Färbungen von Graphen

Omega ω und Chi χ II

Isabell Wiebking
TU Berlin
i.wiebking@campus.tu-berlin.de

19. Februar 2021

Die Inhalte

Die Inhalte

1. Einführung und Notation

Die Inhalte

1. Einführung und Notation
2. Beispiele von $\triangle$-freien Graphen mit hoher chromatischer Zahl $(\omega = 2,\ \chi \geq k)$
   $\longrightarrow$ Zykov
   $\longrightarrow$ Mycielski

Die Inhalte

1. Einführung und Notation
2. Beispiele von $\triangle$-freien Graphen mit hoher chromatischer Zahl $(\omega = 2,\ \chi \geq k)$
   $\longrightarrow$ Zykov
   $\longrightarrow$ Mycielski
3. Burling Graphen
   $\longrightarrow$ *"intersection Graphen"* von Liniensegmenten in der Ebene
   $\longrightarrow$ Frage: χ-bounded ?

Die Inhalte

1. Einführung und Notation
2. Beispiele von $\triangle$-freien Graphen mit hoher chromatischer Zahl $(\omega = 2,\ \chi \geq k)$
   $\longrightarrow$ Zykov
   $\longrightarrow$ Mycielski
3. Burling Graphen
   $\longrightarrow$ *"intersection Graphen"* von Liniensegmenten in der Ebene
   $\longrightarrow$ Frage: χ-bounded ?
4. Die chromatische Zahl eines Teilgraphen $H \subset G$
   $\longrightarrow$ Frage: Falls $\chi(G) \geq f(n)$, gibt es dann einen Teilgraphen H mit $\chi(H) = n$ und H ist $\triangle$-frei ?

Einführung und Notation

Einführung und Notation

- Graph $G = (V, E)$, auch $V = V(G)$, $E = E(G)$
- Graph $G_k = (V_k, E_k)$
- Kante $vw \in E$, auch $(v, w) \in E$, mit Knoten $v, w \in V$
- Chromatische Zahl $\chi(G)$: minimale Anzahl Farben für zulässige Knotenfärbung
- Cliquengröße $\omega(G)$: maximaler vollständiger Teilgraph in G

Einführung und Notation

- Graph $G = (V, E)$, auch $V = V(G)$, $E = E(G)$
- Graph $G_k = (V_k, E_k)$
- Kante $vw \in E$, auch $(v, w) \in E$, mit Knoten $v, w \in V$
- Chromatische Zahl $\chi(G)$: minimale Anzahl Farben für zulässige Knotenfärbung
- Cliquengröße $\omega(G)$: maximaler vollständiger Teilgraph in G
- Klar: $\chi(G) \geq \omega(G)$
- χ-bounded: Für eine Klasse von Graphen $\mathcal{G}$ ist χ beschränkt durch eine Funktion über ω,
  d.h. $\chi(G) \leq f(\omega(G)) \quad \forall G \in \mathcal{G}$

Zykovs Konstruktion

Beispiel mit $\omega = 2$, $\chi \geq k$

Zykovs Konstruktion

- Induktive Konstruktion eines Graphen G_k
- ZIEL: G_k, $k \in \mathbb{N}$ ist nicht χ-bounded, wollen G_k ist $\triangle$-frei ($\omega(G) = 2$), aber $\chi(G_k) \geq k$

Zykovs Konstruktion

Beispiel mit $\omega = 2$, $\chi \geq k$

- Induktive Konstruktion eines Graphen G_k
- ZIEL: G_k, $k \in \mathbb{N}$ ist <u>nicht</u> χ-bounded, wollen G_k ist $\triangle$-frei $(\omega(G) = 2)$, aber $\chi(G_k) \geq k$
- I.A.: G_1 ist 1-Knoten Graph $\Rightarrow \chi(G_1) = 1$ ✓
- I.S.: G_{k+1} : Nehme disjunkte Vereinigung von $G_1, \ldots, G_k$, für jedes k-Tupel $(v_1, \ldots, v_k)$ mit $v_i \in V_i$, füge neuen Knoten hinzu mit Nachbarn $v_1, \ldots, v_k$.

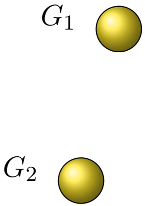
Zykovs Konstruktion

G_1 

I.S.: G_{k+1} : 1. Disjunkte Vereinigung von $G_1, \ldots, G_k$.

2. $\forall k$-Tupel $(v_1, \ldots, v_k)$, $v_i \in V_i$, neuer Knoten mit Nachbarn v_i.

Zykovs Konstruktion

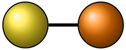


I.S.: G_{k+1} : 1. Disjunkte Vereinigung von $G_1, \ldots, G_k$.
2. $\forall k$-Tupel $(v_1, \ldots, v_k)$, $v_i \in V_i$, neuer Knoten mit Nachbarn v_i.

Zykovs Konstruktion

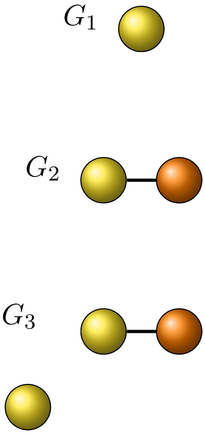
G_1

G_2



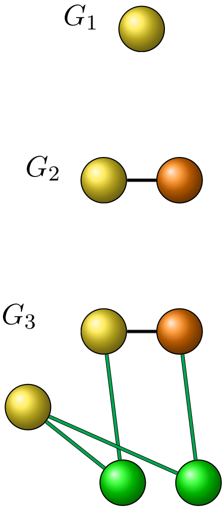
I.S.: G_{k+1} : 1. Disjunkte Vereinigung von $G_1, \dots, G_k$.
2. $\forall k$-Tupel $(v_1, \dots, v_k)$, $v_i \in V_i$, neuer Knoten mit Nachbarn v_i.

Zykovs Konstruktion



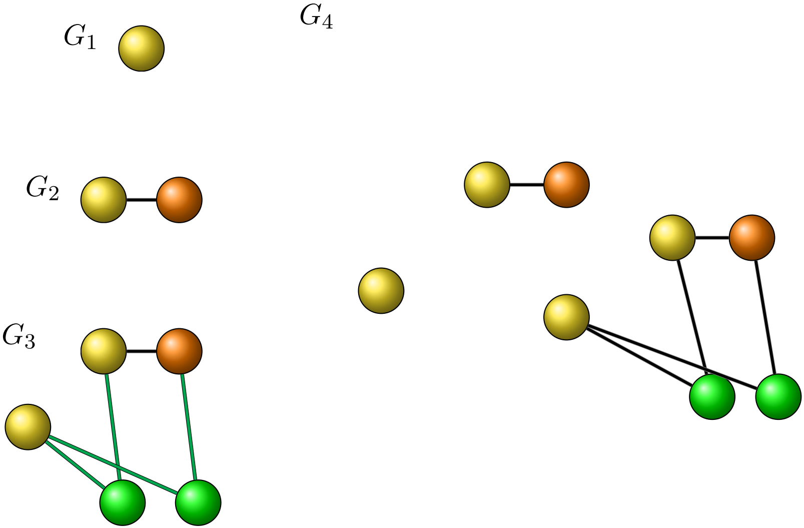
I.S.: G_{k+1} : 1. Disjunkte Vereinigung von $G_1, \ldots, G_k$.
2. $\forall k$-Tupel $(v_1, \ldots, v_k)$, $v_i \in V_i$, neuer Knoten mit Nachbarn v_i.

Zykovs Konstruktion



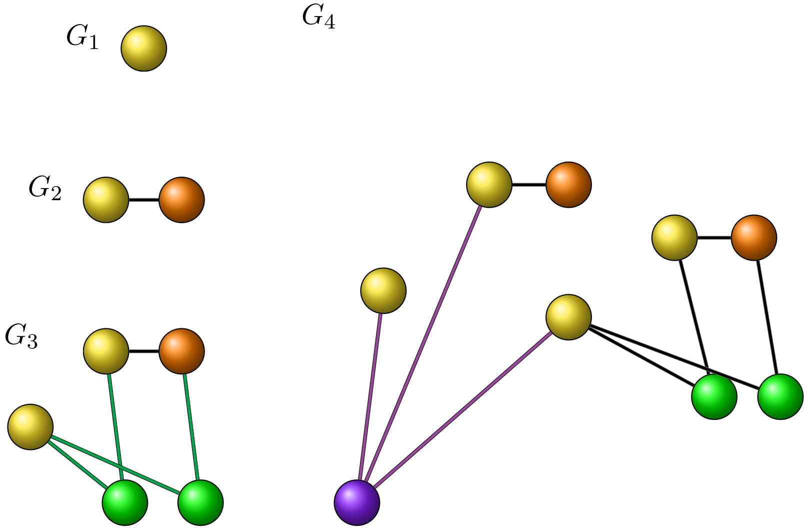
I.S.: G_{k+1} : 1. Disjunkte Vereinigung von $G_1, \ldots, G_k$.
2. $\forall k$-Tupel $(v_1, \ldots, v_k)$, $v_i \in V_i$, neuer Knoten mit Nachbarn v_i.

Zykovs Konstruktion



I.S.: G_{k+1} : 1. Disjunkte Vereinigung von $G_1, \dots, G_k$.
2. $\forall k$-Tupel $(v_1, \dots, v_k)$, $v_i \in V_i$, neuer Knoten mit Nachbarn v_i.

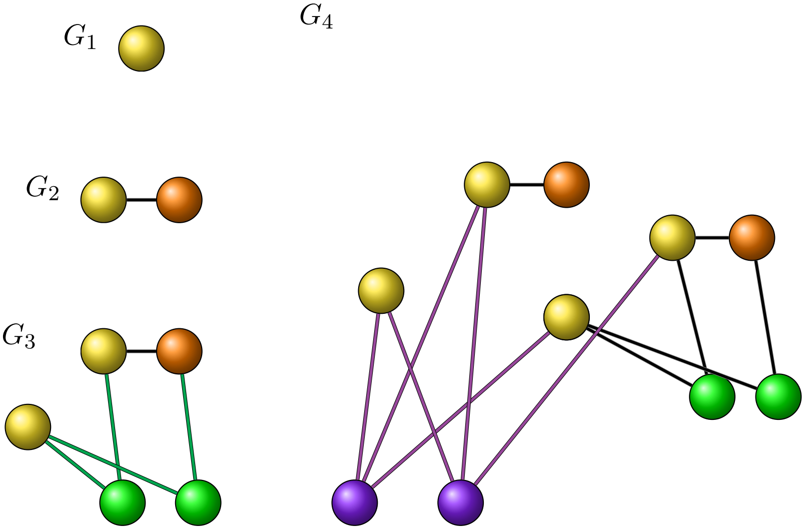
Zykovs Konstruktion



I.S.: G_{k+1} : 1. Disjunkte Vereinigung von $G_1, \ldots, G_k$.

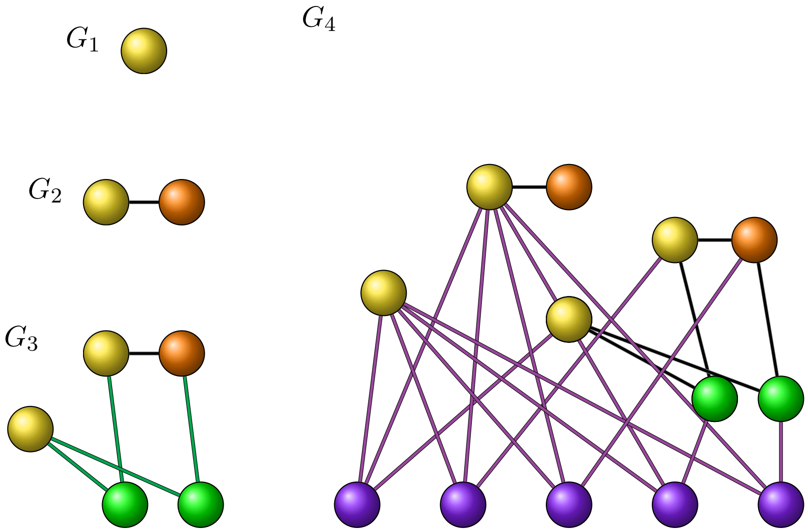
2. $\forall k$-Tupel $(v_1, \ldots, v_k)$, $v_i \in V_i$, neuer Knoten mit Nachbarn v_i.

Zykovs Konstruktion



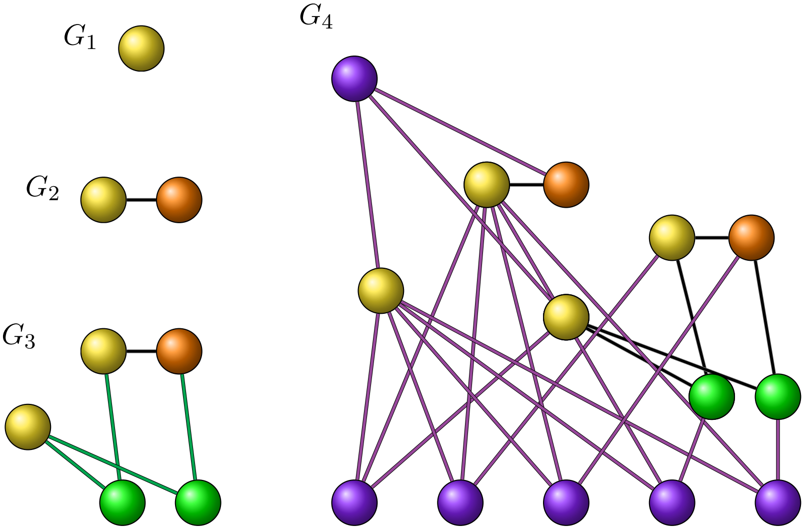
I.S.: G_{k+1} : 1. Disjunkte Vereinigung von $G_1, \dots, G_k$.
2. $\forall k$-Tupel $(v_1, \dots, v_k)$, $v_i \in V_i$, neuer Knoten mit Nachbarn v_i.

Zykovs Konstruktion



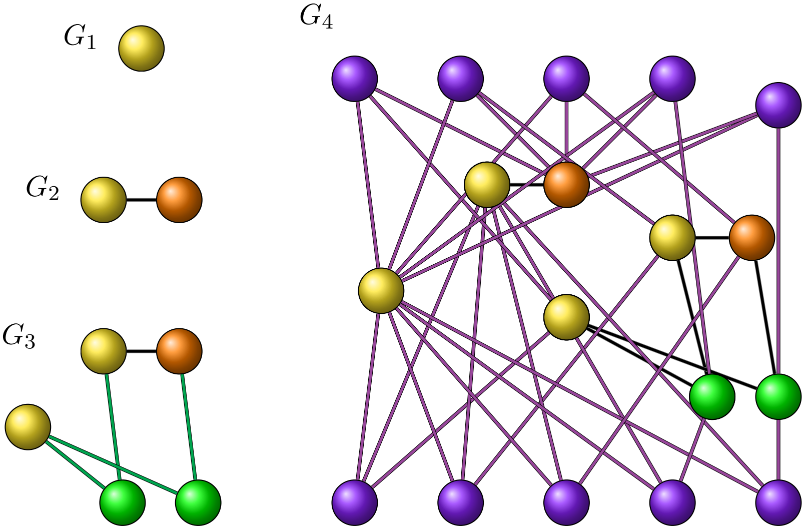
I.S.: G_{k+1} : 1. Disjunkte Vereinigung von $G_1, \ldots, G_k$.
2. $\forall k$-Tupel $(v_1, \ldots, v_k)$, $v_i \in V_i$, neuer Knoten mit Nachbarn v_i.

Zykovs Konstruktion



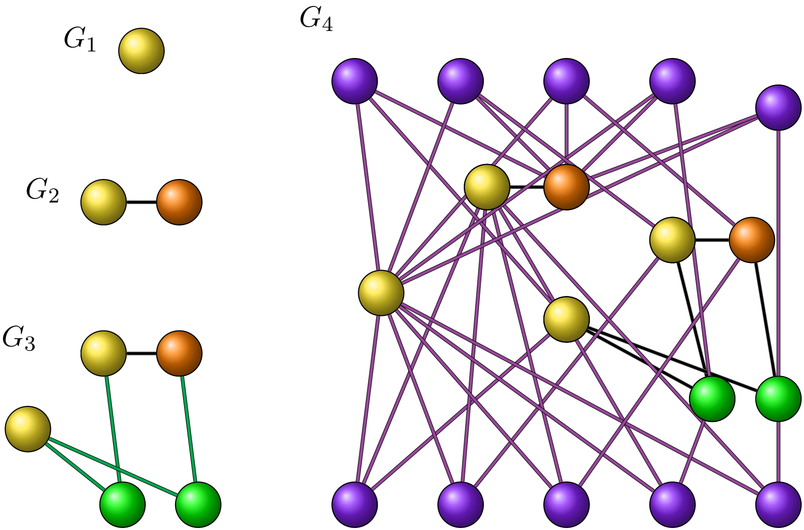
I.S.: G_{k+1} : 1. Disjunkte Vereinigung von $G_1, \ldots, G_k$.
2. $\forall k$-Tupel $(v_1, \ldots, v_k)$, $v_i \in V_i$, neuer Knoten mit Nachbarn v_i.

Zykovs Konstruktion



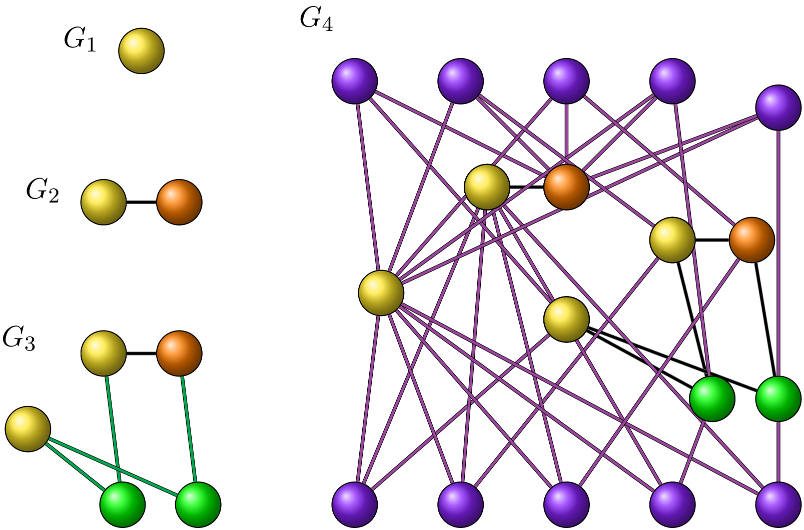
I.S.: G_{k+1} : 1. Disjunkte Vereinigung von $G_1, \ldots, G_k$.
2. $\forall k$-Tupel $(v_1, \ldots, v_k)$, $v_i \in V_i$, neuer Knoten mit Nachbarn v_i.

Zykovs Konstruktion



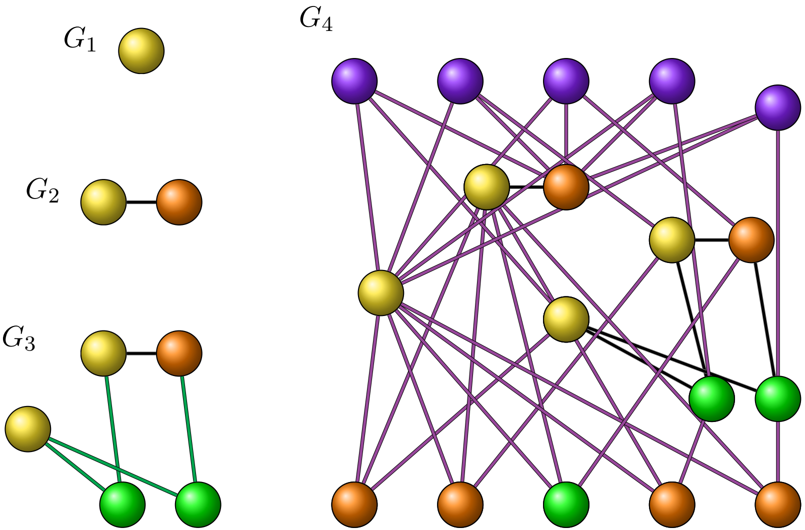
- G_k ist $\triangle$-frei $\longrightarrow \omega(G_k) = 2$

Zykovs Konstruktion



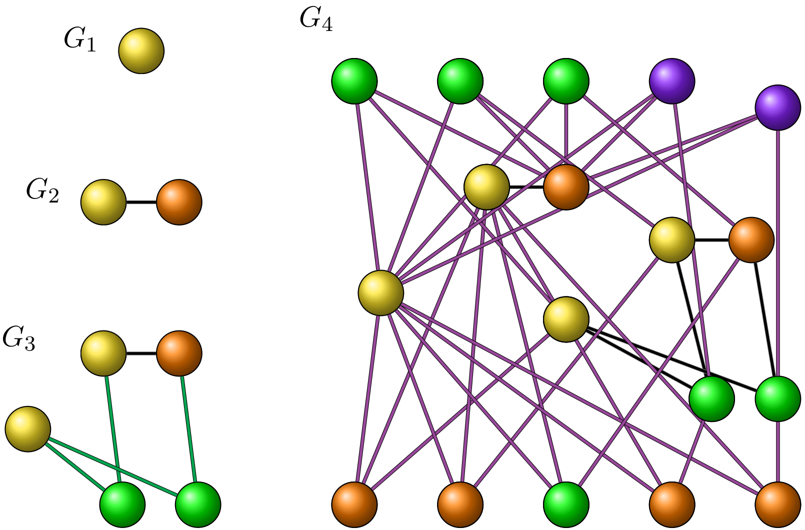
- G_k ist $\triangle$-frei $\longrightarrow \omega(G_k) = 2$
- G_k ist k-färbbar und nicht $(k-1)$-färbbar $\longrightarrow \chi(G_k) = k$

Zykovs Konstruktion



- G_k ist $\triangle$-frei $\longrightarrow \omega(G_k) = 2$
- G_k ist k-färbbar und nicht $(k-1)$-färbbar $\longrightarrow \chi(G_k) = k$

Zykovs Konstruktion



- G_k ist $\triangle$-frei $\longrightarrow \omega(G_k) = 2$
- G_k ist k-färbbar und nicht $(k-1)$-färbbar $\longrightarrow \chi(G_k) = k$

Mycielskis Konstruktion

Beispiel mit $\omega = 2$, $\chi \geq k$

Mycielskis Konstruktion

Beispiel mit $\omega = 2$, $\chi \geq k$

- Induktive Konstruktion eines Graphen G_k
- ZIEL: G_k, $k \in \mathbb{N}$ ist <u>nicht</u> χ-bounded, wollen G_k ist $\triangle$-frei ($\omega(G) = 2$), aber $\chi(G_k) \geq k$

Mycielskis Konstruktion

Beispiel mit $\omega = 2$, $\chi \geq k$

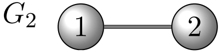
- Induktive Konstruktion eines Graphen G_k
- ZIEL: G_k, $k \in \mathbb{N}$ ist nicht χ-bounded, wollen G_k ist $\triangle$-frei ($\omega(G) = 2$), aber $\chi(G_k) \geq k$
- I.A.: G_2 ist vollständiger 2-Knoten Graph $\Rightarrow \chi(G_2) = 2$ ✓
- I.S.: G_k hat Knotenmenge $V_k = \{1, \ldots, n\}$, $|V_k| = n$.
  G_{k+1}: Knoten $V_{k+1} = \{a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n, c\}$, $|V_{k+1}| = 2n + 1$,
  Kanten:
  Für $1 \leq i < j \leq n$: Falls $ij \in E_k$, dann

$$\left.\begin{matrix} a_i a_j, \\ a_i b_j, \\ b_i a_j \end{matrix}\right\} \in E_{k+1}$$

  Für $i = 1, \ldots, n$: $\quad b_i c \quad \in E_{k+1}$.

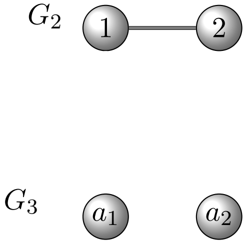
Mycielskis Konstruktion

Induktive Konstruktion von G_{k+1}



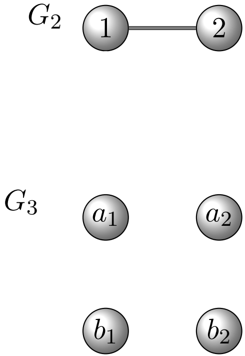
Mycielskis Konstruktion

Induktive Konstruktion von G_{k+1}



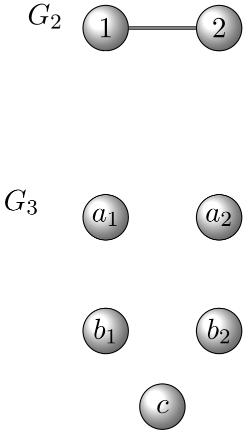
Mycielskis Konstruktion

Induktive Konstruktion von G_{k+1}



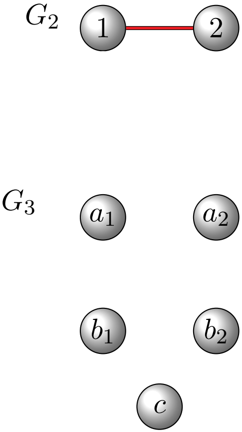
Mycielskis Konstruktion

Induktive Konstruktion von G_{k+1}



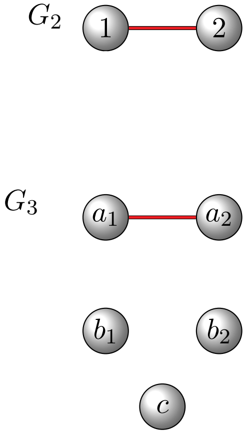
Mycielskis Konstruktion

Induktive Konstruktion von G_{k+1}



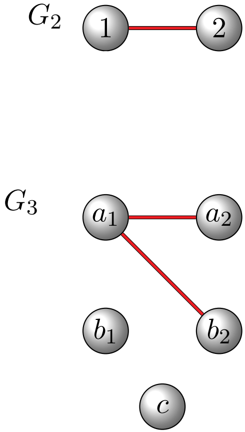
Mycielskis Konstruktion

Induktive Konstruktion von G_{k+1}



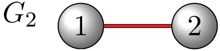
Mycielskis Konstruktion

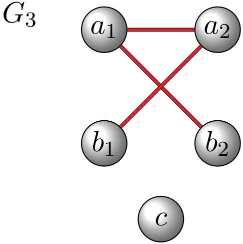
Induktive Konstruktion von G_{k+1}



Mycielskis Konstruktion

Induktive Konstruktion von G_{k+1}



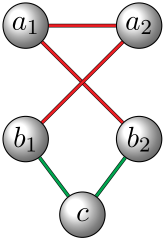


Mycielskis Konstruktion

Induktive Konstruktion von G_{k+1}

G_2

G_3

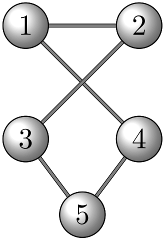


Mycielskis Konstruktion

Induktive Konstruktion von G_{k+1}

G_2

G_3

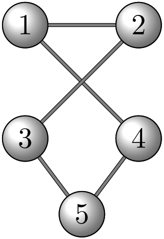


Mycielskis Konstruktion

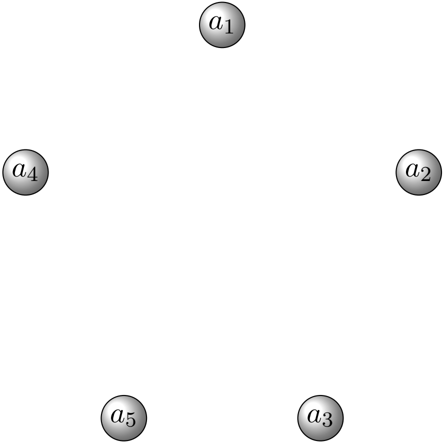
Induktive Konstruktion von G_{k+1}

G_2

G_3

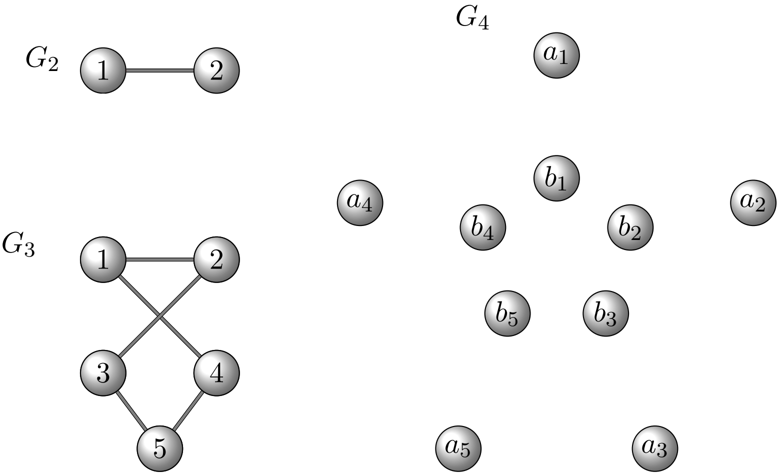


G_4



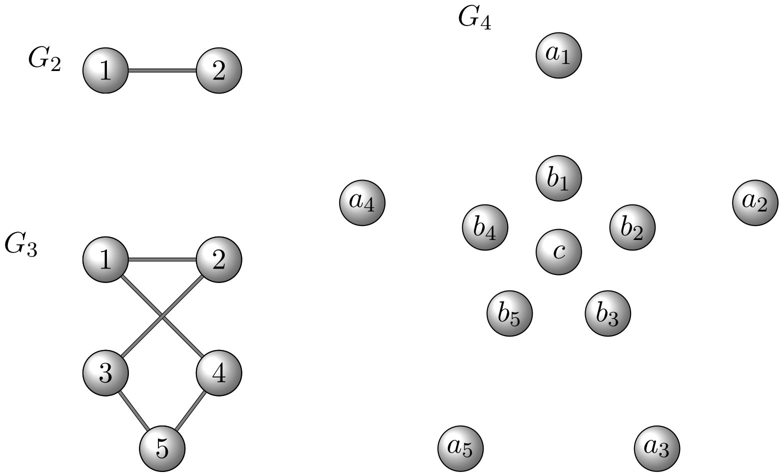
Mycielskis Konstruktion

Induktive Konstruktion von G_{k+1}



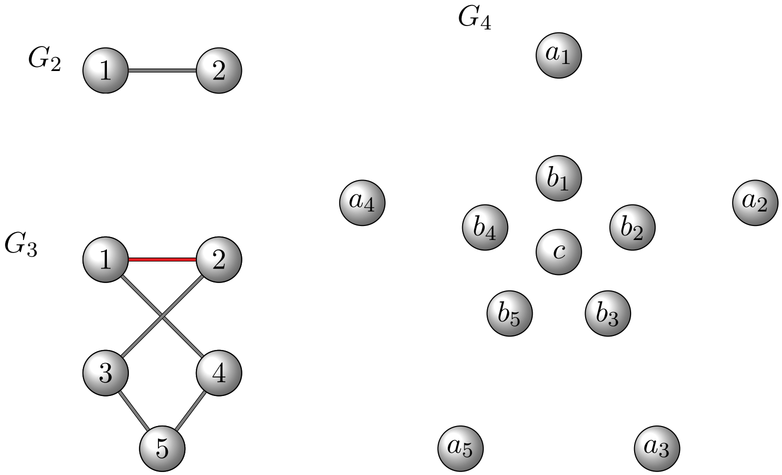
Mycielskis Konstruktion

Induktive Konstruktion von G_{k+1}



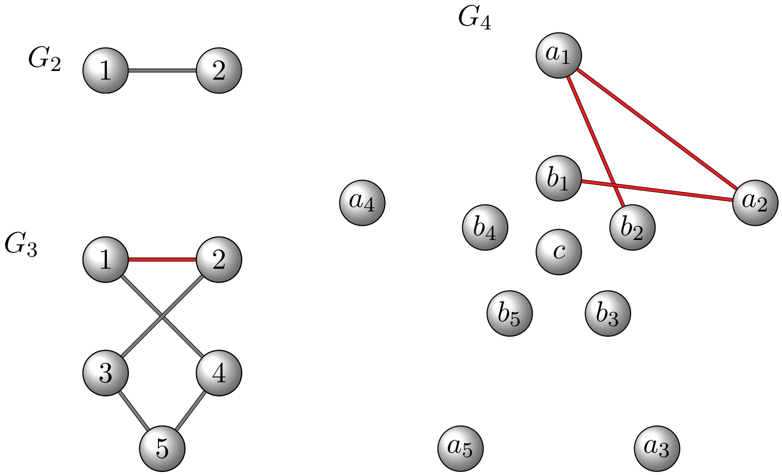
Mycielskis Konstruktion

Induktive Konstruktion von G_{k+1}



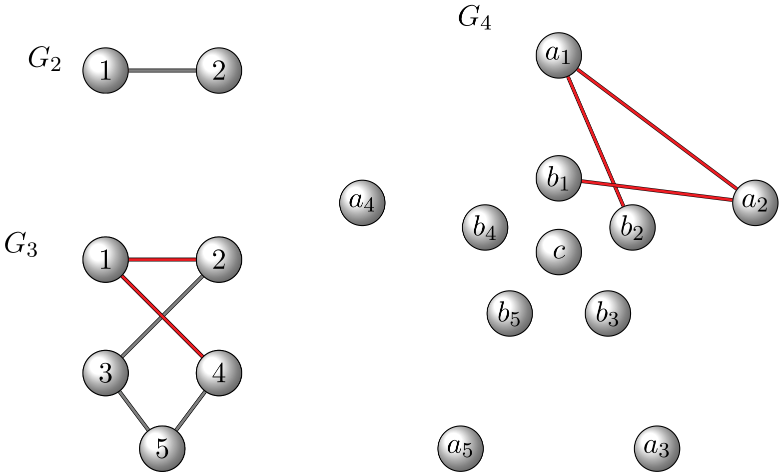
Mycielskis Konstruktion

Induktive Konstruktion von G_{k+1}



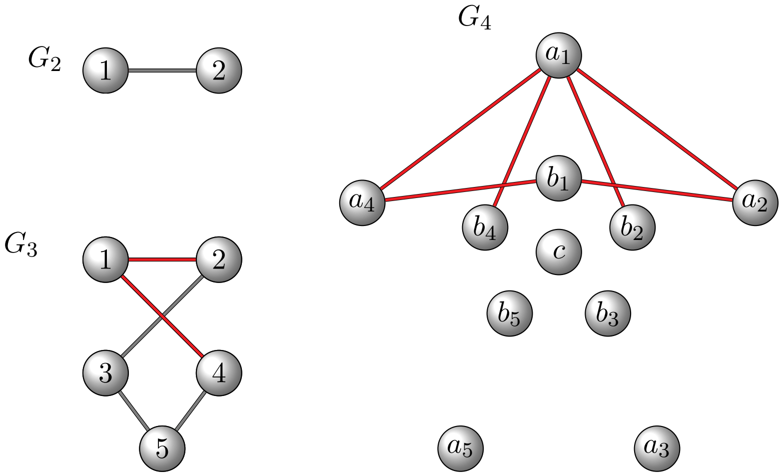
Mycielskis Konstruktion

Induktive Konstruktion von G_{k+1}



Mycielskis Konstruktion

Induktive Konstruktion von G_{k+1}

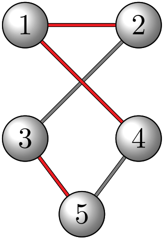


Mycielskis Konstruktion

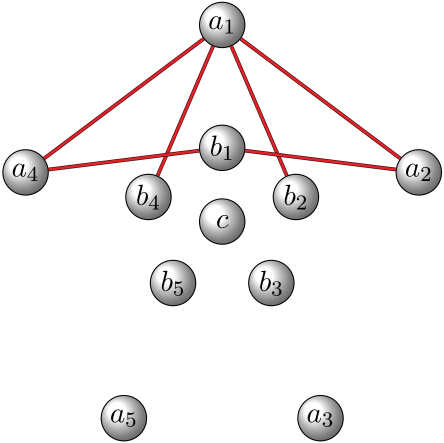
Induktive Konstruktion von G_{k+1}

G_2

G_3

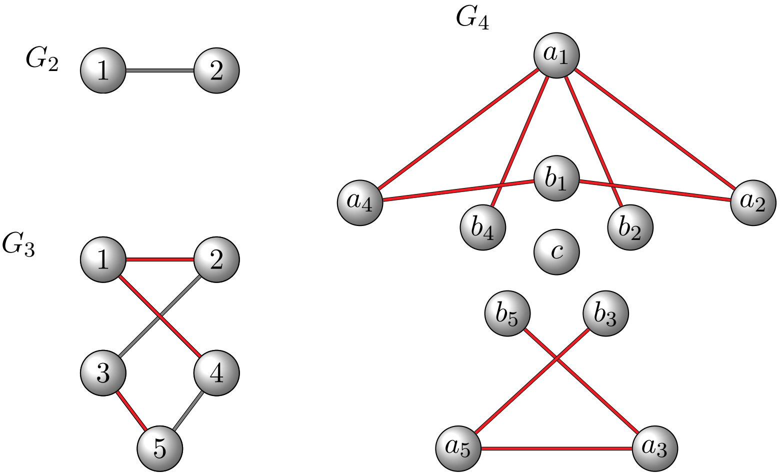


G_4



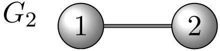
Mycielskis Konstruktion

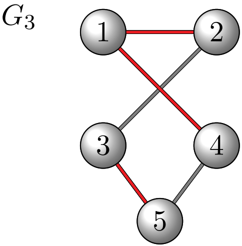
Induktive Konstruktion von G_{k+1}

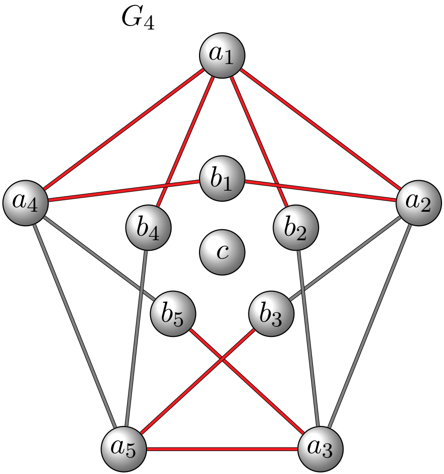


Mycielskis Konstruktion

Induktive Konstruktion von G_{k+1}





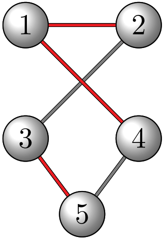


Mycielskis Konstruktion

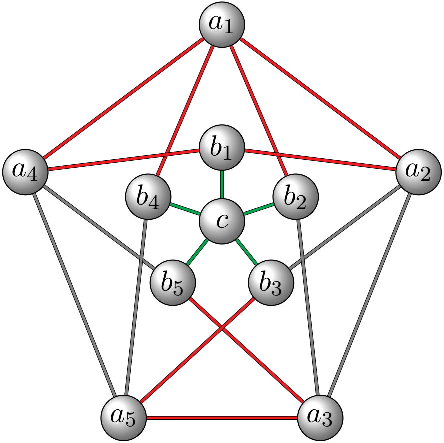
Induktive Konstruktion von G_{k+1}

G_2

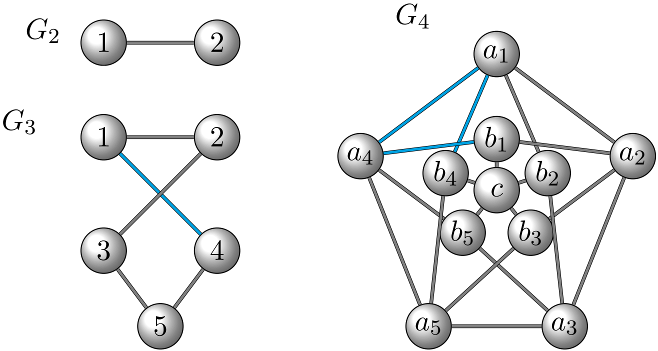
G_3



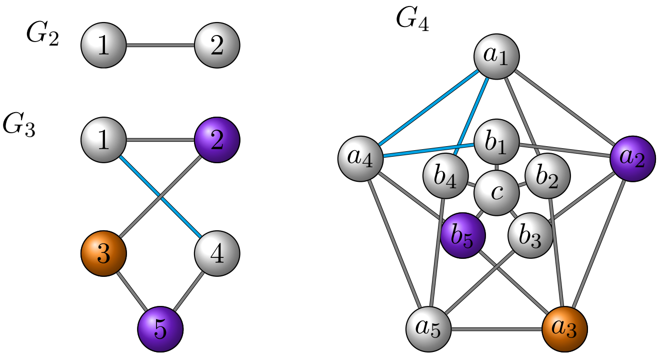
G_4



Mycielskis Konstruktion

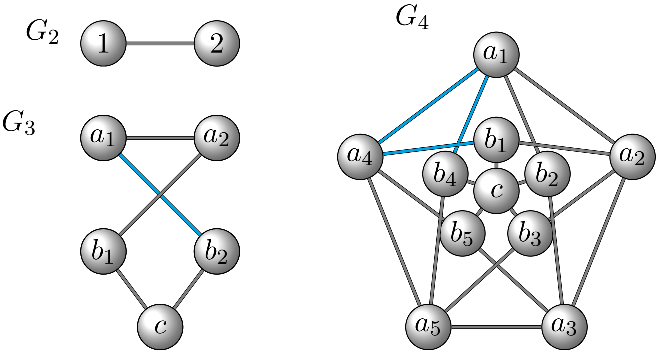


Mycielskis Konstruktion



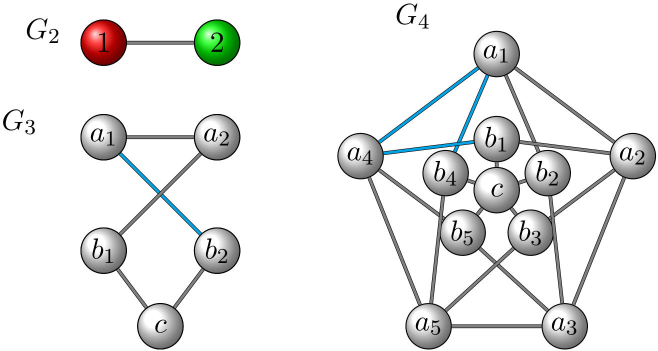
(ω) Kanten $a_i x_j$, $a_i y_p \in E_{k+1}$ mit $x, y \in \{a, b\}$, d.h. $ij, ip \in E_k$
$\Rightarrow jp \notin E_k$, weil G_k ist $\triangle$-frei
$\Rightarrow x_j y_p \notin E_{k+1} \Rightarrow G_{k+1}$ ist $\triangle$-frei $\longrightarrow$ $\boxed{\omega(G_{k+1}) = 2}$

Mycielskis Konstruktion



(ω) Kanten $a_i x_j$, $a_i y_p \in E_{k+1}$ mit $x, y \in \{a, b\}$, d.h. $ij, ip \in E_k$
$\Rightarrow jp \notin E_k$, weil G_k ist $\triangle$-frei
$\Rightarrow x_j y_p \notin E_{k+1} \Rightarrow G_{k+1}$ ist $\triangle$-frei $\longrightarrow$ $\boxed{\omega(G_{k+1}) = 2}$

Mycielskis Konstruktion

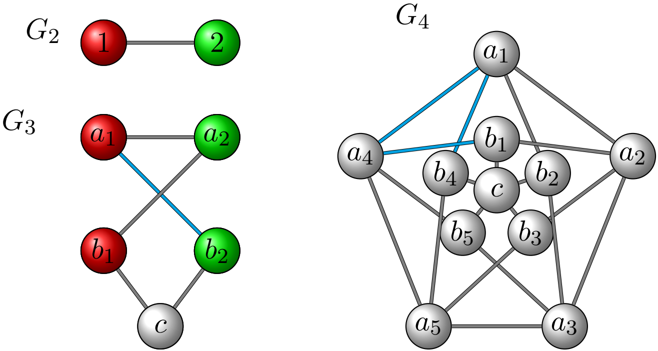


(ω) Kanten $a_i x_j$, $a_i y_p \in E_{k+1}$ mit $x, y \in \{a, b\}$, d.h. $ij, ip \in E_k$

$\Rightarrow jp \notin E_k$, weil G_k ist $\triangle$-frei

$\Rightarrow x_j y_p \notin E_{k+1} \Rightarrow G_{k+1}$ ist $\triangle$-frei $\longrightarrow \boxed{\omega(G_{k+1}) = 2}$

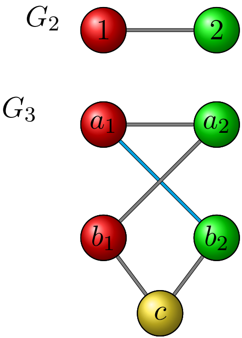
Mycielskis Konstruktion

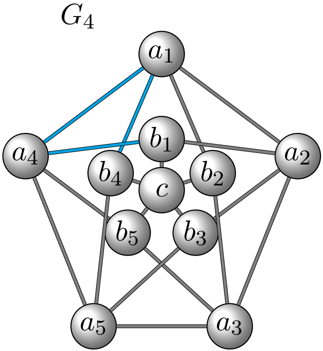


(ω) Kanten $a_i x_j$, $a_i y_p \in E_{k+1}$ mit $x, y \in \{a, b\}$, d.h. $ij, ip \in E_k$
$\Rightarrow jp \notin E_k$, weil G_k ist $\triangle$-frei
$\Rightarrow x_j y_p \notin E_{k+1} \Rightarrow G_{k+1}$ ist $\triangle$-frei $\longrightarrow$ $\boxed{\omega(G_{k+1}) = 2}$

(χ) IDEE: Kante ij in G_k induziert $a_i a_j$, $a_i b_j$, $b_i a_j$ in G_{k+1}

Mycielskis Konstruktion

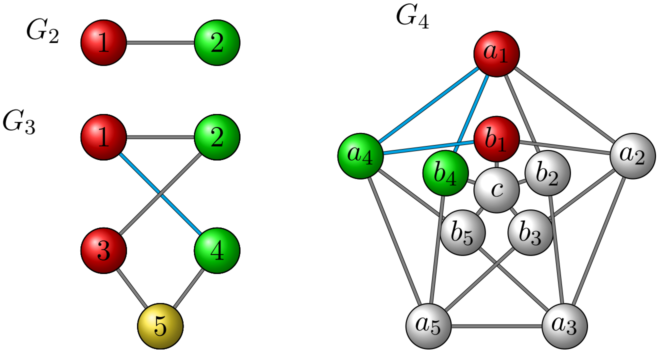




(ω) Kanten $a_i x_j$, $a_i y_p \in E_{k+1}$ mit $x, y \in \{a, b\}$, d.h. $ij, ip \in E_k$
$\Rightarrow jp \notin E_k$, weil G_k ist $\triangle$-frei
$\Rightarrow x_j y_p \notin E_{k+1} \Rightarrow G_{k+1}$ ist $\triangle$-frei $\longrightarrow$ $\boxed{\omega(G_{k+1}) = 2}$

(χ) IDEE: Kante ij in G_k induziert $a_i a_j$, $a_i b_j$, $b_i a_j$ in G_{k+1}

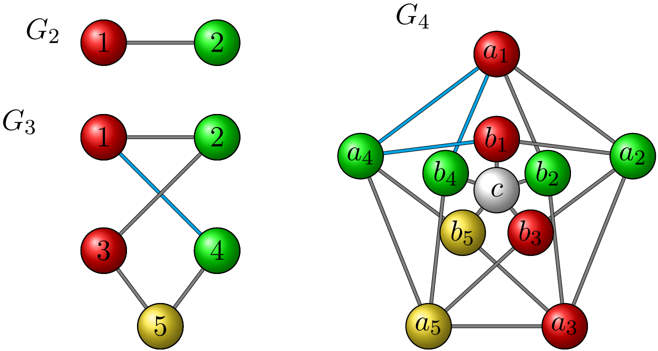
Mycielskis Konstruktion



(ω) Kanten $a_i x_j$, $a_i y_p \in E_{k+1}$ mit $x, y \in \{a, b\}$, d.h. $ij, ip \in E_k$
$\Rightarrow jp \notin E_k$, weil G_k ist $\triangle$-frei
$\Rightarrow x_j y_p \notin E_{k+1} \Rightarrow G_{k+1}$ ist $\triangle$-frei $\longrightarrow$ $\boxed{\omega(G_{k+1}) = 2}$

(χ) IDEE: Kante ij in G_k induziert $a_i a_j$, $a_i b_j$, $b_i a_j$ in G_{k+1}

Mycielskis Konstruktion

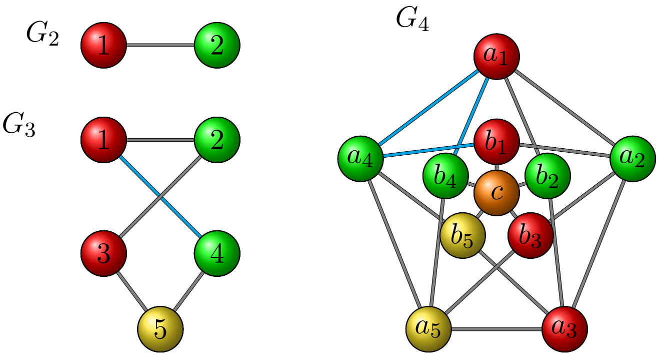


(ω) Kanten $a_i x_j$, $a_i y_p \in E_{k+1}$ mit $x, y \in \{a, b\}$, d.h. $ij, ip \in E_k$
$\Rightarrow jp \notin E_k$, weil G_k ist $\triangle$-frei
$\Rightarrow x_j y_p \notin E_{k+1} \Rightarrow G_{k+1}$ ist $\triangle$-frei $\longrightarrow$ $\boxed{\omega(G_{k+1}) = 2}$

(χ) IDEE: Kante ij in G_k induziert $a_i a_j$, $a_i b_j$, $b_i a_j$ in G_{k+1}

- ij, $jp \in E_k \Rightarrow ip \notin E_k$ (weil $\triangle$-frei) $\Rightarrow a_i b_p, a_i a_p, b_i a_p \notin E_{k+1}$

Mycielskis Konstruktion



(ω) Kanten $a_i x_j$, $a_i y_p \in E_{k+1}$ mit $x, y \in \{a, b\}$, d.h. $ij, ip \in E_k$
$\Rightarrow jp \notin E_k$, weil G_k ist $\triangle$-frei
$\Rightarrow x_j y_p \notin E_{k+1} \Rightarrow G_{k+1}$ ist $\triangle$-frei $\longrightarrow$ $\boxed{\omega(G_{k+1}) = 2}$

(χ) IDEE: Kante ij in G_k induziert $a_i a_j$, $a_i b_j$, $b_i a_j$ in G_{k+1}

- ij, $jp \in E_k \Rightarrow ip \notin E_k$ (weil $\triangle$-frei) $\Rightarrow a_i b_p, a_i a_p, b_i a_p \notin E_{k+1}$
- G_{k+1} $(k+1)$- und nicht k-färbbar $\longrightarrow$ $\boxed{\chi(G_{k+1}) = k + 1}$

Burling Graphen

Was brauchen wir?

- Liniensegmente $\mathcal{S}$ in der Ebene

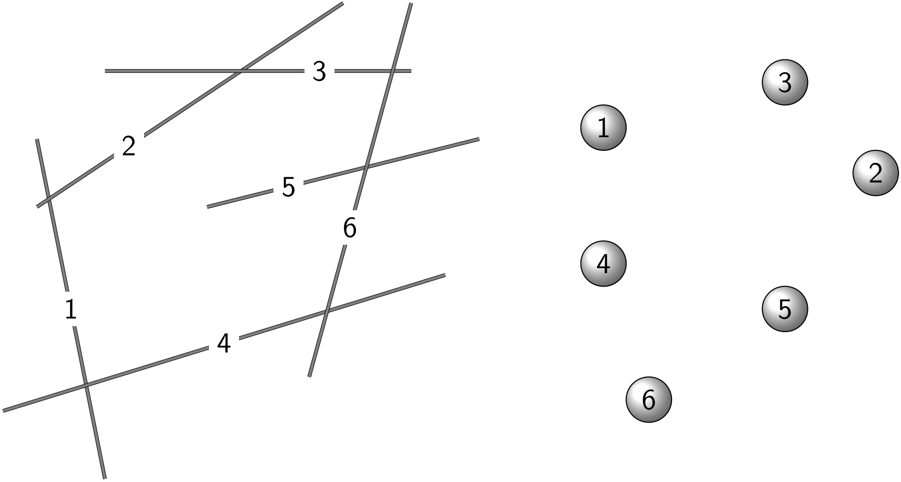
Burling Graphen

Was brauchen wir?

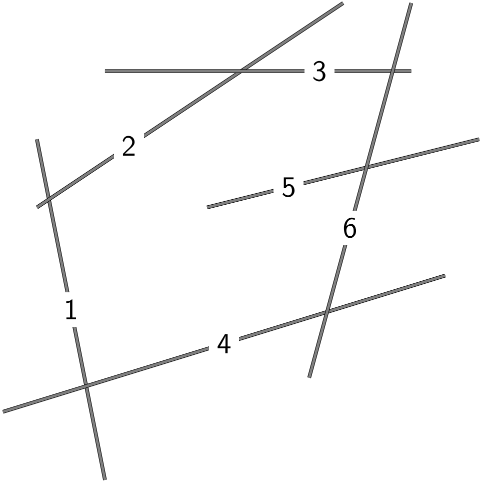
- Liniensegmente $\mathcal{S}$ in der Ebene

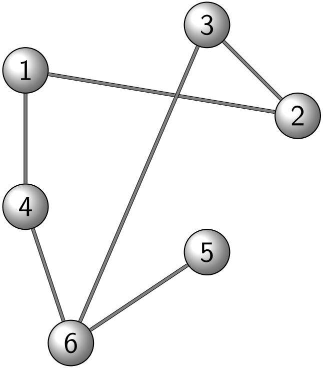
  $\longrightarrow$ In Zusammenhang mit intersection Graphen
  $\longrightarrow$ Achsausgerichtete Rechtecke
  $\longrightarrow$ Proben $\mathcal{P}$ von Liniensegmenten im Rechteck
  $\longrightarrow$ Wurzeln (*roots*) von Proben
  $\longrightarrow$ Färbung

Liniensegmente in der Ebene

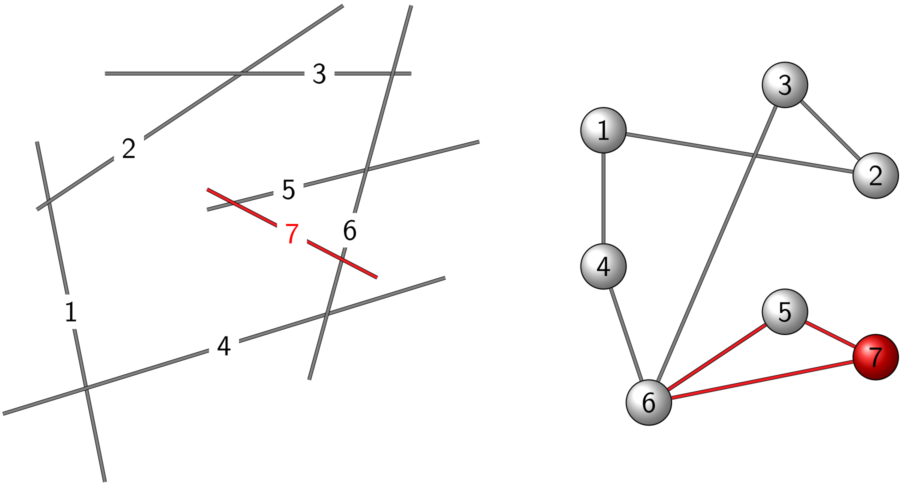


Liniensegmente in der Ebene

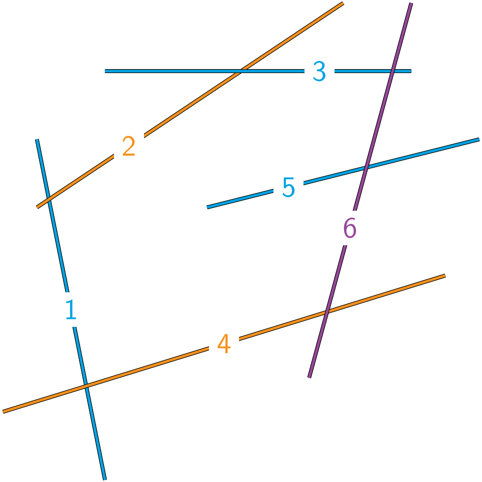


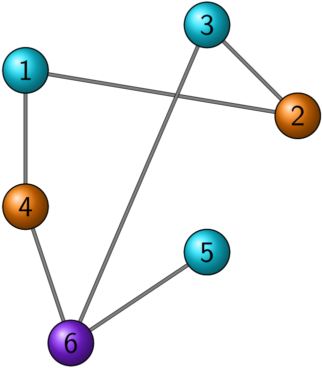


Liniensegmente in der Ebene

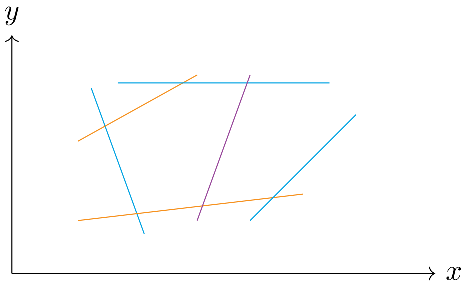


Liniensegmente in der Ebene

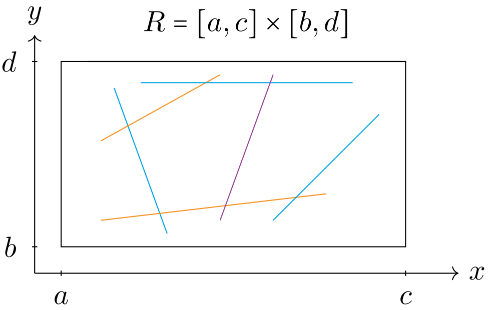




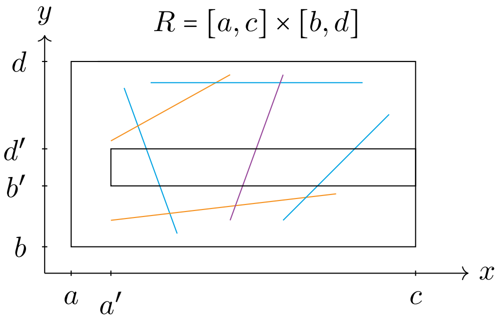
Liniensegmente in der Ebene



Liniensegmente in der Ebene

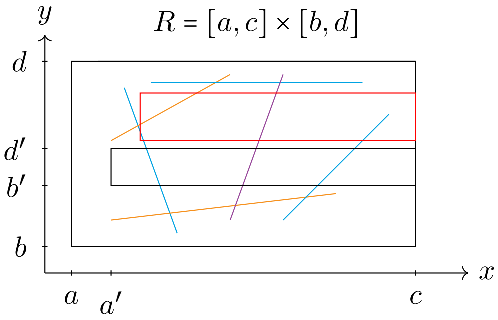


Liniensegmente in der Ebene



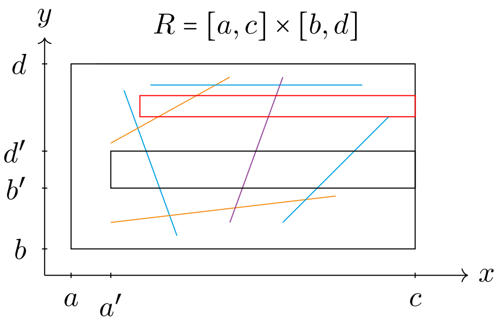
- Probe: $P = [a', c] \times [b', d']$ für $(\mathcal{S}, R)$, falls:
  1. $a < a' < c$ und $b < b' < d' < d$
  2. Kein Segment aus $\mathcal{S}$ schneidet den linken Rand von P
  3. Kein Segment aus $\mathcal{S}$ hat seinen Endpunkt im Inneren oder auf dem Rand von P
  4. Segmente aus $\mathcal{S}$, die P schneiden, sind paarweise disjunkt

Liniensegmente in der Ebene



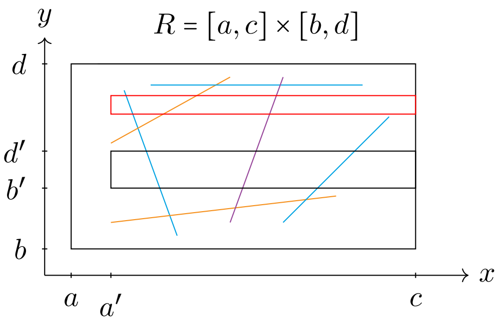
- Probe: $P = [a', c] \times [b', d']$ für $(\mathcal{S}, R)$, falls:
  1. $a < a' < c$ und $b < b' < d' < d$
  2. Kein Segment aus $\mathcal{S}$ schneidet den linken Rand von P
  3. Kein Segment aus $\mathcal{S}$ hat seinen Endpunkt im Inneren oder auf dem Rand von P
  4. Segmente aus $\mathcal{S}$, die P schneiden, sind paarweise disjunkt

Liniensegmente in der Ebene



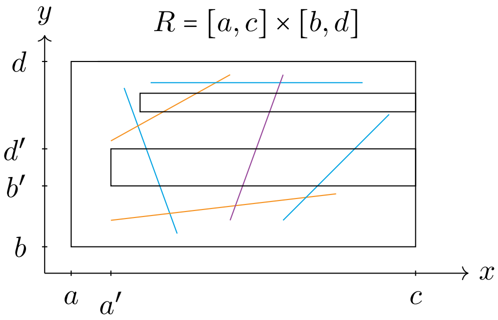
- Probe: $P = [a', c] \times [b', d']$ für $(\mathcal{S}, R)$, falls:
  1. $a < a' < c$ und $b < b' < d' < d$
  2. Kein Segment aus $\mathcal{S}$ schneidet den linken Rand von P
  3. Kein Segment aus $\mathcal{S}$ hat seinen Endpunkt im Inneren oder auf dem Rand von P
  4. Segmente aus $\mathcal{S}$, die P schneiden, sind paarweise disjunkt

Liniensegmente in der Ebene



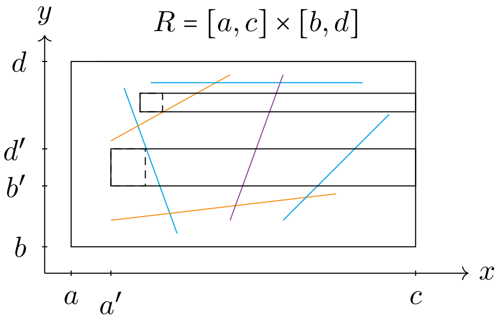
- Probe: $P = [a',c] \times [b',d']$ für $(\mathcal{S}, R)$, falls:
  1. $a < a' < c$ und $b < b' < d' < d$
  2. Kein Segment aus $\mathcal{S}$ schneidet den linken Rand von P
  3. Kein Segment aus $\mathcal{S}$ hat seinen Endpunkt im Inneren oder auf dem Rand von P
  4. Segmente aus $\mathcal{S}$, die P schneiden, sind paarweise disjunkt

Liniensegmente in der Ebene



- Probe: $P = [a', c] \times [b', d']$ für $(\mathcal{S}, R)$, falls:
  1. $a < a' < c$ und $b < b' < d' < d$
  2. Kein Segment aus $\mathcal{S}$ schneidet den linken Rand von P
  3. Kein Segment aus $\mathcal{S}$ hat seinen Endpunkt im Inneren oder auf dem Rand von P
  4. Segmente aus $\mathcal{S}$, die P schneiden, sind paarweise disjunkt

Liniensegmente in der Ebene



- Probe: $P = [a', c] \times [b', d']$ für $(\mathcal{S}, R)$, falls:
  1. $a < a' < c$ und $b < b' < d' < d$
  2. Kein Segment aus $\mathcal{S}$ schneidet den linken Rand von P
  3. Kein Segment aus $\mathcal{S}$ hat seinen Endpunkt im Inneren oder auf dem Rand von P
  4. Segmente aus $\mathcal{S}$, die P schneiden, sind paarweise disjunkt
- *root*: Rechteck $[a', c'] \times [b', d']$ mit max. c', das disjunkt ist zu allen Segmenten, die P schneiden

Burling Graphen

Die Fragestellung

Frage (Erdős, 1970er)

Sind intersection Graphen von Liniensegmenten in der Ebene χ-bounded ?

Frage (Erdős, 1970er)

Sind intersection Graphen von Liniensegmenten in der Ebene χ-bounded ?

$\longrightarrow$ Antwort: Nein !

- Wir wollen zeigen:

Theorem

Für alle $k \geq 1$, gibt es eine Familie $\mathcal{S}$ von Liniensegmenten in der Ebene, von denen sich keine 3 paarweise schneiden ($\omega(\mathcal{S}) = 2$) und mit $\chi(\mathcal{S}) > k$.

Burling Graphen

Die Antwort

Theorem

Für alle $k \geq 1$, gibt es eine Familie $\mathcal{S}$ von Liniensegmenten in der Ebene, von denen sich keine 3 paarweise schneiden ($\omega(\mathcal{S}) = 2$) und mit $\chi(\mathcal{S}) > k$.

Burling Graphen

Die Antwort

Theorem

Für alle $k \geq 1$, gibt es eine Familie $\mathcal{S}$ von Liniensegmenten in der Ebene, von denen sich keine 3 paarweise schneiden ($\omega(\mathcal{S}) = 2$) und mit $\chi(\mathcal{S}) > k$.

- Sequenzen $(s_i)_{i \in \mathbb{N}}$ und $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$ induktiv definiert: $s_1 = p_1 = 1$, $s_{i+1} = (p_i + 1)s_i + p_i^2, \quad p_{i+1} = 2 \cdot p_i^2$
- R: Rechteck in der Ebene
- $\mathcal{S}_k$: $\underline{\triangle\text{-freie}}$ Familie von s_k Liniensegmenten im Inneren von R
- $\mathcal{P}_k$: Familie von p_k $\underline{\text{paarweise disjunkten}}$ Proben für $(\mathcal{S}_k, R)$
- ϕ: zulässige Färbung von $\mathcal{S}_k$

Burling Graphen

Die Antwort

Theorem

Für alle $k \geq 1$, gibt es eine Familie $\mathcal{S}$ von Liniensegmenten in der Ebene, von denen sich keine 3 paarweise schneiden ($\omega(\mathcal{S}) = 2$) und mit $\chi(\mathcal{S}) > k$.

- Sequenzen $(s_i)_{i \in \mathbb{N}}$ und $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$ induktiv definiert: $s_1 = p_1 = 1$, $s_{i+1} = (p_i + 1)s_i + p_i^2, \quad p_{i+1} = 2 \cdot p_i^2$
- R: Rechteck in der Ebene
- $\mathcal{S}_k$: $\triangle$-freie Familie von s_k Liniensegmenten im Inneren von R
- $\mathcal{P}_k$: Familie von p_k paarweise disjunkten Proben für $(\mathcal{S}_k, R)$
- ϕ: zulässige Färbung von $\mathcal{S}_k$

Lemma

Für alle $k \geq 1$ gibt es $\mathcal{S}_k$, $\mathcal{P}_k$ wie beschrieben, so dass gilt:
Für alle ϕ existiert eine Probe $P \in \mathcal{P}_k$, in der ϕ mindestens k Farben benutzt für die Segmente in $\mathcal{S}_k$, die P schneiden.

Burling Graphen

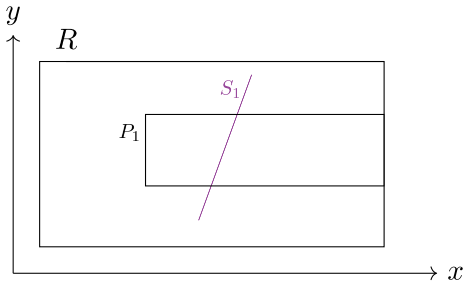
Lemma

Für alle $k \geq 1$ gibt es $\mathcal{S}_k$, $\mathcal{P}_k$ wie beschrieben, so dass gilt: Für alle ϕ existiert eine Probe $P \in \mathcal{P}_k$, in der ϕ mindestens k Farben benutzt für die Segmente in $\mathcal{S}_k$, die P schneiden.

Beweis.

Induktion über k.

I.A. $\underline{k = 1}$: $\mathcal{S}_1 = \{S_1\}$, $\mathcal{P}_1 = \{P_1\}$. ✓



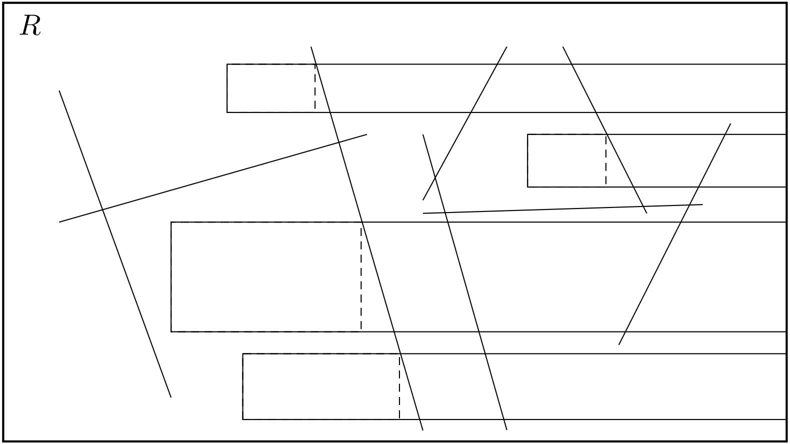
Burling Graphen

I.V.: $\forall k \geq 1\ \exists\ \mathcal{S}_k\ \triangle$-frei, $\mathcal{P}_k$ paarw. disjunkt $(|\mathcal{S}_k| = s_k, |\mathcal{P}_k| = p_k)$, so dass: $\forall \phi$ zulässige Färbung $\exists P \in \mathcal{P}_k$ mit $\chi_\phi(\mathcal{S}_k(P)) \geq k$.

Burling Graphen

I.V.: $\forall k \geq 1 \ \exists \ \mathcal{S}_k$ $\triangle$-frei, $\mathcal{P}_k$ paarw. disjunkt $(|\mathcal{S}_k| = s_k, |\mathcal{P}_k| = p_k)$, so dass: $\forall \phi$ zulässige Färbung $\exists P \in \mathcal{P}_k$ mit $\chi_\phi(\mathcal{S}_k(P)) \geq k$.

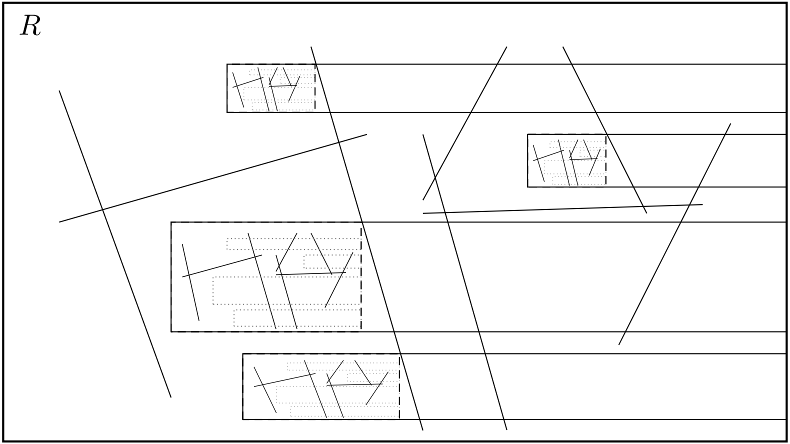
I.S. $(k \to k+1)$: Wir konstruieren $\mathcal{S}_{k+1}$ und $\mathcal{P}_{k+1}$.



Burling Graphen

I.V.: $\forall k \geq 1\ \exists\ \mathcal{S}_k\ \triangle$-frei, $\mathcal{P}_k$ paarw. disjunkt $(|\mathcal{S}_k| = s_k, |\mathcal{P}_k| = p_k)$, so dass: $\forall \phi$ zulässige Färbung $\exists P \in \mathcal{P}_k$ mit $\chi_\phi(\mathcal{S}_k(P)) \geq k$.

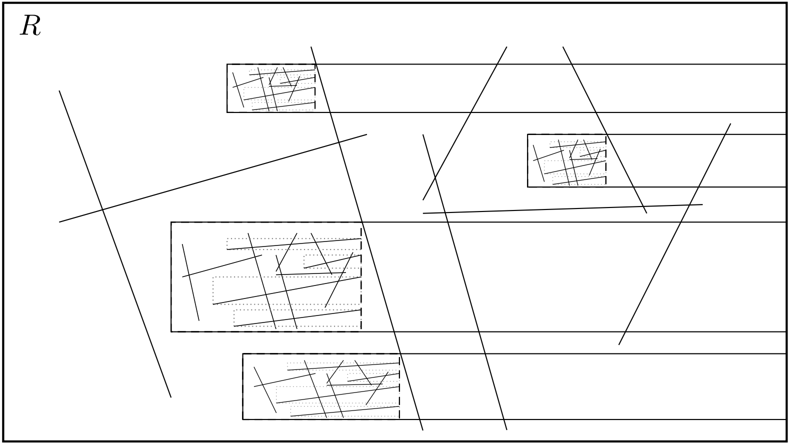
I.S. $(k \to k+1)$: Wir konstruieren $\mathcal{S}_{k+1}$ und $\mathcal{P}_{k+1}$.



Burling Graphen

I.V.: $\forall k \geq 1 \; \exists \; \mathcal{S}_k \; \triangle$-frei, $\mathcal{P}_k$ paarw. disjunkt $(|\mathcal{S}_k| = s_k, |\mathcal{P}_k| = p_k)$, so dass: $\forall \phi$ zulässige Färbung $\exists P \in \mathcal{P}_k$ mit $\chi_\phi(\mathcal{S}_k(P)) \geq k$.

I.S. $(k \to k+1)$: Wir konstruieren $\mathcal{S}_{k+1}$ und $\mathcal{P}_{k+1}$.

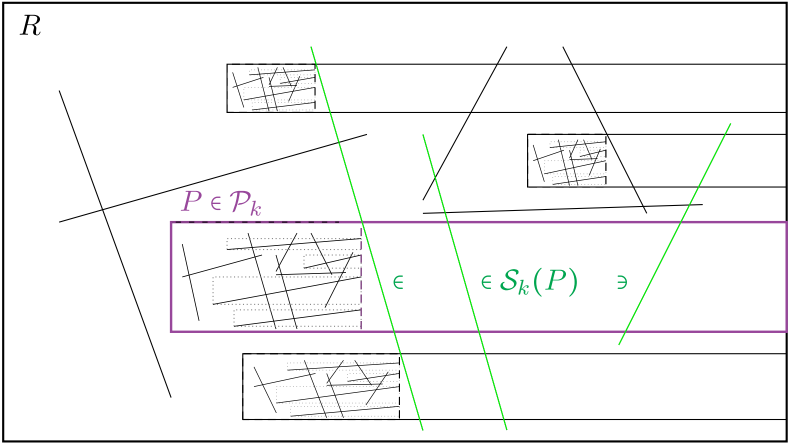


- $s_{k+1} = s_k + (p_k \cdot s_k) + (p_k \cdot p_k) = (p_k + 1)s_k + p_k^2$

Burling Graphen

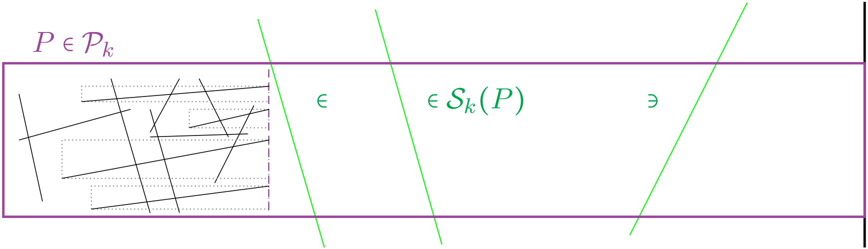
I.V.: $\forall k \geq 1\ \exists\ \mathcal{S}_k$ $\triangle$-frei, $\mathcal{P}_k$ paarw. disjunkt $(|\mathcal{S}_k| = s_k, |\mathcal{P}_k| = p_k)$, so dass: $\forall \phi$ zulässige Färbung $\exists P \in \mathcal{P}_k$ mit $\chi_\phi(\mathcal{S}_k(P)) \geq k$.

I.S. $(k \to k+1)$: Wir konstruieren $\mathcal{S}_{k+1}$ und $\mathcal{P}_{k+1}$.

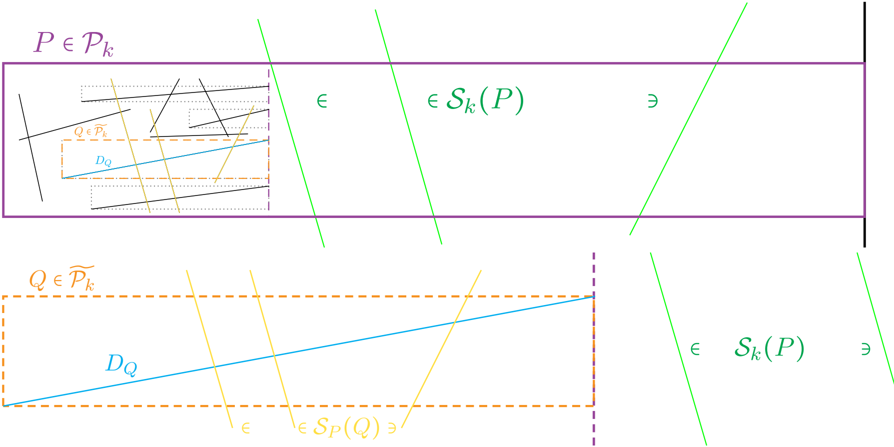


- $s_{k+1} = s_k + (p_k \cdot s_k) + (p_k \cdot p_k) = (p_k + 1)s_k + p_k^2$

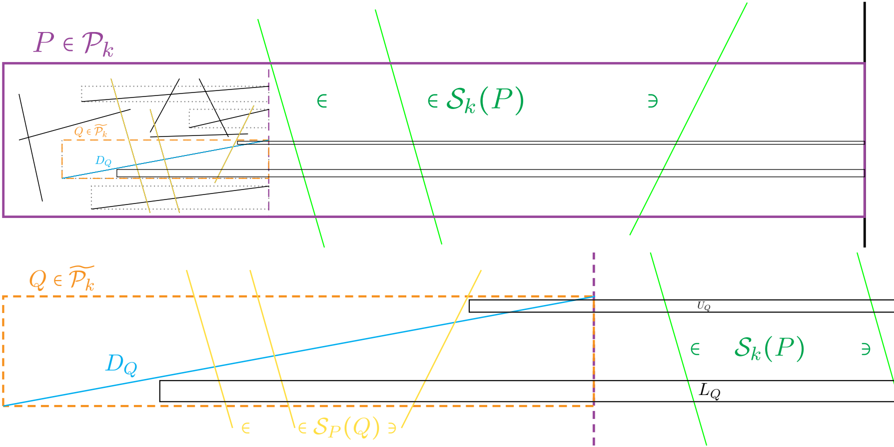
Burling Graphen



Burling Graphen

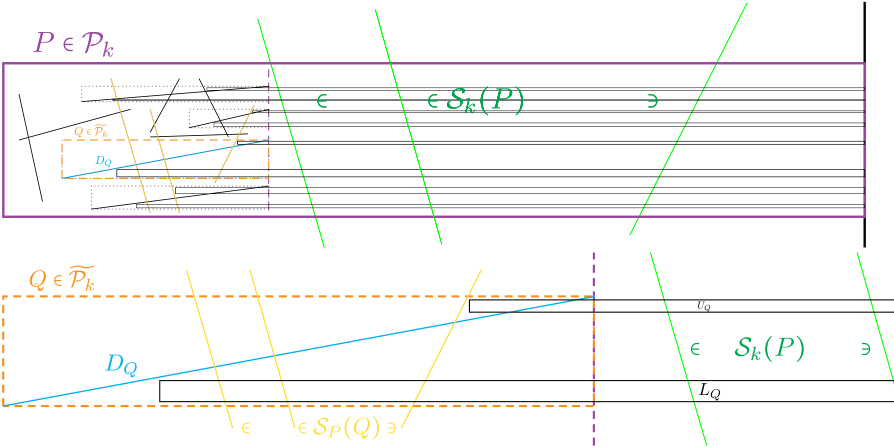


Burling Graphen



- U_Q und L_Q erfüllen Probenbedingungen, da $\mathcal{S}_k(P) \cup \{D_Q\}$ und $\mathcal{S}_k(P) \cup \mathcal{S}_P(Q)$ sind beide unabhängig
- $p_{k+1} = 2 \cdot p_k \cdot p_k = 2 \cdot p_k^2$

Burling Graphen



- U_Q und L_Q erfüllen Probenbedingungen, da $\mathcal{S}_k(P) \cup \{D_Q\}$ und $\mathcal{S}_k(P) \cup \mathcal{S}_P(Q)$ sind beide unabhängig
- $p_{k+1} = 2 \cdot p_k \cdot p_k = 2 \cdot p_k^2$

Burling Graphen

I.V.: $\forall k \geq 1 \; \exists \; \mathcal{S}_k \; \triangle$*-frei,* $\mathcal{P}_k$ *paarw. disjunkt* $(|\mathcal{S}_k| = s_k, |\mathcal{P}_k| = p_k)$*,*
so dass: $\forall \phi$ *zulässige Färbung* $\exists P \in \mathcal{P}_k$ *mit* $\chi_\phi(\mathcal{S}_k(P)) \geq k$*.*

Was wir nach Induktionsschritt haben:

- Sequenzen $s_{k+1} = (p_k + 1)s_k + p_k^2, \quad p_{k+1} = 2 \cdot p_k^2$
- R: Rechteck in der Ebene
- $\mathcal{S}_{k+1}$: $\triangle$-freie Familie von s_{k+1} Liniensegmenten in R ✓
- $\mathcal{P}_{k+1}$: Familie von p_{k+1} paarw. disjunkten Proben ✓

Burling Graphen

I.V.: $\forall k \geq 1\ \exists\ \mathcal{S}_k\ \triangle$-frei, $\mathcal{P}_k$ paarw. disjunkt ($|\mathcal{S}_k| = s_k, |\mathcal{P}_k| = p_k$), so dass: $\forall \phi$ zulässige Färbung $\exists P \in \mathcal{P}_k$ mit $\chi_\phi(\mathcal{S}_k(P)) \geq k$.

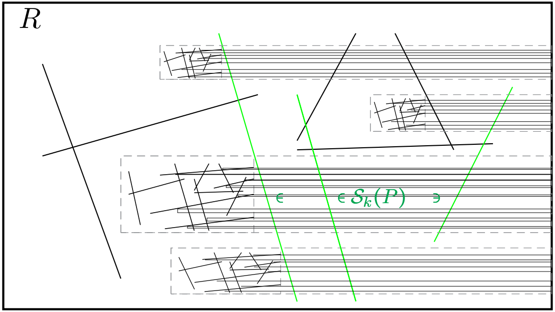
Was wir nach Induktionsschritt haben:

- Sequenzen $s_{k+1} = (p_k + 1)s_k + p_k^2, \quad p_{k+1} = 2 \cdot p_k^2$
- R: Rechteck in der Ebene
- $\mathcal{S}_{k+1}$: $\triangle$-freie Familie von s_{k+1} Liniensegmenten in R ✓
- $\mathcal{P}_{k+1}$: Familie von p_{k+1} paarw. disjunkten Proben ✓

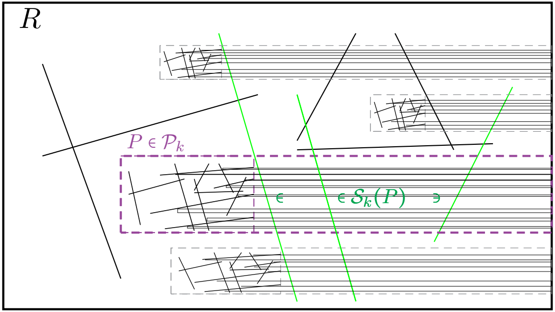
Sei nun ϕ_{k+1} zulässige Färbung von $\mathcal{S}_{k+1}$:

- Wollen zeigen: $\exists P \in \mathcal{P}_{k+1}$, für die ϕ_{k+1} mindestens $k+1$ Farben benutzt für die Segmente in $\mathcal{S}_{k+1}$, die P schneiden.
- Sei ϕ_k die Einschränkung von ϕ_{k+1} auf $\mathcal{S}_k$.
- Nach I.V. $\exists P \in \mathcal{P}_k$, s.d. ϕ_k benutzt min. k Farben in $\mathcal{S}_k(P)$
- Betrachte Kopie $\mathcal{S}_P$ im Inneren der *root* von P

Burling Graphen

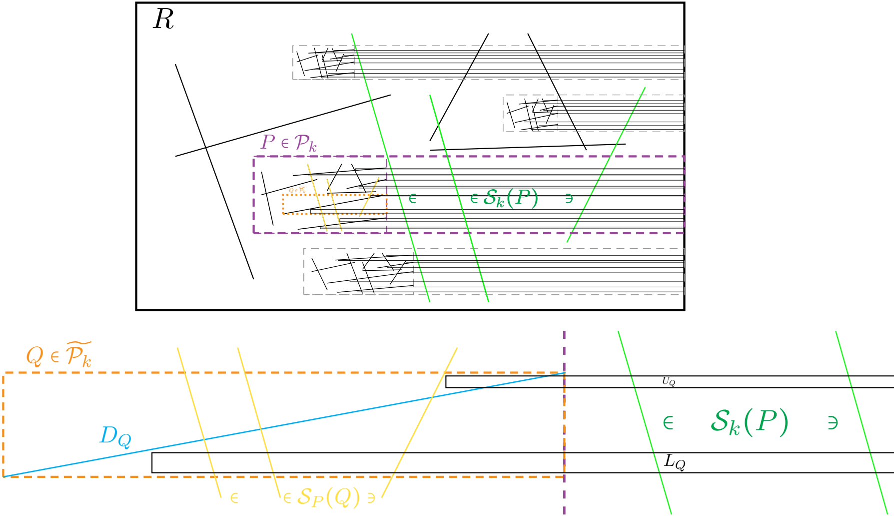


Burling Graphen



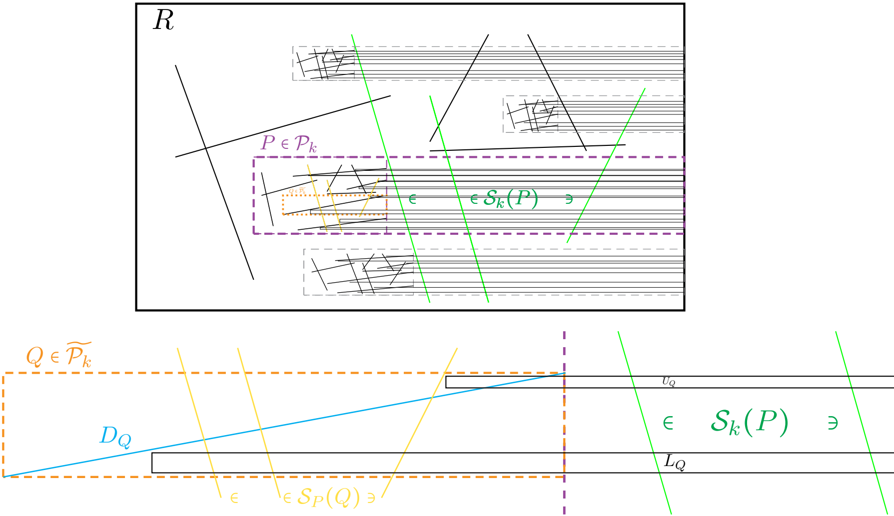
- $\exists P \in \mathcal{P}_k$, s.d. ϕ_k benutzt min. k Farben in $\mathcal{S}_k(P)$

Burling Graphen



- $\exists P \in \mathcal{P}_k$, s.d. ϕ_k benutzt min. k Farben in $\mathcal{S}_k(P)$
- $\exists Q \in \widetilde{\mathcal{P}_k}$, s.d. ϕ_{k+1} benutzt min. k Farben in $\mathcal{S}_P(Q)$

Burling Graphen



- $\exists P \in \mathcal{P}_k$, s.d. ϕ_k benutzt min. k Farben in $\mathcal{S}_k(P)$
- $\exists Q \in \widetilde{\mathcal{P}_k}$, s.d. ϕ_{k+1} benutzt min. k Farben in $\mathcal{S}_P(Q)$
- $k+1$ Farben in L_Q oder U_Q. $\square$

Burling Graphen

Die Resultate

- Sequenzen $s_{i+1} = (p_i + 1)s_i + p_i^2, \quad p_{i+1} = 2p_i^2$
- R: Rechteck in der Ebene
- $\mathcal{S}_k$: $\triangle$-freie Familie von s_k Liniensegmenten im Inneren von R
- $\mathcal{P}_k$: Familie von p_k paarweise disjunkten Proben für $(\mathcal{S}_k, R)$
- ϕ: zulässige Färbung von $\mathcal{S}_k$

Lemma

Für alle $k \geq 1$ gibt es $\mathcal{S}_k$, $\mathcal{P}_k$ wie beschrieben, so dass gilt: Für alle ϕ existiert eine Probe $P \in \mathcal{P}_k$, in der ϕ mindestens k Farben benutzt für die Segmente in $\mathcal{S}_k$, die P schneiden.

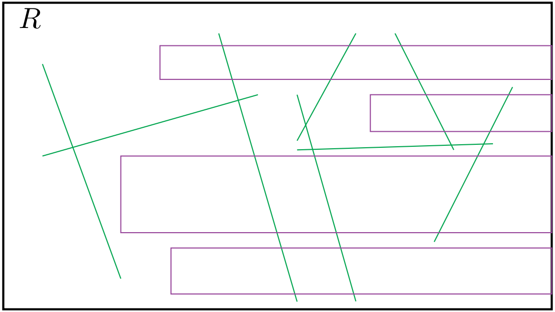
Theorem

Für alle $k \geq 1$, gibt es eine Familie $\mathcal{S}$ von Liniensegmenten in der Ebene, von denen sich keine 3 paarweise schneiden ($\omega(\mathcal{S}) = 2$) und mit $\chi(\mathcal{S}) > k$.

Burling Graphen

Die Resultate

„Lemma $\Rightarrow$ Theorem“:

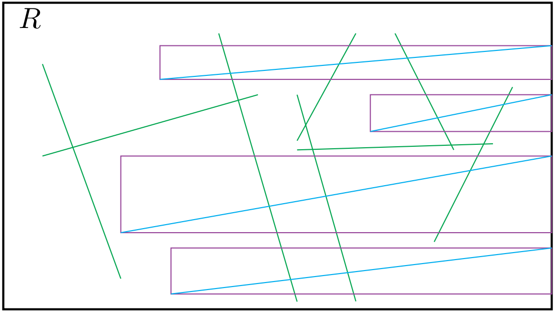


- Segmente: $\mathcal{S}_k$

Burling Graphen

Die Resultate

„Lemma ⇒ Theorem“:



- Segmente: $\mathcal{S}_k \cup \{D_i$: Diagonale in Probe $\mathcal{P}_i \in \mathcal{P}_k \ \forall i\} = \widetilde{\mathcal{S}_k}$
- $\triangle$-frei: Segmente, die eine Probe schneiden sind disjunkt
- $\chi > k$: ϕ benutzt $\geq k$ Farben für Segmente, die bestimmte Probe P schneiden ⇒ Diagonale braucht neue Farbe ⇒ $\chi \geq k+1 > k$. ⇒ <u>nicht</u> χ-bounded!

Burling Graphen

Weitere Resultate

- Asplund, Grünbaum (1960) Achsausgerichtete Rechtecke in der Ebene ($\mathbb{R}^2$) sind χ-bounded.
- Burling (1965) $\triangle$-freie achsausgerichtete Boxen in $\mathbb{R}^3$ sind nicht χ-bounded.
- Pawlik et al (2014) Liniensegmente in der Ebene ($\mathbb{R}^2$) sind nicht χ-bounded.

Bemerkung

Konstruktion von Liniensegmenten $\widetilde{\mathcal{S}_k} = \mathcal{S}_k \cup D_i$ *mit* $\chi(\widetilde{\mathcal{S}_k}) > k$ *und* $\triangle$*-freie Boxen in* $\mathbb{R}^3$ *(nach Burlings Konstruktion) mit* $\chi > k$ *haben den gleichen intersection Graphen!*

- Davies (2020+) Es gibt Liniensegmente/ Boxen in $\mathbb{R}^3$, dessen intersection Graph hohen Kreisumfang (*girth*) und $\chi > k$ hat.

Die chromatische Zahl eines Teilgraphen $H \subset G$

Die Fragestellung

Die chromatische Zahl eines Teilgraphen $H \subset G$

Die Fragestellung

Frage (Erdős, 1970er)

Stimmt es, dass es zu jedem $n > 0$ einen Wert $f(n)$ gibt, s.d.:

$\boxed{\text{Falls } \chi(G) \geq f(n), \text{ dann } \exists H \subset G\colon \omega(H) = 2 \text{ und } \chi(H) = n}$?

Die chromatische Zahl eines Teilgraphen $H \subset G$

Die Fragestellung

Frage (Erdős, 1970er)

Stimmt es, dass es zu jedem $n > 0$ einen Wert $f(n)$ gibt, s.d.:

$\boxed{\text{Falls } \chi(G) \geq f(n), \text{ dann } \exists H \subset G\text{: } \omega(H) = 2 \text{ und } \chi(H) = n}$?

$\longrightarrow$ Antwort: Ja !

- Wir wollen zeigen:

Theorem

Graph $G = (V, E)$. Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gibt es $g(m, n)$, so dass gilt:

Falls $\chi(G) \geq g(m, n)$, dann gilt entweder

1. *G enthält einen vollständigen Teilgraphen $K_m \subset G$, oder*
2. *$\exists H \subset G$ mit $\omega(H) = 2$ und $\chi(H) \geq n$.*

Die chromatische Zahl eines Teilgraphen $H \subset G$

Die Fragestellung

Frage (Erdős, 1970er)

Stimmt es, dass es zu jedem $n > 0$ einen Wert $f(n)$ gibt, s.d.:

$\boxed{\text{Falls } \chi(G) \geq f(n), \text{ dann } \exists H \subset G\text{: } \omega(H) = 2 \text{ und } \chi(H) = n}$?

$\longrightarrow$ Antwort: Ja !

- Wir wollen zeigen:

Theorem

Graph $G = (V, E)$. Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gibt es $g(m, n)$, so dass gilt:

Falls $\chi(G) \geq g(m, n)$, dann gilt entweder

1. *G enthält einen vollständigen Teilgraphen $K_m \subset G$, oder*
2. *$\exists H \subset G$ mit $\omega(H) = 2$ und $\chi(H) \geq n$.*

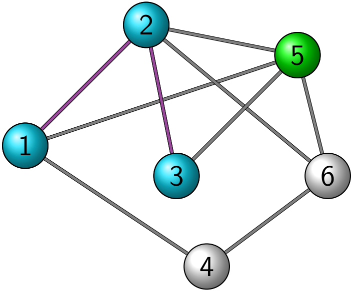
- Tutte: Es gibt einen $\triangle$-freien Graphen H mit $\chi(H) = n$.

Die chromatische Zahl eines Teilgraphen $H \subset G$

Der Beweis - Was brauchen wir?

- Sei $G = (V, E)$ und $V = V(G)$ linear geordnet durch „<“
- *Links-Nachbarschafts-Graph* von $v \in V$: Teilgraph $L(v, G)$ mit

$$V(L(v,G)) = \{w \in V : w < v, (w,v) \in E(G)\}$$
$$E(L(v,G)) = \{(u,w) \in E : u, w \in V(L(v,G))\}$$



Die chromatische Zahl eines Teilgraphen $H \subset G$

Proposition (Zykov)

Sei $G = (V, E)$ *Graph mit* $\chi(G) \geq (p-1)(q-1) + 1$.
Sei $E = E_1 \cup E_2$ *Partition von* E. *Dann ist*

entweder $\chi\big((V, E_1)\big) \geq p$ *oder* $\chi\big((V, E_2)\big) \geq q$.

Die chromatische Zahl eines Teilgraphen $H \subset G$

Der Beweis - Was brauchen wir?

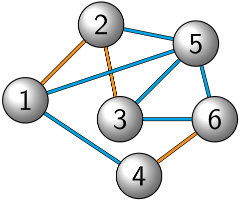
Proposition (Zykov)

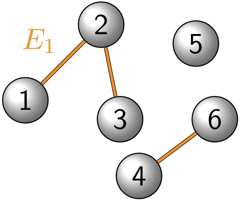
Sei $G = (V, E)$ *Graph mit* $\chi(G) \geq (p-1)(q-1)+1$.
Sei $E = E_1 \cup E_2$ *Partition von* E. *Dann ist*

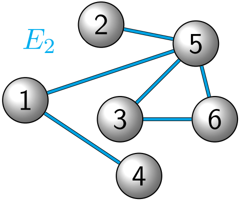
entweder $\chi\big((V, E_1)\big) \geq p$ *oder* $\chi\big((V, E_2)\big) \geq q$.

Beweis.

Angenommen $\chi\big((V, E_1)\big) = p-1$ und $\chi\big((V, E_2)\big) = q-1$.
Dann könnten wir G mit $(p-1)(q-1)$ Farben färben, d.h.
$\chi(G) \leq (p-1)(q-1)$. ↯ □







Die chromatische Zahl eines Teilgraphen $H \subset G$

Der Beweis - Was brauchen wir?

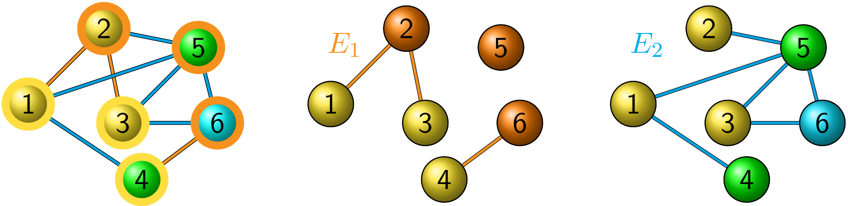
Proposition (Zykov)

Sei $G = (V, E)$ *Graph mit* $\chi(G) \geq (p-1)(q-1)+1$.
Sei $E = E_1 \cup E_2$ *Partition von* E*. Dann ist*

entweder $\quad \chi\big((V, E_1)\big) \geq p \quad$ *oder* $\quad \chi\big((V, E_2)\big) \geq q$.

Beweis.

Angenommen $\chi\big((V, E_1)\big) = p-1$ und $\chi\big((V, E_2)\big) = q-1$.
Dann könnten wir G mit $(p-1)(q-1)$ Farben färben, d.h.
$\chi(G) \leq (p-1)(q-1)$. ↯ $\square$



Die chromatische Zahl eines Teilgraphen $H \subset G$

Der Beweis

Theorem

Graph $G = (V, E)$*. Für alle* $m, n \in \mathbb{N}$ *gibt es* $g(m, n)$*, so dass gilt:*

Falls $\chi(G) \geq g(m, n)$*, dann gilt entweder*

1. G *enthält einen vollständigen Teilgraphen* $K_m \subset G$*, oder*
2. $\exists H \subset G$ *mit* $\omega(H) = 2$ *und* $\chi(H) \geq n$*.*

Die chromatische Zahl eines Teilgraphen $H \subset G$

Theorem

Graph $G = (V, E)$*. Für alle* $m, n \in \mathbb{N}$ *gibt es* $g(m, n)$*, so dass gilt:*

Falls $\chi(G) \geq g(m, n)$*, dann gilt entweder*

1. G *enthält einen vollständigen Teilgraphen* $K_m \subset G$*, oder*
2. $\exists H \subset G$ *mit* $\omega(H) = 2$ *und* $\chi(H) \geq n$*.*

Beweis.

Induktion über m.

I.A. $\underline{m = 2}$: Wähle $g(2, n) = 2$ für alle n. $\chi(G) \geq 2$ und $K_2 \subset G$ ✓

Die chromatische Zahl eines Teilgraphen $H \subset G$

Der Beweis

Theorem

Graph $G = (V, E)$. Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gibt es $g(m, n)$, so dass gilt:

Falls $\chi(G) \geq g(m, n)$, dann gilt entweder

1. *G enthält einen vollständigen Teilgraphen $K_m \subset G$, oder*
2. *$\exists H \subset G$ mit $\omega(H) = 2$ und $\chi(H) \geq n$.*

Beweis.

Induktion über m.
I.A. $\underline{m = 2}$: Wähle $g(2, n) = 2$ für alle n. $\chi(G) \geq 2$ und $K_2 \subset G$ ✓

I.V.: $\exists g(m-1, n)$, so dass jeder Graph mit $\chi(G) \geq g(m-1, n)$ enthält K_{m-1} oder $\triangle$-freien Teilgraphen $H \subset G$ mit $\chi(H) \geq n$.

I.S. ($(m-1) \to m$): Betrachte einen Graphen G_0 mit $K_m \notin G_0$ und

$$\chi(G_0) = (n-1)^{g(m-1,n)-1} + 1 = g(m, n)$$

Die chromatische Zahl eines Teilgraphen $H \subset G$

Der Beweis

I.V.: $\exists g(m-1,n)$, so dass jeder Graph mit $\chi(G) \geq g(m-1,n)$ enthält K_{m-1} oder $\triangle$-freien Teilgraphen $H \subset G$ mit $\chi(H) \geq n$.

I.S. ($(m-1) \to m$): Betrachte einen Graphen G_0 mit $K_m \notin G_0$ und

$$\chi(G_0) = (n-1)^{g(m-1,n)-1} + 1 = g(m,n)$$

I.V.: $\exists g(m-1,n)$, so dass jeder Graph mit $\chi(G) \geq g(m-1,n)$ enthält K_{m-1} oder $\triangle$-freien Teilgraphen $H \subset G$ mit $\chi(H) \geq n$.

I.S. ($(m-1) \to m$): Betrachte einen Graphen G_0 mit $K_m \notin G_0$ und

$$\chi(G_0) = (n-1)^{g(m-1,n)-1} + 1 = g(m,n)$$

- ZIEL: $H \subset G_0$ mit $\chi(H) \geq n$

Die chromatische Zahl eines Teilgraphen $H \subset G$

Der Beweis

I.V.: $\exists g(m-1,n)$, so dass jeder Graph mit $\chi(G) \geq g(m-1,n)$ enthält K_{m-1} oder $\triangle$-freien Teilgraphen $H \subset G$ mit $\chi(H) \geq n$.

I.S. ($(m-1) \to m$): Betrachte einen Graphen G_0 mit $K_m \notin G_0$ und

$$\chi(G_0) = (n-1)^{g(m-1,n)-1} + 1 = g(m,n)$$

- ZIEL: $H \subset G_0$ mit $\chi(H) \geq n$
- Sei „<“ lineare Ordnung auf $V(G_0)$
- Betrachte Links-Nachbarschafts-Graphen $L(v, G_0)$:
  Aus $K_m \notin G_0$ folgt $K_{m-1} \notin L(v, G_0)$ $\forall v \in V(G_0)$.

Die chromatische Zahl eines Teilgraphen $H \subset G$

Der Beweis

I.V.: $\exists g(m-1,n)$, so dass jeder Graph mit $\chi(G) \geq g(m-1,n)$ enthält K_{m-1} oder $\triangle$-freien Teilgraphen $H \subset G$ mit $\chi(H) \geq n$.

I.S. ($(m-1) \to m$): Betrachte einen Graphen G_0 mit $K_m \notin G_0$ und

$$\chi(G_0) = (n-1)^{g(m-1,n)-1} + 1 = g(m,n)$$

- ZIEL: $H \subset G_0$ mit $\chi(H) \geq n$
- Sei „<“ lineare Ordnung auf $V(G_0)$
- Betrachte Links-Nachbarschafts-Graphen $L(v, G_0)$:
  Aus $K_m \notin G_0$ folgt $K_{m-1} \notin L(v, G_0)$ $\forall v \in V(G_0)$.
  - (I) Falls $\chi\big(L(v, G_0)\big) \geq g(m-1,n)$ für ein $v \in V(G_0)$, folgt mit I.V.: $\exists H \subset L(v, G_0) \subset G_0$ mit $\omega(H) = 2$ und $\chi(H) \geq n$ ✓

Die chromatische Zahl eines Teilgraphen $H \subset G$

Der Beweis

I.V.: $\exists g(m-1,n)$, so dass jeder Graph mit $\chi(G) \geq g(m-1,n)$ enthält K_{m-1} oder $\triangle$-freien Teilgraphen $H \subset G$ mit $\chi(H) \geq n$.

I.S. $((m-1) \to m)$: Betrachte einen Graphen G_0 mit $K_m \notin G_0$ und

$$\chi(G_0) = (n-1)^{g(m-1,n)-1} + 1 = g(m,n)$$

- ZIEL: $H \subset G_0$ mit $\chi(H) \geq n$
- Sei „<" lineare Ordnung auf $V(G_0)$
- Betrachte Links-Nachbarschafts-Graphen $L(v, G_0)$:
  Aus $K_m \notin G_0$ folgt $K_{m-1} \notin L(v, G_0)$ $\forall v \in V(G_0)$.
  - (I) Falls $\chi\big(L(v, G_0)\big) \geq g(m-1,n)$ für ein $v \in V(G_0)$, folgt mit I.V.: $\exists H \subset L(v, G_0) \subset G_0$ mit $\omega(H) = 2$ und $\chi(H) \geq n$ ✓
  - (II) Sei $k = \chi\big(L(v, G_0)\big) < g(m-1,n)$ $\forall v \in G_0$.

Die chromatische Zahl eines Teilgraphen $H \subset G$

Der Beweis

$$\chi(G_0) = (n-1)^{g(m-1,n)-1} + 1 = g(m,n) \qquad (1)$$

(II) Sei $k = \chi\big(L(v, G_0)\big) < g(m-1,n) \ \forall v \in V(G_0)$.

Die chromatische Zahl eines Teilgraphen $H \subset G$

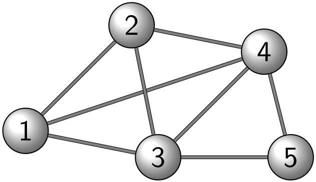
Der Beweis

$$\chi(G_0) = (n-1)^{g(m-1,n)-1} + 1 = g(m,n) \qquad (1)$$

(II) Sei $k = \chi\big(L(v,G_0)\big) < g(m-1,n)\ \forall v \in V(G_0)$.

- Sei $\bigcup_{i=1}^{k} B_i^v$ Färbung von $L(v,G_0)$. Definiere:

$$E(G_0) = E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_{g(m-1,n)-1},$$
$$E_i = \{(u,v) : u \in B_i^v, v \in V(G_0)\}$$



$$L(1,G_0) = \varnothing$$
$$L(2,G_0) = (\{1\},\varnothing)$$
$$L(3,G_0) = (\{1,2\},\{(1,2)\})$$
$$L(4,G_0) = (\{1,2,3\},\{(1,2),(2,3),(1,3)\})$$
$$L(5,G_0) = (\{3,4\},\{(3,4)\})$$

Die chromatische Zahl eines Teilgraphen $H \subset G$

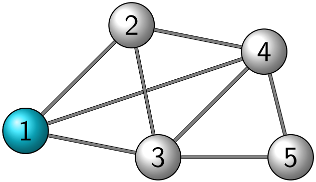
Der Beweis

$$\chi(G_0) = (n-1)^{g(m-1,n)-1} + 1 = g(m,n) \tag{1}$$

(II) Sei $k = \chi\big(L(v, G_0)\big) < g(m-1, n)\ \forall v \in V(G_0)$.

- Sei $\bigcup_{i=1}^{k} B_i^v$ Färbung von $L(v, G_0)$. Definiere:

$$E(G_0) = E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_{g(m-1,n)-1},$$
$$E_i = \{(u,v) : u \in B_i^v, v \in V(G_0)\}$$



$L(1, G_0) = \varnothing$ $\quad B_1\ B_2\ B_3\ B_4\ B_5$
$L(2, G_0) = (\{1\}, \varnothing)$
$L(3, G_0) = (\{1, 2\}, \{(1, 2)\})$
$L(4, G_0) = (\{1, 2, 3\}, \{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\})$
$L(5, G_0) = (\{3, 4\}, \{(3, 4)\})$

Die chromatische Zahl eines Teilgraphen $H \subset G$

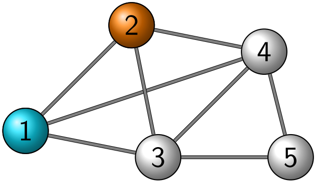
Der Beweis

$$\chi(G_0) = (n-1)^{g(m-1,n)-1} + 1 = g(m,n) \tag{1}$$

(II) Sei $k = \chi\big(L(v,G_0)\big) < g(m-1,n)\ \forall v \in V(G_0)$.

- Sei $\bigcup_{i=1}^{k} B_i^v$ Färbung von $L(v,G_0)$. Definiere:

$$E(G_0) = E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_{g(m-1,n)-1},$$
$$E_i = \{(u,v) : u \in B_i^v, v \in V(G_0)\}$$



$L(1,G_0) = \varnothing$ $\quad B_1\ B_2\ B_3\ B_4\ B_5$
$L(2,G_0) = (\{1\},\varnothing)$
$L(3,G_0) = (\{1,2\},\{(1,2)\})$
$L(4,G_0) = (\{1,2,3\},\{(1,2),(2,3),(1,3)\})$
$L(5,G_0) = (\{3,4\},\{(3,4)\})$

Die chromatische Zahl eines Teilgraphen $H \subset G$

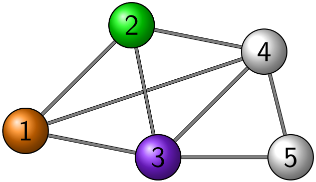
Der Beweis

$$\chi(G_0) = (n-1)^{g(m-1,n)-1} + 1 = g(m,n) \qquad (1)$$

(II) Sei $k = \chi\big(L(v,G_0)\big) < g(m-1,n)\ \forall v \in V(G_0)$.

- Sei $\bigcup_{i=1}^{k} B_i^v$ Färbung von $L(v,G_0)$. Definiere:

$$E(G_0) = E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_{g(m-1,n)-1},$$
$$E_i = \{(u,v) : u \in B_i^v, v \in V(G_0)\}$$



$L(1,G_0) = \varnothing$ $\qquad B_1\ B_2\ B_3\ B_4\ B_5$
$L(2,G_0) = (\{1\},\varnothing)$
$L(3,G_0) = (\{1,2\},\{(1,2)\})$
$L(4,G_0) = (\{1,2,3\},\{(1,2),(2,3),(1,3)\})$
$L(5,G_0) = (\{3,4\},\{(3,4)\})$

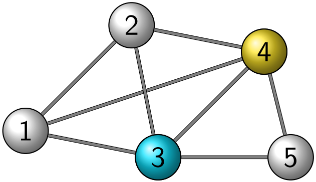
Die chromatische Zahl eines Teilgraphen $H \subset G$

$$\chi(G_0) = (n-1)^{g(m-1,n)-1} + 1 = g(m,n) \qquad (1)$$

(II) Sei $k = \chi\big(L(v,G_0)\big) < g(m-1,n)\ \forall v \in V(G_0)$.

- Sei $\bigcup_{i=1}^{k} B_i^v$ Färbung von $L(v,G_0)$. Definiere:

$$E(G_0) = E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_{g(m-1,n)-1},$$
$$E_i = \{(u,v) : u \in B_i^v, v \in V(G_0)\}$$



$L(1,G_0) = \varnothing$ $\qquad B_1\ B_2\ B_3\ B_4\ B_5$

$L(2,G_0) = (\{1\}, \varnothing)$

$L(3,G_0) = (\{1,2\}, \{(1,2)\})$

$L(4,G_0) = (\{1,2,3\}, \{(1,2),(2,3),(1,3)\})$

$L(5,G_0) = (\{3,4\}, \{(3,4)\})$

Die chromatische Zahl eines Teilgraphen $H \subset G$

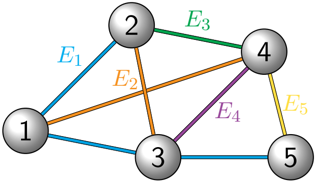
Der Beweis

$$\chi(G_0) = (n-1)^{g(m-1,n)-1} + 1 = g(m,n) \qquad (1)$$

(II) Sei $k = \chi\big(L(v,G_0)\big) < g(m-1,n)\ \forall v \in V(G_0)$.

- Sei $\bigcup_{i=1}^{k} B_i^v$ Färbung von $L(v,G_0)$. Definiere:

$$E(G_0) = E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_{g(m-1,n)-1},$$
$$E_i = \{(u,v) : u \in B_i^v, v \in V(G_0)\}$$



B_1 B_2 B_3 B_4 B_5

$$L(1,G_0) = \varnothing$$
$$L(2,G_0) = (\{1\},\varnothing)$$
$$L(3,G_0) = (\{1,2\},\{(1,2)\})$$
$$L(4,G_0) = (\{1,2,3\},\{(1,2),(2,3),(1,3)\})$$
$$L(5,G_0) = (\{3,4\},\{(3,4)\})$$

Die chromatische Zahl eines Teilgraphen $H \subset G$

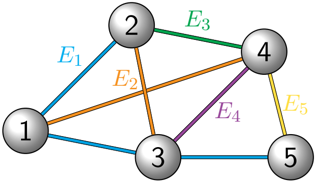
Der Beweis

$$\chi(G_0) = (n-1)^{g(m-1,n)-1} + 1 = g(m,n) \qquad (1)$$

(II) Sei $k = \chi\big(L(v, G_0)\big) < g(m-1, n)\ \forall v \in V(G_0)$.

- Sei $\bigcup_{i=1}^{k} B_i^v$ Färbung von $L(v, G_0)$. Definiere:

$$E(G_0) = E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_{g(m-1,n)-1},$$
$$E_i = \{(u,v) : u \in B_i^v, v \in V(G_0)\}$$



$B_1\ B_2\ B_3\ B_4\ B_5$

$$L(1, G_0) = \varnothing$$
$$L(2, G_0) = (\{1\}, \varnothing)$$
$$L(3, G_0) = (\{1, 2\}, \{(1,2)\})$$
$$L(4, G_0) = (\{1, 2, 3\}, \{(1,2), (2,3), (1,3)\})$$
$$L(5, G_0) = (\{3, 4\}, \{(3,4)\})$$

- $\chi(G_0) \overset{(1)}{=} (n-1) \cdot \underbrace{(n-1) \cdots (n-1)}_{(g(m-1,n)-2)\text{ -mal}} + 1$

$\overset{Zykov}{\Longrightarrow}$ $\exists\ i$: $\chi\big((V, E_i)\big) \geq n$ und $(V, E_i) \subset G_0$ ist $\triangle$-frei. $\square$

Die chromatische Zahl eines Teilgraphen $H \subset G$

Das Resultat

Theorem

Graph $G = (V, E)$. Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gibt es $g(m, n)$, so dass gilt:

Falls $\chi(G) \geq g(m, n)$, dann gilt entweder

1. *G enthält einen vollständigen Teilgraphen $K_m \subset G$, oder*
2. *$\exists H \subset G$ mit $\omega(H) = 2$ und $\chi(H) \geq n$.*

- Tutte: Es gibt einen $\triangle$-freien Graphen H mit $\chi(H) = n$.

Antwort (auf Erdős)

Es stimmt, dass es zu jedem $n > 0$ einen Wert $f(n)$ gibt, so dass gilt:

$\boxed{\text{Falls } \chi(G) \geq f(n) \text{, dann } \exists H \subset G\text{: } \omega(H) = 2 \text{ und } \chi(H) = n}$!

Danke für's Zuhören! :)