IMPROVED BOUNDS FOR CENTERED COLORINGS

MICHAŁ DĘBSKI, STEFAN FELSNER, PIOTR MICEK, AND FELIX SCHRÖDER

Was braucht man, um allgemeine Aussagen über eine ganze Klasse von Graphen zu machen?

Struktursätze

(Ein gewisses Objekt lässt sich immer bei jedem Repräsentanten der Klasse finden)

Bäume	Knoten vom Grad Eins
Graphen mit Minimalgrad > 1	Kreis
Maximal outerplanar $\lvert V(G)\rvert > 2$	Knoten vom Grad 2

Planare Graphen besitzen p-zentrierte Färbungen mit $O(p^3 \log p)$ Farben

Beweisstrategie:

Eine strukturelle Aussage über Planare Graphen

Reduktion des Satzes auf eine Teilklasse von planaren Graphen

Teilklasse reinterpretieren

C_2 C_3 $C_4 \ldots$

Induktion

p-zentrierte Färbung

Jeder zusammenhängender Teilgraph H von G besitzt entweder

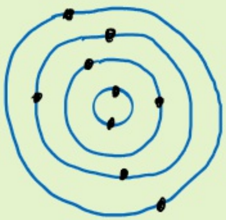
mehr als p Farben oder eine Farbe kommt in H nur einmal vor

$p = 1 \Leftrightarrow$ Proper colorings

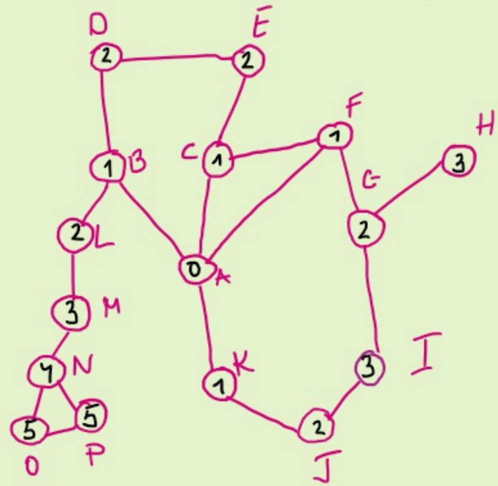
$p = 2 \Leftrightarrow$  verboten

Fakt: Für planare G gilt: Für jede BFS-Schachtelung gibt es eine Partition P von $V(G)$ so dass, G/P planar ist, $tw(G/P) <= 3$ und jeder Block von P höchstens 3 Knoten aus jedem Niveau von G enthält

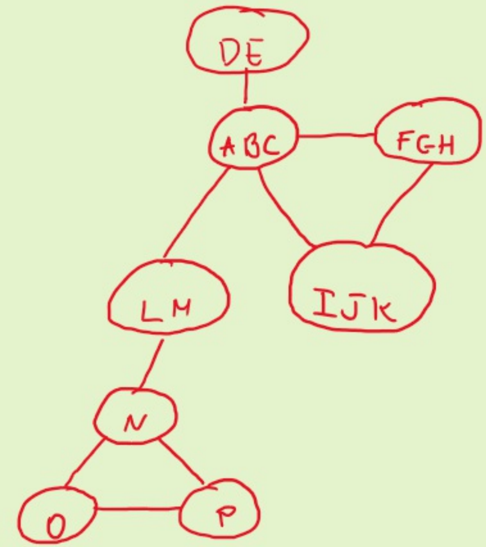
Schachtelung

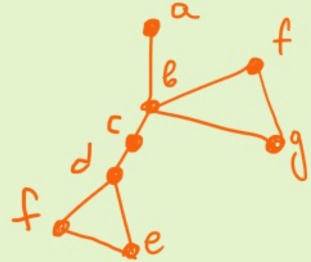


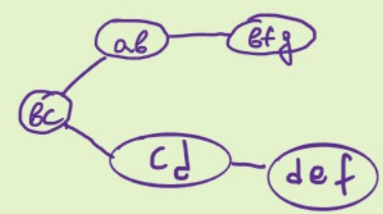
BFS-Schachtelung



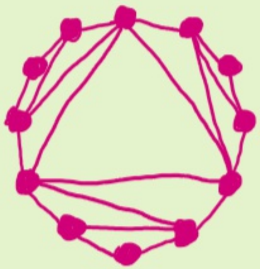
G/P

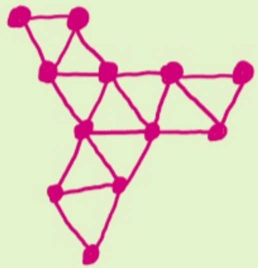


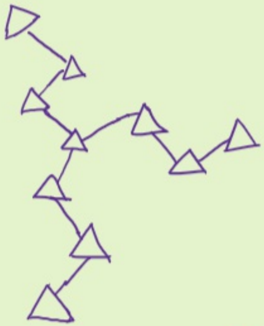




Baumzerlegungen und Baumweite







Baumzerlegung von V: Baum T, Knoten von T sind Teilmengen V_t von V (Beutel)

1) Jedes $v \in V(G)$ gehört zu einem Beutel V_t

2) Knoten von $e \in E(G)$ gehören zu einem Beutel V_t

3) Beutel, die v enthalten, sind in T zusammenhängend

$$tw(G) = \min_{\substack{\text{Baumzer-}\\ \text{legung von}\\ V}} \max_{t} \left(|V_t| - 1\right)$$

$$tw(G) = 1 \iff G \text{ Wald}$$

$$tw(H) \leq tw(G) \quad \text{falls } H \text{ Minor von } G$$

$tw($ 

$) = tw(G) + 1$

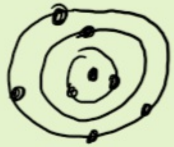
Sei f(p) das maximale $\chi_p(H)$ über alle planaren Graphen H mit tw(H) <= 3

Dann gilt für jeden planaren G

$$\chi_p(G) \leq 3(p+1)\, f(p)$$

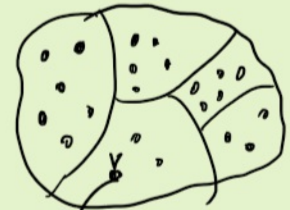
Beweis

1) BFS-Zwiebel von $V = (V_0, V_1 \dots)$



2) $\exists\ \mathcal{P}$ Partition von V mit

$G/\mathcal{P}$ planar mit $tw \leq 3$ und jeder Block von $\mathcal{P}$ hat höchstens 3 Knoten aus jedem Niveau

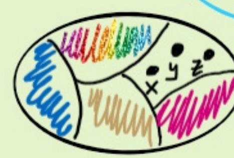
$V =$ 

$\varphi(v) = (\alpha(v), \beta(v), \gamma(v))$

$v \in$ Niveau i
und $v \in$ Block X

$\alpha(v) = i \bmod (p+1)$

$\beta(v) = \psi(X)$



$\gamma(v) \in \{1, 2, 3\}$

Sei $H \subset G$ zusammenhängend.

$H' :=$ Teilgraph von $G/\mathcal{P}$ induziert von $\{X \in \mathcal{P} \mid V(H) \cap X \neq \emptyset\}$ ist auch zusammenhängend

H'

ψ hat mehr als p Farben in H'

$\beta(v)$ hat mehr als p Farben in H $\square$

$\exists X$ in H' mit einer eindeutigen Farbe

$v \in V(H) \cap X$ hat eind. Farbe in H'

$\square$

$\exists v'$ mit $\varphi(v') = \varphi(v)$

$\beta(v') = \beta(v) = \psi(X)$

$i = J$

$\gamma(v) \neq \gamma(v')$

$\lightning$

$i \neq J$

$\alpha(v) = \alpha(v')$

$i \equiv J \mod (p+1)$

$|i - J| \geq p+1$

mind $p+1$ Schichten besucht $\square$

$$\chi_p(G) \le 3(p+1) \max_H \{\chi_p(H) \mid H \text{ planar}, tw(H) \le 3\}$$

Gewünscht: $\chi_p(G) \in O(p^3 \log p)$

Teil 2: Reduktion: $\chi_p(H) \in O(p^2 \log p)$ für planare H mit $tw(H) \le 3$

Teil 3: Reinterpretation: Neuer Parameter $stw(H)$

Fakt: H planar mit $tw(H) \le 3 \iff H$ Graph mit $stw(H) \le 3$

H outerplanar $\iff H$ Graph mit $stw(H) \le 2$

Teil 4: Induktion für $f_k(p) = \max_H \{\chi_p(H) \mid stw(H) \le k\}$

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ f_2(p) \in O(p \log p) \\ 2)\ f_{k+1}(p) \le (p+1) f_k(p) \end{array}\right\} \Rightarrow f_3(p) \in O(p^2 \log p)$$

1) Outerplanare Graphen

o.B.d.A ist G maximal outerplanar und somit chordal

Ziel: Algorithmus für eine p-zentrierte Färbung von G mit höchstens $O(p \log p)$ Farben

Struktur von der BFS-Zwiebel $(V_0, V_1, \ldots)$ von G:

$G[V_i]$ ist ein Wald aus Pfaden

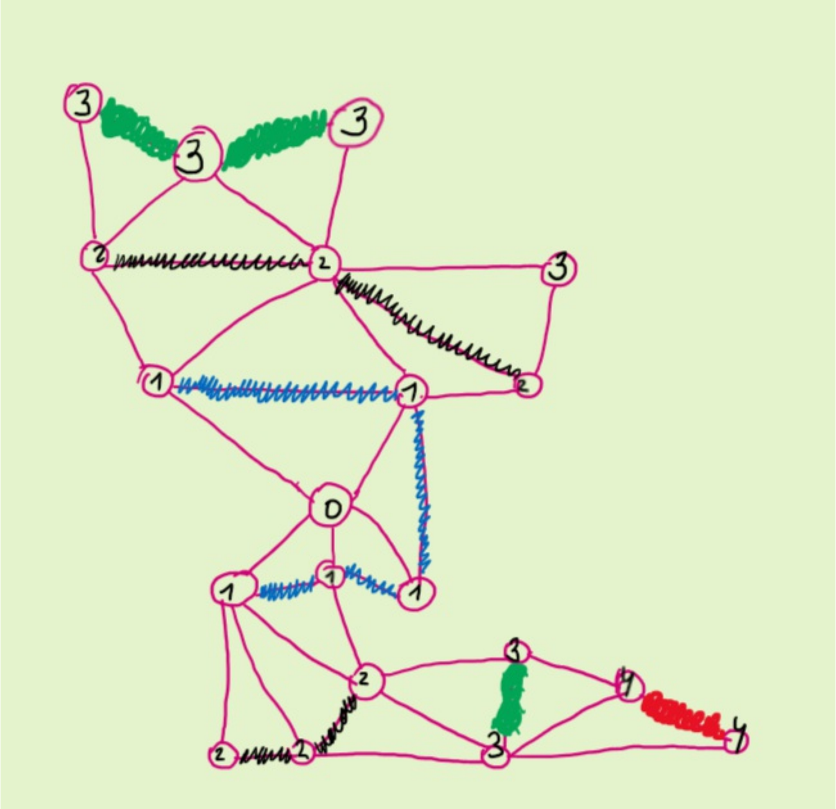
$$tw(G) \leq stw(G) \leq 2$$

$$tw(Q) \leq 2$$

$$\| $$

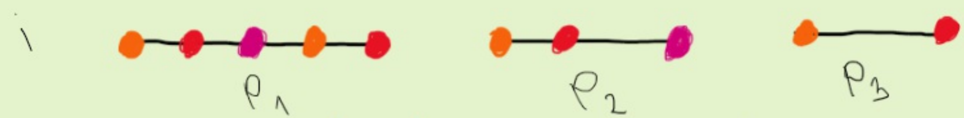
$$tw(\quad) + 1$$

$$\Rightarrow tw(\quad) \leq 1$$

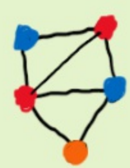


$\Rightarrow$ Idee für den Anfang eines Algorithmus

Färbung bewegt sich entlang den Niveaus von G. In $G[V_i]$ werden die Pfade periodisch mit $p+1$ Farben gefärbt



Problem: Methode könnte eine schlechte Färbung produzieren, z.B für $p=2$



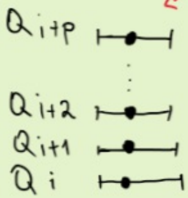
$\Rightarrow$ Methode braucht mehr Struktur.

Aber welche?

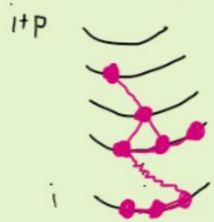
Wie sieht ein zusammenhängender $H \leq G$ aus?

Höhe von $H \geq p+1$

Höhe von $H \leq p$

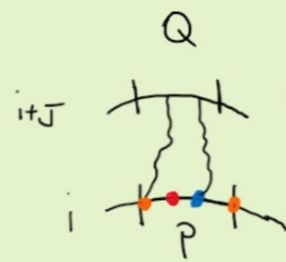


Idee: Sorge dafür, dass spezielle Knotenfolge aus $p+1$ Knoten $p+1$ Farben enthält



Idee: Sorge dafür, dass $H \cap G[V_i]$ das gewünschte liefert

Nachdem Pfad P in Niveau i gefärbt wird, verbiete in den nächsten p Niveaus manche Farben von P für Pfade Q, die Kontakt zu P haben



für Q verboten

Lemma: G chordal mit BFS-Zwiebel $(V_0, V_1, \dots)$. Für $i > 0$ sei $C \subseteq G[\bigcup_{j \geq i} V_j]$ zusammenhängend.

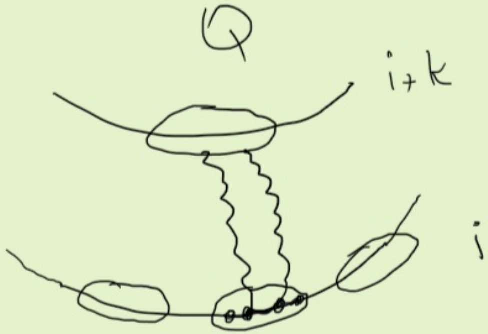
Der Schatten $S_i(C)$ von C in V_i ist dann eine Clique und trennt C von $G[\bigcup_{j < i} V_j]$

Korollar: $H \subseteq G[\bigcup_{j \geq i} V_j]$ zusammenhängend.

Dann ist $G[H \cap V_i]$ zusammenhängend

Auswirkungen auf den Algorithmusentwurf

1) i-Schatten(Pfad Q in V_{i+k}) ist ein Teilpfad in V_i, insbesondere hat Q Kontakt zu nur einem Pfad in V_i



2) Für $H \subseteq G[\bigcup_{j \geq i} V_j]$ zusammenhängend ist $G[H \cap V_i]$ ein Teilpfad

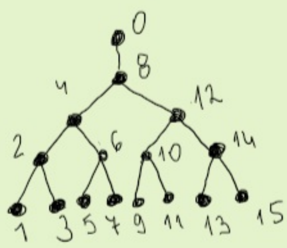
Algorithmus:

1 Farbe $V_0 = \{v\}$ mit f_0 und verbiete f_0 für alle Pfade in den nächsten p Niveaus

2 for $i = 1, \ldots$

a) Farbe Pfad P in V_i periodisch mit nicht verbotenen Farben (für P)

b) Für Pfad Q in V_{i+k}, $1 \leq k \leq p$, mit $S_i(Q) \subseteq V(P)$ verbiete folgende Farben aus P:



$\text{Colors}(P) = \{O_P \ldots P_P\} =$

Falls $S_i(Q) = \{v \text{ und } v'\}$, dann sind v und v' konsekutiv in P, somit ist die eine Farbe unter der anderen im Baum. Verbiete alle Farben auf dem Weg zu O_P.

(Verbotene Menge für Q Pfad in V_{i+p} bekommt p Updates von höchstens $\lceil \log(p+1) \rceil + 1$ Farben)

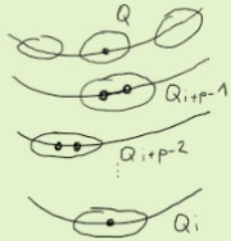
$\Rightarrow \quad O(p \log p)$

Algorithmus ist korrekt

H hat Höhe p+1

1) i = kleinstes Niveau in H
$\exists\, u_{i+p}$ in $V_{i+p} \cap H$. Sei
Q der Pfad in V_{i+p} von u_{i+p}

Für $J = i \dots i+p-1$
gilt $S_J(Q) \cap H \neq \emptyset \Rightarrow u_i\, u_{i+1} \dots u_{i+p}$



also $S_i(Q) = S_i(Q_J)$

Behauptung: $\phi(u_J) \neq \phi(u_K)$, $J < k$

Es gilt $S_J(Q_K) = S_J(Q)$

also $\phi(u_J)$ ist für Q_K verboten,
also p+1 Farben in H $\square$

Höhe von $H \leq p$

Korollar sagt: $Q = G[V(H) \cap V_i]$ ist
zusammenhängend, also ein Teilpfad von
P Pfad in V_i

Q hat 2 Knoten mit derselben Farbe

p+1 Farben in
Q, da P periodisch
gefärbt. $\square$

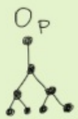
Alle Farben in Q sind eindeutig

O_P Farbe von Q

O_P ist verboten
für Pfade P' in
V_{i+k}, $1 \leq k \leq p$, mit
$S_i(P') \subseteq V(P)$

Alle Farben in Q sind eindeutig

O_p Farbe von Q



O_p ist verboten für Pfade p' in V_{i+k}, $1 \leq k \leq p$, mit $S_i(p') \subseteq V(p)$

$\Rightarrow$ O_p nur einmal in H $\square$

O_p keine Farbe von Q

Farben von Q sind Teilinterval von $[1_p, \dots, p_p]$

$[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k]$

↳ hat eine Wurzel α_β

$[4, 5, 6, 7]$
↳ Wurzel

$\Rightarrow$ α_β ist verboten für Pfade p' in V_{i+k}, $1 \leq k \leq p$, mit $S_i(p') \subseteq V(p)$

$\Rightarrow$ α_β nur einmal in H $\square$