Topologische untere Schranken an $\chi(G)$

February 19, 2021

Topologische untere Schranken an $\chi(G)$

Welche unteren Schranken kennen wir schon?

- Cliquenzahl $\omega(G)$, dann ist $\omega(G) \leq \chi(G)$
- Unabhängigkeitszahl $\alpha(G)$, dann ist $N/\alpha(G) \leq \chi(G)$
- gebrochene chromatische Zahl $\chi_f(G)$, dann ist $\chi_f(G) \leq \chi(G)$

Topologische untere Schranken an $\chi(G)$

Welche unteren Schranken kennen wir schon?

- Cliquenzahl $\omega(G)$, dann ist $\omega(G) \leq \chi(G)$
- Unabhängigkeitszahl $\alpha(G)$, dann ist $N/\alpha(G) \leq \chi(G)$
- gebrochene chromatische Zahl $\chi_f(G)$, dann ist $\chi_f(G) \leq \chi(G)$

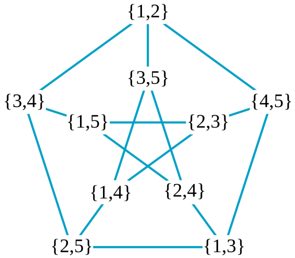
Alle diese Schranken können beliebig schlecht sein

Alle o.g. Schranken können beliebig schlecht sein

Beispiel: Kneser Graphen $KG_{n,k}$

- Knoten sind die Teilmengen von $[n] = \{1, \ldots, n\}$ mit k Elementen
- Kanten zwischen disjunkten Mengen

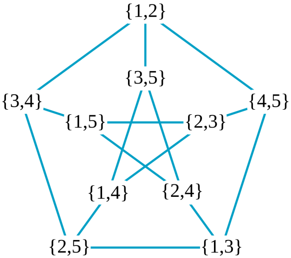
Figure: $n = 5, k = 2$



Alle o.g. Schranken können beliebig schlecht sein

- Betrachten wir den Fall $n = 3k - 1$:
- $\chi(KG_{n,k}) = k + 1$ beliebig groß
- $\omega(KG_{n,k}) = 2$ (Dreiecksfrei für $n < 3k$)
- $\alpha(KG_{n,k}) = \binom{n-1}{k-1}$, damit ist die Schranke < 3
- $\chi_f(KG_{n,k}) = N/\alpha(KG_{n,k})$

Figure: $n = 5, k = 2$



Knesers Vermutung

- Wir wollen also eine Schranke, die gut für Kneser Graphen ist.
- So eine Schranke löst Kesner's Vermutung, nämlich dass

$$\chi(KG_{n,k}) = n - 2k + 2.$$

Knesers Vermutung

- Wir wollen also eine Schranke, die gut für Kneser Graphen ist.
- So eine Schranke löst Kesner's Vermutung, nämlich dass

$$\chi(KG_{n,k}) = n - 2k + 2.$$

Knesers Vermutung, originale Version

Teilt man die n elementigen Teilmengen einer $(2n + k)$ elementigen Menge in $k + 1$ Klassen, so gibt es eine Klasse, die ein paar disjunkter Mengen enthält.

$$\chi(KG_{2n+k,n}) > k+1$$

Knesers Vermutung

Knesers Vermutung, originale Version

Teilt man die n elementigen Teilmengen einer $(2n+k)$ elementigen Menge in $k+1$ Klassen, so gibt es eine Klasse, die ein paar disjunkter Mengen enthält.

Knesers Vermutung

Knesers Vermutung, originale Version

Teilt man die n elementigen Teilmengen einer $(2n+k)$ elementigen Menge in $k+1$ Klassen, so gibt es eine Klasse, die ein paar disjunkter Mengen enthält.

Obere Schranke ist leicht zu finden:

Sei $X = \{1, \ldots, 2n+k\}$ die Menge, die Zerteilt wird und K_i die Klasse an Teilmengen $A \subset X$, $|A| = n$ mit $\min A = i$. Dann zerteilen wir die Teilmengen in die Klassen

min $A \geq k+2$

$$K_1, \ldots, K_{k+1}, \bigcup_{i=k+2}^{2n+k} K_i.$$

$2n-1$

Gliederung

- Vorbereitungen/Definitionen
- Box-Komplexe und Lovász' Schranke
- Nachbarschaftskomplexe von Lovász
- Lovász Beweis Knesers Vermutung

Vorbereitungen/Definitionen

bipartitier Subgraph

Wir nennen den durch $A \subset V, B \subset V$ induzierten bipartiten Subgraph $G[A, B]$

allgemeine Kneser Graphen

Sei X eine endliche Menge und $F \subset P(X)$. Wir definieren den Graphen $KG(F)$:

- F sind die Knoten
- Kanten zwischen disjunkten Mengen

jeder Graph ist ein Kneser Graph

Sei $\bar{E}$ sie Menge der nicht-Kanten in G, wir setzen:

$$F_v = \{\bar{e} \in \bar{E} \mid v \in \bar{e}\}$$

also die Menge nicht-Kanten, die v mit etwas hätten verbinden können.

jeder Graph ist ein Kneser Graph

Sei $\bar{E}$ sie Menge der nicht-Kanten in G, wir setzen:

$$F_v = \{\bar{e} \in \bar{E} \mid v \in \bar{e}\}$$

also die Menge nicht-Kanten, die v mit etwas hätten verbinden können. Dann ist

$$G \simeq KG(\bigcup \{F_v\}).$$

$$v \longmapsto F_v$$

jeder Graph ist ein Kneser Graph

Sei $\bar{E}$ sie Menge der nicht-Kanten in G, wir setzen:

$$F_v = \{\bar{e} \in \bar{E} \mid v \in \bar{e}\}$$

also die Menge nicht-Kanten, die v mit etwas hätten verbinden können. Dann ist

$$G \simeq KG(\bigcup\{F_v\}).$$

1. Fall, $\{v, w\} \in E$: Dann sind F_v und F_w disjunkt, denn nur $\{v, w\}$ könnte potentiell in beiden Mengen liegen.

2. Fall, $\{v, w\} \notin E$: Dann ist $\{v, w\}$ sowohl in F_v also auch in F_w.

Simplizialkomplexe

Simplizialkomplexe

Ein Symplizialkomplex K ist ein nicht-leeres hereditäres Mengensystem. Aus $S \in K$ und $S' \subset S$ folgt also $S' \in K$.

Ein einfaches Beispiel ist die Vereinigung von Potenzmengen:

$$P(\{1, 2, 3\}) \cup P(\{a, b\}) \cup P(\{A, B\}).$$

Simplizialkomplexe

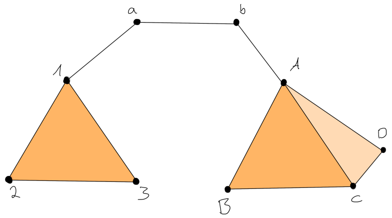
Zu dem Simplizialkomplex K gehört ein topologischer Raum, $\|K\|$.

Simplizialkomplexe

Zu dem Simplizialkomplex K gehört ein topologischer Raum, $\|K\|$.
Beispiel:

$$K = P(\{1,2,3\}) \cup P(\{a,b\}) \cup P(\{A,B,C,D\}) \cup \{\{1,a\},\{A,b\}\}$$

Figure: $\|K\|$



$\mathbb{Z}_2$ Räume und Indizes

Ein $\mathbb{Z}_2$ Raum ist ein paar (T, v) aus einem topologischen Raum T und einem Homöomorphismus $v\colon T \to T$ mit $v^2 = \mathrm{id}$.

$\boxed{\text{Beispiel } T = S^n \text{ mit } v(x) = -x.}$

Eine $\mathbb{Z}_2$ Abbildung von T_1 nach T_2 ist dann eine stetige Abbildung $f\colon T_1 \to T_2$ mit

$$f \circ v_1 = v_2 \circ f.$$

Der $\mathbb{Z}_2$ Index von (T, v) ist dann definiert durch

$$\mathrm{ind}(T, v) = \min\{n \geq 0 \mid \text{Es gibt eine } \mathbb{Z}_2 \text{ Abbildung } T \to S^n\}.$$

$\mathbb{Z}_2$ Räume und Indizes

Ein $\mathbb{Z}_2$ Raum ist ein paar (T, v) aus einem topologischen Raum T und einem Homöomorphismus $v\colon T \to T$ mit $v^2 = \mathrm{id}$.

$\boxed{\text{Beispiel } T = S^n \text{ mit } v(x) = -x.}$

Eine $\mathbb{Z}_2$ Abbildung von T_1 nach T_2 ist dann eine stetige Abbildung $f\colon T_1 \to T_2$ mit

$$f \circ v_1 = v_2 \circ f.$$

Der $\mathbb{Z}_2$ Index von (T, v) ist dann definiert durch

$$\mathrm{ind}(T, v) = \min\{n \geq 0 \mid \text{Es gibt eine } \mathbb{Z}_2 \text{ Abbildung } T \to S^n\}.$$

Aus dem Satz von Borsuk-Ulam folgt:

$$\mathrm{ind}(S^n) = n.$$

$\mathrm{ind}(S^n) = n$

Bosuk Ulam

Ist f: $S^k \to \mathbb{R}^m$ stetig und ist $k > m$ so gibt es $x \in S^k$ mit

$$f(x) = f(-x).$$

Also gibt es keine $\mathbb{Z}_2$ Abbildung $S^n \to S^k$ für $k < n$:
Sei f eine solche, dann ist aber

$$f(v(x)) = f(-x) = f(x) \neq -f(x) = v(f(x)).$$

Homotopy

Homotopy

Zwei stetige Abbildungen $f, g\colon A \to B$ sind homotop, $f \simeq g$, falls es ein stetiges $h\colon [0,1] \times A \to B$ gibt mit $h(0,a) = f(a)$ und $h(1,a) = g(a)$.

Zwei topologische Räume sind homotop, $A \simeq B$, falls es $f\colon A \to B, g\colon B \to A$ gibt mit

$$f \circ g \simeq \mathrm{id}_B, \quad g \circ f \simeq \mathrm{id}_A$$

Boxkomplexe

Nun wollen wir Graphen Simplizialkomplexe zuweisen:
Es sei $A \sqcup B = A \times \{1\} \cup B \times \{2\}$ und

$$CN(A) = \{v \in V \mid \{a, v\} \in E \text{ für alle } a \in A\}.$$

$$\{\underline{a}, b\} \cup \{\underline{a}\} = \{a_1, b_1, a_2\}$$

Boxkomplexe

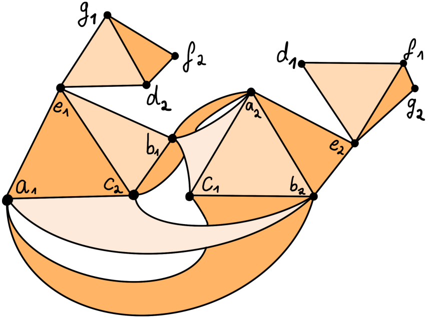
Nun wollen wir Graphen Simplizialkomplexe zuweisen:
Es sei $A \sqcup B = A \times \{1\} \cup B \times \{2\}$ und

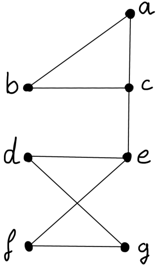
$$CN(A) = \{v \in V \mid \{a, v\} \in E \text{ für alle } a \in A\}.$$

Boxkomplex

$$B(G) = \{A \sqcup B \,|A, B \subset V, A \cap B = \emptyset, \\ G[A, B] \text{ ist vollständig}, CN(A), CN(B) \neq \emptyset\}$$

$$B(G) = \{A \sqcup B \mid A, B \subset V, A \cap B = \emptyset,$$
$$G[A, B] \text{ ist vollständig}, CN(A), CN(B) \neq \emptyset\}$$





$$\begin{aligned} B(G) = &P(\{a_1, b_1, c_2, e_1\}) \cup P(\{a_2, b_2, c_1, e_2\}) \cup P(\{d_1, e_2, f_1, g_2\}) \\ &\cup P(\{d_2, e_1, f_2, g_1\}) \cup P(\{a_1, b_2, c_2\}) \cup P(\{a_1, b_2, c_1\}) \\ &\cup P(\{a_2, b_1, c_1\}) \cup P(\{a_2, b_1, c_2\}). \end{aligned}$$

Wie wird $B(G)$ zu einem $\mathbb{Z}_2$ Komplex?

Auf $B(G)$ gibt es eine natürliche $\mathbb{Z}_2$ Struktur:

$$v(x,1) = (x,2), \quad v(x,2) = (x,1).$$

Damit ist $B(G)$ ein $\mathbb{Z}_2$ Raum.
Ist $f\colon G \to H$ ein Homomorphismus, so ist $B(f)$ definiert durch

$$B(f)(v,i) = (f(v),i), \quad i = 1,2.$$

Dann induziert $B(f)$ eine stetige $\mathbb{Z}_2$ Abbildung $B(G) \to B(H)$.

Wie wird $B(G)$ zu einem $\mathbb{Z}_2$ Komplex?

Auf $B(G)$ gibt es eine natürliche $\mathbb{Z}_2$ Struktur:

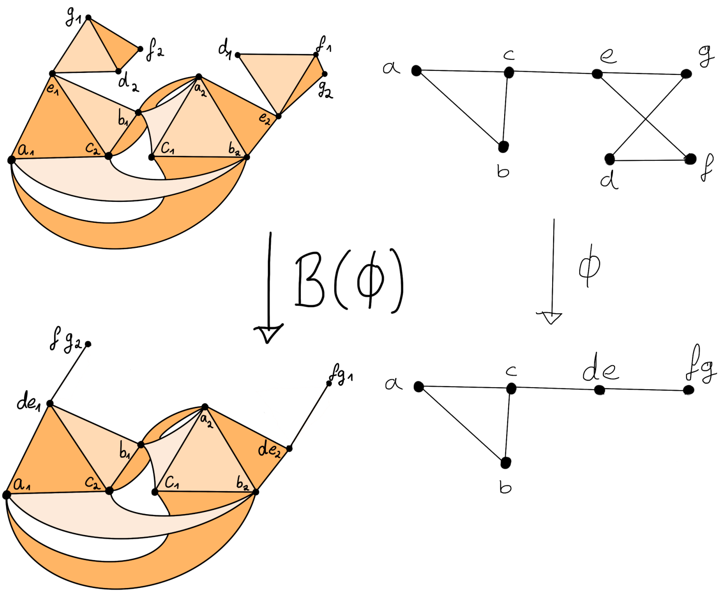
$$v(x,1) = (x,2), \quad v(x,2) = (x,1).$$

Damit ist $B(G)$ ein $\mathbb{Z}_2$ Raum.
Ist $f\colon G \to H$ ein Homomorphismus, so ist $B(f)$ definiert durch

$$B(f)(v,i) = (f(v),i), \quad i = 1,2.$$

Dann induziert $B(f)$ eine stetige $\mathbb{Z}_2$ Abbildung $B(G) \to B(H)$.
Erinnerung: $f\colon G \to H$ Homomorphismus bedeutet

$$v - w \implies f(v) - f(w)$$



g1
f2
d2
e1
b1
a1
c2
a2
c1
b2
e2
d1
f1
g2
a
c
e
g
b
d
f
B(ϕ)
ϕ
fg2
de1
de2
fg1
a
c
de
fg
b

Kurze Zusammenfassung

Wo stehen wir bis jetzt?

- Wir können Graphen top. Räume zuweisen: $G \to \|B(G)\|$.
- Diese haben eine $\mathbb{Z}_2$ Struktur.
- Graph Homomorphismen induzieren $\mathbb{Z}_2$ Abbildungen

Kurze Zusammenfassung

Wo stehen wir bis jetzt?

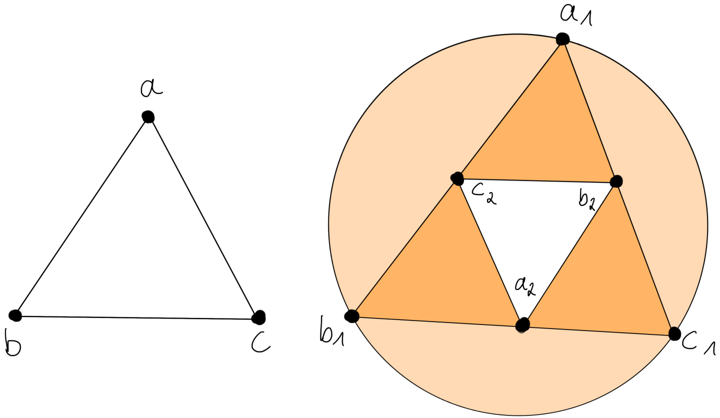
- Wir können Graphen top. Räume zuweisen: $G \to \|B(G)\|$.
- Diese haben eine $\mathbb{Z}_2$ Struktur.
- Graph Homomorphismen induzieren $\mathbb{Z}_2$ Abbildungen

Was jetzt?

- Eine m-Färbung ist ein Homomorphismus $G \to K_m$.
- Wir kriegen also eine $\mathbb{Z}_2$ Abbildung $\|B(G)\| \to \|B(K_m)\|$.
- $\|B(K_m)\| \simeq S^{m-2}$.

Warum ist $\|B(K_m)\| \simeq S^{m-2}$?

Figure: K_3 und $\|B(K_3)\|$



Die Schranke

Eine m-Färbung führt also zu einer $\mathbb{Z}_2$ Abbildung in S^{m-2}, also gilt

$$\chi(G) \geq \operatorname{ind} B(G) + 2.$$

Nachbarschaftskomplexe von Lovász

Was hat Lovász ursprünglich gemacht? Dafür brauchen wir noch eine Definition:

Nachbarschaftskomplexe von Lovász

Was hat Lovász ursprünglich gemacht? Dafür brauchen wir noch eine Definition:
Ist $(X, \leq)$ partiell geordnet, so schreiben wir $\Delta(X, \leq)$ für den Ordnungskomplex von X

- Knoten sind die Elemente von X
- Simplizes sind die Ketten

Für ein Mengensystem $F \subset P(X)$ schreiben wir ΔF für $\Delta(F \backslash \{\emptyset\}, \subset)$

Die Schranke von Lovász

Lovász benutzt im Beweis Knesers Vermutung den Raum

$$L(G) = \Delta\{A \subset V \mid CN(CN(A)) = A\}.$$

Auf $L(G)$ haben wir die $\mathbb{Z}_2$ Aktion: $A \mapsto CN(A)$.

Die Schranke von Lovász

Lovász benutzt im Beweis Knesers Vermutung den Raum

$$L(G) = \Delta\{A \subset V \mid CN(CN(A)) = A\}.$$

Auf $L(G)$ haben wir die $\mathbb{Z}_2$ Aktion: $A \mapsto CN(A)$. Mit ein paar Anpassungen des Beweises von Lovász bekommt man so

$$\chi(G) \geq \operatorname{ind} L(G) + 2.$$

Es gilt

$$\operatorname{ind} B(G) = \operatorname{ind} L(G).$$

Vorteil von B: B ist ein Funktor!

Nachbarschaftskomplexe

Eigentlich hat Lovász folgende Räume benutzt:

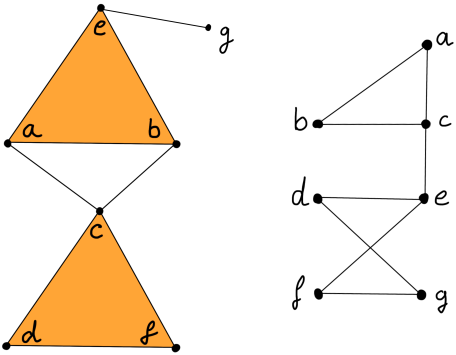
$$N(G) = \{S \subset V \mid CN(S) \neq \emptyset\}.$$

$N(G)$ ist der Nachbarschaftskomplex von G.

Beispiele $N(G)$

$$N(G) = \{S \subset V \mid CN(S) \neq \emptyset\}.$$

Figure: $N(G)$

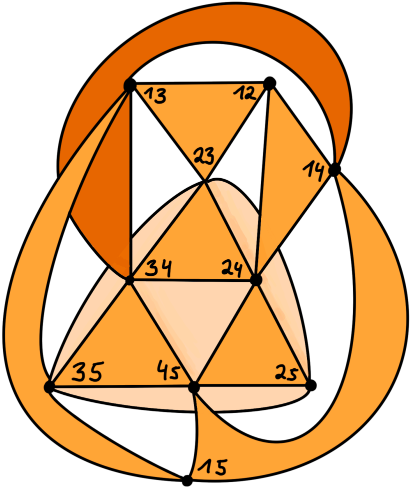


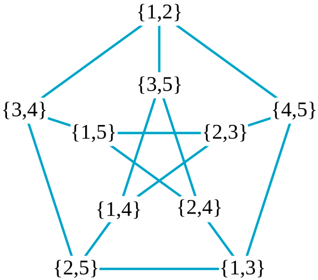
Hier ist

$$\begin{aligned} N(G) = \{ & P(\{b,c\}), P(\{a,c\}) \\ & P(\{a,b,e\}), P(\{e,g\}) \\ & P(\{c,d,f\}), P(\{e,g\}) \\ & P(\{d,f\})\} \end{aligned}$$

Beispiel: $N(KG_{5,2})$

$$N(G) = \{S \subset V \mid CN(S) \neq \emptyset\}.$$





Beweis Knesers Vermutung

Damit konnte Lovász beweisen, dass

$$\chi(G) \geq 3 + \text{Zusammenhang}(N(G)).$$

Was bedeutet "Zusammenhang" und was ist Zusammenhang$(N(KG_{n,k}))$?

Definition Zusammenhang

Homotopy

Zwei stetige Abbildungen $f, g\colon A \to B$ sind homotop, $f \simeq g$, falls es ein stetiges $h\colon [0,1] \times A \to B$ gibt mit $h(0,a) = f(a)$ und $h(1,a) = g(a)$.

Zusammenhang(T) ist das kleinste k, so dass es eine stetige Abbildung $f\colon S^{k+1} \to T$ gibt mit $f \not\simeq 0$.

Definition Zusammenhang

Homotopy

Zwei stetige Abbildungen $f, g\colon A \to B$ sind homotop, $f \simeq g$, falls es ein stetiges $h\colon [0,1] \times A \to B$ gibt mit $h(0,a) = f(a)$ und $h(1,a) = g(a)$.

Zusammenhang(T) ist das kleinste k, so dass es eine stetige Abbildung $f\colon S^{k+1} \to T$ gibt mit $f \not\simeq 0$.
Oder äquivalent: Zusammenhang(T) ist das größte k, so dass sich jede stetige Abbildung $S^r \to T$ stetig auf D^{r+1} fortsetzen lässt, $r = 0, \ldots, k$.

Was ist Zusammenhang$(N(KG_{n,k}))$?

Ist Zusammenhang$(N(KG_{n,k})) = n - 2k - 1$, so folgt Knesers Vermutung, nämlich, dass

$$\chi(KG_{n,k}) = n - 2k + 2.$$

In der originalen Schreibweise schreiben wir

$$n \to 2n + k, \quad k \to n.$$

Was ist Zusammenhang($N(KG_{n,k})$)?

Ist Zusammenhang($N(KG_{n,k})$) $= n - 2k - 1$, so folgt Knesers Vermutung, nämlich, dass

$$\chi(KG_{n,k}) = n - 2k + 2.$$

In der originalen Schreibweise schreiben wir

$$n \to 2n + k, \quad k \to n.$$

Wir brauchen also

$$\text{Zusammenhang}(N(KG_{2n+k,n})) = k - 1.$$

Was ist Zusammenhang($N(KG_{2n+k,n})$)?

Wir brauchen

$$\text{Zusammenhang}(N(KG_{2n+k,n})) = k - 1.$$

Theorem (Lovász)

Sei S eine endliche Menge, $n, k \in \mathbb{N}$. Sei K der Simplizialkomplex mit den n elementigen Teilmengen von S als Knoten, wobei die Simplizes die Mengen an Knoten $\{A_0, \ldots, A_m\}$ sind, für die

$$\left| \bigcup_{i=0}^{m} A_i \right| \leq n + k$$

gilt.
Dann gilt

$$\text{Zusammenhang}(K) = k - 1.$$

Was ist Zusammenhang($N(KG_{2n+k,n})$)?

Theorem (Lovász)

Sei S eine endliche Menge, $n, k \in \mathbb{N}$. Sei K der Simplizialkomplex mit den n elementigen Teilmengen von S als Knoten, wobei die Simplizes die Mengen an Knoten $\{A_0, \ldots, A_m\}$ sind, für die

$$\left| \bigcup_{i=0}^{m} A_i \right| \leq n + k$$

gilt.
Dann gilt

$$\text{Zusammenhang}(K) = k - 1.$$

Mit der Wahl $|S| = 2n + k$ gilt

$$K = N(KG_{2n+k,n}).$$

Was ist Zusammenhang($N(KG_{2n+k,n})$)

Mit der Wahl $|S| = 2n + k$ gilt

$$K = N(KG_{2n+k,n}),$$

denn:
Was sind die Nachbarn von A, A Knoten des Kneser Graphen?

Was ist Zusammenhang($N(KG_{2n+k,n})$)

Mit der Wahl $|S| = 2n + k$ gilt

$$K = N(KG_{2n+k,n}),$$

denn:
Was sind die Nachbarn von A, A Knoten des Kneser Graphen?
Die gemeinsamen Nachbarn sind alle Mengen, die disjunkt zu A sind, deren Vereinigung ist dann A^c, hat also genau $n + k$ Elemente.

Beweis

Idee: Zeige, dass K homotop zu S^k ist.

- $A = \{A_0, \ldots, A_m\}$ Simplex in K
- $U(A) = \bigcup A_i$
- $M(A)$ ist der Simplex aufgespannt von den $n-$ Teilmengen von $U(A)$
- A heißt überfüllt, falls $|U(A)| < n + k$

Beweis

Idee: Zeige, dass K homotop zu S^k ist.

- $A = \{A_0, \ldots, A_m\}$ Simplex in K
- $U(A) = \bigcup A_i$
- $M(A)$ ist der Simplex aufgespannt von den $n-$ Teilmengen von $U(A)$
- A heißt überfüllt, falls $|U(A)| < n + k$

- Induktion über $|S|$: Falls $|S| \leq n + k$, so ist K einfach ein Simplex
- Angenommen $|S| > n + k$

Beweis

- Induktion über $|S|$: Falls $|S| \leq n + k$, so ist K einfach ein Simplex
- Angenommen $|S| > n + k$

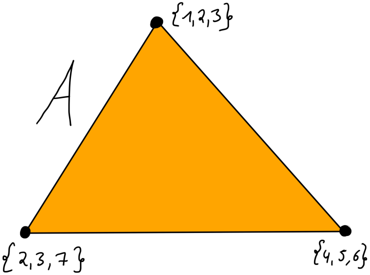
Beweis

- Induktion über $|S|$: Falls $|S| \leq n + k$, so ist K einfach ein Simplex
- Angenommen $|S| > n + k$

- Sei K' der abgeschlossene Subkomplex bestehend aus überfüllten Simplizes
- Sei K_0 das $(k-1)-$Skelett von K.
- 1. Ziel: K_0 deformiert zu K'.
- Dafür müssen wir eine stetig Abbildung $\Psi\colon K_0 \to K'$ finden, so dass
  $$\Psi(A) \subset M(A) \forall \text{Simplizes } A \in K_0.$$
  Dann ist $\Psi \simeq K_0 \xrightarrow{i} K$.

Beispiel

Sei $S = \{1, \ldots, 8\}$ $n = 3, k = 4$, dann ist folgender Simplex in K



Dann ist $A \in K_0$ aber

$$U(A) = \{1, \ldots, 7\} \implies A \notin K'.$$

Beweis

- Wir definieren Ψ auf jedem Simplex einzeln
- Induktion über $\dim A$: Gilt $\dim A = 0$, so ist A überfüllt, also in K'. Wir können also $\Psi(A) = A$ definieren.

Beweis

- Wir definieren Ψ auf jedem Simplex einzeln
- Induktion über $\dim A$: Gilt $\dim A = 0$, so ist A überfüllt, also in K'. Wir können also $\Psi(A) = A$ definieren.
- Angenommen $\dim A > 0$ und Ψ ist auf ∂A schon definiert.
- Sei K'_A der Subkomplex von K' mit Knoten aus $M(A)$, also $K'_A = M(A) \cap K'$.

Beweis

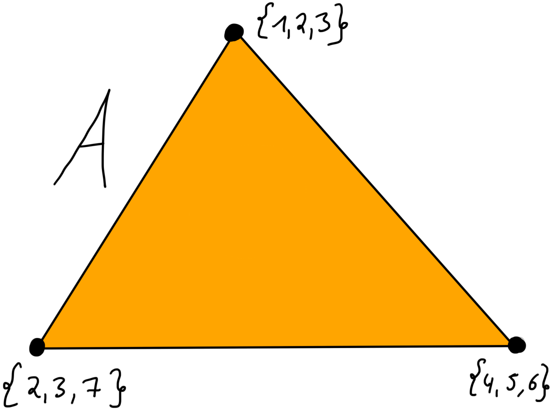
- Angenommen $\dim A > 0$ und Ψ ist auf ∂A schon definiert.
- Sei K'_A der Subkomplex von K' mit Knoten aus $M(A)$, also $K'_A = M(A) \cap K'$.
- IV: $\Psi(\partial A)$ liegt in K'_A und weil $|U(A)| \leq n + k < |S|$ ist K'_A $(k-1)$ Zusammenhängend.
- A ist in K_0, enthält also maximal $k-1$ Knoten.

Beweis

- Angenommen $\dim A > 0$ und Ψ ist auf ∂A schon definiert.
- Sei K'_A der Subkomplex von K' mit Knoten aus $M(A)$, also $K'_A = M(A) \cap K'$.
- IV: $\Psi(\partial A)$ liegt in K'_A und weil $|U(A)| \leq n + k < |S|$ ist K'_A $(k-1)$ Zusammenhängend.
- A ist in K_0, enthält also maximal $k-1$ Knoten.
- $\partial A \simeq S^{k-1}$.
- Also können wir Ψ von ∂A auf A fortsetzen.
- Damit ist Ψ definiert und wir haben: K_0 deformiert zu K'.

Beispiel

Sei $S = \{1, \dots, 8\}$ $n = 3, k = 4$, dann ist folgender Simplex in K



Beweis

- Wir haben: K_0 deformiert zu K'.
- 2.Ziel: K' ist Nullhomotop (kann zu einem Punkt zusammengezogen werden)
- Für $u, v \in S$ definieren wir

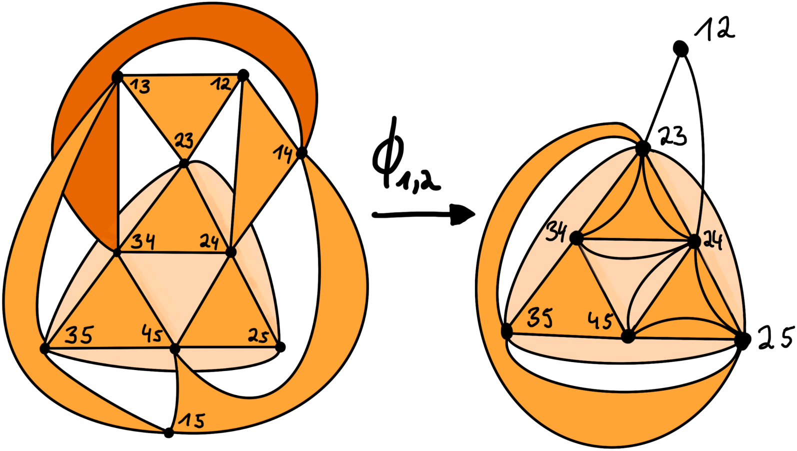
$$\phi_{u,v}(X) = \begin{cases} X \backslash \{u\} \cup \{v\}, & u \in X, v \notin X, \\ X & \text{sonst.} \end{cases}$$

- $\phi_{u,v}$ erhält Simplizes in K, ist also $\{A_0, \ldots, A_m\}$ ein Simplex so auch $\{\phi_{U,v}(A_1), \ldots, \phi_{u,v}(A_m)\}$.

Beweis

- Falls $u \notin U(A)$ oder $v \in U(A)$ so ist
$$U(\phi_{u,v}(A)) \subset U(A)$$
- Falls $u \in U(A), v \notin U(A)$ so ist
$$U(\phi_{u,v}(A)) = U(A) \setminus \{u\} \cup \{v\}$$
- Also immer
$$|U(\phi_{u,v}(A))| \leq |U(A)| \leq n + k - 1$$
falls A überfüllt ist.

Beispiel



Beweis

- Es ist $\phi_{u,v} \colon K' \to K'$.
- Ist A überfüllt, so gilt:

$$\phi_{u,v}(A) \cup A$$

  liegt im von $U(A) \cup \{v\}$ aufgespannten Simplex.
- Damit ist $\phi_{u,v}$ homotop zu $K' \xrightarrow{i} K$
- Das gilt dann auch für Kompositionen, also für

$$\phi = \phi_{u_{|S|} u_n} \cdots \phi_{u_{n+1}, u_n} \cdots \phi_{u_{|S|}, u_2} \cdots \phi_{u_{n+1}, u_2} \phi_{u_{|S|}, u_1} \cdots \phi_{u_{n+1}, u_1}.$$

  wenn $S = \{u_1, \ldots, u_{|S|}\}$.

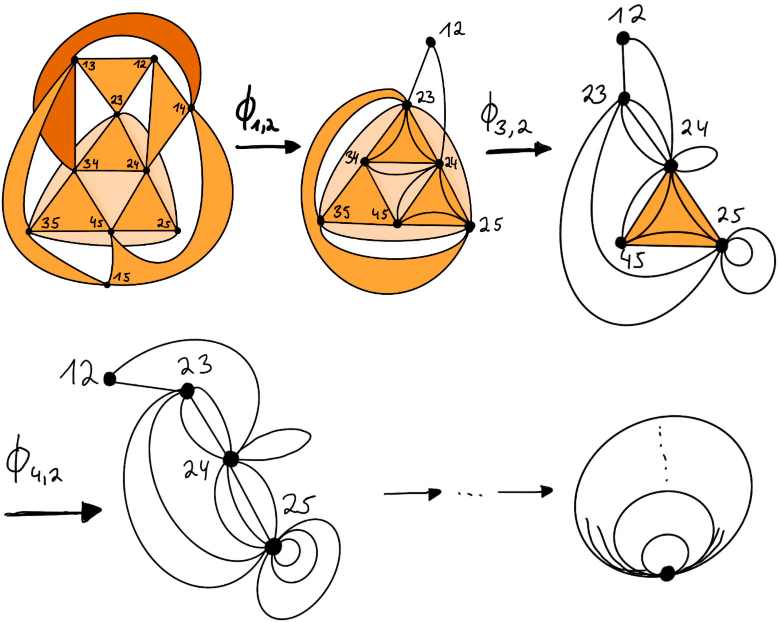
Beweis

- $$\phi = \phi_{u_{|S|}u_n} \cdots \phi_{u_{n+1},u_n} \cdots \phi_{u_{|S|},u_2} \cdots \phi_{u_{n+1},u_2} \phi_{u_{|S|},u_1} \cdots \phi_{u_{n+1},u_1}.$$
- Es gilt
  $$\phi(X) = \{u_1, \dots, u_n\}$$
  für alle $X \subset S, |X| = n$.
- Damit ist K' zu $\{u_1, \dots, u_n\}$ deformierbar, also Nullhomotop.
- K_0 deformiert zu K', also ist auch K_0 Nullhomotop.
- K_0 war das $(k-1)$- Skelett, also $K_0 = \partial K$.
- Nach dem zusammenziehen erhalten wir Sphären, die alle an einem Punkt zusammengeklebt sind.

Beweis

Wir können also das $(k-1)$-Skelett zu einem Punkt zusammenziehen. Danach bleiben nur noch k-Sphären, die an einem Punkt zusammenhängen

Beispiel


13
12
23
14
34
24
35
45
25
15
$\phi_{1,2}$
12
23
34
24
35
45
25
$\phi_{3,2}$
12
23
24
25
45
12
23
$\phi_{4,2}$
24
25
...

Beweis

Damit ist K also $(k-1)$-Zusammenhängend und der Beweis beendet.

Beweis

Damit ist K also $(k-1)$-Zusammenhängend und der Beweis beendet.
Wir haben also:

$$\text{Zusammenhang}(KG_{2n+k,n}) = k-1$$

und damit

$$\chi(KG_{2n+k,n}) \geq k+2$$

oder umgestellt

$$\chi(KG_{n,k}) \geq n-2k+2.$$

Vielen Dank

für die

Aufmerksamkeit