexen Fall. Sei $c(t) = x(t) + iy(t)$. Falls κ konstant ist, gibt es unendlich viele Scheitel. Andernfalls nehmen wir an, daß c nach der Bogenlänge parametrisiert ist, und daß κ sein Minimum in a und sein Maximum in $t_1 \in]a, b[$ annimmt. Dann nimmt κ' in $]a, t_1[$ positive und in $]t_1, b[$ negative Werte an. Wechselt κ' in einem dieser Intervalle noch einmal das Vorzeichen, so hat es dort *zwei* weitere lokale Extrema, und der Satz ist bewiesen.

Der Einfachheit halber seien $a = 0, b = L$. Wir können weiter annehmen, daß $c(0) = 0$ und $c(t_1)$ auf der x -Achse liegt. Wechselt $y|_{]0, t_1[}$ das Vorzeichen, so liegen mindestens drei Kurvenpunkte auf der x -Achse, und es gibt (Satz von Rolle) drei Kurventangenten parallel zur x -Achse. Dann ist aber c' in zweien davon gleich, und es gibt wegen der Konvexität ein nicht-entartetes Intervall auf dem c' konstant, also $\kappa = 0 = \kappa'$ ist. Damit gibt es unendlich viele Scheitel.

Wir nehmen deshalb an, daß y auf $[0, t_1]$ und ebenso auf $[t_1, L]$ das Vorzeichen nicht wechselt. Wechselt es sogar auf $[0, L]$ das Vorzeichen nicht, so gibt es wieder drei parallele Tangenten und unendlich viele Scheitel. Wir müssen also nur noch den Fall betrachten, daß y insgesamt das Vorzeichen wechselt.

Unter diesen Voraussetzungen zeigen wir daß κ' nicht nur in t_1 das Vorzeichen wechseln kann. Nach der eingangs gemachten Überlegung gibt es dann 4 Scheitel.

Annahme: κ' wechselt nur in t_1 das Vorzeichen. Dann wechselt die Funktion $y\kappa'$ auf $[0, L]$ das Vorzeichen nicht. Aus der Definition der Krümmung

$$(x + iy)'' = i\kappa(x' + iy')$$

folgt

$$x'' = -\kappa y'$$

und damit

$$\int_0^L y\kappa' ds = (y\kappa)|_0^L - \int_0^L y'\kappa ds = 0 + \int_0^L x'' ds = x'(L) - x'(0) = 0.$$

Da aber der Integrand nicht das Vorzeichen wechselt, muß er identisch verschwinden. Es folgt $\kappa' = 0$ auf $[0, t_1]$. Widerspruch. \square

Wir schließen mit einigen Resultaten ohne Beweis zur globalen Kurventheorie.

Satz 13 (W. Fenchel 1929). Sei $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine reguläre glatt geschlossene Kurve. Dann gilt für die totale Absolutkrümmung

$$\int_a^b |\kappa(t)| \cdot \|\dot{c}(t)\| dt \geq 2\pi.$$

Dabei steht das Gleichheitszeichen genau dann, wenn c eine ebene, konvexe, einfach geschlossene Kurve ist.

Satz 14 (I. Fary, 1949, J. Milnor 1950). Für eine verknotete reguläre Kurve $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist

$$\int_a^b \kappa \|\dot{c}\| dt > 4\pi.$$

Eine einfach geschlossene Kurve heißt dabei *unverknotet*, wenn sie sich durch eine C^∞ -differenzierbare Schar *einfach* geschlossener Kurven in einen ebenen Kreis deformieren läßt.

Literatur

W. Fenchel: Über die Krümmung und Windung geschlossener Raumkurven. Math. Ann. 101 (1929), 238-252

I Fary: Sur la courbure totale d'une courbe gauche faisant un noeud, Bull.Soc.Math. France 77 (1949), 128-138

J. Milnor: On the total curvature of knots, Ann. Math. 52 (1950), 248-257

Zum Vierscheitelsatz und seiner Geschichte vergleiche auch

P. Dombrowski: Wege in euklidischen Ebenen, Springer 1999

8 Mannigfaltigkeiten

Sei im folgenden V ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum.

Definition. Eine Teilmenge $M \subset V$ heißt eine (*reguläre*) *m-dimensionale Untermannigfaltigkeit* von V , wenn folgendes gilt: Zu jedem Punkt $p \in M$ gibt es eine offene Umgebung \tilde{V} von p in V , eine offene Teilmenge U in \mathbb{R}^m und einen C^∞ -Diffeomorphismus $u : U \rightarrow \tilde{V} \cap M$.

u heißt eine (lokale) *Parametrisierung* für M . Die Umkehrung $u^{-1} : \tilde{V} \cap M \rightarrow U$ heißt eine (lokale) *Karte* für M .

Wenn wir keinen Bezug auf den umgebenden Raum V nehmen wollen, nennen wir M auch einfach eine *m-dimensionale Mannigfaltigkeit*. Eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit heißt *Fläche*.

Beispiel 5. Die 2-Sphäre $S^2 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ ist eine Fläche im \mathbb{R}^3 . (Verschiedene Parametrisierungen: euklidisch, sphärische Polarkoordinaten.)

Beispiel 6. $M := \{(x, y, z) \mid z \text{ rational}\}$ ist keine reguläre Fläche im \mathbb{R}^3 .

Satz 15 (Gleichungsdefinierte Untermannigfaltigkeiten). Sei

$$F : V \supset G \rightarrow \mathbb{R}$$

eine C^∞ -Abbildung einer offenen Menge G im Vektorraum V , $n := \dim V$, und sei das Differential von F überall vom Rang k . Dann ist für jeden Punkt $a \in F(G) \subset \mathbb{R}$ das Urbild oder Niveau

$$M := F^{-1}(\{a\})$$

eine reguläre $m = n - k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit.

Beweis: Folgt leicht aus dem Rangsatz.

Beispiel 7. Reguläre Quadriken.

Beispiel 8 (Spezielle Orthogonale Gruppe). Betrachtet man im Raum V der n -reihigen quadratischen Matrizen die offene Teilmenge G der Matrizen mit Determinante > 0 und darauf die Abbildung $F : X \mapsto XX^*$, so ist diese von konstantem Rang $\frac{n(n+1)}{2}$. Also ist

$$SO(n) = F^{-1}(\{E\}) = \{A \mid AA^* = E, \det A > 0\}$$

eine $n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$ -dimensionale Mannigfaltigkeit.

9 Mannigfaltigkeiten, differenzierbare Abbildungen

Zunächst noch ein nicht-triviales und zwei ganz triviale Beispiele von Mannigfaltigkeiten:

Beispiel 9 (Relle projektive Räume). Sei V ein $(n+1)$ -dimensionaler Euklidischer Vektorraum und sei

$$P(V) := \{P \in \text{End}(V) \mid P^* = P, P^2 = P \text{ und } \text{Rang } P = 1\}.$$

Das ist also die Menge der Orthogonalprojektionen auf Geraden in V . Die Abbildung $F(P) := P^2 - P$ oder auch ihre Einschränkung auf den Vektorraum der selbstadjungierten Endomorphismen von V ist in einer Umgebung von $P(V)$ nicht von konstantem Rang. Trotzdem ist $P(V)$ eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit, der projektive Raum von V . Man nennt $P(\mathbb{R}^{n+1}) =: \mathbb{R}P^n$ den n -dimensionalen reellen projektiven Raum.

Beweis. Wir konstruieren eine Parametrisierung einer Umgebung von $P_0 \in P(V)$. Sei

$$P(v) = v, \quad \langle v, v \rangle = 1.$$

Sei $G := \{A \in \text{End}(V) \mid \langle Av, v \rangle > 0\}$ und $U := (\mathbb{R}v)^\perp$. Wir zeigen, daß $G \cap P(V)$ diffeomorph zu U , also diffeomorph zu \mathbb{R}^n ist. Beachte dabei:

- Die Orthogonalprojektion auf die Richtung von $v \neq 0$ ist gegeben durch

$$P = \frac{\langle v, \cdot \rangle}{\langle v, v \rangle} v.$$

- Ist P eine Orthogonalprojektion auf eine Gerade, so liegt Pv (trivialerweise) in dieser Geraden.

Wir definieren $u : U \rightarrow \text{End}(V)$ und $\tilde{x} : G \rightarrow U$ durch

$$u(z) := \frac{\langle v+z, \cdot \rangle}{\langle v+z, v+z \rangle} (v+z), \quad \tilde{x}(A) := \frac{Av}{\langle Av, v \rangle} - v.$$

Das sind offensichtlich differenzierbare Abbildungen. Ist $A = P = \langle w, \cdot \rangle w$ mit $\langle w, w \rangle = 1$ und $\langle Av, v \rangle = \langle w, v \rangle^2 > 0$, so ist

$$u(\tilde{x}(A)) = \frac{\langle \frac{\langle w, v \rangle w}{\langle w, v \rangle^2}, \cdot \rangle}{\langle \frac{\langle w, v \rangle w}{\langle w, v \rangle^2}, \frac{\langle w, v \rangle w}{\langle w, v \rangle^2} \rangle} \frac{\langle w, v \rangle w}{\langle w, v \rangle^2} = \langle w, \cdot \rangle w = A.$$

Umgekehrt gilt

$$\tilde{x}(u(z)) = \frac{\frac{\langle v+z, v \rangle}{\langle v+z, v+z \rangle} (v+z)}{\langle \frac{\langle v+z, v \rangle}{\langle v+z, v+z \rangle} (v+z), v \rangle} - v = \tilde{x}(u(z)) = \frac{v+z}{\langle v+z, v \rangle} - v = z.$$

Deshalb ist u ein Diffeomorphismus von U auf $G \cap P(V)$. \square

Beispiel 10 (Trivial, aber wichtig). Jede offene Teilmenge einer m -dimensionalen Mannigfaltigkeit (in der Spurtopologie vom umgebenden Vektorraum V) ist eine m -dimensionale Mannigfaltigkeit. Deswegen können wir uns bei der folgenden Definition auf Abbildungen beschränken, die auf der *ganzen* Mannigfaltigkeit definiert sind.

Beispiel 11 (Noch trivialer...). Der \mathbb{R}^m ist eine m -dimensionale Mannigfaltigkeit. Deshalb brauchen wir bei der folgenden Definition z.B. nicht zwischen reellwertigen Funktionen und Abbildungen in Mannigfaltigkeiten zu unterscheiden.

Definition. Sei $f : M_1 \rightarrow M_2$ eine Abbildung zwischen zwei Mannigfaltigkeiten, $M_1 \subset V_1, M_2 \subset V_2$. Dann heißt f differenzierbar, wenn f betrachtet als Abbildung in den Vektorraum V_2 differenzierbar ist.

Zur Erinnerung: Das bedeutet, daß es um jeden Punkt von M_1 eine offene Umgebung $G \subset V_1$ und eine differenzierbare Abbildung $\tilde{f} : G \rightarrow V_2$ gibt so daß $\tilde{f}|_{M_1 \cap G} = f|_{M_1 \cap G}$ ist. Hieraus folgt

Lemma 4 (Kettenregel 1. Teil). Die Komposition differenzierbarer Abbildungen ist differenzierbar.

Beispiel 12. Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Mannigfaltigkeit und $F : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenzierbar auf einer offenen Umgebung G von M , so ist $f := F|_M$ differenzierbar. Z. B. ist die „Höhenfunktion“ $(x, y, z) \mapsto z$ auf jeder Fläche S im \mathbb{R}^3 differenzierbar.

Beispiel 13. Die Antipodenabbildung $S^n \rightarrow S^n, x \mapsto -x$ ist differenzierbar.

Beispiel 14. Ist $u : \mathbb{R}^n \supset U \rightarrow M$ eine Parametrisierung einer Mannigfaltigkeit $M \subset V$, so ist $u^{-1} : u(U) \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenzierbar.

Beispiel 15. Sind M, M_0 zwei m -dimensionale Untermannigfaltigkeiten von V und $M_0 \subset M$, so ist M_0 eine offene Teilmenge von M .

Beweis. Sei $p \in M_0$ und seien u, u_0 zwei Parametrisierungen von Umgebungen $G_0 \cap M_0, G \cap M$ von p . Dann ist

$$u_0 = u \circ (u^{-1} \circ u_0) : u_0^{-1}(G \cap M) \rightarrow V$$

vom Rang m , also ist auch

$$u^{-1} \circ u_0 : u_0^{-1}(G \cap M) \rightarrow \mathbb{R}^m$$

vom Rang m . Nach dem Umkehrsatz ist deshalb

$$u^{-1} \circ u_0(u_0^{-1}(G \cap M)) = u^{-1}(G_0 \cap G \cap M_0)$$

offen in \mathbb{R}^m und $G_0 \cap G \cap M_0 = u(u^{-1}(G_0 \cap G \cap M_0))$ offen in M , denn Diffeomorphismen sind insbesondere Homöomorphismen. \square

Beispiel 16. Eine differenzierbare Abbildung $\mathbb{R} \supset J \rightarrow M$ eines Intervalls in eine Mannigfaltigkeit M heißt eine differenzierbare *Kurve* in M .

Beispiel 17. Die Abbildung $\exp : so(n) \rightarrow SO(n), A \mapsto \exp(A) = \sum \frac{1}{k!} A^k$ ist differenzierbar.

Lemma 5. Sei $f : M_1 \rightarrow M_2$ eine stetige Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten der Dimensionen m_1, m_2 . Dann sind äquivalent:

(i) f ist differenzierbar.

(ii) Zu jedem Punkt $p_1 \in M_1$ gibt es Parametrisierungen $u_1 : U_1 \rightarrow M_1$ für M_1 um p_1 und $u_2 : U_2 \rightarrow M_2$ für M_2 um $p_2 = f(p_1)$, so daß

$$u_2^{-1} \circ f \circ u_1 : \mathbb{R}^{m_1} \supset u_1^{-1}(f^{-1}(u_2(U_2))) \rightarrow \mathbb{R}^{m_2}$$

differenzierbar ist.

(iii) Für alle Parametrisierungen $u_i : U_i \rightarrow M_i$ ist die vorstehende Komposition differenzierbar.

Beweis. (i) \implies (iii). Folgt aus der Kettenregel.

(iii) \implies (ii). Trivial.

(ii) \implies (i). Wir müssen zeigen, daß sich f lokal um $p \in M_1$ zu einer differenzierbaren Abbildung von einer offenen Menge des V_1 in V_2 erweitern läßt. Da $x = u_1^{-1}$ differenzierbar ist, gibt es eine offene Umgebung \tilde{G} von p in V_1 und ein differenzierbares $\tilde{x} : \tilde{G} \rightarrow \mathbb{R}^{m_1}$ mit $\tilde{x}|_{\tilde{G} \cap M_1} = u_1^{-1}|_{\tilde{G} \cap M_1}$. Folglich ist

$$\tilde{f} := u_2 \circ (u_2^{-1} \circ f \circ u_1) \circ \tilde{x}$$

nach Analysis differenzierbar auf der offenen Menge

$$G := \tilde{x}^{-1}(u_2^{-1}(f^{-1}(u_2(U)))) \ni p.$$

Hier benutzen wir die Stetigkeit von f . Schließlich gilt

$$\tilde{f}|_{G \cap M_1} = f \circ u_1 \circ \tilde{x}|_{G \cap M_1} = f \circ u_1 \circ u_1^{-1}|_{G \cap M_1} = f|_{G \cap M_1}.$$

□

10 Tangentialraum, Differential

Die folgenden Lemmata bereiten die Definition des Tangentialraums vor, zumindest das erste ist aber auch für sich interessant.

Lemma 6. *Seien M eine m -dimensionale Untermannigfaltigkeit von V , $p \in M$. Dann gibt es eine offene Umgebung G von p in V und eine differenzierbare Abbildung $F : V \supset G \rightarrow W$ vom Rang $\dim V - m$ in einen Vektorraum W , so daß $M \cap G = F^{-1}(\{0\})$. (Jede Untermannigfaltigkeit ist lokal gleichungsdefiniert.)*

Beweis. Sei $u : \mathbb{R}^m \supset U \rightarrow M$ eine Parametrisierung um p mit $u(q) = p$. Wir nehmen der Einfachheit halber an, daß wir auf V ein euklidisches Produkt haben und setzen $W := (d_q u(\mathbb{R}^m))^\perp$. Weiter sei $\tilde{x} : G \rightarrow \mathbb{R}^m$ differenzierbar auf einer offenen Umgebung G von p in V mit $\tilde{x}|_{G \cap M} = u^{-1}|_{G \cap M}$.

Wir bezeichnen mit $(\cdot)^\perp : V \rightarrow W$ die Orthogonalprojektion und definieren

$$F : V \supset G \rightarrow W, \quad v \mapsto (v - u(\tilde{x}(v)))^\perp.$$

Offenbar ist $F|_{G \cap M} = 0$, aber $F^{-1}(\{0\}) \subset G \cap M$ ist nicht so klar und vielleicht auch falsch. Aber

$$d_p F(z) = (z - d_q u(d_p \tilde{x}(v)))^\perp = z^\perp.$$

Daher ist $d_p F$ surjektiv auf W und aus Stetigkeitsgründen gilt das nach eventueller Verkleinerung von G für alle $d_v F, v \in G$. Damit ist F von konstantem Rang und $F^{-1}(\{0\})$ eine Untermannigfaltigkeit der Dimension m , die $M \cap G$ enthält. Daraus folgt, vgl. Beispiel 15, daß $G \cap M = F^{-1}(\{0\})$ nach eventueller Verkleinerung von G . □

Lemma 7. Seien p ein Punkt einer m -dimensionalen Mannigfaltigkeit $M \subset V$, $u : \mathbb{R}^m \supset U \rightarrow M$ eine Parametrisierung um p und $F : G \rightarrow W$ eine Abbildung von konstantem Rang $\dim V - m$ auf einer offenen Umgebung G von M , so daß $M \cap V = F^{-1}(\{0\})$, vgl. auch Lemma 6. Dann gilt mit $q = u^{-1}(p)$

$$d_q u(\mathbb{R}^m) = \text{Kern } d_p F.$$

Beweis. Weil $F \circ u = 0$, ist $d_q u(\mathbb{R}^m) \subset \text{Kern } d_p F$. Die Gleichheit folgt dann aus Dimensionsgründen. \square

Definition. Seien p ein Punkt einer m -dimensionalen Mannigfaltigkeit $M \subset V$ und $u : U \rightarrow M$ eine Parametrisierung um p . Sei $q = u^{-1}(p)$. Dann heißt

$$T_p M = \{(p, v) | v \in d_q u(\mathbb{R}^m)\} \subset M \times V$$

der *Tangentialraum* von M (oder an M) in p . Unabhängig von der Wahl von u wegen der Lemmas 6, 7. Die kanonische Bijektion $T_p M \cong d_q u(\mathbb{R}^m)$ macht $T_p M$ zu einem m -dimensionalen Vektorraum.

Ist $M = F^{-1}(\{0\})$ gleichungsdefiniert durch eine Abbildung F von konstantem Rang, so ist

$$T_p M = \{(p, v) | d_p F(v) = 0\}.$$

Verkürzt kann man sagen:

$$M = F^{-1}(\{0\}) \implies T_p M = (d_p F)^{-1}(\{0\}).$$

Beispiel 18. (i) $T_p S^2 = \{p\} \times p^\perp$.

(ii) Tangentialraum vom Kegel $K : x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ in $p \neq 0$

$$T_p K = \{(p, v) | p_1 v_1 + p_2 v_2 - p_3 v_3 = 0\}$$

(iii) $T_A SO(n) = \{(A, X) | AX^* + XA^* = 0\} = \{(A, YA) | Y \in so(n)\}$

(iv) $T_p M = \{(p, v) | v = \dot{c}(0)\}$ für eine Kurve $c : J \rightarrow M$ mit $c(0) = p$.

Beweis. Sei $u : \mathbb{R}^m \supset U \rightarrow M$ eine Parametrisierung um p mit $u(q) = p$. Sei $w \in \mathbb{R}^m$ und $c(t) := u(q + tw)$. Dann ist

$$\dot{c}(0) = d_q u(w).$$

\square

Definition. Seien $f : V_1 \supset M_1 \rightarrow M_2 \subset V_2$ eine differenzierbare Abbildung und $p \in M_1$. Dann ist das *Differential* von f in p eine lineare Abbildung

$$d_p f = f_{*|p} : T_p M_1 \rightarrow T_{f(p)} M_2,$$

die wie folgt definiert ist: Sei $\tilde{f} : V_1 \supset G \rightarrow V_2$ differenzierbar auf einer offenen Umgebung G von p in V_1 mit $\tilde{f}|G \cap M_1 = f|G \cap M_1$. Dann sei

$$d_p f((p, v)) := (f(p), d_p \tilde{f}(v)).$$

Unabhängig von der Wahl von \tilde{f} .

Beweis. Sei $v = d_q u(w)$. Dann ist

$$\begin{aligned} d_p f((p, v)) &= (f(p), d_p \tilde{f}(v)) = (f(p), d_p \tilde{f}(d_q u(w))) \\ &= (f(p), d_q(\tilde{f} \circ u)(w)) = (f(p), d_q(f \circ u)(w)). \end{aligned}$$

□

Es gelten die üblichen Rechenregeln für differenzierbare Abbildungen, insbesondere die Kettenregel.

Wichtige Bemerkung. Ist $M = \mathbb{R}^m$, so ist

$$T_p M = \{p\} \times \mathbb{R}^m.$$

Ist $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenzierbar, so ist das hier definierte Differential eine lineare Abbildung

$$d_p f : \{p\} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \{f(p)\} \times \mathbb{R}^n.$$

Läßt man $\{p\}$ und $\{f(p)\}$ einfach weg, so erhält man das Differential aus der Analysis

$$d_p f = D_p f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Und man läßt deshalb wirklich die Punkte gern weg, identifiziert also auf die offensichtliche Weise $T_p \mathbb{R}^m$ mit \mathbb{R}^m . Ebenso identifiziert man $T_p M$ für eine Untermannigfaltigkeit $M \subset V$ oft mit dem entsprechenden linearen Unterraum von V . Zum Beispiel sagt man

$$T_p S^2 = p^\perp$$

statt $\{p\} \times p^\perp$.

Davon macht man in der folgenden Definition Gebrauch:

Definition. Für $X \in T_p M$ und eine differenzierbare Funktion $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$ sei die Richtungsableitung definiert durch

$$X \cdot \phi := d_p \phi(X) \in \mathbb{R}$$

und nicht $\in T_{\phi(p)} \mathbb{R}$. Ebenso für vektorwertiges ϕ .

Beispiel 19 (Gaußsche Basis). Sei $u : \mathbb{R}^m \supset U \rightarrow M$ eine Parametrisierung für M . Sei $x := u^{-1} : u(U) \rightarrow \mathbb{R}^m$ die zugehörige Karte. Bezeichne $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m$ die kanonische Basis des \mathbb{R}^m . Dann ist für alle $p \in u(U)$ und $q := x(p)$

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_1} \right|_p = (p, d_q u(\mathbf{e}_1)), \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x_m} \right|_p = (p, d_q u(\mathbf{e}_m))$$

eine Basis des Tangentialraums $T_p M$, die sogenannte Gaußsche Basis der Karte x . Die Notation erklärt sich so:

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p \cdot \phi = d_p \phi((p, d_{x(p)} u(\mathbf{e}_i))) = d_{x(p)}(\phi \circ u)(\mathbf{e}_i) = \frac{\partial(\phi \circ u)}{\partial x_i}(x(p)).$$

Die Komponenten x_1, \dots, x_m von x sind reellwertige Funktionen auf $u(U)$ und $d_p x_1, \dots, d_p x_m$ ist die zur obigen duale Basis. Also ist für $X \in T_p M$

$$X = \sum_j d_p x_j(X) \left. \frac{\partial}{\partial x_j} \right|_p.$$

Sind x, y Karten für M_1, M_2 um p bzw. $f(p)$ und ist $f : M_1 \rightarrow M_2$ differenzierbar, so hat man Basen $(\frac{\partial}{\partial x_j}|_p)$ für $T_p M_1$ und $(\frac{\partial}{\partial y_i}|_{f(p)})$ für $T_{f(p)} M_2$. Die Matrix von $d_p f : T_p M_1 \rightarrow T_{f(p)} M_2$ bezüglich dieser Basen ist

$$(\partial_j(y_i \circ f \circ x^{-1})|_{x(p)})_{i,j}.$$

Beweis.

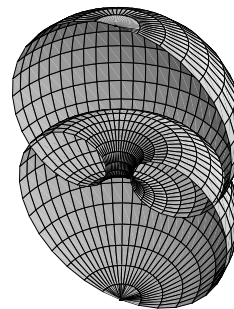
$$\begin{aligned} d_p f \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p \right) &= \sum_i d_{f(p)} y_i \left(d_p f \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p \right) \right) \frac{\partial}{\partial y_i} \Big|_{f(p)} \\ &= \sum_i d_p (y_i \circ f) \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p \right) \frac{\partial}{\partial y_i} \Big|_{f(p)} \\ &= \sum_i d_p (y_i \circ f) (d_{x(p)} u(e_j)) \frac{\partial}{\partial y_i} \Big|_{f(p)} \\ &= \sum_i \partial_j (y_i \circ f \circ x^{-1})|_{x(p)} \frac{\partial}{\partial y_i} \Big|_{f(p)} \end{aligned}$$

□

11 Immersionen

Wir wenden uns nun der Geometrie von Mannigfaltigkeiten im Euklidischen Raum zu. Wir betrachten Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n und die auf ihnen von der Euklidischen Metrik induzierte Struktur, z. B. die Längenmessung von Kurven in einer Fläche.

Gelegentlich wollen wir allerdings auch Untermannigfaltigkeiten mit Selbstdurchdringungen betrachten. Diese sind aber im strengen Sinne eben *keine* Untermannigfaltigkeiten. Wir lösen dies Problem ähnlich wie bei den Kurven: Wir betrachten eine (Unter-)mannigfaltigkeit M eines nur als „Hintergrund“ von M nicht interessierenden Vektorraumes V zusammen mit einer „regulären“ Abbildung, einer sogenannten Immersion $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$.



Wir interessieren uns gewissermaßen für das Bild $f(M)$ zusammen mit der durch f vermittelten „Parametrisierung“. Doppelpunkte in $f(M)$ kann man mit f in zwei Urbildpunkte auflösen und wirklich als zwei Punkte behandeln.

Definition. Sei $f : M_1 \rightarrow M_2$ eine differenzierbare Abbildung von Mannigfaltigkeiten.

Ist $d_p f : T_p M_1 \rightarrow T_{f(p)} M_2$ für alle $p \in M_1$ injektiv bzw. surjektiv, so heißt f eine *Immersion* bzw. *Submersion*.

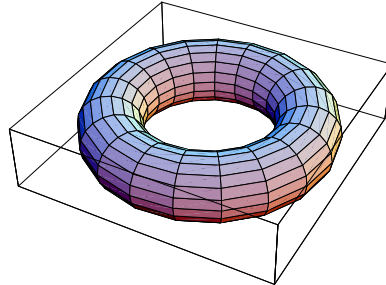
Beispiel 20. Die Inklusionsabbildung $\iota : M \subset V$ einer Untermannigfaltigkeit ist eine Immersion.

Beispiel 21. $T^2 := \{(x_1, \dots, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3^2 + x_4^2 = 1\}$ ist eine

2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^4 , der 2-dimensionale Torus. Für $0 < b < a$ ist

$$f : (x_1, \dots, x_4) \mapsto ((a + bx_3)x_1, (a + bx_3)x_2, bx_4)$$

eine Immersion von T^2 in den \mathbb{R}^3 . f ist überdies injektiv.

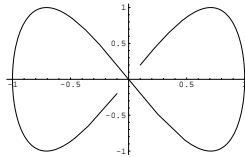


Beispiel 22. Die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4, (\theta, \phi) \mapsto (\cos \theta, \sin \theta, \cos \phi, \sin \phi)$$

ist eine Immersion des \mathbb{R}^2 in \mathbb{R}^4 und eine Immersion und eine Submersion in T^2 .

Beispiel 23. Die Abbildung $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (\sin t, \sin 2t)$ ist eine Immersion, die \mathbb{R} auf eine Acht abbildet. Die Einschränkung $f|_{]0, 2\pi[}$ ist eine injektive Immersion mit demselben Bild.



Satz. Sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine injektive und eigentliche Immersion. Dann ist $f(M)$ eine Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n .

Beweis. Wir zeigen zunächst:

Ist $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ injektiv, stetig und eigentlich, so gibt es zu jedem $p \in M$ und jeder Umgebung A von p eine Umgebung B von $f(p)$ im \mathbb{R}^n , so daß $f(M \setminus A) \cap B = \emptyset$. (27)

Für $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sei B_k die abgeschlossene Kugel vom Radius $\frac{1}{k}$ um $f(p)$. Es genügt zu zeigen, daß $f(M \setminus A) \cap B_k = \emptyset$ für ein k . Andernfalls gibt es eine Folge (p_k) in $M \setminus A$ mit $f(p_k) \in B_k$, also $f(p_k) \rightarrow f(p)$. Weil $\{p_k \mid k > 0\} \subset f^{-1}(B_1)$, und diese Menge kompakt ist (Eigentlichkeit von f), können wir o.E. annehmen, daß $p_k \rightarrow q \in M$. Wegen der Stetigkeit von f folgt $f(q) = \lim f(p_k) = f(p)$, und wegen der Injektivität $p = q$. Das widerspricht $\{p_k \mid k > 0\} \in M \setminus A$ und (27) ist bewiesen.

Seien nun $p \in M$ und $u : U \rightarrow M$ eine Parametrisierung um p . Dann ist

$$f \circ u : U \rightarrow \mathbb{R}^n$$

von konstantem Rang m . Nach dem Rangsatz gibt es daher einen Diffeomorphismus $v : \mathbb{R}^n \supset G \rightarrow \mathbb{R}^n$ auf eine offene Teilmenge des \mathbb{R}^n , so daß

$$v^{-1} \circ f \circ u : U \rightarrow \mathbb{R}^n, (x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0).$$

(Beachte: Nach dem Rangsatz müßte man eigentlich u noch mit einem Diffeomorphismus komponieren, aber das liefert wieder eine Parametrisierung, so daß o.E. schon u das Gewünschte leistet.) Also ist

$$v|_{U \times 0} : U \times 0 \rightarrow f(u(U))$$

ein Diffeomorphismus. Weil aber $U \times 0 \cong U \subset \mathbb{R}^m$, sind wir fertig, falls

$$f(u(U)) = f(M) \cap v(G).$$

Andernfalls wähle B zu $A = u(U)$ wie in (27) und setze $U_0 := (U \times 0) \cap v^{-1}(B)$. Wir können annehmen, daß $B \subset v(G)$. Dann ist

$$v|_{U_0} : U_0 \rightarrow f(u(U)) \cap B$$

ein Diffeomorphismus. Wegen (27) ist

$$f(u(U)) \cap B = f(M) \cap B,$$

und dies ist eine offene Umgebung von $f(p)$ in $f(M)$. □

12 1. Fundamentalform, Vektorfelder

Definition. Sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Immersion. Für $p \in M$ und $v, w \in T_p M$ definiere

$$\langle v, w \rangle_p := \langle v \cdot f, w \cdot f \rangle,$$

wobei die spitze Klammer rechts das übliche Skalarprodukt auf dem \mathbb{R}^n bezeichnet. Beachte: $v \cdot f \in \mathbb{R}^n$ ist der $d_p f(v) \in T_{f(p)} \mathbb{R}^n$ entsprechende Vektor. Die so definierte Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ heißt *die 1. Fundamentalform von f* oder *die von f induzierte (Riemannsche) Metrik* an der Stelle p . Gelegentlich wird sie auch als

$$f^* \langle v, w \rangle_p$$

notiert, um die Abhängigkeit von f zu unterstreichen.

Die 1. Fundamentalform macht $T_p M$ zu einem euklidischen Vektorraum, erlaubt also Längen- und Winkelmessung für Tangentialvektoren. Z.B. ist die Länge einer Kurve $c : \mathbb{R} \supset [a, b] \rightarrow M$ gegeben durch

$$L(c) := \int_a^b \sqrt{\langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle_{c(t)}} dt.$$

Lokale Beschreibung. Seien $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Immersion und $x : M \supset U \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Karte für M mit den Gaußschen Basisvektoren $\frac{\partial}{\partial x_i}$. Dann ist die 1. Fundamentalform von f in $p \in U$ eindeutig bestimmt durch die (symmetrische, positiv-definite) Matrix

$$\left(\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p \right\rangle_p \right) = \left(\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \cdot f, \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p \cdot f \right\rangle \right).$$

Im Fall der Flächen $m = 2$ bezeichnet man diese Matrix traditionell mit

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix},$$

im allgemeinen mit (g_{ij}) . E, F, G bzw. g_{ij} heißen die Koeffizienten der 1. Fundamentalform bezüglich der Karte x . Sie sind offensichtlich differenzierbare Funktionen.

Beispiel 24. Für die 1. Fundamentalform der stereographischen Projektion $\sigma : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\sigma(x, y) = \frac{(2x, 2y, -1 + x^2 + y^2)}{1 + x^2 + y^2}$$

bezüglich der trivialen Karte des \mathbb{R}^2 erhält man (vgl.Übungen):

$$E = G = \frac{4}{(1 + x^2 + y^2)^2}, F = 0, \quad \text{also} \quad \langle v, w \rangle_{(x,y)} = \frac{4}{(1 + x^2 + y^2)^2} \langle v, w \rangle_{\mathbb{R}^2}.$$

(Konforme Parametrisierung der Sphäre). Die Länge der x -Achse bezüglich der 1. Fundamentalform ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{1 + x^2} dx = 2 \arctan x \Big|_{-\infty}^{\infty} = 2\pi.$$

Definition (Tangentialbündel). Ist M eine Mannigfaltigkeit, so heißt die (disjunkte) Vereinigung $TM := \bigcup_{p \in M} T_p M$ das *Tangentialbündel von M* . Die Abbildung $\pi_M : TM \rightarrow M, (p, v) \mapsto p$ heißt *die kanonische Projektion von TM* oder *die Fußpunktabbildung*.

Bemerkung. TM ist eine $2m$ -dimensionale Mannigfaltigkeit. Ist M lokal durch $F : V \supset G \rightarrow W$ definiert, so ist TM lokal durch

$$\tilde{F} : G \times V \rightarrow W \times W, (p, v) \mapsto (F(p), d_p F(v))$$

definiert. Beachte dazu, daß

$$d_{(p,v)} \tilde{F}(x, y) = (d_p F(x), d_p^2 F(x, v) + d_p F(y)).$$

Also ist $\ker d_{(p,v)} \tilde{F} = \ker d_p F \times \ker d_p F$ und $\text{Rang } d_{(p,v)} \tilde{F} = 2 \text{Rang } d_p F$. Auch Karten für TM lassen sich angeben: Ist $x : M \supset G \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Karte für M , so ist

$$\begin{aligned} \tilde{x} : TM \supset \pi^{-1}(G) &\rightarrow \mathbb{R}^{2m} \\ (p, v) &\mapsto (x(p), d_p x((p, v))) \end{aligned}$$

□

eine Karte für TM .

Definition (Vektorfelder). (i) Sei $M \subset V$ eine Mannigfaltigkeit. Eine Abbildung $X : M \rightarrow TM \subset V \times V$ heißt ein *Vektorfeld*, wenn

$$\pi \circ X = id.$$

X heißt differenzierbar, wenn es als Abbildung in $V \times V$ differenzierbar ist.

(ii) Sei $f : V_1 \supset M_1 \rightarrow M_2 \subset V_2$ eine differenzierbare Abbildung. Eine Abbildung $X : M_1 \rightarrow TM_2$ heißt ein *Vektorfeld längs f* , wenn

$$\pi_{M_2} \circ X = f.$$

X heißt differenzierbar, wenn es als Abbildung in $V_2 \times V_2$ differenzierbar ist.

Beispiel 25. (i) Auf dem \mathbb{R}^n sind die $\frac{\partial}{\partial x_i} : p \mapsto (p, \mathbf{e}_i)$ differenzierbare Vektorfelder.

- (ii) Sei $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ Karte für M . Dann sind die $\frac{\partial}{\partial x_i}$ differenzierbare Vektorfelder auf $U \subset M$.

Lokale Darstellung.

- (i) Sei X ein Vektorfeld auf M und $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Karte für M . Dann gilt auf U

$$X = \sum_i X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

mit Funktionen $X_i : M \rightarrow \mathbb{R}$. X ist genau dann differenzierbar, wenn für alle Karten x die X_i differenzierbar sind.

- (ii) Sei $X : M_1 \rightarrow TM_2$ ein Vektorfeld längs $f : M_1 \rightarrow M_2$, und sei $y : V \rightarrow \mathbb{R}^{m_2}$ eine Karte für M_2 . Dann hat man auf $f^{-1}(V)$

$$X = \sum_1^{m_2} X_i \frac{\partial}{\partial y_i} |_f$$

mit Funktionen $X_i : f^{-1}(V) \rightarrow \mathbb{R}$. X ist genau dann differenzierbar, wenn für alle Karten y die X_i differenzierbar sind.

Beispiel 26. (i) Sind das Vektorfeld X auf M_1 und die Abbildung $f : M_1 \rightarrow M_2$ differenzierbar, so ist

$$df(X) : p \mapsto d_p f(X_p)$$

ein differenzierbares Vektorfeld längs f .

- (ii) Ist (c, F) eine gerahmte Kurve im \mathbb{R}^n , so sind die F_i Vektorfelder längs c .
- (iii) Auf S^3 ist $X : (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (-x_2, x_1, -x_4, x_3)$ ein differenzierbares Vektorfeld, das nirgends verschwindet. Auf gerad-dimensionalen Sphären gibt es so etwas nicht.
- (iv) Ist $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Immersion mit 1. Fundamentalform $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und sind X, Y differenzierbare Vektorfelder auf M , so ist

$$\langle X, Y \rangle : M \rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto \langle X_p, Y_p \rangle_p$$

eine differenzierbare Funktion.

Lemma 8. Seien $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Immersion und $X : M \rightarrow T\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$ ein differenzierbares Vektorfeld längs f . Für $p \in M$ bezeichne $\tau_p : \mathbb{R}^n \rightarrow d_p f(T_p M)$ die Orthogonalprojektion auf den als linearen Unterraum des \mathbb{R}^n aufgefaßten Tangentialraum. Dann gibt es genau ein differenzierbares Vektorfeld X^T auf M , so daß für alle $p \in M$

$$d_p f(X_p^T) = \tau_p(X_p). \tag{28}$$

Das differenzierbare Vektorfeld $X^\perp := X - df(X^T) : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ hat die Eigenschaft $\langle X_p^\perp, d_p f(T_p M) \rangle = 0$ für alle p , es ist ein sogenanntes normales Vektorfeld längs der Immersion f .

Beweis. Weil $d_p f : T_p M \rightarrow d_p f(T_p M)$ bijektiv ist, gibt es genau ein Vektorfeld X^T mit (28). Wir zeigen die Differenzierbarkeit von X in der Nähe eines Punktes $p \in M$ und wählen dazu eine Karte $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ um p mit Gaußscher Basis $\frac{\partial}{\partial x_i}$. Dann sind die $\frac{\partial}{\partial x_i}|_p \cdot f$ für jedes $p \in U$ linear unabhängig, nämlich gerade eine Basis von $d_p(T_p M)$. Der in jedem Punkt durchgeführte Orthonormalisierungsprozess nach Gram/Schmidt liefert $\alpha_{ij} : U \rightarrow \mathbb{R}$, so daß die

$$v_j(p) := \sum_i \alpha_{ij}(p) \frac{\partial}{\partial x_i}|_p \cdot f$$

orthonormal sind. Weil der Orthonormalisierungsprozess nur algebraische Rechenoperationen benutzt, sind die α_{ij} und damit die v_i differenzierbar! Es folgt

$$\begin{aligned} \tau_p(X_p) &= \sum_j \left(\langle v_j(p), X(p) \rangle \sum_i \alpha_{ij}(p) \frac{\partial}{\partial x_i}|_p \cdot f \right) \\ &= d_p f \left(\sum_j \langle v_j(p), X(p) \rangle \sum_i \alpha_{ij}(p) \frac{\partial}{\partial x_i}|_p \right) \\ &= d_p f \left(\sum_i \left(\sum_j \alpha_{ij}(p) \langle v_j(p), X(p) \rangle \right) \frac{\partial}{\partial x_i}|_p \right). \end{aligned}$$

Es folgt

$$X^T = \sum_i \left(\sum_j \alpha_{ij} \langle v_j, X \rangle \right) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

und das ist differenzierbar. □

13 Orientierte Hyperflächen, 2. Fundamentalform

Definition (Differentiation von Vektorfeldern). (i) Seien $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Abbildung und $Y : M \rightarrow T\mathbb{R}^n$ ein differenzierbares Vektorfeld längs f . Für $v \in T_p M$ definieren wir

$$D_v Y := (f(p), v \cdot Y) \in T_{f(p)} \mathbb{R}^n.$$

Dabei sei $v \cdot Y$ die \mathbb{R}^n -wertige Richtungsableitung von Y aufgefaßt als Abbildung in den \mathbb{R}^n . Ist X ein differenzierbares Vektorfeld auf M , so ist $D_X Y : p \mapsto D_{X_p} Y$ ein differenzierbares Vektorfeld längs f .

(ii) Seien $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Immersion und $Y : M \rightarrow TM$ ein differenzierbares Vektorfeld auf M . Dann ist $df(Y) : M \rightarrow T\mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld längs f . Für $v \in T_p M$ definieren wir

$$\nabla_v Y := (D_v df(Y))^T \in T_p M.$$

Ist X ein differenzierbares Vektorfeld auf M , so ist $\nabla_X Y : p \mapsto \nabla_{X_p} Y$ ein differenzierbares Vektorfeld auf M . ∇Y heißt *die Levi-Civita-Ableitung* von Y .

(iii) Seien $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Immersion und $\xi : M \rightarrow T\mathbb{R}^n$ ein normales Vektorfeld längs f :

$$\langle \xi|_p, d_p f(T_p M) \rangle = 0 \quad \text{für alle } p \in M.$$

Dann definiert man ähnlich wie die Levi-Civita-Ableitung die *normale Ableitung* von ξ nach einem tangentialen Vektorfeld X auf M durch

$$\nabla_X^\perp \xi := D_X \xi - df((D_X \xi)^T).$$

Beispiel 27. Ein Rahmen längs einer regulären Kurve ist genau dann parallel, wenn $\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^\perp F_j = 0$ für alle $j \geq 2$.

Definition. Eine *orientierte (immersierte) Hyperfläche* (M, f, ξ) im \mathbb{R}^{m+1} besteht aus

- (i) einer m -dimensionalen Mannigfaltigkeit M ,
- (ii) einer Immersion $f : M \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$,
- (iii) einem differenzierbaren Vektorfeld $\xi : M \rightarrow T\mathbb{R}^{m+1}$ mit

$$\|\xi\| = 1, \quad \xi_p \perp d_p f(T_p M)$$

für alle $p \in M$, d.h. einem differenzierbaren Einheitsnormalenfeld längs f .

Beispiele. 1. $M = S_r^m := \{x \in \mathbb{R}^{m+1} \mid \|x\| = r\}$, $f =$ Inklusion, $\xi_p = -\frac{1}{r}p$.

2. $f : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\text{offen}} M \rightarrow \mathbb{R}^3$ Immersion, $\xi = \frac{\frac{\partial f}{\partial x} \times \frac{\partial f}{\partial y}}{\|\frac{\partial f}{\partial x} \times \frac{\partial f}{\partial y}\|}$.

3. $M = h^{-1}(\{0\}) \subset \mathbb{R}^3$ gleichungsdefinierte Fläche, $f =$ Inklusion, $\xi = -\frac{\text{grad } h}{\|\text{grad } h\|}$.

Satz 16 (2. Fundamentalform). Seien (M, f, ξ) eine orientierte Hyperfläche und $p \in M$.

(i) Es gibt genau einen Endomorphismus A von $T_p M$ mit

$$d_p f(Av) = -D_v \xi, \quad \text{nämlich } Av := -(D_v \xi)^T.$$

A heißt der 2. Fundamentaltensor (die Weingartenabbildung, der Formoperator) von (M, f, ξ) .

(ii) Ist X ein differenzierbares Vektorfeld, so auch AX .

(iii) Ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ die 1. Fundamentalform von f , so nennen wir

$$\alpha(v, w) := \langle Av, w \rangle$$

die 2. Fundamentalform von (M, f, ξ) .

Satz 17 (Lokale Darstellung). Ist $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Karte, so gilt

$$\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \left\langle \xi, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right\rangle.$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) &= \left\langle A \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle = \left\langle df\left(A \frac{\partial}{\partial x_i}\right), df\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) \right\rangle_{\mathbb{R}^n} \\
&= \left\langle -D_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \xi, df\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) \right\rangle_{\mathbb{R}^n} \\
&= -\frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \underbrace{\left\langle \xi, df\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) \right\rangle_{\mathbb{R}^n}}_{=0} + \left\langle \xi, D_{\frac{\partial}{\partial x_i}} df\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) \right\rangle_{\mathbb{R}^n} \\
&= \left\langle \xi, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right\rangle.
\end{aligned}$$

□

Korollar. Die 2. Fundamentalform ist symmetrisch, d.h. A ist bezüglich der 1. Fundamentalform selbstadjungiert.

Beispiel 28. S_r^m wie oben. $A = \frac{1}{r} \text{Id}$.

14 Orientierte Hyperflächen, 2. Fundamentalform

Nur Beispiele gerechnet: Zylinder im \mathbb{R}^3 mit Inklusion und als immersierte Ebene, Rotationsflächen, Röhrenflächen:

Beispiel 29. Wir betrachten die Rotationsfläche zu einer Kurve $\mathbb{R} \supset J \ni t \mapsto (\alpha(t), \beta(t))$ mit $\beta > 0$.

$$\begin{aligned}
f(t, \phi) &= (\alpha(t), \beta(t) \cos \phi, \beta(t) \sin \phi) \\
\xi(t, \phi) &= \frac{(\dot{\beta}(t), -\dot{\alpha}(t) \cos \phi, -\dot{\alpha}(t) \sin \phi)}{\sqrt{\dot{\alpha}^2(t) + \dot{\beta}^2(t)}}.
\end{aligned}$$

Man findet

$$A \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\ddot{\alpha} \dot{\beta} - \dot{\alpha} \ddot{\beta}}{\sqrt{\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2}^3} \frac{\partial}{\partial t}, \quad A \frac{\partial}{\partial \phi} = \frac{\dot{\alpha}}{\beta \sqrt{\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2}} \frac{\partial}{\partial \phi}.$$

Beweis: Setze

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2}} \tag{29}$$

$$f(t, \phi) = (\alpha(t), \beta(t) \cos \phi, \beta(t) \sin \phi) \tag{30}$$

$$\xi(t, \phi) = \rho(t) (\dot{\beta}(t), -\dot{\alpha}(t) \cos \phi, -\dot{\alpha}(t) \sin \phi) \tag{31}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} f(t, \phi) = (\dot{\alpha}(t), \dot{\beta}(t) \cos \phi, \dot{\beta}(t) \sin \phi) \tag{32}$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi} f(t, \phi) = (0, -\beta(t) \sin \phi, \beta(t) \cos \phi) \tag{33}$$

Diese Ableitungen sind orthogonal, aber nicht normiert.

$$\frac{\partial}{\partial t} \xi(t, \phi) = \rho(\ddot{\beta}(t), -\ddot{\alpha}(t) \cos \phi, -\ddot{\alpha}(t) \sin \phi) + \frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)} \xi \quad (34)$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi} \xi(t, \phi) = \rho(0, \dot{\alpha}(t) \sin \phi, -\dot{\alpha}(t) \cos \phi) \quad (35)$$

$$\langle \xi_t, f_t \rangle = \rho \dot{\alpha} \ddot{\beta} - \ddot{\alpha} \dot{\beta} \quad (36)$$

$$\langle \xi_t, f_\phi \rangle = 0 \quad (37)$$

$$\langle \xi_\phi, f_t \rangle = 0 \quad (38)$$

$$\langle \xi_\phi, f_\phi \rangle = -\rho \dot{\alpha} \beta \quad (39)$$

Daher

$$A \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\ddot{\alpha} \dot{\beta} - \dot{\alpha} \ddot{\beta}}{\sqrt{\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2}^3} \frac{\partial}{\partial t}, \quad A \frac{\partial}{\partial \phi} = \frac{\dot{\alpha}}{\beta \sqrt{\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2}} \frac{\partial}{\partial \phi}$$

Der Faktor bei $\frac{\partial}{\partial t}$ ist die Krümmung der Meridiankurve (α, β) , der Faktor bei $\frac{\partial}{\partial \phi}$ ist $(1/\beta) \cos \theta$, wobei θ der Winkel zwischen ξ und dem Lot auf die Rotationsachse ist.

Kurve nach der Bogenlänge parametrisiert.

$$\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2 = 1 \quad (40)$$

$$A \frac{\partial}{\partial t} = (\ddot{\alpha} \dot{\beta} - \dot{\alpha} \ddot{\beta}) \frac{\partial}{\partial t} \quad (41)$$

$$A \frac{\partial}{\partial \phi} = \frac{\dot{\alpha}}{\beta} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (42)$$

Beispiel 30. Sei $(c : J \rightarrow \mathbb{R}^3, F)$ eine gerahmte Kurve, $M = J \times \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$. Wir betrachten den ϵ -Schlauch um Kurve:

$$f_\epsilon(t, \phi) = c(t) - \epsilon \xi(t, \phi) \quad \text{mit} \quad \xi(t, \phi) = -F(t) \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix}.$$

Wir wollen sehen ob f_ϵ eine Immersion ist und gegebenenfalls den 2. Fundamentaltensor A ausrechnen. Weil damit A vergeben ist, schreiben wir die Ableitungsgleichung für den Rahmen als

$$F' = FR = (F_1, F_2, F_3) \begin{pmatrix} 0 & -\lambda & -\mu \\ \lambda & 0 & -\nu \\ \mu & \nu & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen zunächst

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \xi &= -|\dot{c}| FR \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix} = |\dot{c}| ((\lambda \cos \phi + \mu \sin \phi) F_1 + \nu (\sin \phi F_2 - \cos \phi F_3)), \\ \frac{\partial}{\partial \phi} \xi &= -F \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix} = \sin \phi F_2 - \cos \phi F_3. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} f_\epsilon &= \dot{c} - \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \xi = |\dot{c}| ((1 - \epsilon(\lambda \cos \phi + \mu \sin \phi)) F_1 - \epsilon \nu (\sin \phi F_2 - \cos \phi F_3)), \\ \frac{\partial}{\partial \phi} f_\epsilon &= -\epsilon \frac{\partial}{\partial \phi} \xi = -\epsilon (\sin \phi F_2 - \cos \phi F_3) = -\epsilon \frac{\partial}{\partial \phi} \xi.\end{aligned}$$

Insbesondere ist f_ϵ eine Immersion, falls $1 - \epsilon(\lambda \cos \phi + \mu \sin \phi) \neq 0$. In diesem Fall ist ξ wirklich ein Einheitsnormalenfeld. Weiter folgt

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu |\dot{c}| \frac{\partial}{\partial \phi}\right) \cdot \xi &= |\dot{c}| (\lambda \cos \phi + \mu \sin \phi) F_1 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu |\dot{c}| \frac{\partial}{\partial \phi}\right) \cdot f_\epsilon &= |\dot{c}| (1 - \epsilon(\lambda \cos \phi + \mu \sin \phi)) F_1\end{aligned}$$

und daraus

$$\begin{aligned}df_\epsilon \left(A \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu |\dot{c}| \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \right) &= - \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu |\dot{c}| \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \cdot \xi \\ &= df_\epsilon \left(- \frac{\lambda \cos \phi + \mu \sin \phi}{1 - \epsilon(\lambda \cos \phi + \mu \sin \phi)} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu |\dot{c}| \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \right) \\ df_\epsilon \left(A \frac{\partial}{\partial \phi} \right) &= \frac{1}{\epsilon} df_\epsilon \left(\frac{\partial}{\partial \phi} \right).\end{aligned}$$

Es folgt also

$$\begin{aligned}A \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu |\dot{c}| \frac{\partial}{\partial \phi} \right) &= - \frac{\lambda \cos \phi + \mu \sin \phi}{1 - \epsilon(\lambda \cos \phi + \mu \sin \phi)} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu |\dot{c}| \frac{\partial}{\partial \phi} \right), \\ A \left(\frac{\partial}{\partial \phi} \right) &= \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\partial}{\partial \phi} \right).\end{aligned}$$

Zur Interpretation des ersten Eigenwerts von A betrachte den Fall eines parallelen Rahmens ($\nu = 0$). Dann beachte man, daß

$$\langle F'_1, \cos \phi F_2 + \sin \phi F_3 \rangle = \lambda \cos \phi + \mu \sin \phi$$

gerade „die Krümmung κ_ϕ von c in Richtung von $\cos \phi F_2 + \sin \phi F_3$ “ ist. Für kleine ϵ ist die Fläche in t -Richtung genauso stark gekrümmt, wie die Kurve in dieser Richtung. Geht andererseits $\epsilon \rightarrow \kappa_\phi^{-1}$, so wird die Immersion singulär, die Krümmung der Fläche geht gegen ∞ .

15 Krümmungsgrößen

Definition. Sei (M, f, ξ) eine immersierte Hyperfläche im \mathbb{R}^{m+1} mit 2. Fundamentaltensor A und 2. Fundamentalform α . Sei $p \in M$.

- (i) Für einen Vektor $v \in T_p M \setminus \{0\}$ heißt $\alpha(v, v)$ die *Normalkrümmung* in Richtung v . Ist $\alpha(v, v) = 0$, so heißt v eine *Asymptotenrichtung*.
- (ii) Die Eigenwerte h_i von A heißen die *Hauptkrümmungen* von (M, f, ξ) , die zugehörigen Eigenrichtungen die *Hauptkrümmungsrichtungen*. Sind alle Hauptkrümmungen in p gleich, d.h. ist $A = h \text{Id}$, so heißt p ein *Nabelpunkt*.

(iii) Die normierte Spur $H = \frac{1}{m} \text{Spur} A = \frac{1}{m} \sum h_i$ heißt die *mittlere Krümmung* von (M, f, ξ) .

(iv) Die Determinante $K = \det A = h_1 \cdot \dots \cdot h_m$ heißt die *Lipschitz-Killing-Krümmung*, im Falle $m = 2$ die *Gaußsche Krümmung* von (M, f, ξ) .

Interpretationen. 1. Sei (M, f, ξ) wie oben, und sei $\gamma : \mathbb{R} \supset J \rightarrow M$ eine Kurve in M . Dann ist $c := f \circ \gamma$ eine reguläre Kurve in \mathbb{R}^{m+1} .

$$c'' = (c'' - \langle c'', \xi \circ \gamma \rangle \xi \circ \gamma) + \langle c'', \xi \circ \gamma \rangle \xi \circ \gamma$$

zerlegt c'' in seine Komponenten tangential und normal zu f . Die Länge dieser Komponenten kann man daher als *die tangentielle* und *die normale Krümmung* von γ bezeichnen. Die tangentielle Krümmung heißt aus später zu erläuternden Gründen auch die *geodätische Krümmung* von γ . Offenbar ist

$$(\text{Krümmung})^2 = (\text{geodätische Krümmung})^2 + (\text{Normalkrümmung})^2.$$

Weiter ist

$$\begin{aligned} \langle c'', \xi \circ \gamma \rangle &= \underbrace{\langle c', \xi \circ \gamma \rangle}'_{=0} - \langle c', (\xi \circ \gamma)' \rangle = \langle df(\gamma'), -\gamma' \cdot \xi \rangle \\ &= \langle A\gamma', \gamma' \rangle = \alpha(\gamma', \gamma'). \end{aligned}$$

D.h. alle Kurven durch p in derselben Richtung haben in p dieselbe Normalkrümmung, nämlich die Normalkrümmung der Hyperfläche in Richtung des Einheits-Geschwindigkeitsvektors. Ist θ der Winkel zwischen c'' und $\xi \circ \gamma$ und κ die Krümmung von c , so gilt

$$\alpha(\gamma', \gamma') = \kappa \cos \theta \quad (\text{Satz von Meusnier}).$$

Ist $v \in T_p M \setminus \{0\}$, so gibt es eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve γ in M mit $\gamma(0) = p$, $\dot{\gamma}(0) = \gamma'(0) = v$, die ganz in der von $d_p f(v)$ und ξ_p aufgespannten Ebene liegt, einen sogenannten *Normalenschnitt* durch p in Richtung v . Diese Kurve hat nur Beschleunigung in der Ebene, und weil $c'' \perp c'$ ist die Normalkrümmung von (M, f, ξ) in Richtung $\gamma'(0)$ – bis aufs Vorzeichen – die Krümmung des Normalenschnittes.

2. Interpretiert man ξ als Abbildung in die Sphäre: $\xi : M \rightarrow S^m$ (Gaußabbildung), so ist auf kanonische Weise $T_p M = d_p f(T_p M) = T_{\xi(p)} S^m$ und $A = -d\xi : T_p M \rightarrow T_{\xi(p)} S^m = T_p M$. Die Determinante von A gibt also die infinitesimale Volumenverzerrung durch die Gaußabbildung wieder.

3. Sei $f : \mathbb{R}^m \supset M \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenzierbar und $B \subset M$ kompakt. Dann ist das m -dimensionale Volumen von $f|B$ definiert als

$$\text{vol}(f|B) = \int_B \sqrt{\det \langle \partial_i f, \partial_j f \rangle} dx, \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Ist f überdies eine Immersion mit Einheitsnormalenfeld ξ , so betrachten wir die Normalvariation $f_t(x) := f(x) + t\xi_x$ von f . Es gilt

$$\frac{d}{dt} \text{vol}(f_t|B) = -m \int_K H \sqrt{\det \langle \partial_i f, \partial_j f \rangle} dx.$$

In diesem Sinne mißt die mittlere Krümmung H die Volumenänderung bei Normalvariation.

Beispiel 31. Sei $(\alpha(t), \beta(t)) = (r \cos t, R + r \sin t)$ mit $0 < r < R$ und $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ die entsprechende Rotationsfläche (Torus). Dann ist

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= -r \sin t, & \dot{\beta} &= r \cos t, \\ \dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2 &= r^2, \\ \ddot{\alpha} &= -r \cos t, & \ddot{\beta} &= -r \sin t.\end{aligned}$$

Die Normale für $\phi = 0$

$$\xi(t, 0) = \frac{(\dot{\beta}(t), -\dot{\alpha}(t), 0)}{\sqrt{\dot{\alpha}^2(t) + \dot{\beta}^2(t)}} = (\cos t, \sin t, 0)$$

weist nach außen. Die Hauptkrümmungen sind

$$\begin{aligned}h_1 &= \frac{\ddot{\alpha}\dot{\beta} - \dot{\alpha}\ddot{\beta}}{\sqrt{\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2}^3} = \frac{-1}{r}, \\ h_2 &= \frac{\dot{\alpha}}{\beta\sqrt{\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2}} = -\frac{\sin t}{R + r \sin t}.\end{aligned}$$

Die Gaußkrümmung $K = \frac{\sin t}{r(R + r \sin t)}$ ist positiv auf dem „äußeren“ und negativ auf dem „inneren“ Teil des Torus. Das ist eine allgemeine Tatsache auf Flächen: In „konvexen“ Punkten, sogenannten „elliptischen“ Punkten ist $K > 0$, in „Sattelpunkten“ oder „hyperbolischen“ Punkten ist $K < 0$.

Satz 18 (Nabelpunktshyperflächen). Sei (M, f, ξ) eine orientierte immersiert Hyperfläche im \mathbb{R}^{m+1} , M zusammenhängend und $m \geq 2$. Alle Punkte von M seien Nabelpunkte von f , d.h. es gibt eine Funktion $\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}$ mit $A = \lambda I$. Dann ist λ konstant und $f(M)$ enthalten in einer Hypersphäre vom Radius λ^{-1} bzw. in einer Hyperebene.

Beweis. Sei x eine Karte für M . Dann gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_k} df\left(A \frac{\partial}{\partial x_i}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_i} \xi = -\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_k} \xi = \frac{\partial}{\partial x_i} df\left(A \frac{\partial}{\partial x_k}\right),$$

und daher

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\lambda df\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda df\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right) \right).$$

Aber

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\lambda df\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) \right) = \frac{\partial \lambda}{\partial x_k} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}.$$

Daraus ergibt sich

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x_k} \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_k}.$$

Da die $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ linear unabhängig sind, folgt $\frac{\partial \lambda}{\partial x_i} = 0$ für alle i , also λ konstant, weil M zusammenhängend ist.

1. Fall: $\lambda = 0$. In diesem Fall ist $\frac{\partial \xi}{\partial x_i} = df(A \frac{\partial}{\partial x_i}) = 0$, also $\xi = \text{const}$ und wegen $X \cdot \langle f, \xi \rangle = \langle X \cdot f, \xi \rangle + \langle f, X \cdot \xi \rangle = 0 + 0 = 0$ folgt, daß $f(M)$ in eine Hyperebene orthogonal zu ξ enthalten ist.

2. Fall: $\lambda \neq 0$. Dann betrachten wir die Funktion $f + \lambda^{-1}\xi$. Es ist

$$X \cdot (f + \lambda^{-1}\xi) = X \cdot f + \lambda^{-1}X \cdot \xi = X \cdot f + \lambda^{-1}(-df(AX)) = X \cdot f - X \cdot f = 0.$$

Daher ist $f(M)$ enthalten in der Sphäre vom Radius λ^{-1} um den Mittelpunkt $f + \lambda^{-1}\xi$. \square

16 Rotationsflächen konstanter Krümmung

Ist die Meridiankurve (α, β) einer Rotationsfläche *nach der Bogenlänge parametrisiert*, so hat man

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2 &= 1, \text{ also } \ddot{\alpha}\dot{\alpha} + \ddot{\beta}\dot{\beta} = 0, \\ A \frac{\partial}{\partial t} &= (\ddot{\alpha}\dot{\beta} - \dot{\alpha}\ddot{\beta}) \frac{\partial}{\partial t}, \quad A \frac{\partial}{\partial \phi} = \frac{\dot{\alpha}}{\dot{\beta}} \frac{\partial}{\partial \phi}. \end{aligned}$$

Rotationsflächen mit konstanter Gaußscher Krümmung K .

Aus $K = (\ddot{\alpha}\dot{\beta} - \dot{\alpha}\ddot{\beta}) \frac{\dot{\alpha}}{\dot{\beta}}$ folgt

$$\ddot{\beta} + K\beta = 0, \quad \alpha(t) = \int^t \sqrt{1 - \dot{\beta}^2}.$$

Alle Rotationsflächen mit vorgeschriebener Funktion $K(t)$ findet man also durch Lösen einer gewöhnlichen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung und durch eine Integration. Für konstantes K ist die lineare Differentialgleichung leicht zu lösen. Sie hängt von zwei Anfangswerten ab. Die Funktion α enthält eine weitere Integrationskonstante. Ignoriert man aber Parameterverschiebungen auf der Kurve und Translationen längs der x -Achse, so bleibt nur ein wesentlicher Parameter über.

Fall $K > 0$. Man findet $\beta(t) = \rho \cos \sqrt{K}t$. Die Funktion

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= \int_0^t \sqrt{1 - K\rho^2 \sin^2(\sqrt{K}\tau)} d\tau = \frac{1}{\sqrt{K}} \int_0^{t\sqrt{K}} \sqrt{1 - K\rho^2 \sin^2(u)} du \\ &= \frac{1}{\sqrt{K}} E(K\rho^2, t\sqrt{K}) \end{aligned}$$

ist ein elliptisches Integral 2. Art. Es ergeben sich drei Klassen von Flächen entsprechend $K\rho^2 < 1$ (Spindel), $K\rho^2 = 1$ (Kugel) und $K\rho^2 > 1$ (Tonne).

Fall $K = 0$. Dann ist $\beta(t) = Ct + D$. Es gibt drei Klassen von Flächen entsprechend $C^2 = 0$ (Zylinder), $0 < C^2 < 1$ (Kegel) und $C^2 = 1$ (Ebene).

Fall $K < 0$. Dann ist $\beta(t) = Ce^{\sqrt{-K}t} + De^{-\sqrt{-K}t}$. Wieder gibt es drei Klassen von Flächen entsprechend $CD > 0$ (2 Kreisränder), $CD = 0$ (Pseudosphäre) und $CD < 0$ (Fläche mit Spitze).

Rotationsflächen mit konstanter mittlerer Krümmung: Delaunay-Flächen.

Die Gleichung

$$\ddot{\alpha}\dot{\beta} - \dot{\alpha}\ddot{\beta} + \frac{\dot{\alpha}}{\beta} = 2H.$$

multiplizieren wir mit $\beta\dot{\beta}$ und erhalten wegen $\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2 = 1$

$$\ddot{\alpha}\beta + \dot{\alpha}\dot{\beta} = 2H\beta\dot{\beta}.$$

Ebenso nach Multiplikation mit $-\dot{\alpha}\beta$:

$$\ddot{\beta}\beta - 1 + \dot{\beta}^2 = -2H\dot{\alpha}\beta.$$

Mit der Substitution $u = \dot{\alpha}\beta, v = \dot{\beta}\beta$ lassen sich diese beiden Gleichungen zusammenfassen zu

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2H \\ -2H & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aus u, v gewinnt man die erzeugende Kurve der Rotationsfläche durch

$$\beta = \sqrt{u^2 + v^2}, \quad \alpha = \int \dot{\alpha} = \int \frac{u}{\beta}.$$

Für $H = 0$ (Minimalflächen) hat man $u = C, v = t - D$, und o.E. $D = 0$.

- Falls $C = 0$, ist $\alpha = \text{const}$ und die Fläche eine Ebene.
- Andernfalls $\beta(t) = \sqrt{C^2 + t^2}, \alpha = C \text{Arsinh}(t/C)$. Das ist die Rotationsfläche der Kettenlinie $C \cosh(t/C)$, das *Katenoid*.

Für $H \neq 0$ nehmen wir ohne Einschränkung $H = 1/2$ an. Diese Flächen heißen auch cmc (=constant mean curvature)-Rotationsflächen. Man bekommt

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \rho \cos t \\ -\rho \sin t \end{pmatrix}.$$

Daraus berechnet man β und α wie oben und findet vier Klassen von Flächen entsprechend $\rho^2 = 0$ (Zylinder), $0 < \rho^2 < 1$ (Unduloid), $\rho^2 = 1$ (Sphäre) und $\rho^2 > 1$ (Nodoid). Diese Flächen wurden um die Mitte des letzten Jahrhunderts von Delaunay untersucht. Er hat auch festgestellt, daß die erzeugenden Kurven (als geometrischer Ort der Brennpunkte) beim Abrollen von Kegelschnitten auf der x -Achse entstehen. Die Flächen heißen heute auch Delaunayflächen.

Eine gute Netz-Adresse für Bilder von Delaunayflächen ist
<http://www.gang.umass.edu/nick/cmc/cmc-gallery/>.

17 Kurven in Hyperflächen

Seien (M, f, ξ) eine orientierte Hyperfläche in \mathbb{R}^{m+1} , $\gamma: \mathbb{R} \supset J \rightarrow M$ eine reguläre Kurve in M und $c := f \circ \gamma$.

Definition. (i) γ *Geodätische* : $\Leftrightarrow \ddot{c} \in \mathbb{R}\xi \circ \gamma$.
Prägeodätische : $\Leftrightarrow c'' \in \mathbb{R}\xi \circ \gamma$. Auch konstante Kurven (nicht regulär!) bezeichnet man als Geodätische.

- (ii) γ Krümmungslinie $:\Leftrightarrow A\dot{\gamma} \in \mathbb{R}\dot{\gamma}$.
- (iii) γ Asymptotenlinie $:\Leftrightarrow \alpha(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = 0$.
- (iv) $\kappa_{\perp} := \alpha(\gamma', \gamma')$ heißt *Normalkrümmung* von γ .
- (v) $\kappa_g := \|(c'')^T\|$ heißt *die geodätische Krümmung* von γ .
Im Fall $m = 2$ versteht man $\kappa_g(t)$ mit einem negativen Vorzeichen, falls $c'(t), c''(t), \xi \circ \gamma(t)$ eine negativ orientierte Basis des \mathbb{R}^3 bilden.

Bemerkungen.

- (i) Jede Geodätische hat konstante Geschwindigkeit. Eine reguläre Kurve ist genau dann eine Prägeodätische, wenn sie nach Umparametrisierung auf konstante Geschwindigkeit eine Geodätische ist.
- (ii) Wegen $c'' = df((c'')^T) + \alpha(\gamma', \gamma')\xi \circ \gamma$ gilt für die Krümmung κ von c :

$$\kappa^2 = \kappa_g^2 + \kappa_{\perp}^2.$$

- (iii) Eine reguläre Kurve ist genau dann eine Prägeodätische, wenn $\kappa_g = 0$.

Beispiel 32. Die Meridiane ($\phi = \text{const}$) und Breitenkreise ($t = \text{const}$) einer Rotationsfläche sind Krümmungslinien. Man nennt (t, ϕ) dann auch Krümmungslinienparameter. Ist F ein paralleler Rahmen, so sind die von uns verwendeten Parameter (t, ϕ) auf der Röhrenfläche ebenfalls Krümmungslinienparameter.

Beispiel 33. Sei $f(t, \phi) = (\alpha(t), \beta(t) \cos \phi, \beta(t) \sin \phi)$ eine Rotationsfläche mit der Standardnormalen

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2}}(\dot{\beta}, -\dot{\alpha} \cos \phi, -\dot{\alpha} \sin \phi).$$

Wir halten ϕ fest und betrachten $\gamma : t \mapsto f(t, \phi)$. Das ist eine Kurve in der um ϕ gedrehten xy -Ebene, die auch den Normalenvektor enthält. Die 2. Ableitung \ddot{c} ist daher eine Linearkombination vom Normalenvektor $\xi \circ (\gamma)$ und \dot{c} . Daher sind die *Meridiankurven* ($\phi = \text{const}$) Prägeodätische. Die *Breitenkreise* ($t = \text{const}$) sind hingegen im allgemeinen *keine* Prägeodätischen. Zum Beispiel läßt sich jeder Großkreis einer Sphäre als Meridian einer Rotationsfläche um eine Achse (durch den Großkreis) interpretieren und ist deshalb eine (Prä-)Geodätische. Aber die 2. Ableitung eines Breitenkreises liegt in der Ebene dieses Breitenkreises, und die schneidet die Sphäre nicht senkrecht (Ausnahme: der Äquator). Darum liegt sie nicht im Spann von \dot{c} und $\xi \circ \gamma$.

Wir geben nun zwei Existenzsätze an, die wir erst später beweisen wollen. Beide sind Existenzsätze für Lösungen gewisser Differentialgleichungen.

Satz 19 (Existenz von Geodätischen). Sei (M, f, ξ) eine immersiert orientierte Hyerfläche im \mathbb{R}^{m+1} . Zu jedem $p \in M$ und $v \in T_p M$ gibt es genau eine maximale Geodätische mit $\dot{\gamma}(0) = v$. Dabei heißt eine Geodätische $\gamma : \mathbb{R} \supset J \rightarrow M$ maximal, wenn für jede Geodätische $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \supset \tilde{J} \rightarrow M$ aus $J \subset \tilde{J}$ und $\tilde{\gamma}|_J = \gamma$ folgt, daß $\tilde{J} = J$.

Satz 20 (Existenz spezieller Parameter). Sei (M, f, ξ) eine immersierte Fläche im \mathbb{R}^3 .

- (i) Ist p kein Nabelpunkt, so gibt es eine Karte x um p , so daß die $\frac{\partial}{\partial x_i}$ Hauptkrümmungsrichtungen sind (Krümmungslinien-Parameter).

(ii) Ist $K < 0$ konstant, so gibt es um jedes $p \in M$ eine Karte x um p , so daß die $\frac{\partial}{\partial x_i}$ Asymptotenrichtungen sind (Asymptotenlinien-Parameter).

Satz 21 (Ebene Geodätische). Für jede Geodätische γ in M sei $c = f \circ \gamma$ eine ebene Kurve. Dann ist (M, f, ξ) eine Nabelpunktshyperfläche.

Beweis. Sei $p \in M$. Ist $A_p = 0$, so ist p Nabelpunkt. Andernfalls gibt es $v \in T_p M$ mit $\alpha(v, v) \neq 0$. Sei γ eine Geodätische mit $\dot{\gamma}(0) = v$. Dann sind für kleines $|t|$ die Vektoren $\dot{c}(t)$ und $\ddot{c}(t) = \alpha(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))\xi(\gamma(t)) \neq 0$ linear unabhängig und spannen daher die c enthaltende Ebene auf. Insbesondere ist deshalb $\frac{d}{dt}(\xi \circ \gamma)(0) = h\dot{c}(0)$, d.h. $Av = hv$. Das gilt für alle v mit $\alpha(v, v) \neq 0$, also für eine offene nicht-leere Menge in $T_p M$. Dann ist aber jeder Vektor in $T_p M$ Eigenvektor, d.h. p ist Nabelpunkt. \square

18 Kurven auf Flächen

Sei (M, f, ξ) eine orientierte immersierte Fläche im \mathbb{R}^3 .

Satz 22 (Geodätische auf Rotationsflächen (Clairaut)). Für Geodätische auf einer Rotationsfläche ist das Produkt

$$\beta \cos \theta$$

aus dem Abstand zur Rotationsachse und dem Cosinus des Winkels zwischen der Geodätischen und den Breitenkreisen konstant.

Beweis. Sei $c(s) = (\alpha(s), \beta(s) \cos \phi(s), \beta(s) \sin \phi(s))$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Geodätische auf der Rotationsfläche. Dann ist

$$c' = (\alpha', \beta' \cos \phi, \beta' \sin \phi) + \phi'(0, -\beta \sin \phi, \beta \cos \phi)$$

Der Winkel θ zwischen der Geodätischen und dem Breitenkreis ist daher gegeben durch

$$\cos \theta = \langle c', (0, -\sin \phi, \cos \phi) \rangle = \phi' \beta.$$

Weiter ist

$$\begin{aligned} c'' &= (\alpha'', \beta'' \cos \phi, \beta'' \sin \phi) + 2\phi'(0, -\beta' \sin \phi, \beta' \cos \phi) \\ &\quad + (\phi')^2(0, -\beta \cos \phi, -\beta \sin \phi) + \phi''(0, -\beta \sin \phi, \beta \cos \phi) \\ &= (\alpha'', (\beta'' - \beta(\phi')^2) \cos \phi, (\beta'' - \beta(\phi')^2) \sin \phi) \\ &\quad + (2\phi' \beta' + \phi'' \beta)(0, -\sin \phi, \cos \phi). \end{aligned}$$

Die beiden letzteren Summanden sind offensichtlich orthogonal zueinander und der zweite ist tangential an den Breitenkreis. Weil für eine Geodätische aber c'' normal ist, folgt $2\phi' \beta' + \phi'' \beta = 0$ und daher

$$(\phi' \beta^2)' = (2\phi' \beta' + \phi'' \beta) \beta = 0.$$

\square

Beispiel 34. Je kleiner also der Winkel zum Breitenkreis, desto näher ist die Geodätische an der Achse. Berührt die Geodätische einen Breitenkreis tangential, so ist ihr Achsabstand dort minimal. Das gibt zum Beispiel eine qualitative Vorstellung vom Verlauf der Geodätischen auf dem Rotationstor.

Die nautische Verwendung von Loxodromen, also Kurven, die konstante Kompaßweisung, d.h. konstanten Winkel zu den Breitenkreisen haben, ist unter dem Gesichtspunkt geodätischer Verbindungen nur für Geodätische in der Nähe des Äquators akzeptabel.

Definition (Komplexe Struktur immersierter orientierte Flächen). Die Normale ξ bestimmt in jedem Tangentialraum $T_p M$, eine positive 90° -Drehung $J_p \in \text{End}(T_p M)$: Zu $v \in T_p M \setminus \{0\}$ gibt es nämlich genau einen Vektor Jv , so daß

$$(d_p f(v), d_p(Jv), \xi(p))$$

eine positiv-orientierte orthogonale Basis des \mathbb{R}^3 mit $\|d_p f(v)\| = \|d_p(Jv)\|$ ist. Die Abbildung $J : TM \rightarrow TM$ heißt auch die (fast-)komplexe Struktur von (M, f, ξ) .

Definition (Darboux-Rahmen). Sei $\gamma : J \rightarrow M$ eine reguläre Kurve und $c := f \circ \gamma$. Wir schreiben $Jc' := df(J\gamma')$. Dann besitzt c einen ausgezeichneten Rahmen, nämlich $F = (c', Jc', \xi \circ \gamma)$. Dieser Rahmen heißt der *Darboux-Rahmen* von c . Die zugehörige Ableitungsmatrix ist

$$\begin{pmatrix} 0 & -\kappa_g & -\kappa_\perp \\ \kappa_g & 0 & -\tau_g \\ \kappa_\perp & \tau_g & 0 \end{pmatrix}.$$

Beachte, daß $c'' = \kappa_g Jc' + \kappa_\perp \xi \circ \gamma$, weil $\langle c', c' \rangle = 1$. Die geodätische Krümmung κ_g ist im zweidimensionalen Fall mit einem Vorzeichen versehen. Die Größe

$$\begin{aligned} \tau_g &:= \langle (Jc')', \xi \circ \gamma \rangle = \underbrace{\langle Jc', \xi \circ \gamma \rangle}_{=0} - \langle Jc', (\xi \circ \gamma)' \rangle = \langle J\gamma', A\gamma' \rangle \\ &= \alpha(\gamma', J\gamma') \end{aligned}$$

heißt die *geodätische Torsion* der Kurve.

Satz 23 (Geodätische). Ist $\gamma : \mathbb{R} \supset J \rightarrow M$ eine Prägeodätische und $c = f \circ \gamma$ eine Frenetkurve, so ist τ_g die gewöhnliche Torsion τ von c .

Beweis. Sei $F = (F_1, F_2, F_3)$ der Frenetrahmen von c . Dann ist $\tau = \langle F_2', F_3 \rangle$. Ist nun γ eine Prägeodätische, so ist $c'' = \lambda \xi \circ \gamma$ und daher $F_2 = \epsilon \xi \circ \gamma$ mit $\epsilon = \pm 1$. Es folgt

$$\begin{aligned} \tau &= \langle \epsilon(\xi \circ \gamma)', F_1 \times F_2 \rangle = \langle \epsilon(\xi \circ \gamma)', c' \times \epsilon(\xi \circ \gamma) \rangle \\ &= \langle (\xi \circ \gamma)', c' \times (\xi \circ \gamma) \rangle = \langle (\xi \circ \gamma)', -Jc' \rangle \\ &= \tau_g. \end{aligned}$$

□

Satz 24 (Krümmungslinien). $\gamma : \mathbb{R} \supset J \rightarrow M$ ist Krümmungslinie genau dann, wenn $\tau_g = 0$.

Beweis. In zwei Dimensionen ist $A\gamma' \in \mathbb{R}\gamma'$ genau dann, wenn $\langle A\gamma', J\gamma' \rangle = \alpha(\gamma', J\gamma') = 0$. □

Satz 25 (Asymptotenlinien). Sei γ eine reguläre Kurve in M , (M, f, ξ) eine immersierte Fläche.

$$(i) \quad \gamma \text{ ist Asymptotenlinie} \iff \kappa_{\perp} = 0.$$

Sei γ ist Asymptotenlinie und sei $c = f \circ \gamma$ eine Frenetkurve. Dann gilt weiter:

$$(ii) \quad \tau_g = \tau$$

(iii) Die Schmiegebene von c ist tangential: $\text{Spann}(c', c'') = d_{\gamma}f(T_{\gamma}M)$.

(iv) (Beltrami-Enneper) Für die Gaußsche Krümmung K von (M, f, ξ) und die Torsion von c gilt

$$K \circ \gamma = -\tau^2.$$

Beweis. (i) Ist bereits bekannt.

Zu (ii). Es ist

$$c'' = \kappa_g Jc' + \kappa_{\perp} \xi \circ \gamma = \kappa_g Jc' \quad (43)$$

Daher ist $F = (c', \epsilon Jc', \epsilon \xi \circ \gamma)$ der Frenetrahmen von c , wo $\epsilon = \pm 1$, und

$$\tau = \epsilon^2 \langle (Jc')', \xi \circ \gamma \rangle = \tau_g.$$

Zu (iii). Folgt unmittelbar aus $c'' = \kappa_g Jc'$.

Zu (iv). Weil $(\gamma', J\gamma')$ eine ON-Basis ist, ist

$$K = \det A = \underbrace{\langle A\gamma', \gamma' \rangle}_{=\alpha(\gamma', \gamma')=0} \langle AJ\gamma', J\gamma' \rangle - \underbrace{\langle A\gamma', J\gamma' \rangle^2}_{=\tau_g^2}.$$

□

Satz 26 (Joachimsthal 1846). Zwei Flächen schneiden sich unter einem konstanten Winkel genau dann, wenn die Schnittkurve in beiden Flächen dieselbe geodätische Torsion hat:

Seien (M_i, f_i, ξ_i) , $i = 1, 2$ immersierte Flächen und $\gamma_i : \mathbb{R} \supset J \rightarrow M_i$ eine reguläre Kurve, so daß $c = f_1 \circ \gamma_1 = f_2 \circ \gamma_2$, d.h. $f(M_1)$ und $f(M_2)$ schneiden sich in c . Dann gilt

$$\tau_{g,1} = \tau_{g,2} \iff \frac{d}{ds} \langle \xi_1 \circ \gamma_1, \xi_2 \circ \gamma_2 \rangle = 0.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \langle \xi_1 \circ \gamma_1, \xi_2 \circ \gamma_2 \rangle &= - \langle df_1(A_1\gamma_1'), \xi_2 \circ \gamma_2 \rangle - \dots \\ &= - \langle df_1(A_1\gamma_1'), \langle \xi_2 \circ \gamma_2, J_1c_1' \rangle J_1c_1' \rangle - \dots \\ &= - \alpha_1(\gamma_1', J_1\gamma_1') \langle \xi_2 \circ \gamma_2, J_1c_1' \rangle \\ &\quad - \alpha_2(\gamma_2', J_2\gamma_2') \langle \xi_1 \circ \gamma_1, J_2c_2' \rangle \\ &= - \tau_{g,1} \cos \psi - \tau_{g,2} \cos(\pi - \psi) \\ &= (\tau_{g,2} - \tau_{g,1}) \cos \psi. \end{aligned}$$

Ist $\tau_{g,1} = \tau_{g,2}$, so folgt die Konstanz des Winkels zwischen den Normalen. Ist andererseits der Winkel zwischen den Normalen konstant und $\neq 0, \pi$, so ist $\psi \neq \frac{\pi}{2}$ und es folgt $\tau_{g,1} = \tau_{g,2}$. Ist schließlich $\xi_1 \circ \gamma_1 = \pm \xi_2 \circ \gamma_2$, so ist $J_1 c' = \pm J_2 c'$ und

$$\tau_{g,1} = \alpha_1(\gamma_1', J_1 \gamma_1') = - \langle J_1 c', (\xi_1 \circ \gamma_1)' \rangle = - \langle J_2 c', (\xi_2 \circ \gamma_2)' \rangle = \tau_{g,2}.$$

□

Satz 27 (Dupin). *Gegeben seien drei Familien von Flächen in einer offenen Menge des \mathbb{R}^3 , so daß durch jeden Punkt genau eine Fläche aus jeder Familie geht und je zwei Flächen aus verschiedenen Familien sich orthogonal schneiden (dreifach orthogonales Flächensystem). Dann schneiden sich die Flächen in Krümmungslinien.*

Beweis. Schneiden sich zwei Kurven in einer Fläche orthogonal, so gilt für ihre geodätischen Torsionen im Schnittpunkt $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$.

$$\tau_{g_1}(0) + \tau_{g_2}(0) = \alpha(\gamma', J\gamma') + \alpha(\pm J\gamma', \pm J^2\gamma') = \alpha(\gamma', J\gamma') - \alpha(J\gamma', \gamma') = 0.$$

Wir betrachten drei Flächen, die sich paarweise orthogonal in einem Punkt schneiden.

Durch den gemeinsamen Schnittpunkt erhält man drei Kurven. Je zwei derselben liegen in einer Fläche, jede von ihnen liegt in zwei Flächen und hat in beiden dieselbe geodätische Torsion (Satz von Joachimsthal).

Seien $\tau_{g,i}, i = 1, 2, 3$ die geodätischen Torsionen der drei Kurven im gemeinsamen Schnittpunkt. Dann ist nach obigem:

$$\tau_{g,1} + \tau_{g,2} = 0 \tag{44}$$

$$\tau_{g,2} + \tau_{g,3} = 0 \tag{45}$$

$$\tau_{g,1} + \tau_{g,3} = 0, \tag{46}$$

also $\tau_{g,i} =$ für alle i . Das gilt in jedem Punkt und deshalb sind die drei Kurven Krümmungslinien. □

Beispiele. Triviale Beispiele sind

- drei orthogonale Scharen von Ebenen
- eine Schar konzentrischer Zylinder zusammen mit den Scharen der Ebenen durch die Achse und der Ebenen senkrecht zur Achse
- eine Schar konzentrischer Kugeln, eine Schar konzentrischer Kegel mit gleichem Zentrum und die Schar der Ebenen durch die Achse.

Ein nicht-triviales Beispiel sind die konfokalen Quadriken

$$\frac{x^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda} + \frac{z^2}{c^2 - \lambda} = 1,$$

mit $0 < a^2 < b^2 < c^2$, wobei die drei Familien durch die Parameterbereiche $\lambda < a^2, a^2 < \lambda < b^2$ und $b^2 < \lambda < c^2$ definiert sind. Dieses Beispiel liefert insbesondere die Krümmungslinien auf dem Ellipsoid.

Satz 28 (Liouville). *Seien $G, \tilde{G} \subset \mathbb{R}^3$ offen und $h : G \rightarrow \tilde{G}$ ein konformer Diffeomorphismus, d.h. $\langle dh(X), dh(Y) \rangle = \lambda \langle X, Y \rangle$. Dann bildet h Nabelpunktsflächen in Nabelpunktsflächen ab.*

Beweis. Wir betrachten eine offene Teilmenge einer Sphäre $M \subset G$, auf dieser einen Punkt p und eine Ebene E durch p , die die Normale enthält. Dann schneidet E die Sphäre in einer Krümmungslinie L . Wir zeigen, daß die Bildkurve $h(L)$ eine Krümmungslinie von $h(M)$ durch $h(p)$ ist. Dann folgt, daß es durch $h(p)$ in jeder Richtung eine Krümmungslinie gibt, so daß $h(p)$ eine Nabelpunkt ist. (Falls M ein offenes Stück einer Ebene ist, kann man einen ähnlichen Beweis führen.)

Wir betrachten das dreifache Orthogonalsystem bestehend aus den zu M konzentrischen Sphären, den Ebenen orthogonal zu E und den konzentrischen Kegeln, die E als Grenzfall (Öffnungswinkel $\frac{\pi}{2}$) enthalten. Weil h konform ist, wird dies System auf ein dreifaches Orthogonalsystem abgebildet, und die Bildflächen schneiden sich in Krümmungslinien. \square

19 Regelflächen

Definition. Eine orientierte immersierte Fläche (M, f, ξ) im \mathbb{R}^3 heißt *Regelfläche*, wenn gilt:

- (i) $M = J_1 \times J_2 \subset \mathbb{R}^2$, $J_i \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall,
- (ii) $f(s, t) = c(s) + tv(s)$ mit $c, v : J_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Aus der geforderten Immersionseigenschaft folgt $v(s) = f_t(s, t) \neq 0$ für alle $s \in J_1$. Die auf dem Bild von f liegenden Strecken $t \mapsto c(s) + tv(s)$ heißen *Erzeugende* oder *Regelgeraden*.

Ist

$$\frac{\partial}{\partial t} \xi = 0,$$

so heißt (M, f, ξ) *abwickelbar* oder eine *Torse*.

Bemerkungen. 1. Wir bezeichnen im folgenden den Kurvenparameter mit s und die Ableitung $\frac{\partial}{\partial s}$ mit $(\cdot)'$, auch wenn die Kurve *nicht* nach der Bogenlänge parametrisiert ist.

2. Die vorstehende Definition ist im Interesse besserer Verständlichkeit etwas zu eng: Wir nennen allgemeiner eine immersierte Fläche (M, f, ξ) im \mathbb{R}^3 eine Regelfläche, wenn sie um jeden Punkt eine lokale Parametrisierung $u : \mathbb{R}^2 \supset U \rightarrow M$ gestattet, so daß $(U, f \circ u, \xi \circ u)$ von der obigen Form ist.

Beispiel 35 (Zylinder). Sei $c : \mathbb{R} \supset J \rightarrow \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ eine ebene reguläre Kurve. Dann definieren $M := J \times \mathbb{R}$ und

$$\begin{aligned} f(s, t) &:= c(s) + t\mathbf{e}_3 = (c_1, c_2, t), \\ \xi(s, t) &:= (-c'_2, c'_1, 0) \end{aligned}$$

eine abwickelbare Regelfläche.

Beispiel 36 (Kegel). Sei $c : \mathbb{R} \supset J \rightarrow \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ eine ebene reguläre Kurve und

$z \in \mathbb{R}^3$ mit $z_3 > 0$. Dann definieren $M = J \times]-\infty, 1[$ und

$$\begin{aligned} v(s) &:= z - c(s), \\ f(s, t) &:= c(s) + tv(s), \\ \xi(s, t) &:= \frac{c'(s) \times (z - c(s))}{\|c'(s) \times (z - c(s))\|} \end{aligned}$$

eine abwickelbare Regelfläche.

Beispiel 37 (Tangentenfläche). Sei $c : \mathbb{R} \supset J \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Frenetkurve. Dann definieren $M = J \times]0, \infty[$ und

$$\begin{aligned} f(s, t) &:= c(s) + tc'(s), \\ \xi(s, t) &:= \frac{c'(s) \times c''(s)}{\|c'(s) \times c''(s)\|} \end{aligned}$$

eine abwickelbare Regelfläche.

Beim Zylinder sind die Regelgeraden parallel zueinander; in den beiden anderen Beispielen kann man die „Striktionslinie“ betrachten, längs der die Regelgeraden am engsten beieinander liegen. Das ist beim Kegel ein Punkt, also eine entartete „Linie“, und bei der Tangentenfläche die erzeugende Kurve. Mittels dieser Typ-Unterscheidung kann man beweisen, daß die vorstehenden drei Beispiele in gewissem – sehr vagen – Sinne „alle“ abwickelbaren Regelflächen liefern. Allerdings ist es möglich, verschiedene Typen längs Regelgeraden aneinander zu kleben, so daß nicht einmal lokal jede Regelfläche von einem der obigen Typen ist.

Die folgenden Beispiele sind nicht abwickelbar:

Beispiel 38 (Wendelfläche). Für $h > 0$ ist durch $M := \mathbb{R} \times]0, \infty[$ und

$$\begin{aligned} f(s, t) &:= (t \cos s, t \sin s, hs), \\ \xi(s, t) &:= \frac{(h \sin s, -h \cos s, t)}{\sqrt{h^2 + t^2}} \end{aligned}$$

eine Regelfläche, die sogenannte *Wendelfläche* definiert.

Beispiel 39 (Einschaliges Hyperboloid). Dieses ist gegeben durch $M = \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} f(s, t) &:= (\cos s, \sin s, 0) + t(-\sin s, \cos s, \pm 1), \\ \xi(s, t) &:= \frac{(\cos s - t \sin s, \sin s + t \cos s, t)}{\sqrt{1 + 2t^2}}. \end{aligned}$$

Die Bildmenge ist die Lösung der Gleichung $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, also ein einschaliges Hyperboloid. Die beiden Vorzeichen in der Definition von f liefern geometrisch dieselbe Fläche, auf der deshalb *zwei* Scharen von Regelgeraden liegen.

Regelflächen können keine positive Gaußkrümmung tragen:

Satz 29. Sei (M, f, ξ) eine Regelfläche. Dann gilt:

(i) $K \leq 0$.

(ii) $K = 0 \iff (M, f, \xi)$ abwickelbar.

Beweis. Zu (i).

$$\alpha\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t}\right) = \left\langle \frac{\partial^2}{\partial t^2} f, \xi \right\rangle = 0. \quad (47)$$

Also ist A nicht definit, und deshalb $K = \det A \leq 0$.

Zu (ii). Ist (M, f, ξ) abwickelbar, so ist

$$df\left(A\frac{\partial}{\partial t}\right) = -\frac{\partial \xi}{\partial t} = 0. \quad (48)$$

Also ist $K = \det A = 0$.

Sei umgekehrt $K = 0$ und $p \in M$. Dann gibt es eine ON-Basis des Tangentialraums $T_p M$ aus Eigenvektoren von A , bezüglich der A die Matrix $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ besitzt. Aber

$$0 = \left\langle \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle = ax^2$$

genau für die Eigenvektoren zum Eigenwert 0. Nach (1) ist daher $A\frac{\partial}{\partial t} = -\frac{\partial \xi}{\partial t} = 0$. \square

Bei einer Regelfläche lassen sich c und v auf verschiedene Weise verändern, ohne daß sich die Bildmenge ändert, vorausgesetzt, man paßt die Laufbereiche der Parameter an. Zunächst liefert eine Umparametrisierung $c \rightarrow c \circ h$ bei gleichzeitiger Substitution $v \rightarrow v \circ h$ offenbar geometrisch dieselbe Fläche. Weiter kann man v in seiner Länge verändern. Schließlich kann man c durch eine Kurve $\tilde{c}(s) = c(s) + a(s)v(s)$ mit einer reellen Funktion a ersetzen. Für das Hyperboloid bietet sich zum Beispiel die „Taille“ (Striktionslinie) als natürliches c an. Das folgende Lemma beschreibt eine andere mögliche Normierung von c :

Lemma 9. *Ist (M, f, ξ) eine Regelfläche wie in der Definition und $(s_0, t_0) \in M$, so gibt es eine Parametrisierung $u : \mathbb{R}^2 \supset U \rightarrow M$ für M , so daß*

$$\begin{aligned} u(s_0, 0) &= (s_0, t_0), \\ f(u(s, t)) &= \tilde{c}(s) + t\tilde{v}(s) \end{aligned}$$

mit

$$\langle \tilde{c}', \tilde{v} \rangle = 0, \quad \|\tilde{v}\| = 1, \quad \|\tilde{c}'\| = 1.$$

Beweis. Wir setzen – mit zunächst beliebigen Funktionen a und b –

$$\begin{aligned} u(s, t) &:= (s, a(s) + tb(s)), \\ \tilde{c}(s) &:= c(s) + a(s)v(s), \\ \tilde{v}(s) &:= b(s)v(s). \end{aligned}$$

Setzen wir $b := \|v\|^{-1}$, so wird $\|\tilde{v}\| = 1$. Weiter ist dann

$$\langle \tilde{c}', \tilde{v} \rangle = \langle c' + a'v + av', bv \rangle = b^{-1}(a' + a \langle v', v \rangle b^2 + \langle c', v \rangle b^2)$$

Wählt man also a als Lösung der linearen Differentialgleichung

$$a' + a \langle v', v \rangle b^2 + \langle c', v \rangle b^2 = 0, \quad a(s_0) = t_0,$$

so folgen $u(s_0, 0) = (s_0, t_0)$ und $\langle \tilde{c}', \tilde{v} \rangle = 0$. Damit sind alle Bedingungen bis auf $\|\tilde{c}'\| = 1$ erfüllt.

Weil f in (s_0, t_0) eine Immersion ist, sind

$$\frac{\partial f}{\partial s}(s_0) = c'(s_0) + t_0 v'(s_0), \quad \frac{\partial f}{\partial t}(s_0) = v(s_0)$$

linear unabhängig. Daher ist

$$\begin{aligned} \tilde{c}'(s_0) &= c'(s_0) + a'(s_0)v(s_0) + a(s_0)v'(s_0) \\ &= c'(s_0) + t_0 v'(s_0) + a'(s_0)v(s_0) \neq 0, \end{aligned}$$

und \tilde{c} läßt sich in der Nähe von s_0 nach der Bogenlänge umparametrisieren. Wegen

$$\langle (\tilde{c} \circ h)', \tilde{v} \circ h \rangle = h' \langle \tilde{c}' \circ h, \tilde{v} \circ h \rangle = 0, \quad \|\tilde{v} \circ h\| = 1,$$

zerstört das nicht die bereits erzielte Normierung. \square

Satz 30 (Abwickelbare Regelflächen). *Sei (M, f, ξ) eine abwickelbare Fläche. Dann gibt es zu jedem $p \in M$ eine Parametrisierung $\phi : G \rightarrow M$ für M um p , so daß $f \circ \phi : \mathbb{R}^2 \supset G \rightarrow \mathbb{R}^3$ bezüglich der Euklidischen Metriken von \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3 isometrisch ist: Die abwickelbare Fläche läßt sich lokal in die Ebene abwickeln.*

Beweis. Nach dem Lemma können wir annehmen, daß $f(s, t) = c(s) + tv(s)$ mit

$$\|c'\| = \|v\| = 1, \quad \langle c', v \rangle = 0.$$

Wir berechnen zunächst die 1. Fundamentalform von f bezüglich $(\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial t})$, d.h. die Matrix

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \langle f_s, f_s \rangle & \langle f_s, f_t \rangle \\ \langle f_t, f_s \rangle & \langle f_t, f_t \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle c' + tv', c' + tv' \rangle & \langle c' + tv', v \rangle \\ \langle v, c' + tv' \rangle & \langle v, v \rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 + 2t \langle c', v' \rangle + t^2 \langle v', v' \rangle & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nun ist $\tilde{v} \perp c'$ und deshalb

$$\begin{aligned} v' &= \langle v', c' \rangle c' + \langle v', \xi \rangle \xi = - \langle v, c'' \rangle c' - \langle \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t}, \xi \rangle \xi \\ &= - \langle v, c'' \rangle c' - \langle A \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial s} \rangle \xi = - \langle v, c'' \rangle c', \end{aligned}$$

weil die Fläche abwickelbar und deshalb $A \frac{\partial}{\partial t} = 0$. Also

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 - t \langle v, c'' \rangle)^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (49)$$

Jetzt kommt der Trick: Weil $v = \pm Jc'$, ist $\langle v, c'' \rangle = \pm \kappa_g$ bis aufs Vorzeichen die geodätische Krümmung der Kurve c . Wir wählen deshalb eine (auf demselben Intervall wie c definierte) nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve γ in \mathbb{R}^2 mit der Krümmung $\kappa = \langle v, c'' \rangle$, d.h mit

$$\gamma'' = \langle v, c'' \rangle J\gamma'.$$

Wir definieren

$$g(s, t) := \gamma(s) + tJ\gamma'(s)$$

und berechnen die 1. Fundamentalform von g . Es ist

$$\begin{aligned} g_s &= \gamma' + tJ\gamma'' = \gamma' + t \langle v, c'' \rangle J^2\gamma' = (1 - t \langle v, c'' \rangle)\gamma', \\ g_t &= J\gamma'. \end{aligned}$$

Also bekommt man dieselbe Matrix wie in (49). Insbesondere ist g lokal invertierbar, und mit $\phi = g^{-1}$ erhält man die Behauptung. \square

20 Minimalflächen

Definition. Eine immersierte orientierte Hyperfläche (M, f, ξ) im \mathbb{R}^{m+1} mit verschwindender mittlerer Krümmung $H = 0$ heißt *Minimalhyperfläche*.

Im Abschnitt 15 hatten wir gesehen, daß die mittlere Krümmung die Volumenänderung unter Normalvariationen mißt. Lokal stabiler (insbesondere minimaler) Flächeninhalt erfüllt daher $H = 0$.

Beispiel 40 (Katenoid). $f(x, y) = (ax, a \cosh x \cos y, a \cosh x \sin y), a > 0$.

Beweis. Das Katenoid ist eine Rotationsfläche und daher H leicht auszurechnen. \square

Ehe wir weitere Beispiele angeben brauchen wir

Definition (Gradient, Laplaceoperator). Seien $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine immersierte Mannigfaltigkeit, $f^* \langle \cdot, \cdot \rangle$ die von f induzierte 1. Fundamentalform und ∇^f die von f induzierte Levi-Civita-Ableitung, vgl. die 13. Vorlesung:

$$\nabla_X^f Y := (D_X df(Y))^T \text{ für Vektorfelder } X, Y \text{ auf } M.$$

Sei $h : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Abbildung.

- (i) Es gibt genau ein Vektorfeld $\text{grad}^f h$ auf M , so daß

$$f^* \langle \text{grad}^f h, v \rangle = dh(v) \quad \text{für jedes } v \in TM.$$

$\text{grad}^f h$ heißt *der Gradient von h* .

- (ii) Die Abbildung $v \mapsto \nabla_v^f \text{grad}^f h$ ist auf jedem Tangentialraum ein Endomorphismus. Wir definieren

$$\Delta^f h := \text{Spur } \nabla^f \text{grad}^f h,$$

als den *Laplace(-Beltrami)-Operator* angewendet auf h . (In der Literatur oft auch mit negativem Vorzeichen!)

Satz 31. Für eine immersierte orientierte Hyperfläche (M, f, ξ) im \mathbb{R}^{m+1} gilt

$$\Delta^f f = mH\xi.$$

Dabei ist der Laplaceoperator der Vektorfunktion f komponentenweise zu bilden. Insbesondere ist (M, f, ξ) minimal genau dann, wenn f harmonisch ist, d.h. wenn $\Delta^f f = 0$.

Für den Beweis zeigen wir zunächst das folgende

Lemma 10 (Ricci-Identität). Für die 1. Fundamentalform in Verbindung mit der Levi-Civita-Ableitung gilt die Produktregel: Ist $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Immersion und sind $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ Vektorfelder auf M so gilt

$$Z \cdot f^* \langle X, Y \rangle = f^* \langle \nabla_Z^f X, Y \rangle + f^* \langle X, \nabla_Z^f Y \rangle .$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} Z \cdot f^* \langle X, Y \rangle &= Z \cdot \langle df(X), df(Y) \rangle \\ &= \langle D_Z df(X), df(Y) \rangle + \langle df(X), D_Z df(Y) \rangle \\ &= f^* \langle (D_Z df(X))^T, Y \rangle + f^* \langle X, (D_Z df(Y))^T \rangle \\ &= f^* \langle \nabla_Z^f X, Y \rangle + f^* \langle X, \nabla_Z^f Y \rangle \end{aligned}$$

□

Beweis des Satzes. Sei (X_1, \dots, X_k) ein lokales orthonormales Basisfeld. Dann gilt

$$\begin{aligned} \Delta^f f &= \sum_i (\Delta^f f_i) e_i \\ &= \sum_i \sum_k f^* \langle \nabla_{X_k}^f \text{grad}^f f_i, X_k \rangle e_i \\ &= \sum_i \sum_k X_k \cdot f^* \langle \text{grad}^f f_i, X_k \rangle e_i - f^* \langle \text{grad}^f f_i, \nabla_{X_k}^f X_k \rangle e_i \\ &= \sum_i \sum_k X_k \cdot df_i(X_k) e_i - df_i(\nabla_{X_k}^f X_k) e_i \\ &= \sum_k D_{X_k} df(X_k) - df(\nabla_{X_k}^f X_k) \\ &= \sum \langle D_{X_k} df(X_k), \xi \rangle \xi \\ &= \sum \alpha(X_k, X_k) \xi \\ &= mH\xi. \end{aligned}$$

□

Im allgemeinen ist die Berechnung des Laplace-Beltrami-Operators ziemlich aufwendig. Wir betrachten deshalb Immersionen mit relativ einfacher 1. Fundamentalform und berechnen dafür den Laplaceoperator:

Definition. (i) Eine Immersion $f : \mathbb{R}^m \supset M \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *konform*, wenn es eine Funktion $\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\lambda > 0$ gibt, so daß

$$f^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n} = \lambda^2 \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^m} .$$

(ii) Eine Karte $x : M \supset U \rightarrow \mathbb{R}^m$ einer immersierten Mannigfaltigkeit $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *konform* oder *isotherm*, wenn es eine Funktion $\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\lambda > 0$ gibt, so daß

$$f^* \langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \rangle = \lambda^2 \delta_{ij} .$$

Lemma 11. Sei $f : \mathbb{R}^m \supset M \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine konforme Immersion. Dann gilt für die durch f induzierten Operatoren grad^f, ∇^f und Δ^f :

$$\text{grad}^f h = \lambda^{-2}(\partial_1 h, \dots, \partial_m h) = \lambda^{-2} \text{grad} h, \quad (50)$$

$$\nabla_X^f Y = D_X Y + (X \cdot \log \lambda)Y + (Y \cdot \log \lambda)X - \langle X, Y \rangle \text{grad}(\log \lambda), \quad (51)$$

$$\Delta^f h = \lambda^{-2}(\Delta h + (m-2) \langle \text{grad}(\log \lambda), \text{grad} h \rangle). \quad (52)$$

Beweis. Zu (i):

$$\begin{aligned} f^* \langle \text{grad}^f h, v \rangle &= dh(v) \\ &= \sum \partial_i h v_i \\ &= \langle (\partial_1 h, \dots, \partial_m h), v \rangle \\ &= \lambda^2 \langle \lambda^{-2}(\partial_1 h, \dots, \partial_m h), v \rangle \\ &= f^* \langle \lambda^{-2}(\partial_1 h, \dots, \partial_m h), v \rangle. \end{aligned}$$

Zu (ii):

$$\partial_i \langle \partial_j f, \partial_k f \rangle = \langle \partial_i \partial_j f, \partial_k f \rangle + \langle \partial_j f, \partial_i \partial_k f \rangle \quad (53)$$

$$\partial_j \langle \partial_i f, \partial_k f \rangle = \langle \partial_j \partial_i f, \partial_k f \rangle + \langle \partial_i f, \partial_j \partial_k f \rangle \quad (54)$$

$$\partial_k \langle \partial_i f, \partial_j f \rangle = \langle \partial_k \partial_i f, \partial_j f \rangle + \langle \partial_i f, \partial_k \partial_j f \rangle. \quad (55)$$

Wir bilden (1)+(2)-(3) und erhalten:

$$\begin{aligned} 2 \langle \partial_i \partial_j f, \partial_k f \rangle &= \partial_i \langle \partial_j f, \partial_k f \rangle + \partial_j \langle \partial_i f, \partial_k f \rangle - \partial_k \langle \partial_i f, \partial_j f \rangle \\ &= \partial_i \lambda^2 \langle \partial_j, \partial_k \rangle + \partial_j \lambda^2 \langle \partial_i, \partial_k \rangle - \partial_k \lambda^2 \langle \partial_i, \partial_j \rangle. \end{aligned}$$

Daraus folgt, weil $\lambda^{-1}\partial_1, \dots, \lambda^{-1}\partial_m$ orthonormal bezüglich $f^* \langle \cdot, \cdot \rangle$ sind,

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial_i}^f \partial_j &= \lambda^{-2} \sum f^* \langle \nabla_{\partial_i}^f \partial_j, \partial_k \rangle \partial_k \\ &= \lambda^{-2} \sum \langle D_{\partial_i} df(\partial_j), df(\partial_k) \rangle \partial_k \\ &= \lambda^{-2} \sum \langle \partial_i \partial_j f, \partial_k f \rangle \partial_k \\ &= (\partial_i \log \lambda) \partial_j + (\partial_j \log \lambda) \partial_i - \langle \partial_i, \partial_j \rangle \text{grad} \log \lambda. \end{aligned}$$

Wegen $D_{\partial_i} \partial_j = 0$ folgt dann auch

$$\nabla_{\partial_i}^f \partial_j - D_{\partial_i} \partial_j = (\partial_i \log \lambda) \partial_j + (\partial_j \log \lambda) \partial_i - \langle \partial_i, \partial_j \rangle \text{grad} \log \lambda.$$

Weil beide Seiten in ∂_i, ∂_j bilinear bezüglich der Multiplikation mit *Funktionen* sind, gilt dieselbe Identität, wenn man ∂_i, ∂_j durch beliebige Vektorfelder X, Y ersetzt.

Zu (iii):

$$\begin{aligned}
\Delta^f h &= \sum \langle \nabla_{\partial_k}^f \text{grad}^f h, \partial_k \rangle \\
&= \sum \langle D_{\partial_k} \text{grad}^f h, \partial_k \rangle + \sum \langle \partial_k(\log \lambda) \text{grad}^f h, \partial_k \rangle \\
&\quad + \sum \langle \text{grad}^f h \cdot (\log \lambda) \partial_k, \partial_k \rangle - \sum \langle \text{grad}^f h, \partial_k \rangle \langle \text{grad}(\log \lambda), \partial_k \rangle \\
&= \sum \langle D_{\partial_k} \text{grad}^f h, \partial_k \rangle + \langle \text{grad}^f h, \text{grad}(\log \lambda) \rangle \\
&\quad + m \text{grad}^f h \cdot (\log \lambda) - \langle \text{grad}^f h, \text{grad}(\log \lambda) \rangle \\
&= \sum \langle D_{\partial_k} \text{grad}^f h, \partial_k \rangle + m \langle \text{grad}^f h, \text{grad}(\log \lambda) \rangle \\
&= \sum \langle D_{\partial_k} (\lambda^{-2} \text{grad} h), \partial_k \rangle + m \langle \text{grad}^f h, \text{grad}(\log \lambda) \rangle \\
&= \lambda^{-2} \sum \langle D_{\partial_k} \text{grad} h, \partial_k \rangle - 2\lambda^{-3} \sum (\partial_k \lambda) \langle \text{grad} h, \partial_k \rangle \\
&\quad + m \langle \text{grad}^f h, \text{grad}(\log \lambda) \rangle \\
&= \lambda^{-2} \Delta h + (m-2) \langle \text{grad}^f h, \text{grad}(\log \lambda) \rangle \\
&= \lambda^{-2} (\Delta h + (m-2) \langle \text{grad} h, \text{grad}(\log \lambda) \rangle).
\end{aligned}$$

□

Für $m = 2$ und konformes f gilt also $\Delta^f h = 0 \iff \Delta h = 0$, wir erhalten den

Satz 32. *Eine konform immensierte Fläche $(M \subset \mathbb{R}^2, f, \xi)$ im \mathbb{R}^3 ist genau dann minimal, wenn $\Delta f = \partial_x^2 f + \partial_y^2 f = 0$.*

Beispiel 41 (Wendelfläche). Die Wendelfläche

$$f(x, y) = (ax, a \sinh y \cos x, a \sinh y \sin x), \quad a > 0,$$

ist konform und $\Delta f = 0$, also ist f eine Minimalfläche.

Beweis.

$$\begin{aligned}
f_x &= (a, -a \sinh y \sin x, a \sinh y \cos x), \\
f_y &= (0, a \cosh y \cos x, a \cosh y \sin x)
\end{aligned}$$

sind offenbar orthogonal, und

$$\|f_x\|^2 = a^2(1 + \sinh^2 y) = a^2 \cosh^2 y = \|f_y\|^2.$$

Schließlich ist

$$f_{xx} + f_{yy} = (0, -a \sinh y \cos x, -a \sinh y \sin x) + (0, a \sinh y \cos x, a \sinh y \sin x) = 0.$$

□

Ist (M, f, ξ) eine immensierte Hyperfläche, und $x : M \supset U \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Karte, so ist $x : (U, f^* \langle \cdot, \cdot \rangle) \rightarrow (x(U), (f \circ x^{-1})^* \langle \cdot, \cdot \rangle)$ eine Isometrie und deshalb für jede Funktion $h : U \rightarrow \mathbb{R}$

$$(\Delta^f h) \circ x^{-1} = \Delta^{(f \circ x^{-1})}(h \circ x^{-1}).$$

In *konformen* Karten ist der Laplaceoperator also mit der Formel (52) zu berechnen. Dieser Umstand gewinnt besondere Bedeutung durch den folgenden Satz über die Existenz konformer Karten

Satz (Korn, Lichtenstein). Sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine immensierte Fläche (zweidimensional!). Dann gibt es um jeden Punkt von M eine konforme Karte.

Der Beweis dieses Satzes ist sehr schwierig. Er vereinfacht sich kolossal, wenn man schon weiß, daß $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Minimalfläche ist. Aber selbst dann braucht man noch Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten, und wir vertagen das auf später.

Lange Zeit (1775-1835) kannte man nur das Katenoid und die Wendelfläche als Minimalflächen. Ein weiteres Beispiel ist die Enneperfläche. Dieses und eine Vielzahl weiterer Beispiele findet man mit Hilfe der komplexen Funktionentheorie, vgl. nächsten Abschnitt.

Beispiel 42 (Enneperfläche). Die Immersion $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$f(x, y) = \left(x - \frac{x^3}{3} + xy^2, y - \frac{y^3}{3} + yx^2, x^2 - y^2\right)$$

ist nicht konform, aber minimal. Wir kommen im übernächsten Abschnitt darauf zurück.

21 Intermezzo: Komplexe Funktionentheorie

Ich gebe hier einen Minikurs in Funktionentheorie. Details sind oft nur skizziert,

Definition. Eine Funktion $f : \mathbb{C} \supset G \rightarrow \mathbb{C}$ auf einer offenen Teilmenge G von \mathbb{C} heißt *holomorph*, wenn sie in jedem Punkt $z_0 \in G$ *komplex differenzierbar* ist, d.h. wenn

$$f'(z_0) := \lim_{z_0 \rightarrow z} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existiert.

Beispiel 43 (Komplex-analytische Funktionen). Eine Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ ist holomorph, wenn sie sich um jeden Punkt von G in eine konvergente Potenzreihe entwickeln läßt, d.h. wenn sie komplex-analytisch ist. (Beweis wie im Reellen). Insbesondere sind komplexe Polynome, rationale Funktionen oder $e^z = \sum \frac{z^k}{k!}$ holomorph.

Bemerkung. Eine \mathbb{C} -lineare Abbildung von \mathbb{C} nach \mathbb{C} wird gegeben durch eine komplexe $(1, 1)$ -Matrix $(w) = (a + ib)$, also durch die Multiplikation mit $w = a + ib$. (a, b seien dabei reell). Identifiziert man \mathbb{C} mit \mathbb{R}^2 vermöge $x + iy \leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, so liefert das natürlich auch eine \mathbb{R} -lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit der Matrix

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Umgekehrt ist ein Endomorphismus des \mathbb{R}^2 genau dann auch \mathbb{C} -linear, wenn seine Matrix von dieser Form ist.

Ist nun $f : \mathbb{R}^2 \supset G \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine (reell-)differenzierbare Funktion mit Komponentenfunktionen $u, v : G \rightarrow \mathbb{R}$, also $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, so ist

$$Df = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}.$$

Satz 33. Sei $f = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = u + iv : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Dann gilt

(i) Ist f holomorph, so auch reell differenzierbar und es gelten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\boxed{u_x = v_y, \quad u_y = -v_x.} \quad (56)$$

(ii) Sind u und v stetig partiell differenzierbar und gilt (56), so ist f holomorph.

Der Beweis folgt leicht durch Vergleich der beiden Definitionen für reelle bzw. komplexe Differenzierbarkeit. Es ist sogar wahr, daß holomorphe Funktionen immer auch stetig differenzierbar sind. Wir werden das im weiteren kommentarlos benutzen, aber der Beweis ist schwierig. Die umgekehrte Frage, ob (ii) \implies (i) auch ohne Voraussetzung der Stetigkeit gilt, ist offen.

Ist f holomorph, so ist also

$$f' = u_x - iu_y = v_y + iv_x.$$

Beispiel 44. Für $f(z) = z^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy)$ oder $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ prüft man leicht die Cauchy-Riemannschen Gleichungen nach.

Satz 34 (Lokale Existenz von Stammfunktionen). Sei f holomorph im einfach-zusammenhängenden Gebiet G . Dann gibt es auf G eine holomorphe Funktion F mit $F' = f$.

Beweis. Sei $f = u + iv$. Gesucht ist ein holomorphes $F = U + iV$ mit $U_x = u$ und $-U_y = v$. Weil aber die Integrabilitätsbedingung $u_y = -v_x$ erfüllt ist, gibt es ein solches U . Ebenso gibt es V mit $V_x = v, V_y = u$. Natürlich erfüllt $F = U + iV$ dann die Cauchy-Riemannschen Bedingungen, ist also holomorph. \square

Wir benötigen nun den folgenden Spezialfall des Stokesschen oder Gaußschen Integralsatzes aus der Analysis III, der auch bei der isoperimetrischen Ungleichung eine Rolle spielte:

Satz 35 (Greenscher Satz). Sei B ein kompakter Bereich in der Ebene \mathbb{R}^2 mit glatter Randkurve ∂B , die so parametrisiert sei, daß B zur Linken liegt. Seien p und q auf einer offenen Umgebung von B definierte (reelle) Funktionen. Dann gilt

$$\int_{\partial B} p dx + q dy = \int_B (-p_y + q_x) dx dy.$$

Das linke Kurvenintegral ist nach Definition

$$\int_{\partial B} p dx + q dy = \int_a^b (p(x(t), y(t))\dot{x}(t) + q(x(t), y(t))\dot{y}(t)) dt,$$

wenn $(x(t), y(t)), a \leq t \leq b$ eine Parametrisierung von ∂B ist.

Der Satz bleibt richtig, wenn B mehrere Randkomponenten hat, die dann alle so zu parametrisieren sind, daß B zur Linken liegt.

Komplexe Kurvenintegrale werden wie folgt definiert:

Definition. Sei $f : \mathbb{C} \supset G \rightarrow \mathbb{C}$ eine (stetige) Funktion, $f(x+iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ mit reellen u, v , und sei C eine Kurve in G mit Parametrisierung $z = x + iy : [a, b] \rightarrow G$. Dann ist

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &:= \int_a^b f(z(t)) \dot{z}(t) dt \\ &:= \int_a^b (u(x(t), y(t)) \dot{x}(t) - v(x(t), y(t)) \dot{y}(t)) dt \\ &\quad + i \int_a^b (u(x(t), y(t)) \dot{y}(t) + v(x(t), y(t)) \dot{x}(t)) dt \\ &= \int_C (u dx - v dy) + i \int_C (u dy + v dx). \end{aligned}$$

Beispiel 45. Seien $z_0 \in \mathbb{C}$, $G = \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ und $f(z) = \frac{1}{z-z_0}$. Sei weiter K ein Kreis vom Radius r um z_0 mit Parametrisierung $z(t) = z_0 + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Dann ist

$$\int_K \frac{dz}{z-z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{z(t)-z_0} \dot{z}(t) dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}} rie^{it} dt = 2\pi i.$$

Beispiel 46. Hat $f = u + iv$ eine Stammfunktion $F = U + iV$, so ist

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= \int_C (u dx - v dy) + i \int_C (u dy + v dx) \\ &= \int_C (U_x dx + U_y dy) + i \int_C (V_y dy + V_x dx) = F(z(b)) - F(z(a)). \end{aligned}$$

Der fundamentale Satz der komplexen Funktionentheorie ist der folgende:

Satz 36 (Cauchyscher Integralsatz). Seien $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $B \subset G$ ein kompakter Bereich mit glattem Rand ∂B , dann gilt

$$\int_{\partial B} f(z) dz = 0.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \int_{\partial B} f(z) dz &= \int_{\partial B} (u dx - v dy) + i \int_{\partial B} (u dy + v dx) \\ &= \int_{\partial B} (-u_y - v_x) dx dy + i \int_{\partial B} (u_x + v_y) dx dy = 0. \end{aligned}$$

□

Eine überraschende Konsequenz ergibt sich, wenn man den Cauchyschen Satz anwendet auf $\tilde{f}(z) := \frac{f(z)}{z-z_0}$ für ein z_0 im Innern von B . Natürlich ist das in B im allgemeinen nicht mehr differenzierbar, und wir ersetzen deshalb B durch $\tilde{B} = B \setminus D_r(z_0)$, wobei $D_r(z_0)$ eine Kreisscheibe vom (kleinen) Radius r um z_0 ist. Dann folgt aus dem Cauchyschen Integralsatz

$$0 = \int_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz - \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(z)}{z-z_0} dz$$

oder

$$\int_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(z)}{z-z_0} dz \approx \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(z_0)}{z-z_0} dz = f(z_0) 2\pi i.$$

(Natürlich erfordert der Grenzprozeß $r \rightarrow 0$ eine genauere Analyse.) Man bekommt

Satz 37 (Cauchysche Integralformel). Sei $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $B \subset G$ ein kompakter Bereich mit glattem Rand ∂B , dann gilt für jedes $z_0 \in \overset{\circ}{B}$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(z) dz}{z - z_0}.$$

Die Werte von f im Innern von B sind also durch die Randwerte vollständig bestimmt. Man stelle sich ein Analogon für reelle Funktionen vor!

Wir wenden nun die Cauchysche Integralformel an auf den Fall $B = D_r(a)$ und schreiben zur Abkürzung $K = \partial D_r(a)$.

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f(z)}{z - a} \frac{1}{1 - \frac{z_0 - a}{z - a}} dz.$$

Beachte, daß $\left| \frac{z_0 - a}{z - a} \right| < 1$ für $z \in K$. Daher

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f(z)}{z - a} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z_0 - a}{z - a} \right)^k dz = \sum_{k=0}^{\infty} \overbrace{\left(\frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f(z)}{(z - a)^{k+1}} dz \right)}{=: a_k} (z_0 - a)^k.$$

Wir sehen, daß sich f um a in eine konvergente Taylorreihe entwickeln läßt. Insbesondere ist f also beliebig oft differenzierbar. Auch dies ist völlig anders als bei reellen differenzierbaren Funktionen:

Satz 38 (Taylorentwicklung). Jede holomorphe Funktion ist komplex-analytisch.

Mit denselben Methoden und nur wenig Mehraufwand kann man beweisen: Ist f holomorph auf einer offenen Umgebung der Kreisscheibe $D_r(a)$ mit möglicher Ausnahme des Punktes a selbst (man sagt dann, f hat in a eine *isolierte Singularität*), so besitzt es eine Darstellung als sogenannte *Laurentreihe*:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - a)^k,$$

Die isolierte Singularität a heißt ein *Pol der Ordnung* $k > 0$, wenn $a_{-k} \neq 0$ und $a_{-m} = 0$ für alle $m > k$. Dann ist also $f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^k}$ mit auch in a holomorphem $g(z)$. Sind unendlich viele a_k mit negativem k von null verschieden, so heißt a eine *wesentliche Singularität*. Eine *meromorphe* Funktion ist eine holomorphe Funktion mit isolierten Singularitäten, die alle nur Pole sind.

Beispiel 47. Wegen der Existenz der Taylorentwicklung hat eine holomorphe Funktion nur isolierte Nullstellen ganzzahliger endlicher Ordnung. Daher ist der Quotient holomorpher Funktionen eine meromorphe Funktion.

Ist f holomorph auf einer offenen Umgebung des kompakten Bereichs B mit glattem Rand mit Ausnahme einer einzigen isolierten Singularität $a \in \overset{\circ}{B}$, so findet man wie im Beweis der Cauchyschen Integralformel $\int_{\partial B} f(z) dz = \int_K f(z) dz$, wobei K ein kleiner Kreisweg um a ist. Weil aber alle $a_k (z - a)^k$ mit $k \neq -1$ offensichtlich Stammfunktionen haben, bleibt nur

$$\int_K \frac{a_{-1}}{z - a} dz = 2\pi i a_{-1}.$$

Der Koeffizient $a_1 = \text{Res}_a(f)$ heißt das *Residuum* von f in a . Besitzt f im Innern von B endlich viele isolierte Singularitäten, so folgt der

Satz 39 (Residuensatz).

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} f(z) dz = \sum_{f \text{ in } a \text{ singularär}} \text{Res}_a(f).$$

Aus diesem Satz ergeben sich Cauchyscher Integralsatz und -formel ganz einfach.

Wir schließen mit einer hübschen Konsequenz aus der Taylorentwicklung. Ist f holomorph in ganz \mathbb{C} (eine sogenannte *ganze Funktion*) und beschränkt, also etwa $|f| \leq M$, so folgt aus der Integralformel für die Koeffizienten der Taylorentwicklung um 0:

$$|a_k| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{dz}{z^{k+1}} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{|M|}{r^{k+1}} 2r\pi = \frac{M}{r^k}.$$

Da aber r beliebig ist, folgt $a_k = 0$ für alle $k > 0$: Die einzigen beschränkten holomorphen Funktionen auf ganz \mathbb{C} sind die Konstanten. Ist nun $p(z)$ ein Polynom von positivem Grad, so sieht man leicht, daß $\lim_{z \rightarrow \infty} |p(z)| = \infty$. Deshalb ist $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{p(z)} = 0$. Hätte $p(z)$ keine Nullstellen, so wäre deshalb $f(z) = \frac{1}{p(z)}$ eine ganze beschränkte Funktion, also konstant. Man erhält einen Widerspruch und hat den Fundamentalsatz der Algebra bewiesen.

22 Minimalflächen und Funktionentheorie

Auf $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ definieren wir die *Wirtinger-Operatoren*

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Beispiel 48. Für $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist $\frac{\partial}{\partial z} f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}^n$.

Beispiel 49. Es ist

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z} \partial z} = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) = \frac{1}{4} \Delta f.$$

Beispiel 50. Für $f = u + iv : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f = \frac{1}{2} ((u_x - v_y) + i(u_y + v_x)).$$

Also ist f holomorph genau dann, wenn $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f = 0$.

Beispiel 51. Sei $f = u + iv : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} f &= \frac{\partial}{\partial z} u + i \frac{\partial}{\partial z} v = \frac{1}{2} (u_x - i u_y) + i \frac{1}{2} (v_x - i v_y) \\ &= \frac{1}{2} (u_x - i u_y) + i \frac{1}{2} (-u_y - i u_x) = (u_x - i u_y) = 2 \frac{\partial}{\partial z} u. \end{aligned}$$

Sei nun $f : \mathbb{R}^2 \supset M \rightarrow \mathbb{R}^3$ und $\Phi := \frac{\partial}{\partial z} f : M \rightarrow \mathbb{C}^3$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \sum \Phi_k^2 &= \frac{1}{4} (\|\frac{\partial}{\partial x} f\|^2 - \|\frac{\partial}{\partial y} f\|^2) - \frac{i}{2} \langle \frac{\partial}{\partial x} f, \frac{\partial}{\partial y} f \rangle, \\ \sum |\Phi_k|^2 &= \frac{1}{4} (\|\frac{\partial}{\partial x} f\|^2 + \|\frac{\partial}{\partial y} f\|^2). \end{aligned}$$

Also ist f genau dann konform und eine Immersion, wenn

$$\sum \Phi_k^2 = 0 \text{ und } \sum |\Phi_k|^2 > 0. \quad (57)$$

Die erstere Bedingung besagt, daß Φ *isotrop* ist. Nehmen wir an, daß (57) gilt, so ist f (versehen mit einem Einheitsnormalenfeld) minimal, genau dann, wenn f harmonisch ist, also wenn $\frac{\partial}{\partial z} \Phi = 0$. Mit anderen Worten ist f genau dann minimal, wenn die Komponenten von Φ holomorph sind.

Sei umgekehrt

$$\Phi : \mathbb{C} \supset M \rightarrow \mathbb{C}^3 \text{ holomorph mit (57),}$$

und F eine holomorphe Stammfunktion, d.h. $\frac{\partial}{\partial z} F = \Phi$. Im Hinblick auf Beispiel 51 setzen wir $f = 2 \operatorname{Re} F$ und erhalten eine konforme minimale Immersion. Die Existenz der Stammfunktion F zu Φ ist insbesondere garantiert, wenn M einfach zusammenhängend ist.

Wie findet man Tripel holomorpher Funktionen $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$ mit (57)? Setzt man $h := \Phi_1 - i\Phi_2$ und $g := \frac{\Phi_3}{\Phi_1 - i\Phi_2}$, so sind h holomorph und g meromorph (holomorph bis auf Polstellen). Umgekehrt errechnen sich die Φ_k aus g, h wie folgt

$$\Phi_1 = \frac{1}{2}(1 - g^2)h \quad (58)$$

$$\Phi_2 = \frac{i}{2}(1 + g^2)h \quad (59)$$

$$\Phi_3 = gh. \quad (60)$$

Hat man eine holomorphe Funktion h und eine meromorphe Funktion g und definiert die Φ_k wie oben, so sind die Gleichungen (57) automatisch erfüllt. Damit die Φ_k holomorph werden, müssen die Pole von g durch Nullstellen von h kompensiert werden. Also müssen Pole der Ordnung m von g gerade Nullstellen der Ordnung $2m$ von h sein. Andere Nullstellen darf h nicht haben, um die zweite Gleichung von (57) zu wahren. Diese Nullstellen-Polstellen-Relation ist die einzige Bedingung an das Paar holomorphe/meromorphe Funktion (h, g) , damit es eine Minimalfläche definiert.

Satz 40 (Weierstraß-Darstellung von Minimalflächen). *Auf $M \subset \mathbb{C}$ seien eine holomorphe Funktion h und eine meromorphe Funktion g gegeben. Die Nullstellen von h seien Pole von g . Hat g in a einen Pol der Ordnung m , so habe h in a eine Nullstelle der Ordnung $2m$. Seien Φ_1, Φ_2, Φ_3 definiert wie in (58), (59), (60), und sei $F : M \rightarrow \mathbb{C}^3$ eine holomorphe Stammfunktion von $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$. Dann ist $f := F + \bar{F} = 2 \operatorname{Re} F : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine konform immensierte Minimalfläche.*

Bemerkung. Dieser Satz gewinnt besondere Bedeutung durch folgendes (tiefliegende) Ergebnis der Funktionentheorie: Ist (M, f, ξ) eine Minimalfläche im \mathbb{R}^3 , so gibt es eine konforme surjektive Immersion (sogar eine sogenannte Überlagerung) $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$, wobei $\tilde{M} = \mathbb{C}$ oder $\tilde{M} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. Dann ist insbesondere $f(M) = f \circ \pi(\tilde{M})$.

In diesem Sinne besitzt also „jede“ Minimalfläche eine Weierstraßdarstellung.

Beispiel 52 (Enneperfläche). Sei $M = \mathbb{C}$, und seien $g(z) = z$, $h(z) = 1$. Die Bedingungen des Satzes sind trivialerweise erfüllt. Man erhält

$$\begin{aligned}\Phi &= \left(\frac{1}{2}(1 - z^2), \frac{i}{2}(1 + z^2), z\right) \\ F &= \left(\frac{1}{2}z - \frac{1}{6}z^3, \frac{i}{2}z + \frac{i}{6}z^3, \frac{1}{2}z^2\right), \\ f &= \left(x - \frac{x^3}{3} + xy^2, -y + \frac{y^3}{3} - x^2y, x^2 - y^2\right).\end{aligned}$$

Beispiel 53 (Scherksche Fläche). Wir wählen

$$g(z) = z, \quad h(z) = \frac{4}{1 - z^4}.$$

Die Berechnung von f ist etwas aufwendig, vgl. Do Carmo. Man erhält eine Fläche, die man auch als Graph von

$$\log \frac{\cos y}{\cos x}$$

parametrisieren kann. Sie ist definiert über den schwarzen Feldern eines „Schachbretts“ auf der reellen Ebene, für die der Quotient der Cosinus-Terme positiv ist.

Assoziierte Familie und konjugierte Minimalfläche. Ersetzt man h durch $e^{-i\alpha}h$, so erhält man eine vom Parameter α abhängige *Schar* von Minimalflächen, die sogenannte *assoziierte Familie* der Fläche für (h, g) . Offenbar geht F in $F_\alpha := e^{-i\alpha}F$ und f in

$$\begin{aligned}f_\alpha &= e^{-i\alpha}F + \overline{e^{-i\alpha}F} = (\cos \alpha - i \sin \alpha)F + (\cos \alpha + i \sin \alpha)\bar{F} \\ &= 2(\cos \alpha \operatorname{Re} F + \sin \alpha \operatorname{Im} F).\end{aligned}$$

Der Wert $\alpha = \pi/2$ liefert die sogenannte *konjugierte* Minimalfläche $\tilde{f} = f_{\pi/2} = 2 \operatorname{Im} F$. Die Flächen der assoziierten Familie erhält man als reelle Linearkombinationen

$$f_\alpha = (\cos \alpha)f + (\sin \alpha)\tilde{f}.$$

Beispiel 54. Das Katenoid

$$f(x, y) = a(x, \cosh x \cos y, \cosh x \sin y)$$

ist der doppelte Realteil von

$$F(z) = \frac{a}{2}(z, \cos(iz), -\sin(iz)),$$

denn

$$\begin{aligned}\cos(iz) &= \cos(ix - y) = \cos(ix) \cos y + \sin(ix) \sin y = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y, \\ -\sin(iz) &= -\sin(ix - y) = \cos(ix) \sin y - \sin(ix) \cos y = \cosh x \sin y - i \sinh x \cos y.\end{aligned}$$

Die konjugierte Fläche ist

$$\tilde{f} = a(y, \sinh x \sin y, -\sinh x \cos y).$$

Das ist eine Wendelfläche. Man kann also diese Wendelfläche durch eine Schar von Minimalflächen in das (unendlich oft überlagerte) Katenoid deformieren.

23 Lieklammer

Das Material dieser Vorlesung ist bereits in den Übungen ausführlicher behandelt.

Seien M eine Mannigfaltigkeit. Wir bezeichnen

$$C^\infty(M) := \text{Ring der } C^\infty\text{-Funktionen auf } M, \quad (61)$$

$$\Gamma(TM) := C^\infty(M)\text{-Modul der } C^\infty\text{-Vektorfelder auf } M. \quad (62)$$

Definition. Seien $X, Y \in \Gamma(TM)$. Dann gibt es genau ein Vektorfeld Z auf M , so daß für alle $\phi \in C^\infty(M)$ gilt

$$Z \cdot \phi = X \cdot (Y \cdot \phi) - Y \cdot (X \cdot \phi).$$

Dabei bezeichnet $X \cdot \phi = d\phi(X)$ die Richtungsableitung. Z heißt die *Lieklammer* von X und Y und wird mit $[X, Y]$ bezeichnet.

Beweis. Sei x eine Karte. Ist $Z = \sum Z^i \frac{\partial}{\partial x_i}$, so ist $Z^i = dx_i(Z) = Z \cdot x_i$. Daher gibt es höchstens ein solches Z .

Setzt man andererseits im Definitionsbereich U der Karte x

$$Z^i := X \cdot (Y \cdot x_i) - Y \cdot (X \cdot x_i)$$

so definiert $Z = \sum Z^i \frac{\partial}{\partial x_i}$ auf U ein differenzierbares Vektorfeld mit der gewünschten Eigenschaft:

$$X \cdot (Y \cdot \phi) = X \cdot \left(\sum Y^j \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) \quad (63)$$

$$= \sum (X \cdot Y^j) \frac{\partial \phi}{\partial x_j} + \sum Y^i X^j \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j}, \quad (64)$$

also

$$\begin{aligned} X \cdot (Y \phi) - Y \cdot (X \phi) &= \sum (X \cdot (Y \cdot x_i) - Y \cdot (X \cdot x_i)) \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \\ &= Z \cdot \phi. \end{aligned}$$

Im Überlappungsbereich von zwei Karten sind die so definierten Vektorfelder wegen der schon gezeigten Eindeutigkeit gleich, und man erhält ein global definiertes Z . \square

Durch einfaches Rechnen folgen die nachstehenden Rechenregeln:

Lemma 12.

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right] = 0 \text{ für Gaußsche Basisfelder,}$$

$$[X, Y] = -[Y, X],$$

$$[X, Y] \text{ ist } \mathbb{R}\text{-bilinear,}$$

$$[X, \phi Y] = \phi[X, Y] + (X \cdot \phi)Y,$$

$$[\phi X, Y] = \phi[X, Y] - (Y \cdot \phi)X,$$

$$[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0 \text{ (Jacobi-Identität).}$$

Beweis. Wir zeigen nur die Jacobi-Identität. Es gilt

$$\begin{aligned}
& [\phi X, [Y, Z]] + [Z, [\phi X, Y]] + [Y, [Z, \phi X]] \\
&= \phi[X, [Y, Z]] - ([Y, Z] \cdot \phi)X + [Z, \phi[X, Y]] - (Y \cdot \phi)X + [Y, \phi[Z, X]] + (Z \cdot \phi)X \\
&= \phi[X, [Y, Z]] - ([Y, Z] \cdot \phi)X + \phi[Z, [X, Y]] + (Z \cdot \phi)[X, Y] - (Y \cdot \phi)[Z, X] - Z \cdot (Y \cdot \phi)X \\
&\quad + \phi[Y, [Z, X]] + (Y \cdot \phi)[Z, X] + (Z \cdot \phi)[Y, X] + Y \cdot (Z \cdot \phi)X \\
&= \phi([X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]]) \\
&\quad + (-([Y, Z] \cdot \phi + Y \cdot (Z \cdot \phi)X - Z \cdot (Y \cdot \phi)X))X \\
&\quad + (Z \cdot \phi)[X, Y] - (Y \cdot \phi)[Z, X] + (Y \cdot \phi)[Z, X] + (Z \cdot \phi)[Y, X] \\
&= \phi([X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]]).
\end{aligned}$$

Aus Symmetriegründen ist klar, daß die linke Seite auch $C^\infty(M)$ -linear in Y und Z ist. Weil aber jedes Vektorfeld lokal eine $C^\infty(M)$ -Linearkombination von Gaußfeldern ist, und die linke Seite auf Gaußfeldern verschwindet, verschwindet sie auf allen Vektorfeldern. \square

Lemma 13. Sei $f : M \rightarrow \tilde{M}$ eine differenzierbare Abbildung. Seien X, Y Vektorfelder auf M und \tilde{X}, \tilde{Y} Vektorfelder auf \tilde{M} , so daß gilt

$$\tilde{X} \circ f = df(X), \quad \tilde{Y} \circ f = df(Y).$$

In diesem Fall nennt man X und \tilde{X} bzw. Y und \tilde{Y} f -verwandt. Dann sind auch $[X, Y]$ und $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$ f -verwandt.

Beweis.

$$\begin{aligned}
\tilde{X}(\tilde{Y} \cdot \phi) &= df(X)(\tilde{Y} \cdot \phi) = X \cdot (\tilde{Y} \cdot \phi \circ f) \\
&= X \cdot (df(Y) \cdot \phi) = X \cdot (Y \cdot (\phi \circ f)).
\end{aligned}$$

Daher

$$\begin{aligned}
\tilde{X}(\tilde{Y} \cdot \phi) - \tilde{Y}(\tilde{X} \cdot \phi) &= X \cdot (Y \cdot (\phi \circ f)) - Y \cdot (X \cdot (\phi \circ f)) = [X, Y] \cdot (\phi \circ f) \\
&= df([X, Y]) \cdot \phi
\end{aligned}$$

\square

24 Levi-Civita-Ableitung

Sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Immersion, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ die induzierte 1. Fundamentalform und ∇ die Levi-Civita-Ableitung, also

$$\nabla_v Y = (D_v df(Y))^T \tag{65}$$

für $v \in TM$ und $Y \in \Gamma(TM)$.

Bevor wir auf die Rechenregeln eingehen, beweisen wir ein Lemma, das wir gelegentlich schon implizit benutzt haben:

Lemma 14. Sei $S : \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$ eine \mathbb{R} -lineare Abbildung. Es gelte für alle $X \in \Gamma(TM)$ und $p \in M$

$$S(\phi X) = \phi SX.$$

Dann hängt $(SX)_p$ nur vom Wert X_p von X an der Stelle p ab. Also induziert S für jedes $p \in M$ eine eindeutig bestimmte \mathbb{R} -lineare Abbildung

$$S_p : T_p M \rightarrow T_p M, X_p \mapsto (SX)_p.$$

Bemerkungen. Das Lemma gilt entsprechend auch für multilineare Abbildungen. Der Zielraum $\Gamma(TM)$ läßt sich ersetzen durch den Raum $\Gamma(V)$ der Schnitte in einem beliebigen Vektorbündel V über M . Man sagt dann auch S ist *tensoriell* oder ein *Tensor*.

Beweis des Lemmas. In einer Karte $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ um p sei $X = \sum X^j \frac{\partial}{\partial x_j}$, genauer $X|_U = \sum X^j \frac{\partial}{\partial x_j}$. Dann gilt

$$(SX)|_U = S\left(\sum X^j \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \sum X^j S\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right),$$

und deshalb

$$(SX)_p = \sum X^j(p) \left(S\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\right)_p.$$

Also hängt $(SX)_p$ nur ab vom Wert von X in p .

Dieser Beweis ist falsch: Unter den gemachten Voraussetzungen ist S nur für globale Vektorfelder definiert, so daß $S(\sum X^j \frac{\partial}{\partial x_j})$ gar nicht erklärt ist.

Zur Rechtfertigung läßt sich anführen: 1. In allen Anwendungen ist klar, wie S auf lokal definierten Vektorfeldern operiert. 2. Aus der Eigenschaft $S(\phi X) = \phi SX$ kann man schließen, daß S „lokal“ ist, d.h. man kann für jede offene Teilmenge $U \subset M$ ein eindeutiges $S^U : \Gamma(TU) \rightarrow \Gamma(TU)$ definieren, so daß $S^U(X|_U) = (SX)|_U$. \square

Wegen dieses Lemmas kann man die Levi-Civita-Ableitung einfach als Abbildung $\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$ mit folgenden Eigenschaften auffassen:

Lemma 15. Für $X, X_1, X_2, Y, Y_1, Y_2 \in \Gamma(TM)$ und $\phi \in C^\infty(M)$ gilt

$$\nabla_{X_1+X_2} Y = \nabla_{X_1} Y + \nabla_{X_2} Y, \quad \nabla_{\phi X} Y = \phi \nabla_X Y \quad (66)$$

$$\nabla_X (Y_1 + Y_2) = \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2, \quad \nabla_X (\phi Y) = (X \cdot \phi) Y + \phi \nabla_X Y \quad (67)$$

Beweis. Triviale Folge aus (65) und den Rechenregeln für Richtungsableitungen im \mathbb{R}^n . \square

Eine Abbildung $\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$ mit den vorstehenden Eigenschaften nennt man eine *kovariante Ableitung* oder auch einen *linearen Zusammenhang* auf M . Speziellere Eigenschaften der Levi-Civita-Ableitung gibt das folgende

Lemma 16. Sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Immersion mit 1. Fundamentalform $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und Levi-Civita-Ableitung ∇ . Dann gilt für Vektorfelder X, Y, Z auf M :

(i) *Ricci-Identität*

$$Z \cdot \langle X, Y \rangle = \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle \quad (68)$$

(ii) *Torsionsfreiheit*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \quad (69)$$

(iii) *Levi-Civita-Eigenschaft*

$$\begin{aligned} 2 \langle X, \nabla_Z Y \rangle = & Z \cdot \langle X, Y \rangle + Y \cdot \langle X, Z \rangle - X \cdot \langle Y, Z \rangle \\ & + \langle Z, [X, Y] \rangle + \langle Y, [X, Z] \rangle - \langle X, [Y, Z] \rangle \end{aligned} \quad (70)$$

Bemerkung. Natürlich ist $\nabla_Z Y$ durch die Werte $2 \langle X, \nabla_Z Y \rangle$ eindeutig festgelegt. Aber die rechte Seite der Levi-Civita-Gleichung benutzt von f nur die 1. Fundamentalform. Hat man diese, so kann man also ∇ auch ohne tangentielle Projektion sozusagen ganz innerhalb von M berechnen.

Beweis. Zu (i).

$$\begin{aligned} Z \cdot \langle X, Y \rangle &= Z \cdot \langle df(X), df(Y) \rangle \\ &= \langle D_Z df(X), df(Y) \rangle + \langle X, D_Z df(Y) \rangle \\ &= \langle df(D_Z df(X))^T, df(Y) \rangle + \langle X, df(D_Z df(Y))^T \rangle \\ &= \langle df(\nabla_Z X), df(Y) \rangle + \langle X, df(\nabla_Z Y) \rangle \\ &= \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle \end{aligned}$$

Zu (ii).

Für $T(X, Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$ folgt durch kurze Rechnung

$$T(\phi X, Y) = T(X, \phi Y) = \phi T(X, Y).$$

Also ist T ein Tensor, der sogenannte Torsionstensor. Weil aber für Gaußsche Basisfelder,

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = (D_{\frac{\partial}{\partial x_i}} df(\frac{\partial}{\partial x_j}))^T = (\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j})^T,$$

ist $T(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}) = 0$ und deshalb $T = 0$.

Zu (iii).

$$\begin{aligned} Z \cdot \langle X, Y \rangle &= \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle \\ Y \cdot \langle Z, X \rangle &= \langle \nabla_Y Z, X \rangle + \langle Z, \nabla_Y X \rangle \\ X \cdot \langle Y, Z \rangle &= \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle \end{aligned}$$

Daher

$$\begin{aligned} Z \cdot \langle X, Y \rangle + Y \cdot \langle Z, X \rangle - X \cdot \langle Y, Z \rangle &= \\ = \langle \nabla_Z X, Y \rangle - \langle Y, \nabla_X Z \rangle + \langle Z, \nabla_Y X \rangle - \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle + \langle \nabla_Y Z, X \rangle &= \\ = \langle Y, [Z, X] \rangle + \langle Z, [Y, X] \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle + \langle X, [Y, Z] \rangle + \nabla_Z Y &= \\ = \langle Y, [Z, X] \rangle - \langle Z, [X, Y] \rangle + \langle X, [Y, Z] \rangle + 2 \langle X, \nabla_Z Y \rangle. & \end{aligned}$$

□

Lokale Beschreibung: Christoffelsymbole.

Sei $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Karte für M . Definiere die Christoffel-Symbole $\Gamma_{ij}^k \in C^\infty(U)$ von ∇ durch

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Dann gilt für $X = \sum X^i \frac{\partial}{\partial x_i}$ und $Y = \sum Y^i \frac{\partial}{\partial x_i}$

$$\nabla_X Y = \sum_k (X \cdot Y^k + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k X^i Y^j) \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Aus der Torsionsfreiheit folgt

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k.$$

Beispiel 55. Wir betrachten $SO(n)$ als Untermannigfaltigkeit im Raum $M(n \times n)$ der quadratischen n - reihigen Matrizen mit dem kanonischen Skalarprodukt

$$\langle A, B \rangle = \text{Spur}(A^* B).$$

Der Tangentialraum in $A \in SO(n)$ ist

$$T_A SO(n) = \{AY; Y^* = -Y\},$$

vgl. 10. Vorlesung. Man verifiziert

$$\perp_A SO(n) = \{AY; Y^* = Y\}.$$

Die tangentielle Komponente von Z an der Stelle A ist

$$Z^T = A \frac{1}{2} (A^* Z - (A^* Z)^*).$$

Beweis. Sei $Y^* = -Y, Z^* = Z$. Dann

$$-\text{Spur}(YZ) = \text{Spur}(Y^* Z) = \text{Spur}((Y^* Z)^*) = \text{Spur}(Z^* Y) = \text{Spur}(ZY) = \text{Spur}(YZ).$$

Also $\langle Y, Z \rangle = \text{Spur}(Y^* Z) = 0$. Weiter gilt

$$\langle AY, AZ \rangle = \text{Spur}((AY)^* AZ) = \text{Spur}(Y^* A^* AZ) = \text{Spur}(Y^* Z) = \langle Y, Z \rangle.$$

□

Für $X \in so(n) = \{X \mid X^T = -X\}$ sei \tilde{X} das durch

$$\tilde{X}_A := AX$$

definierte *linksinvariante* Vektorfeld. Dann gilt für $X, Y \in so(n)$:

$$\nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y} = \frac{1}{2} [\widetilde{X, Y}] = \frac{1}{2} [\tilde{X}, \tilde{Y}],$$

wobei $[X, Y] = XY - YX$ in $so(n)$.

Beweis. Für $X, Y \in so(n)$ und $A \in SO(n)$ gilt

$$\begin{aligned} \nabla_{AX} \tilde{Y} &= ((AX) \cdot (\dots Y))^T = (AXY)^T \quad (\text{Linearität}) \\ &= A \frac{1}{2} (XY - (XY)^*) = A \left(\frac{1}{2} (XY - YX) \right) \\ &= \frac{1}{2} A[X, Y]. \end{aligned}$$

Das liefert die erste Identität. Die zweite folgt aus der Torsionsfreiheit.

□

Erweiterung auf Vektorfelder längs Abbildungen.

Sei $h : N \rightarrow M$ eine differenzierbare Abbildung. Wir bezeichnen mit $\Gamma(h^*TM)$ den $C^\infty(N)$ -Modul der C^∞ -Vektorfelder längs h , vgl. 12.Vorlesung.

Für $X \in \Gamma(N)$ und $Y \in \Gamma(h^*TN)$ ist $df(Y)$ ein Vektorfeld längs $f \circ h$, und wir definieren

$$h^*\nabla_X Y = (D_X df(Y))^T,$$

wobei $(\cdot)^T$ die M -tangente Komponente bezeichnet. Dann wird $h^*\nabla : \Gamma(TN) \times \Gamma(h^*TM) \rightarrow \Gamma(h^*TM)$. Diese Erweiterung der Levi-Civita-Ableitung von Vektorfeldern auf M auf Vektorfelder längs Abbildungen $h : N \rightarrow M$ ist charakterisiert durch die folgenden Eigenschaften

Satz 41 (Kovariante Ableitung längs Abbildungen). *Sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Immersion und ∇ die induzierte Levi-Civita-Ableitung auf M . Sei $h : N \rightarrow M$ eine Abbildung. Dann gibt es genau eine Abbildung*

$$h^*\nabla : \Gamma(TN) \times \Gamma(h^*TM) \rightarrow \Gamma(h^*TM)$$

mit folgenden Eigenschaften:

Für $X, X_1, X_2 \in \Gamma(TN)$, $Y, Y_1, Y_2 \in \Gamma(h^*TM)$, $Z \in \Gamma(TM)$ und eine Funktion $\phi \in C^\infty(N)$ gilt

$$(h^*\nabla)_{X_1+X_2} Y = (h^*\nabla)_{X_1} Y + (h^*\nabla)_{X_2} Y, \quad (h^*\nabla)_{\phi X} Y = \phi (h^*\nabla)_X Y \quad (71)$$

$$(h^*\nabla)_X (Y_1 + Y_2) = (h^*\nabla)_X Y_1 + (h^*\nabla)_X Y_2, \quad (h^*\nabla)_X (\phi Y) = (X \cdot \phi) Y + \phi (h^*\nabla)_X Y \quad (72)$$

$$(h^*\nabla)_X (Z \circ h) = \nabla_{dh(X)} Z \quad (73)$$

Aus (71) folgt, daß $h^*\nabla$ im ersten Argument tensoriell ist, also für jedes $p \in N$ eine Abbildung

$$T_p N \times \Gamma(h^*TM) \rightarrow T_{h(p)} M, (v, Y) \mapsto (h^*\nabla)_v Y \quad (74)$$

definiert.

Statt $h^*\nabla$ schreibt man meistens einfach wieder ∇ .

Beweis. Zur Einzigkeit. Bezüglich einer Karte von M wie oben schreiben wir für $Y \in \Gamma(h^*TM)$

$$Y = \sum Y^j \frac{\partial}{\partial x_j} \circ h. \quad (75)$$

Dann erhalten wir mit den vorausgesetzten Eigenschaften

$$(h^*\nabla)_X Y = \sum_k (X \cdot Y^k) \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \circ h \right) + \sum_k Y^k (h^*\nabla)_X \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \circ h \right) \quad (76)$$

$$= \sum_k (X \cdot Y^k) \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \circ h \right) + \sum_k Y^k \nabla_{dh(X)} \frac{\partial}{\partial x_k}. \quad (77)$$

Daraus folgt die Eindeutigkeit. Die Existenz beweist man, indem man für (41) die Eigenschaften nachrechnet. Oder man benutzt (77) zur lokalen Definition von $h^*\nabla$ und rechnet die Eigenschaften nach. Die zweite Möglichkeit ist mühsamer, liefert

dafür aber die erweiterte kovariante Ableitung auch, wenn ∇ nicht die Levi-Civita-, sondern eine beliebige Ableitung ist.

□

Lokale Darstellung. In einer Karte x für M sei

$$Y = \sum_j Y^j \frac{\partial}{\partial x_j} \circ h, \quad dh(X) = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x_i} \circ h.$$

Weiter seien Γ_{ij}^k die Christoffelsymbole von ∇ in dieser Karte. Dann gilt

$$(h^*\nabla)_X Y = \sum_k \left(X \cdot Y^k + \sum_{i,j} X^i Y^j (\Gamma_{ij}^k \circ h) \right) \frac{\partial}{\partial x_k} \circ h. \quad (78)$$

Beispiel 56 (Geodätischengleichung). Für eine Kurve $\gamma : \mathbb{R} \supset J \rightarrow M$ ist $\dot{\gamma} \in \Gamma(\gamma^*TM)$ ein Vektorfeld längs γ . Die Kurve ist eine Geodätische, wenn $(f \circ \gamma)'$ keine Tangentialkomponente besitzt, d.h. wenn

$$\nabla_{\frac{d}{dt}} \dot{\gamma} = (D_{\frac{d}{dt}} df(\dot{\gamma}))^T = (f \circ \gamma)''^T = 0.$$

In einer Karte $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ wird dies ein nichtlineares Gleichungssystem für die Funktionen $\gamma_k = x_k \circ \gamma$:

$$\ddot{\gamma}_k + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k(x^{-1}(\gamma_1, \dots, \gamma_m)) \dot{\gamma}_i \dot{\gamma}_j = 0.$$

Lemma 17. Für $X, Y \in \Gamma(TN)$ gilt

$$\nabla_X dh(Y) - \nabla_Y dh(X) = dh([X, Y]).$$

Beweis. Aus (78) folgt mit $dh(Y)$ anstelle von Y :

$$\begin{aligned} \nabla_X dh(Y) - \nabla_Y dh(X) &= \sum_k (X \cdot Y^k - Y \cdot X^k) \frac{\partial}{\partial x_k} \circ h \\ &= \sum_k (X \cdot Y^k - Y \cdot X^k) \frac{\partial}{\partial x_k} \circ h \end{aligned}$$

Andrerseits ist

$$\begin{aligned} dh([X, Y]) \cdot \phi &= [X, Y] \cdot (\phi \circ h) \\ &= X \cdot (Y \cdot (\phi \circ h)) - Y \cdot (X \cdot (\phi \circ h)) \\ &= X \cdot \left(\sum_k Y^k \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_k} \circ h \right) \right) - \dots \\ &= \sum_k (X \cdot Y^k) \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_k} \circ h \right) - \sum_{j,k} Y^k X^j \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_k} \circ h - \dots \\ &= \sum_k (X \cdot Y^k - Y \cdot X^k) \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_k} \circ h \right) \end{aligned}$$

□

25 Strukturgleichungen, Krümmungstensor

Sei (M, f, ξ) eine immersierte Hyperfläche mit 1. Fundamentalform $\langle \cdot, \cdot \rangle$, 2. Fundamentalform und -tensor α bzw. A und Levi-Civita-Ableitung ∇ .

Satz. (Strukturgleichungen) Für $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ gelten

(i) Gauß-Gleichung

$$\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z = \alpha(Y, Z)AX - \alpha(X, Z)AY,$$

(ii) Codazzi-Gleichung

$$\nabla_X (AY) - \nabla_Y (AX) - A([X, Y]) = 0.$$

Bemerkung. Definiert man $\nabla_X A$ durch $(\nabla_X A)Y := \nabla_X (AY) - A(\nabla_X Y)$, also so, daß für die Ableitung von AY die Produktregel gilt, so schreibt sich die Codazzi-Gleichung als

$$(\nabla_Y A)Y = (\nabla_Y A)X.$$

Beweis zum Satz. Zur Erinnerung:

$$D_X df(Y) = df(\nabla_X Y) + \alpha(X, Y)\xi. \quad (79)$$

Definiert man die Lieklammer für \mathbb{R}^n -wertige Funktionen komponentenweise, so erhält man Φ :

$$D_X D_Y \Phi - D_Y D_X \Phi - [X, Y] \cdot \Phi = 0. \quad (80)$$

Nun gilt:

$$\begin{aligned} D_X D_Y df(Z) &= D_X (df(\nabla_Y Z) + \alpha(Y, Z)\xi) \\ &= D_X (df(\nabla_Y Z)) + D_X (\alpha(Y, Z)\xi) \\ &= df(\nabla_X \nabla_Y Z) + \alpha(X, \nabla_Y Z)\xi + X \cdot \alpha(Y, Z)\xi - \alpha(Y, Z)df(AX) \\ &= df(\nabla_X \nabla_Y Z - \alpha(Y, Z)AX) + (\langle AX, \nabla_Y Z \rangle + X \cdot \langle AY, Z \rangle)\xi \\ &= df(\nabla_X \nabla_Y Z - \alpha(Y, Z)AX) + (\langle AX, \nabla_Y Z \rangle + \langle \nabla_X (AY), Z \rangle + \langle AY, \nabla_X Z \rangle)\xi. \end{aligned}$$

Wir erhalten daher durch Einsetzen in (2) mit $\Phi = df(Z)$ (Tangentialkomponenten):

$$\begin{aligned} 0 &= (D_X D_Y df(Z) - D_Y D_X df(Z) - [X, Y] \cdot df(Z))^T \\ &= \nabla_X \nabla_Y Z - \alpha(Y, Z)AX - \nabla_Y \nabla_X Z + \alpha(X, Z)AY - \nabla_{[X, Y]} Z, \end{aligned}$$

und für die Normalkomponenten:

$$\begin{aligned} 0 &= (D_X D_Y df(Z) - D_Y D_X df(Z) - [X, Y] \cdot df(Z))^\perp \\ &= \langle AX, \nabla_Y Z \rangle + \langle \nabla_X (AY), Z \rangle + \langle AY, \nabla_X Z \rangle \\ &\quad - \langle AY, \nabla_X Z \rangle - \langle \nabla_Y (AX), Z \rangle - \langle AX, \nabla_Y Z \rangle \\ &\quad - \alpha([X, Y], Z) \\ &= \langle \nabla_X AY - \nabla_Y AX - A[X, Y], Z \rangle. \end{aligned}$$

□

Definition. Sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Immersion, nicht notwendig eine Hyperfläche. Wir definieren für $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$

$$R(X, Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z.$$

Dann ist R in jedem Argument $C^\infty(M)$ -linear, definiert also einen Tensor, den *Riemannschen Krümmungstensor*. Für $p \in M$ und $u, v, w \in T_p M$ ist also

$$R(u, v)w \in T_p M$$

definiert.

Lemma 18. *Bezüglich der 1. Fundamentalform $\langle \cdot, \cdot \rangle$ gilt:*

$$\langle R(X, Y)Z, U \rangle = - \langle R(Y, X)Z, U \rangle = - \langle R(X, Y)U, Z \rangle.$$

Beweis. Die Schiefsymmetrie in X, Y , also die erste Gleichung, ist trivial. Zum Beweis der zweiten Gleichung:

$$\begin{aligned} \langle R(X, Y)Z, U \rangle &= \langle \nabla_X \nabla_Y Z, U \rangle - \langle \nabla_Y \nabla_X Z, U \rangle - \langle \nabla_{[X, Y]} Z, U \rangle \\ &= X \cdot \langle \nabla_Y Z, U \rangle - \langle \nabla_Y Z, \nabla_X U \rangle - \dots \\ &= X \cdot (Y \cdot \langle Z, U \rangle) - X \cdot \langle Z, \nabla_Y U \rangle - \langle \nabla_Y Z, \nabla_X U \rangle - \dots \\ &= X \cdot (Y \cdot \langle Z, U \rangle) - \langle \nabla_X Z, \nabla_Y U \rangle - \langle Z, \nabla_X \nabla_Y U \rangle - \langle \nabla_Y Z, \nabla_X U \rangle \\ &\quad - Y \cdot (X \cdot \langle Z, U \rangle) + \langle \nabla_Y Z, \nabla_Z U \rangle + \langle Z, \nabla_Y \nabla_Y U \rangle + \langle \nabla_X Z, \nabla_Y U \rangle \\ &\quad - [X, Y] \cdot \langle Z, U \rangle + \langle Z, \nabla_{[X, Y]} U \rangle \\ &= \langle Z, \nabla_X \nabla_Y U - \nabla_Y \nabla_X U - \nabla_{[X, Y]} U \rangle \\ &= \langle R(X, Y)U, Z \rangle. \end{aligned}$$

□

Lemma 19. *Ist $h : N \rightarrow M$, sind $X, Y \in \Gamma(TN)$ und ist $Z \in \Gamma(h^*TM)$, so gilt:*

$$\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z = R(dh(X), dh(Y))Z.$$

Das beweist man mittels der lokalen Darstellung für die Ableitung von Vektorfeldern längs Abbildungen. Ebenso zeigt man die folgende Verallgemeinerung der Codazzigleichung:

$$\nabla_X (A(dh(Y))) - \nabla_Y (A(dh(X))) - A(dh([X, Y])) = 0.$$

Lemma 20. *Ist $\beta : V \times V \rightarrow W$ eine schiefsymmetrische Bilinearform auf dem Euklidischen Vektorraum V mit Werten im Vektorraum W . Sind (v, w) und (\tilde{v}, \tilde{w}) zwei ON-Basen desselben 2-dimensionalen Unterraums von V , so gilt*

$$\beta(v, w) = \pm \beta(\tilde{v}, \tilde{w}).$$

Dabei ist das Vorzeichen + genau dann, wenn beide Basen gleichorientiert sind.

Beweis. Hat man gleiche Orientierung, so gilt

$$(\tilde{v}, \tilde{w}) = (\cos \phi v - \sin \phi w, \sin \phi v + \cos \phi w)$$

für ein geeignetes ϕ . Daher ist

$$\begin{aligned}\beta(\tilde{v}, \tilde{w}) &= \beta(\cos \phi v - \sin \phi w, \sin \phi v + \cos \phi w) \\ &= \cos^2 \phi \beta(v, w) - \sin^2 \phi \beta(w, v) = \beta(v, w).\end{aligned}$$

Ersetzt man w durch $-w$, so ändern sich das Vorzeichen von β und die Orientierung. \square

Als Konsequenz der beiden Lemmas findet man:

Definition. Ist $\sigma \subset T_p M$ eine Ebene durch $0 \in T_p M$ und v, w eine Orthonormalbasis von σ , so hängt

$$K(\sigma) := \langle R(v, w)w, v \rangle$$

nicht von der Wahl der ON-Basis ab. $K(\sigma)$ heißt die *Riemannsche Schnittkrümmung* auf der Ebene σ .

Lemma 21. Für linear unabhängige Vektoren v, w bezeichne σ die von v und w aufgespannte Ebene. Dann gilt

$$K(\sigma) = \frac{\langle R(v, w)w, v \rangle}{\|v\|^2 \|w\|^2 - \langle v, w \rangle^2}.$$

Beweis.

$$\begin{aligned}K(\sigma) &= \langle R\left(\frac{v}{\|v\|}, \frac{w - \langle w, \frac{v}{\|v\|} \rangle \frac{v}{\|v\|}}{\|w - \langle w, \frac{v}{\|v\|} \rangle \frac{v}{\|v\|}}\right), \dots \rangle = \frac{\langle R(v, w)w, v \rangle}{\|v\|^2 \|w - \langle w, \frac{v}{\|v\|} \rangle \frac{v}{\|v\|}\|^2} \\ &= \frac{\langle R(v, w)w, v \rangle}{\|v\|^2 (\|w\|^2 - 2 \frac{1}{\|v\|^2} \langle w, v \rangle + \frac{\langle w, v \rangle^2 \|v\|^2}{\|v\|^4})} = \frac{\langle R(v, w)w, v \rangle}{\|v\|^2 \|w\|^2 - \langle v, w \rangle^2}.\end{aligned}$$

\square

Beispiel 57. Für $SO(n)$ und $X, Y \in so(n)$ gilt mit den Bezeichnungen der 24. Vorlesung:

$$R(\tilde{X}, \tilde{Y})\tilde{Z} = -\frac{1}{4}[\widetilde{[X, Y]}, Z]$$

und für orthonormales X, Y

$$K(\tilde{X} \wedge \tilde{Y}) = \frac{1}{4} \langle \widetilde{[X, Y]}, \widetilde{[X, Y]} \rangle \geq 0.$$

Bemerkung. Die Levi-Civita-Ableitung und damit auch R und K hängen nach der Formel von Levi-Civita (24. Vorlesung) nur von der 1. Fundamentalform ab. Hat man zwei Immersionen von M als orientierte Hyperflächen, welche dieselbe 1. Fundamentalform induzieren, so sind die 2. Fundamentalformen i.A. verschieden, aber die Riemannschen Krümmungstensoren und Schnittkrümmungen sind gleich.

Satz 42 (Theorema egregium von Gauß 1827). Für eine orientierte immerisierte Fläche (M, f, ξ) im \mathbb{R}^3 ist die Gaußsche Krümmung gleich der Riemannschen Schnittkrümmung auf der Tangentialebene:

$$K(p) = K(T_p M).$$

Insbesondere hängt die Gaußsche Krümmung also nur von der 1. Fundamentalform ab.

Zusatz: Der Krümmungstensor ist gegeben durch

$$R(X, Y)Z = K(\langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y).$$

Beweis. Es ist nur noch der Zusatz zu beweisen. Zunächst ist auch

$$R^K(u, v)w = K(\langle v, w \rangle u - \langle u, w \rangle v)$$

ein schief-symmetrischer Endomorphismus von w und schief auch in u, v . Diese Eigenschaften hat dann auch $R^0 := R - R^K$. Offenbar gilt

$$\langle R^0(u, v)v, u \rangle = 0$$

für jede ON-Basis. Entwickelt man andererseits beliebige vier Vektoren x, y, z, t nach u, v und benutzt die Schiefsymmetrien, so ergibt sich nach Ausdistribuierten eine Linearkombination von $\langle R^0(u, v)v, u \rangle$ -Termen. \square

Landkarten. Als Konsequenz aus dem Theorema egregium folgt:

- Es gibt keinen längentreuen Kartenentwurf.

Es gibt aber

- winkeltreu (= konforme): stereographische Projektion, Mercatorprojektion (1569)
- flächentreue: Orthogonalprojektion auf umbeschriebenen Kreiszyylinder (Lambert um 1750)

Die berühmte Mercatorprojektion ist die stereographische Projektion gefolgt vom komplexen Logarithmus, bei Verwendung von Kugelkoordinaten auf der Sphäre also die Abbildung $(\theta, \phi) \rightarrow (\ln \cot \frac{\theta}{2}, \phi)$. Dieser Entwurf ist winkeltreu, die Längengrade gehen in parallele Geraden über. Weiter gehen alle Kurven, welche die Längengrade unter konstantem Winkel schneiden (Loxodrome), in Geraden über.

26 Eindeutigkeitssatz, Starrheit

Satz 43. Seien $(M, f, \xi), (M, \tilde{f}, \tilde{\xi})$ zwei Immersionen derselben zusammenhängenden Mannigfaltigkeit M als orientierte Hyperflächen in den \mathbb{R}^{m+1} mit derselben 1. Fundamentalform $\langle \cdot, \cdot \rangle = f^* \langle \cdot, \cdot \rangle = \tilde{f}^* \langle \cdot, \cdot \rangle$ und derselben 2. Fundamentalform $\alpha = \tilde{\alpha}$. Dann gibt es eindeutig bestimmte $B \in O(m+1)$ und $b \in \mathbb{R}^{m+1}$ mit

$$\tilde{f} = B \circ f + b, \quad \tilde{\xi} = B \circ \xi.$$

Man sagt auch, (M, f, ξ) und $(M, \tilde{f}, \tilde{\xi})$ sind kongruent.

Beweis. Einzigkeit: Aus der Voraussetzung folgt

$$d_p \tilde{f} = B \circ d_p f,$$

und damit ist B auf $d_p f(T_p M)$ eindeutig bestimmt. Weiter ist offenbar B auf $\mathbb{R}\xi$ eindeutig, also auf \mathbb{R}^{m+1} eindeutig. Schließlich ist $b = \tilde{f}(p) - B \circ f(p)$.

Existenz: Definiere eine Abbildung $B : M \rightarrow \text{End}(\mathbb{R}^{m+1})$ wie folgt:

$$B(v) = d\tilde{f}(v^T) + \langle \xi, v \rangle \tilde{\xi}.$$

Dabei sei v^T die bezüglich f gebildete Tangentialkomponente. Wir wollen die Konstanz von B zeigen. Beachte dazu, daß mit den 1.Fundamentalformen auch die Levi-Civita-Ableitungen bezüglich f und \tilde{f} gleich sind.

$$\begin{aligned} D_X B(v) &= D_X d\tilde{f}(v^T) + D_X \langle \xi, v \rangle \tilde{\xi} \\ &= d\tilde{f}(\nabla_X v^T) + \alpha(X, v^T) \tilde{\xi} + \langle D_X \xi, v \rangle \tilde{\xi} - \langle \xi, v \rangle d\tilde{f}(AX) \\ &= d\tilde{f}(\nabla_X v^T - \langle \xi, v \rangle AX). \end{aligned}$$

Der Ausdruck $\nabla_X v^T - \langle \xi, v \rangle AX$ ist unabhängig von $\tilde{f}, \tilde{\xi}$. Wählt man insbesondere $\tilde{f} = f, \tilde{\xi} = \xi$, so wird $B = Id$, die linke Seite also $= 0$, und daher ist $\nabla_X v^T - \langle \xi, v \rangle AX = 0$. Damit ist B konstant, und offenbar gilt $B \in O(m+1)$.

Wir definieren nun $b : M \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ durch

$$b := \tilde{f} - B \circ f$$

und wollen zeigen, daß b konstant ist.

$$\begin{aligned} db(X) &= d\tilde{f}(X) - B(df(X)) \\ &= d\tilde{f}(X) - df(X) - \langle \xi, df(X) \rangle \tilde{\xi} \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Lemma 22 (Chern). Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum, mit selbstadjungierten Endomorphismen A, \tilde{A} . Es gelte für alle $u, v, w \in V$

$$\langle Av, w \rangle Au - \langle Au, w \rangle Av = \langle \tilde{A}v, w \rangle \tilde{A}u - \langle \tilde{A}u, w \rangle \tilde{A}v.$$

Dann gilt:

- (i) $\text{Rang } A \leq 1 \Rightarrow \text{Rang } \tilde{A} \leq 1$
- (ii) $\text{Rang } A \geq 2 \Rightarrow \text{Bild } A = \text{Bild } \tilde{A}$
- (iii) $\text{Rang } A \geq 3 \Rightarrow A = \pm \tilde{A}$

Beweis. Sei $R(u, v)w := \langle Av, w \rangle Au - \langle Au, w \rangle Av$ und \tilde{R} analog definiert. Dann gilt also $R = \tilde{R}$.

Zu (i): Ist $\text{Rang } A \leq 1$, so ist also $Av = \omega(v)z$ für eine Linearform ω und einen Vektor z . Daraus folgt sogleich $R = 0$. Ist umgekehrt $R = 0$ und $A \neq 0$, so gibt es v mit $Av \neq 0$. Dann hat man für jedes u :

$$Au = \frac{\langle Au, Av \rangle}{\langle Av, Av \rangle} Av.$$

Also ist $\text{Rang } A \leq 1$.

Zu (ii): Offenbar gilt

$$\text{Spann}\{R(u, v)w \mid u, v, w \in V\} \subset \text{Bild } A.$$

Sei $Au \neq 0$. Weil $\text{Rang } A \geq 2$, gibt es v mit $0 \neq Av \perp Au$. Dann gilt

$$R(u, v)Av = \|Av\|^2 Au$$

Also ist $Au \in \text{Spann}\{R(u, v)w; u, v, w \in V\}$ und

$$\text{Spann}\{R(u, v)w \mid u, v, w \in V\} = \text{Bild } A.$$

Zu (iii): Nach (ii) können wir V ersetzen durch $\text{Bild } A$, d.h. wir können annehmen, daß

$$\ker A = \{0\} = \ker \tilde{A}.$$

Weil $\text{Rang } A \geq 3$, gibt es zu jedem $u \in V$ ein $v \in V$ mit $Av \neq 0$ und

$$\langle Av, Au \rangle = 0 = \langle Av, \tilde{A}u \rangle.$$

Wir wählen $w = Av$. Dann folgt aus

$$\langle Av, Av \rangle Au - \langle Au, Av \rangle Av = \langle \tilde{A}v, Av \rangle \tilde{A}u - \langle \tilde{A}u, Av \rangle \tilde{A}v$$

folgt dann

$$\|Av\|^2 Au = \langle \tilde{A}v, Av \rangle \tilde{A}u.$$

Für jedes u gibt es also ein $c(u)$ mit $Au = c(u)\tilde{A}u$, d.h. jeder Vektor ist Eigenvektor von $\tilde{A}^{-1}A$. Damit folgt $\tilde{A} = \lambda A$. Aus der Voraussetzung folgt $R = \tilde{R} = \lambda^2 R$, und weil $R \neq 0$ folgt $\lambda^2 = \pm 1$, also $A = \pm \tilde{A}$. \square

Satz 44 (Starrheitssatz für Hyperflächen). Sei (M, f, ξ) eine zusammenhängende Hyperfläche im \mathbb{R}^{m+1} . Für den 2. Fundamentaltensor gelte überall

$$\text{Rang } A \geq 3.$$

(Insbesondere ist also $\dim M \geq 3$.) Dann ist jede Hyperfläche $(M, \tilde{f}, \tilde{\xi})$, die auf M dieselbe 1. Fundamentalform induziert wie (M, f, ξ) , kongruent zu (M, f, ξ) . Man sagt (M, f, ξ) ist starr.

Satz 45 (Starrheit kompakter Hyperflächen, Sacksteder 1960). Sei (M, f, ξ) eine Hyperfläche mit kompaktem M der Dimension ≥ 3 . Sei

$$M \setminus \{x \in M \mid A_x = 0\}$$

zusammenhängend. Dann ist (M, f, ξ) starr. (Ohne Beweis).

Beispiel 58. S^m für $m \geq 3$ ist starr, aber z.B. auch jedes offene zusammenhängende Stück des höherdimensionalen Ellipsoids

$$\{(x_1, \dots, x_{m+1}); \frac{x_1^2}{a_1^2} + \dots + \frac{x_{m+1}^2}{a_{m+1}^2} = 1\}$$

für positive a_1, \dots, a_{m+1} .

Beispiel 59. Konstruktion nicht-starrer kompakter Hyperflächen durch verschiedenes Verkleben längs flacher Hyperebenenteile.

Beispiel 60. Kompakte Flächen mit positiver Gauß-Krümmung (Eiflächen) sind starr (Cohn-Vossen 1927). Beweis mit völlig anderen Methoden.

Beispiel 61. Im Gegensatz dazu liefert die Familie

$$f_\epsilon(s, t) = \left(\alpha_\epsilon(s), \epsilon \cos s \cos \frac{t}{\epsilon}, \epsilon \cos s \sin \frac{t}{\epsilon} \right) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\pi}{2} < s \leq \frac{\pi}{2} \\ -\pi < t < \pi \end{array} \right.$$

$$\alpha_\epsilon(s) = \int^s \sqrt{1 - \epsilon^2 \sin^2 u} du.$$

eine isometrische Deformation der S^2 mit einem aufgeschnittenen halben Großkreis.

27 Kompakte Flächen konstanter Krümmung

In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, daß die Sphären die einzigen kompakten zusammenhängenden Flächen im \mathbb{R}^3 mit konstanter Krümmung sind.

Lemma 23 (Extremwerte auf Mannigfaltigkeiten). *Sei $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^∞ -Funktion. Dann gilt*

(i) $d_p\phi = 0$ ist notwendig für die Existenz eines lokalen Extremums in p .

(ii) Ist $d_p\phi = 0$, so definiert

$$\Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow \mathbb{R}, (X, Y) \mapsto X_p \cdot (Y \cdot \phi)$$

eine symmetrische Bilinearform $\text{Hess}_p\phi$ auf T_pM . Die positive Definitheit dieser Form ist hinreichend, die positive Semidefinitheit notwendig für das Vorliegen eines lokalen Minimums von ϕ in p . Analoges gilt für Maxima.

Beweis. Ist $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Karte um p , so hat ϕ in p ein lokales Extremum eines vorgegebenen Typs genau dann, wenn $\phi \circ x^{-1}$ in $x(p)$ ein lokales Extremum desselben Typs hat. Es ist aber nach Definition der Gaußschen Basisfelder

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\phi\right) \circ x^{-1} = \partial_i(\phi \circ x^{-1}), \text{ also } \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\phi\right)_p = \partial_i(\phi \circ x^{-1})_{x(p)}.$$

Daraus folgt (i). Zum Beweis von (ii) beachte, daß

$$X_p \cdot (\psi Y \cdot \phi) = (X_p \cdot \psi) \underbrace{(Y_p \cdot \phi)}_{=d_p\phi(Y)=0} + \psi X_p \cdot (Y \cdot \phi).$$

Daher ist die Bilinearform auf $\Gamma(TM)$ an der Stelle p Funktionen-linear, und definiert deshalb eine Bilinearform auf T_pM . Die Symmetrie folgt aus

$$X_p \cdot (Y \cdot \phi) - Y_p \cdot (X \cdot \phi) = [X, Y]_p \cdot \phi = d_p\phi([X, Y]_p) = 0.$$

Schließlich ist

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \cdot \phi\right) \circ x^{-1} = \partial_i\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_j} \cdot \phi\right) \circ x^{-1}\right) = \partial_i(\partial_j(\phi \circ x^{-1})),$$

also

$$\text{Hess}_p\phi\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \partial_i\partial_j(\phi \circ x^{-1})(x(p)).$$

Daher folgt der Rest des Lemmas aus den Extremalkriterien der Analysis II. \square

Lemma 24. *Auf einer kompakten Hyperfläche (M, f, ξ) im \mathbb{R}^{m+1} existiert ein Punkt, in dem A_p definit ist. Insbesondere ist in einem solchen Punkt die Gaußsche Krümmung einer Fläche positiv.*

Beweis. Die Funktion $\phi := \frac{1}{2} \langle f, f \rangle$ nimmt ihr Maximum in einem Punkt $p \in M$ an. In diesem Punkt gilt

$$0 = d_p\phi(X) = \langle f(p), d_p f(X) \rangle \text{ für alle } X \in T_pM.$$

Also ist $\xi(p) = \pm \frac{f(p)}{\|f(p)\|}$. Weiter ist nach dem letzten Lemma

$$\begin{aligned} 0 &\geq \text{Hess}_p \phi(X, X) = X_p \cdot \langle f, df(X) \rangle \\ &= \langle d_p f(X), d_p f(X) \rangle + \langle f(p), D_{X_p} df(X) \rangle \\ &= \langle X, X \rangle_p \pm \|f(p)\| \langle \xi(p), D_{X_p} df(X) \rangle \\ &= \langle X, X \rangle_p \mp \|f(p)\|^2 \langle AX, X \rangle_p. \end{aligned}$$

Daher ist $\mp A_p$ negativ definit. \square

Lemma 25. *Seien $\lambda_1 \geq \dots \lambda_m$ die mit Vielfachheit gezählten und nach der Größe geordneten Hauptkrümmungen der Hyperfläche (M, f, ξ) des \mathbb{R}^{m+1} . Dann sind die $\lambda_i : M \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. In der Umgebung eines Punktes, in dem sie alle verschieden sind, sind sie sogar C^∞ -Funktionen.*

Beweis. Wir führen den Beweis nur im 2-dimensionalen Fall. Dann ist das charakteristische Polynom des 2. Fundamentaltensors gegeben durch

$$\lambda^2 - 2H\lambda + K = 0,$$

wobei $H = \frac{1}{2} \text{Spur } A$ und $K = \det A$ differenzierbare Funktionen sind. Also sind die Hauptkrümmungen

$$\lambda_1 = H + \sqrt{H^2 - K}, \quad \lambda_2 = H - \sqrt{H^2 - K}.$$

Daraus folgt die Behauptung. \square

Lemma 26 (Hilbert). *Sei (M, f, ξ) eine Fläche im \mathbb{R}^3 und $p \in M$ kein Nabelpunkt. Dann gibt es auf einer Umgebung U von p orthonormale C^∞ -Vektorfelder X, Y mit*

$$AX = \lambda X, \quad AY = \mu Y,$$

wobei $\lambda > \mu$ die Hauptkrümmungen sind. Mit diesen Vektorfeldern gilt für die Gaußkrümmung K von M :

$$\begin{aligned} K &= -\frac{X \cdot (X \cdot \mu)}{\lambda - \mu} + (X \cdot \mu) \frac{X \cdot (\lambda - \mu)}{(\lambda - \mu)^2} \\ &\quad + \frac{Y \cdot (Y \cdot \lambda)}{\lambda - \mu} - (Y \cdot \lambda) \frac{Y \cdot (\lambda - \mu)}{(\lambda - \mu)^2} \\ &\quad - \left(\frac{Y \cdot \lambda}{\lambda - \mu} \right)^2 - \left(\frac{X \cdot \mu}{\lambda - \mu} \right)^2. \end{aligned}$$

Beweis. 1. Konstruktion von X und Y . Sei Z ein beliebiges Vektorfeld mit $(A - \mu I)Z_p \neq 0$. Dann gibt es eine Umgebung U von p , auf der $\lambda > \mu$ gilt und in der $X := (A - \mu I)Z$ keine Nullstelle hat. Weiter gilt

$$0 = (A^2 - 2HA + KI)Z = (A - \lambda I)(A - \mu I)Z = (A - \lambda I)X.$$

Also ist X ein differenzierbares Eigenfeld wie gesucht. Y konstruiert man analog. Als Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten von A sind X, Y orthogonal, und nach Normierung erfüllen sie die gewünschten Eigenschaften.

2. Die Ableitung von X und Y . Weil die Vektorfelder konstante Länge haben, ist

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= aX, \quad \nabla_Y X = bY, \quad \text{also } [X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X = aX - bY, \\ \nabla_X X &= cY, \quad \nabla_Y Y = dX. \end{aligned}$$

mit Funktionen a, b, c, d . Aus

$$\langle \nabla_X X, Y \rangle = X \langle X, Y \rangle - \langle X, \nabla_X Y \rangle = -a$$

und einer ähnlichen Gleichung für $\nabla_Y Y$ ergeben sich c und d :

$$\nabla_X X = -aY, \quad \nabla_Y Y = -bX.$$

Wir berechnen nun die Funktionen a und b . Aus der Codazzigleichung

$$\nabla_X(AY) - \nabla_Y(AX) = A([X, Y])$$

folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_X(\mu Y) - \nabla_Y(\lambda X) - A(aX - bY) \\ &= (X \cdot \mu)Y + \mu aX - (Y \cdot \lambda)X - \lambda bY - a\lambda X + b\mu Y \\ &= (X \cdot \mu - (\lambda - \mu)b)Y - (Y \cdot \lambda + (\lambda - \mu)a)X. \end{aligned}$$

Also

$$a = -\frac{Y \cdot \lambda}{\lambda - \mu}, \quad b = \frac{X \cdot \mu}{\lambda - \mu}.$$

3. Berechnung der Schnittkrümmung mittels X und Y .

$$\begin{aligned} K &= \langle R(X, Y)Y, X \rangle \\ &= \langle \nabla_X \nabla_Y Y - \nabla_Y \nabla_X Y - \nabla_{[X, Y]} Y, X \rangle \\ &= \langle \nabla_X(-bX) - \nabla_Y(aX) - \nabla_{aX - bY} Y, X \rangle \\ &= \langle -(X \cdot b)X + baY - (Y \cdot a)X - abY - a^2 X - b^2 X, X \rangle \\ &= -X \cdot b - Y \cdot a - a^2 - b^2 \\ &= -\frac{X \cdot (X \cdot \mu)}{\lambda - \mu} + (X \cdot \mu) \frac{X \cdot (\lambda - \mu)}{(\lambda - \mu)^2} \\ &\quad + \frac{Y \cdot (Y \cdot \lambda)}{\lambda - \mu} - (Y \cdot \lambda) \frac{Y \cdot (\lambda - \mu)}{(\lambda - \mu)^2} \\ &\quad - \left(\frac{Y \cdot \lambda}{\lambda - \mu} \right)^2 - \left(\frac{X \cdot \mu}{\lambda - \mu} \right)^2. \end{aligned}$$

□

Satz 46 (Liebmann 1899, 1900). Sei (M, f, ξ) eine kompakte zusammenhängende Fläche im \mathbb{R}^3 . Dann gilt

- (i) Hat (M, f, ξ) konstante Gaußkrümmung K , so ist $K > 0$ und $f(M)$ eine Sphäre vom Radius $\frac{1}{\sqrt{K}}$.
- (ii) Ist $K > 0$ und $H = \text{const}$, so ist auch K konstant und $f(M)$ eine Sphäre vom Radius $\frac{1}{\sqrt{K}}$.

Beweis. Zu (i). Nach dem Lemma 24 ist $K > 0$. Es genügt zu zeigen, daß (M, f, ξ) eine Nabelpunktsfläche ist. Dann ist $f(M)$ enthalten in einer Sphäre S ; („Ebene“ geht nicht wegen $K > 0$). Weil $f : M \rightarrow S$ eine Immersion gleichdimensionaler Mannigfaltigkeiten ist, ist es lokal auch surjektiv (Rangatz). Deshalb ist die kompakte Menge $f(M)$ offen in S , also ganz S .

Seien nun $\lambda \geq \mu$ die Hauptkrümmungen von (M, f, ξ) . Das stetige λ nimmt in einem Punkt $p \in M$ sein Maximum an. Dort nimmt $\mu = \frac{K}{\lambda}$ sein Minimum an. Nehmen wir an, daß (M, f, ξ) keine Nabelpunktsimmersion ist, so ist jedenfalls p kein Nabelpunkt, und deshalb wegen $d_p\lambda = d_p\mu = 0$ und dem Lemma 26

$$K(p) = -\frac{X_p \cdot (X \cdot \mu)}{\lambda(p) - \mu(p)} + \frac{Y_p \cdot (Y \cdot \lambda)}{\lambda(p) - \mu(p)}.$$

Nach Wahl von p ist aber $X \cdot (X \cdot \mu) \geq 0$ und $Y \cdot (Y \cdot \lambda) \leq 0$. Weil $\lambda(p) > \mu(p)$ folgt $K(p) \leq 0$. Widerspruch!

Zu (ii). Hier ist dasselbe Argument anwendbar, weil in einem Maximum von λ wieder ein Minimum von μ vorliegt und $K > 0$ vorausgesetzt ist. \square

Bemerkung: Erst 1984 hat man kompakte zusammenhängende Flächen gefunden, die konstantes H haben, aber keine Sphären sind. (Wente-Tori).

28 Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten

Literatur zu diesem Abschnitt:

- Spivak, Calculus on Manifolds
- do Carmo, Differential Forms and Applications

Definition. Eine *Differentialform vom Grad k* auf M (kurz *eine k -Form*) ist eine Abbildung ω , die jedem $p \in M$ eine alternierende k -Form ω_p auf T_pM zuordnet und differenzierbar vom Punkt abhängt: Sind X_1, \dots, X_k differenzierbare Vektorfelder, so ist $p \mapsto \omega_p(X_1|_p, \dots, X_k|_p)$ differenzierbar. Der \mathbb{R} -Vektorraum der Differentialformen vom Grad k auf M wird mit $A^k(M)$ bezeichnet. $A^k(M)$ ist sogar ein $C^\infty(M)$ -Modul.

Beispiel 62. Ist $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, so ist $d\phi \in A^1(M)$. Ist etwa $x = (x_1, \dots, x_m) : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Karte für M , so erhält man m 1-Formen, nämlich dx_1, \dots, dx_m , und jedes $\omega \in A^1(M)$ ist auf U von der Form

$$\omega = \omega_1 dx_1 + \dots + \omega_m dx_m$$

mit C^∞ -Funktionen ω_i .

Beispiel 63. Bezeichnet J die 90-Grad-Drehung auf einer immersierten orientierten Fläche (M, f, ξ) , so definiert $\omega(X, Y) := \langle X, JY \rangle$ eine Differentialform in $A^2(M)$.

Beispiel 64. Sei (M, f, ξ) eine orientierte Hyperfläche des \mathbb{R}^{m+1} . Dann wird durch

$$\sigma(X_1, \dots, X_m) := \det(df(X_1), \dots, df(X_m), \xi)$$

eine m -Form $\sigma \in A^m(M)$ definiert, die *Volumenform von (M, f, ξ)* . Ist E_1, \dots, E_m eine Orthonormalbasis von T_pM , so daß $(df(E_1), \dots, df(E_m), \xi_p)$ eine positiv orientierte Basis ist, so ist

$$\sigma(X_1, \dots, X_m) := \det(f^* \langle X_i, E_j \rangle).$$

Um die Gleichheit der beiden m -Formen zu zeigen, muß man nur ihre Gleichheit auf einer Basis zeigen. Dafür bietet sich E_1, \dots, E_m an, und darauf geben beide den Wert 1.

Definition. Sei $f : N \rightarrow M$ eine differenzierbare Abbildung.
Seien $\omega \in A^k(M), \theta \in A^l(M)$.

(i) Die Cartansche Ableitung $d\omega \in A^{k+1}(M)$ ist definiert durch

$$d\omega(X_1, \dots, X_{k+1}) := \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i-1} X_i \cdot \omega(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{k+1}) \\ + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{k+1}).$$

für Vektorfelder $X_1, \dots, X_{k+1} \in \Gamma(TM)$.
(Im \mathbb{R}^m tritt die zweite Summe nicht auf, weil man *konstante* Vektorfelder X_i benutzt.)

(ii) $f^*\omega \in A^k(N)$ wird definiert durch

$$f^*\omega_q(X_1, \dots, X_k) := \omega_{f(q)}(d_q f(X_1), \dots, d_q f(X_k))$$

für $X_1, \dots, X_k \in \Gamma(TN)$.

(iii) $\omega \wedge \theta \in A^{k+l}(M)$ wird definiert*) durch

$$(\omega \wedge \theta)_p := \omega_p \wedge \theta_p.$$

*) Bemerkung: Wir setzen hier die Definition des Dachproduktes aus der linearen Algebra voraus, vermerken aber, daß $\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k \in A^k(M)$ für 1-Formen $\omega_1, \dots, \omega_k \in A^1(M)$ gegeben ist durch

$$\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k(X_1, \dots, X_k) = \det(\omega_i(X_j)).$$

Jede k -Form ist Linearkombination k -facher \wedge -Produkte von 1-Formen (aus einer Basis). Damit beweist man, daß die k -Formen auf einem m -dimensionalen Vektorraum einen Vektorraum der Dimension $\binom{m}{k}$ bilden.

Für Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten gelten dieselben Rechenregeln wie für Differentialformen im \mathbb{R}^m . Insbesondere hat man

Satz 47. (i) $d^2 = 0$.

(ii) für $\omega \in A^k(M), \theta \in A^l(M)$ gilt

$$\theta \wedge \omega = (-1)^{kl} \omega \wedge \theta, \\ d(\omega \wedge \theta) = d\omega \wedge \theta + (-1)^k \omega \wedge d\theta$$

(iii) $f^*d\omega = d(f^*\omega), \quad f^*(\omega \wedge \theta) = f^*\omega \wedge f^*\theta.$

(iv) $d\omega = 0$ für $\omega \in A^k(M)$ ist lokal hinreichend für die Existenz eines Potentials $\phi \in A^{k-1}(M)$ mit $d\phi = \omega$ (Lemma von Poincaré).

Beispiel 65. Sei (M, f, ξ) eine Fläche im \mathbb{R}^3 mit 2. Fundamentaltensor A . Sei B ein weiteres selbstadjungiertes Endomorphismenfeld auf M mit

$$\nabla_X(BY) - \nabla_Y(BX) - B[X, Y] = 0.$$

Zum Beispiel kann $B = A$ oder $B = Id$ sein. Definiere eine 1-Formen ω auf M wie folgt:

$$\omega(X) := \omega_B(X) := \det(f, df(BX), \xi).$$

Wir berechnen $d\omega$:

$$\begin{aligned}
d\omega(X, Y) &= X \cdot \det(f, df(BY), \xi) - Y \cdot \det(f, df(BX), \xi) - \det(f, df(B[X, Y]), \xi) \\
&= \det(df(X), df(BY), \xi) + \det(f, df(\nabla_X(BY)), \xi) + \alpha(X, BY)\xi, \xi) + \det(f, df(BY), -df(AX)) \\
&\quad - ((X \leftrightarrow Y)) - \det(f, df(B[X, Y]), \xi) \\
&= \det(df(X), df(BY), \xi) - \det(df(Y), df(BX), \xi) \\
&\quad + \det(f, df(\underbrace{\nabla_X(BY) - \nabla_Y(BX) - B([X, Y])}_{=0}), \xi) \\
&\quad + \det(df(AX), df(BY), f) - \det(df(AY), df(BX), f) \\
&= \sigma(X, BY) + \sigma(BX, Y) + \langle f, \xi \rangle (\sigma(AX, BY) + \sigma(BX, AY)).
\end{aligned}$$

Das läßt sich noch zusammenfassen, wenn man berücksichtigt, daß

$$\sigma(BX, BY) = \det B\sigma(X, Y),$$

und deshalb

$$\begin{aligned}
\det(A - B)\sigma(X, Y) &= \sigma((A - B)X, (A - B)Y) \\
&= \sigma(AX, AY) + \sigma(BX, BY) - (\sigma(AX, BY) + \sigma(BX, AY)) \\
&= (\det A + \det B)\sigma(X, Y) - (\sigma(AX, BY) + \sigma(BX, AY)).
\end{aligned}$$

Man erhält

$$\begin{aligned}
d\omega(X, Y) &= (1 + \det B - \det(I - B))\sigma(X, Y) \\
&\quad + \langle f, \xi \rangle (\det A + \det B - \det(A - B))\sigma(X, Y) \\
&= (\text{Spur } B + \langle f, \xi \rangle (\det A + \det B - \det(A - B)))\sigma(X, Y).
\end{aligned}$$

Für $B = Id$ bzw. $B = A$ ergeben sich

$$\begin{aligned}
d\omega_{Id} &= 2(1 + \langle f, \xi \rangle H)\sigma \\
d\omega_A &= 2(H + \langle f, \xi \rangle K)\sigma.
\end{aligned}$$

Dabei sind H und K die mittlere und die Gaußsche Krümmung. Die sogenannte *Stützfunktion* $\langle f, \xi \rangle$ gibt den Abstand der Tangentialebene vom Nullpunkt des \mathbb{R}^3 .

Integration von Differentialformen Für das folgende Resultat benötigen wir den Satz von Stokes für Mannigfaltigkeiten und damit den Begriff der Integration von Formen über Mannigfaltigkeiten. Wir gehen auf Details nicht näher ein, vgl. die angegebene Literatur.

Sei (M, f, ξ) eine Hyperfläche oder, allgemeiner, M eine *orientierte* m -dimensionale Mannigfaltigkeit. Ist $\omega \in A^m(M)$ eine Differentialform mit kompaktem Träger im Definitionsbereich der *orientierten* Karte $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, so definiert man

$$\int_M \omega := \int_{\mathbb{R}^m} (x^{-1})^* \omega := \int_{\mathbb{R}^m} (x^{-1})^* \omega(e_1, \dots, e_m) dx_1 \dots dx_m.$$

Dabei heißt eine Karte orientiert, wenn $(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m})$ überall eine positiv orientierte Basis des Tangentialraumes ist. Im Hyperflächenfall heißt das, daß

$$\sigma\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}\right) = \det\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}, \xi\right) > 0.$$

Die Unabhängigkeit von der Definition folgt aus dem Transformationssatz für Integrale. Weiter läßt sich jedes ω mit kompaktem Träger schreiben als endliche Summe $\omega = \sum \omega_i$, so daß die Träger der ω_i jeweils in einer Karte liegen. Dann definiert man $\int_M \omega = \sum \int_M \omega_i$. Der wichtigste Satz in diesem Zusammenhang ist der Satz von Stokes für berandete Mannigfaltigkeiten: Für $\omega \in A^{m-1}(M)$ gilt

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Wir brauchen aber im Moment nur das Korollar für den Fall *geschlossener* Mannigfaltigkeiten, d.h. kompakter Mannigfaltigkeiten ohne Rand. Dann verschwindet die rechte Seite:

$$\int_M d\omega = 0$$

für jedes $\omega \in A^{m-1}(M)$, $m = \dim M$.

Beispiel 66 (Minkowski-Formeln). Mit den Voraussetzungen des letzten Beispiels folgt für geschlossene Flächen im \mathbb{R}^3 :

$$\text{Fläche von } M = \int_M \sigma = - \int_M \langle f, \xi \rangle H \sigma, \quad (81)$$

$$\int_M H \sigma = - \int_M \langle f, \xi \rangle K \sigma. \quad (82)$$

Wir beweisen nun einen weiteren Starrheitssatz:

Satz 48 (Starrheit der Eiflächen, Cohn-Vossen 1927). *Seien (M, f, ξ) , $(M, \tilde{f}, \tilde{\xi})$ zwei Immersionen derselben kompakten Fläche M in den \mathbb{R}^3 . Es gelte*

$$K > 0.$$

Induzieren f und \tilde{f} dieselbe 1. Fundamentalform, so sind sie kongruent.

Bemerkung: Wir beweisen den Satz nur unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß $f(M)$ und $\tilde{f}(M)$ konvexe Körper im \mathbb{R}^3 beranden. Diese Voraussetzung folgt aus $K > 0$, aber das ist ein weiterer, gar nicht trivialer Satz (Chern-Lashof 1957).

Beweis nach Herglotz. Nach Translation können wir annehmen, daß 0 ein innerer Punkt der von $f(M)$ bzw. $\tilde{f}(M)$ berandeten Körper ist und die Normalen ins Innere weisen, so daß die Stützfunktionen negativ sind:

$$\langle f, \xi \rangle < 0, \quad \langle \tilde{f}, \tilde{\xi} \rangle < 0.$$

Weiter können wir annehmen, daß $\tilde{\sigma} = \sigma$. Aus der Gleichheit der 1. Fundamentalformen folgt nämlich $\tilde{\sigma} = \pm \sigma$. Steht hier das Minuszeichen, so ersetzen wir \tilde{f} und $\tilde{\xi}$ durch $S \circ \tilde{f}$ und $S \circ \tilde{\xi}$ für eine Spiegelung $S: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ an einer Ebene. S kehrt die Orientierung von $(d\tilde{f}(X), d\tilde{f}(Y), \tilde{\xi})$ und damit auch das Vorzeichen von $\tilde{\sigma}$ um. Beachte, daß \tilde{f} und $S \circ \tilde{f}$ kongruent sind.

Wir betrachten nun die 1-Form

$$\omega_{\tilde{A}}(X) = \det(f, df(\tilde{A}X), \xi).$$

Dafür gilt mit $\Delta = \det(A - \tilde{A})$ wegen $\det A = \det \tilde{A} = K$

$$\begin{aligned} d\omega_{\tilde{A}}(X, Y) &= (2\tilde{H} + \langle f, \xi \rangle (2K - \Delta))\sigma \\ &= 2\tilde{H}\sigma + 2\langle f, \xi \rangle K\sigma - \Delta\sigma. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich mit (82)

$$0 = \int_M d\omega_{\tilde{A}} = \int_M 2\tilde{H}\sigma - \int_M 2H\sigma - \int_M \Delta \langle f, \xi \rangle \sigma,$$

also

$$2 \int_M (\tilde{H} - H)\sigma = \int_M \Delta \langle f, \xi \rangle \sigma.$$

Nun brauchen wir etwas lineare Algebra: Sind A, \tilde{A} zwei selbstadjungierte, positiv definite Endomorphismen des \mathbb{R}^2 mit $\det A = \det \tilde{A}$, so ist $\det(A - \tilde{A}) \leq 0$ und $\det(A - \tilde{A}) = 0$ impliziert $A = \tilde{A}$.

Beweis. Wir definieren $C := A^{-1}\tilde{A}$ und $(X, Y) := \langle AX, Y \rangle$. Offenbar ist (\cdot, \cdot) ein positiv definites symmetrisches Skalarprodukt auf \mathbb{R}^2 . Wegen

$$(CX, Y) = \langle BX, Y \rangle$$

ist C bezüglich (\cdot, \cdot) selbstadjungiert und positiv definit. Seien $\lambda, \mu > 0$ die Eigenwerte von C . Dann ist $\lambda\mu = \det C = \det \tilde{A}/\det A = 1$ und

$$\begin{aligned} \det(A - \tilde{A}) &= \det A \det(I - C) = \det A(1 - \lambda)(1 - \mu) \\ &= \det A(1 - \lambda)\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) = - \underbrace{\frac{\det A}{\lambda}}_{\geq 0} (1 - \lambda)^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Gleichheit impliziert $\lambda = 1 = \frac{1}{\lambda} = \mu$, also $C = 1$ und daher $A = \tilde{A}$.

Damit folgt $0 \leq \Delta \langle f, \xi \rangle$, also

$$\int_M (\tilde{H} - H)\sigma \geq 0.$$

Aus Symmetriegründen ist dann (wegen $\tilde{\sigma} = \sigma$) aber auch

$$\int_M (\tilde{H} - H)\sigma \leq 0.$$

also $\int_M \tilde{H}\sigma = \int_M H\sigma$. Es folgt

$$\int_M \underbrace{\Delta}_{\leq 0} \underbrace{\langle f, \xi \rangle}_{< 0} \sigma = 0$$

und deshalb $\Delta = 0$ und $A = \tilde{A}$. Also haben f und \tilde{f} dieselbe 1. und 2. Fundamentalfarm, sind also kongruent. \square

ENDE des 1. TEILs