Hadwiger-Vermutung

Erik Tadewaldt
Seminar Färbungen von Graphen

20. Februar 2021

Hadwiger-Vermutung

Vermutung (Hadwiger)

- Aufgestellt 1943 von Hugo Hadwiger
- Aussage:
  Jeder Graph ohne $K_{t+1}-$Minoren ist $t-$färbbar.

Bisherige Resultate

Teilresultate

- Konnte für $t \leq 6$ auf Vier-Farben-Satz zurückgeführt werden und mit diesem bewiesen werden.

Bisherige Resultate

Teilresultate

- Konnte für $t \leq 6$ auf Vier-Farben-Satz zurückgeführt werden und mit diesem bewiesen werden.
- Kostochka (1984) : Jeder Graph ohne K_t-Minor ist $O(t\sqrt{\log t})-$färbbar.

Bisherige Resultate

Teilresultate

- Konnte für $t \leq 6$ auf Vier-Farben-Satz zurückgeführt werden und mit diesem bewiesen werden.
- Kostochka (1984) : Jeder Graph ohne K_t-Minor ist $O(t\sqrt{\log t})-$färbbar.
- Sergey Norin, Luke Postle, and Zi-Xia Song (2019): Graphen ohne K_t Minoren sind $O(t(\log t)^{\beta})-$färbbar, für alle $\beta > \frac{1}{4}$

Bisherige Resultate

Teilresultate

- Konnte für $t \leq 6$ auf Vier-Farben-Satz zurückgeführt werden und mit diesem bewiesen werden.
- Kostochka (1984) : Jeder Graph ohne K_t-Minor ist $O(t\sqrt{\log t})-$färbbar.
- Sergey Norin, Luke Postle, and Zi-Xia Song (2019): Graphen ohne K_t Minoren sind $O(t(\log t)^{\beta})-$färbbar, für alle $\beta > \frac{1}{4}$
- Luke Postle (2020) : Graphen ohne K_t Minoren sind $t \cdot 2^{O(\log \log t)^{2/3})}-$färbbar
  ($\beta > 0$ bei vorheriger Schreibweise)

Notation

Definition

$$v(G) := |V(G)|, \text{ Anzahl an Knoten}$$

$$e(G) := |E(G)|, \text{ Anzahl an Kanten}$$

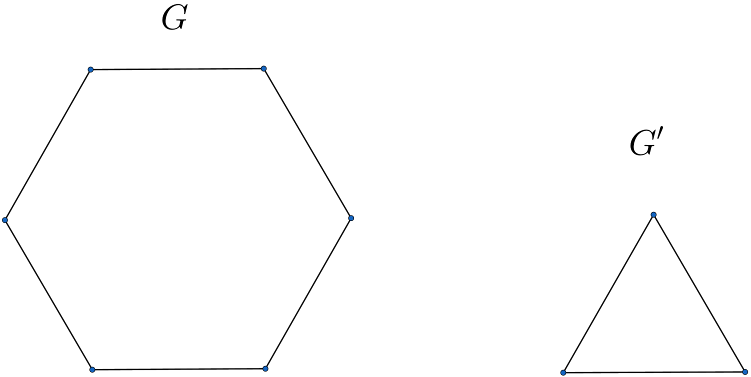
$$d(G) := \frac{e(G)}{v(G)}, \text{ Dichte (density) des Graphen}$$

$$\chi(G) \text{ chromatische Zahl von } G$$

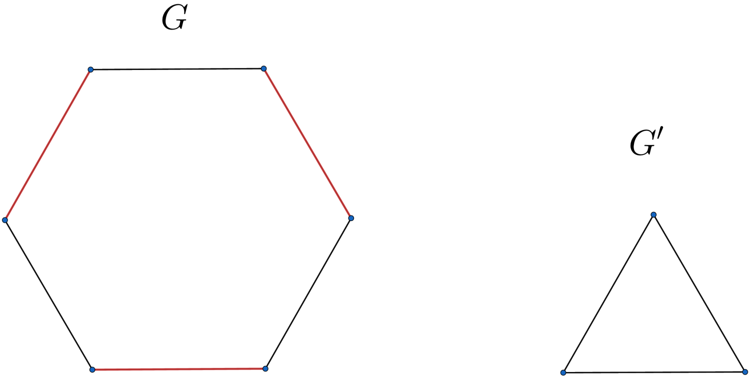
$$\kappa(G) \text{ Knotenzusammenhang von } G$$

$k-$*beschränkte* Minoren lassen sich aus G erzeugen, ohne mehr als k Knoten zu einem zu kontrahieren

k-beschränkte Minoren



k-beschränkte Minoren



"An even better Density Increment Theorem"

Theorem (Postle 2020)

Jeder Graph ohne K_t–Minor ist $O(t(\log\log t)^6)$-färbbar.

"An even better Density Increment Theorem"

Theorem (Postle 2020)

Jeder Graph ohne K_t−Minor ist $O(t(\log\log t)^6)$-färbbar.

$$\Uparrow$$

$$Theorem\,1$$

"An even better Density Increment Theorem"

Theorem (Postle 2020)

Jeder Graph ohne K_t–Minor ist $O(t(\log\log t)^6)$-färbbar.

$$\Uparrow$$

$$\begin{tikzcd} & \mathit{Theorem}\ 1 & \\ \mathit{Theorem}\ 1.1 \arrow[ur, Rightarrow] & & \mathit{Theorem}\ 1.2 \arrow[ul, Rightarrow] \end{tikzcd}$$

"An even better Density Increment Theorem"

Theorem (Postle 2020)

Jeder Graph ohne K_t–Minor ist $O(t(\log\log t)^6)$-färbbar.

$$\begin{tikzcd}
 & & {} & \\
 & & \mathit{Theorem}\ 1 \arrow[u, Rightarrow] & \\
\mathit{Theorem}\ 1.1 \arrow[urr, Rightarrow] & & & \mathit{Theorem}\ 1.2 \arrow[ul, Rightarrow] \\
\mathit{Lemma}\ II \arrow[u, Rightarrow] & \mathit{Lemma}\ III \arrow[ul, Rightarrow] & & \\
\mathit{Lemma}\ I \arrow[u, Rightarrow] & & &
\end{tikzcd}$$

"An even better Density Increment Theorem"

Theorem (Postle 2020)

Jeder Graph ohne K_t−Minor ist $O(t(\log\log t)^6)$-färbbar.

$$
\begin{tikzcd}
 & & {} & \\
 & & \mathit{Theorem}\ 1 \arrow[u, Rightarrow] & \\
\mathit{Theorem}\ 1.1 \arrow[urr, Rightarrow] & & & \mathit{Theorem}\ 1.2 \arrow[ul, Rightarrow] \\
\mathit{Lemma}\ \mathit{II} \arrow[u, Rightarrow] & \mathit{Lemma}\ \mathit{III} \arrow[ul, Rightarrow] & & \mathit{sehr\ langer\ Beweis} \arrow[u, Rightarrow] \\
\mathit{Lemma}\ \mathit{I} \arrow[u, Rightarrow] & & &
\end{tikzcd}
$$

Theorem 1

Theorem (1)

Sei $k \geq 100$ ganzzahlig, sowie G ein Graph mit $d = d(G) \geq k^2$. Dann enthält G mindestens eine der folgenden Substrukturen:

1. *Einen Subgraph H mit $v(H) \leq 12 \cdot k^4 \cdot d$ und $d(H) \geq \frac{d}{24k^6}$, oder*
2. *Einen $m-$beschränkten Minor G' mit $d(G') \geq m \cdot (1 - \frac{16}{m}) \cdot d$ für ganzzahliges $m \in [\frac{k}{6}, k]$.*

Dichte und Chromatische Zahl

Theorem (Mader)

Jeder Graph G enthält Subgraphen G' mit $\kappa(G') \geq \frac{d(G)}{2}$

Dichte und Chromatische Zahl

Theorem (Mader)

Jeder Graph G enthält Subgraphen G' mit $\kappa(G') \geq \frac{d(G)}{2}$

Theorem (Norin, Postle und Song bzw. Bollobás und Thomasen)

Es gibt $C > 1$ so, dass gilt: Sei G ein Graph mit $\kappa(G) \geq Ct(\log t)^{1/4}$, und sei $r \geq \sqrt{\log t}/2$ ganzzahlig. Falls es paarweise knoten-disjunkte Subgraphen $H_1, H_2, \ldots, H_r$ von G gibt mit $d(H_i) \geq Ct(\log t)^{1/4}$ für alle $i \in [r]$, so enthält G einen K_t-Minoren.

Beweisskizze für Theorem 1

Beweis von Thm. 1 mit zwei anderen Sätzen:

Theorem (1.1)

Sei $G = (A, B)$ ein bipartiter Graph mit $|A| \geq \ell|B|$ und so, dass jeder Knoten in A mindestens d_0 Nachbarn in B hat. Dann gibt es in G eine der folgenden Substrukturen:

Beweisskizze für Theorem 1

Beweis von Thm. 1 mit zwei anderen Sätzen:

Theorem (1.1)

Sei $G = (A, B)$ ein bipartiter Graph mit $|A| \geq \ell|B|$ und so, dass jeder Knoten in A mindestens d_0 Nachbarn in B hat. Dann gibt es in G eine der folgenden Substrukturen:

1. *Einen Subgraphen H mit $v(H) \leq 4Kd_0$ und $e(H) \geq \varepsilon_{1,0} \cdot \varepsilon_{2,0} \cdot \frac{d_0^2}{2}$*
2. *Einen Subgraphen H mit $v(H) \leq 4Kd_0$ und $e(H) \geq \varepsilon_{1,0}^2 \cdot \frac{d_0^2}{2}$*
3. *Einen $(\ell + 1)-$beschränkten Minoren H mit $d(H) \geq \frac{\ell^2}{\ell+1}(1 - 2\varepsilon_{1,0} - 2\ell\varepsilon_{2,0} - \frac{\ell}{k})d_0$*

Beweisskizze für Theorem 1

Theorem (1.2)

Sei G ein Graph mit $d = d(G) \geq \frac{k}{\min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}}$. Dann gibt es in G mindestens eine der folgenden Substrukturen:

Beweisskizze für Theorem 1

Theorem (1.2)

Sei G ein Graph mit $d = d(G) \geq \frac{k}{\min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}}$. Dann gibt es in G mindestens eine der folgenden Substrukturen:

1. *Einen Subgraphen H mit $v(H) \leq 3k^2Kd$ und $e(H) \geq \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \cdot \frac{d^2}{2}$*
2. *Einen bipartiten Subgraphen $H = (X, Y)$ mit $|X| \geq \ell|Y|$, sodass jeder Knoten in X mindestens $(1 - 6\varepsilon_1)d$ Nachbarn in Y hat*
3. *Einen $k-$beschränkten Minoren G' mit $d(G') \geq k \cdot (1 - \frac{16}{k}d)$*

Thm. 1.1 $\wedge$ Thm. 1.2 $\implies$ Thm. 1

Beweis.

Wir beginnen mit Thm. 1.2. Fallunterscheidung entsprechend der Fälle *i*, *ii* und *iii* aus dem Thm. wird wie folgt aussehen:

$$\text{Thm.1.2}\begin{cases}\text{i} & \implies 1.\text{i}\\ \text{ii} & \implies \text{können Thm. 1.1 anwenden}\\ \text{iii} & \implies 1.\text{ii}\end{cases}$$

Fälle 1.2.i und 1.2.iii

Beweis.

Thm. 1.2.i $\implies$ G enthält Subgraph H mit $v(H) \leq 3k^2Kd = 12k^4d$ und $e(H) \geq \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \cdot \frac{d^2}{2} = \frac{d^2}{2k^2}$. Dann gilt aber sofort $d(H) = \frac{e(H)}{v(H)} \geq \frac{d^2}{24k^6}$ und somit wird Fall i von Thm. 1 erfüllt. $\triangle$

Fälle 1.2.i und 1.2.iii

Beweis.

Thm. 1.2.i $\Longrightarrow$ G enthält Subgraph H mit $v(H) \leq 3k^2Kd = 12k^4d$ und $e(H) \geq \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \cdot \frac{d^2}{2} = \frac{d^2}{2k^2}$. Dann gilt aber sofort $d(H) = \frac{e(H)}{v(H)} \geq \frac{d^2}{24k^6}$ und somit wird Fall i von Thm. 1 erfüllt. $\triangle$

Beweis.

Thm. 1.2.iii $\Longrightarrow$ Es gibt G' mit $d(G') \geq k \cdot (1 - \frac{16}{k}) \cdot d$. Dann gilt aber auch der zweite Fall von Thm. 1. $\triangle$

Fall 1.2.ii

Beweis.

Thm. 1.2.ii $\Longrightarrow$ Finden bipartiten Subgraph $H = (X, Y)$ mit $|X| \geq \ell|Y|$, sodass jeder Knoten in X mindestens $(1 - 6\varepsilon_1)d$ Nachbarn hat.
Können Thm. 1.1 mit $d_0 = (1 - 6\varepsilon_1)d, \varepsilon_{1,0} = \frac{1}{\ell}$ und $\varepsilon_{2,0} = \frac{1}{\ell^2}$ anwenden. $\triangle$

Beweis für Fälle 1.1.i und 1.1.ii.

In beiden Fällen kriegen wir Subgraphen H_0 von H und Abschätzungen für $v(H_0)$ und $e(H_0)$.
Können damit $d(H_0)$ abschätzen. $\triangle$

Fall 1.1.iii

Beweis für Fall 1.1.ii.

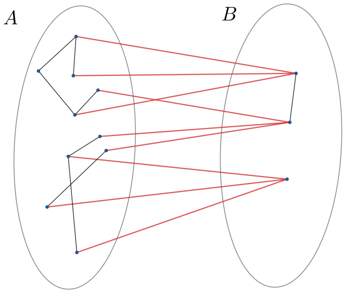
Thm. 1.1.iii $\implies$ H enthält $(\ell+1)-$*beschränkten* Minoren H_0 mit

$$\begin{aligned} d(H_0) &\geq \frac{\ell^2}{\ell+1}(1 - 2\varepsilon_{1,0} - 2\ell\varepsilon_{2,0} - \frac{\ell}{K})d_0 \\ &\geq \dots \\ &\geq \ell \cdot (1 - \frac{10}{\ell+1}) \cdot d \end{aligned}$$

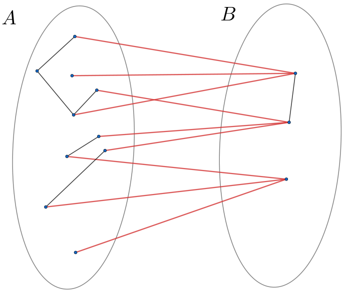
H_0 ist dann ausreichend dichter, $(\ell+1)-$beschränkter Minor (Fall iii von Thm. 1 ist erfüllt). □

Star- und claw-matchings

Definition



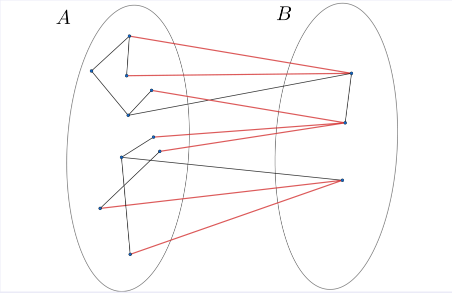
(a) Ein 3−star-matching



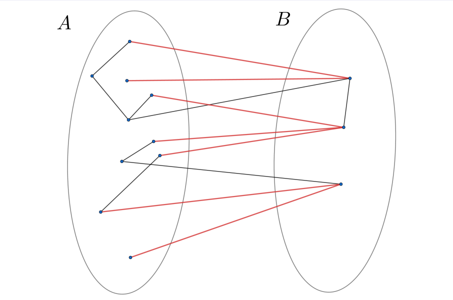
(b) Ein 3−claw-matching

Star- und claw-matchings

Definition



(a) Ein $3^{-}-$star-matching



(b) Ein $3^{-}-$claw-matching

Beweis von Thm. 1.1

Benötigen 3 Lemmata.

Lemma (1)

Gegeben:

- (A, B) Partitionierung von G, $|A| \geq \ell|B|$ und B unabhängig
- jeder Knoten in A hat mindestens d_B Nachbarn in B und maximal d_A Nachbarn in A

Dann gibt es $\ell - claw - matching$ F von B nach A, sodass jeder Knoten in $V(F) \cap A$ maximal d_A Nachbarn in $B \backslash V(F)$ hat.

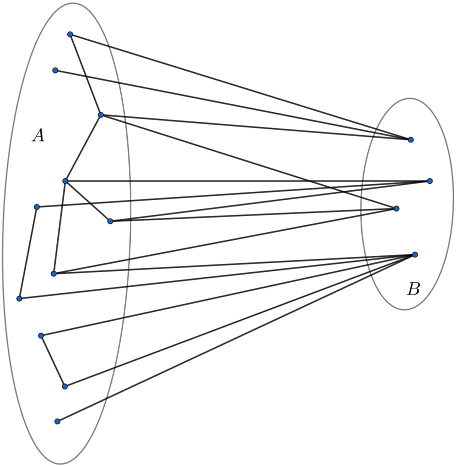
Lemma I

Beweis.

Sei F_0 ein $\ell^- - claw - matching$ von B nach A mit $|V(F_0) \cap A|$ maximal.

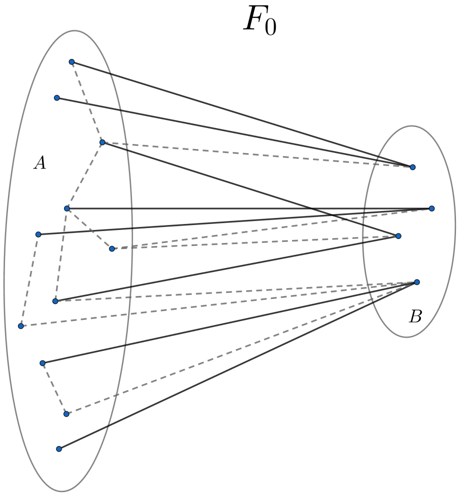
Lemma I

Beweis.



Lemma I

Beweis.



Lemma I

Beweis.

Sei F_0 ein $\ell^- - claw - matching$ von B nach A mit $|V(F_0) \cap A|$ maximal.

Lemma I

Beweis.

Sei F_0 ein $\ell^- - \textit{claw} - \textit{matching}$ von B nach A mit $|V(F_0) \cap A|$ maximal.

Falls $V(F_0) \cap A = A$, dann gilt

$$|A| = |V(F_0) \cap A| \leq \ell |V(F_0) \cap B|, \text{ sowie}$$
$$|A| \geq \ell |B| \text{ nach Vorraussetzung}$$

$\implies V(F_0) \cap B = B \implies V(F_0) = V(G)$
Nehmen also ab jetzt $A \backslash V(F_0) \neq \emptyset$ an.

Lemma I, $A \setminus V(F_0) \neq \emptyset$

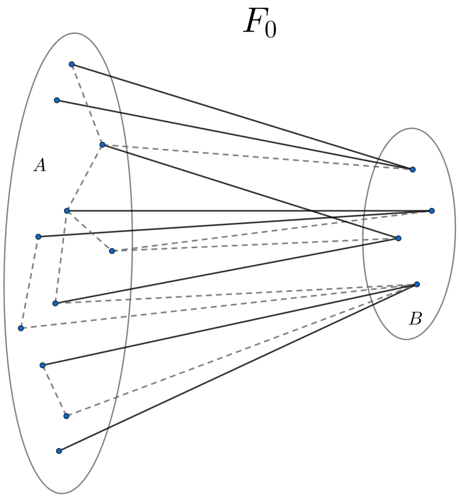
Beweis.

Wähle $u \in A \setminus V(F_0)$ beliebig. $u - v-$Pfad P heißt $(u, v) - F_0-$*alternating path*, wenn

- P alterniert zwischen F_0 und $E(G) \setminus E(F_0)$ und zwischen A und B
- es gibt keine Dreiecke in G, die eine Kante aus F_0 und eine aus $P - E(F_0)$ enthalten

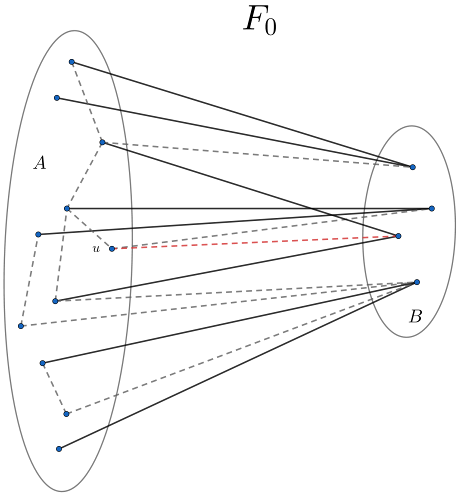
Lemma I, $A \setminus V(F_0) \neq \emptyset$

Beweis.



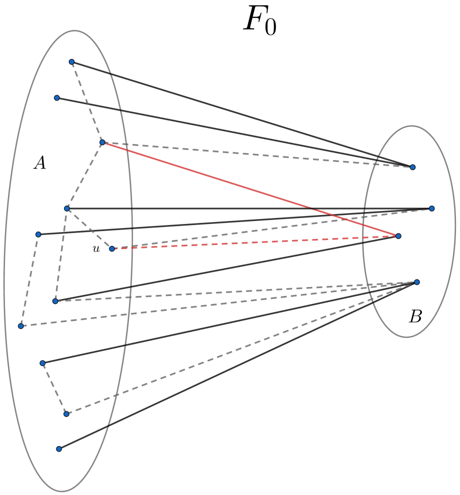
Lemma I, $A \setminus V(F_0) \neq \emptyset$

Beweis.



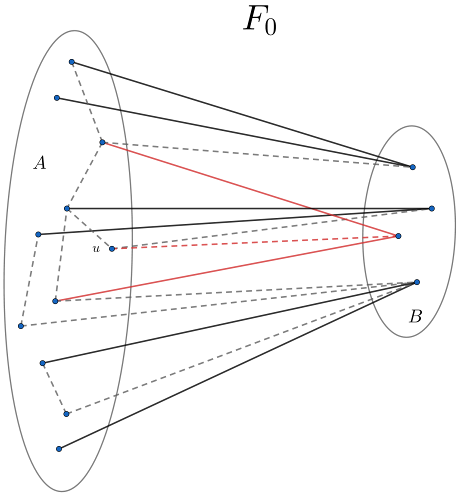
Lemma I, $A \setminus V(F_0) \neq \emptyset$

Beweis.



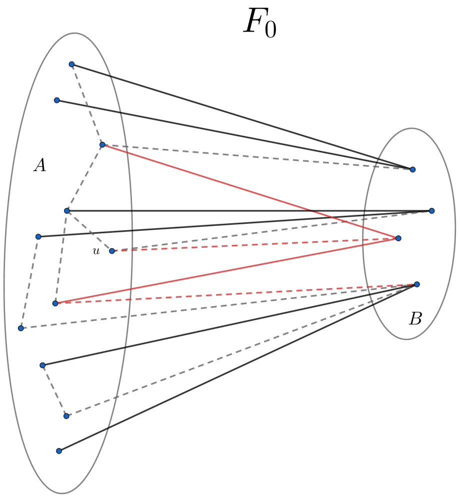
Lemma I, $A \setminus V(F_0) \neq \emptyset$

Beweis.



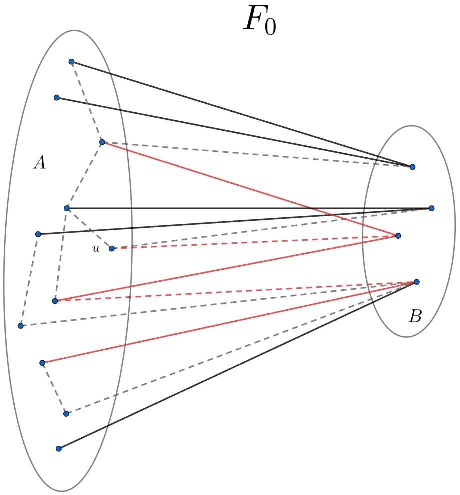
Lemma I, $A \setminus V(F_0) \neq \emptyset$

Beweis.



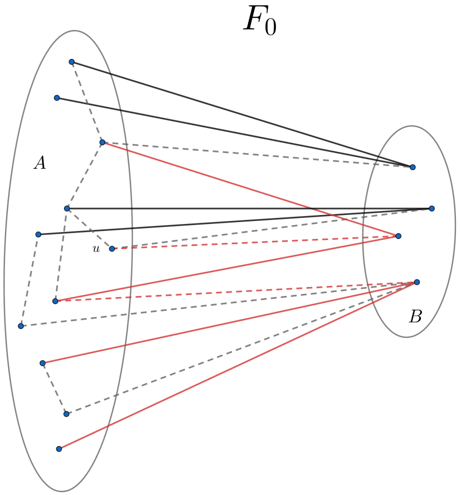
Lemma I, $A \setminus V(F_0) \neq \emptyset$

Beweis.



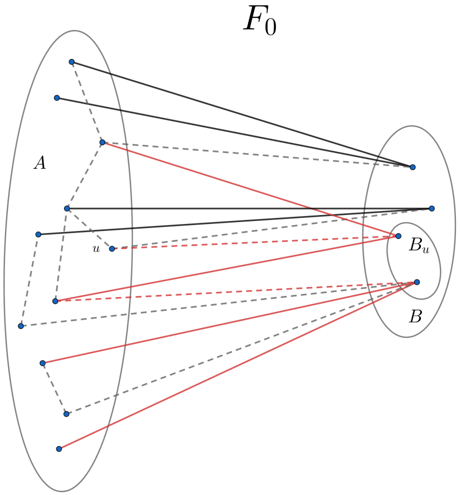
Lemma I, $A \setminus V(F_0) \neq \emptyset$

Beweis.



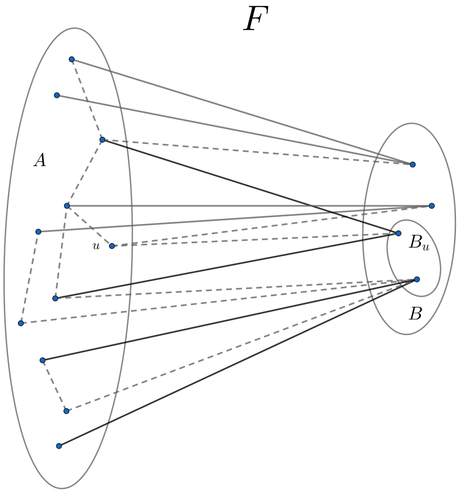
Lemma I, $A \setminus V(F_0) \neq \emptyset$

Beweis.



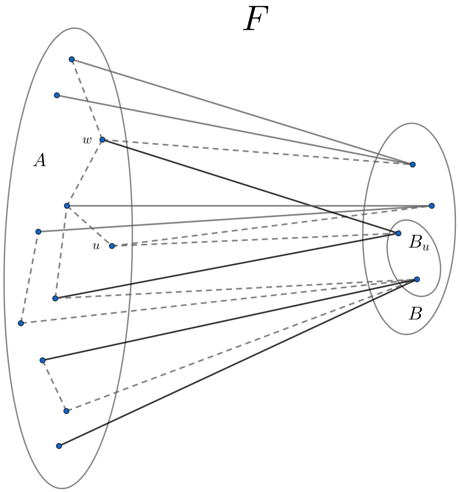
Lemma I, $A \setminus V(F_0) \neq \emptyset$

Beweis.



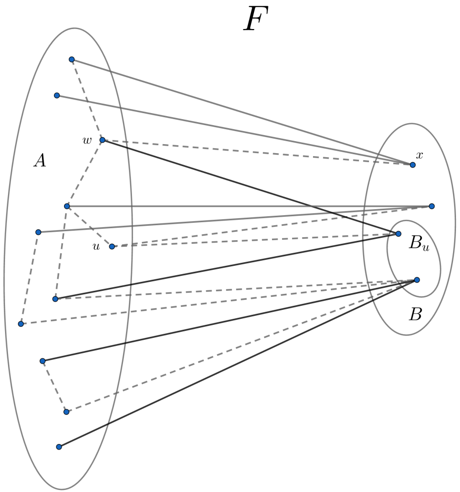
Lemma I, $A \setminus V(F_0) \neq \emptyset$

Beweis.



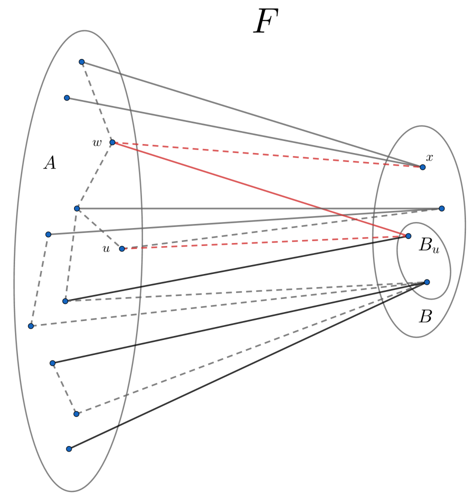
Lemma I, $A \setminus V(F_0) \neq \emptyset$

Beweis.



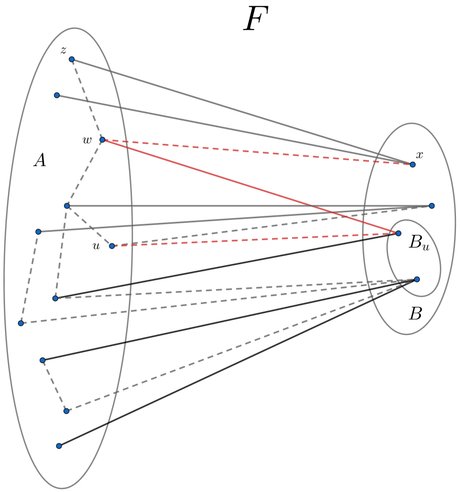
Lemma I, $A \setminus V(F_0) \neq \emptyset$

Beweis.



Lemma I, $A \setminus V(F_0) \neq \emptyset$

Beweis.



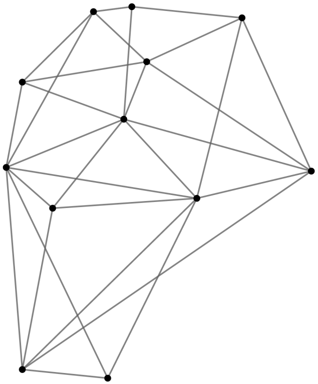
Weitere Definitionen

Definition

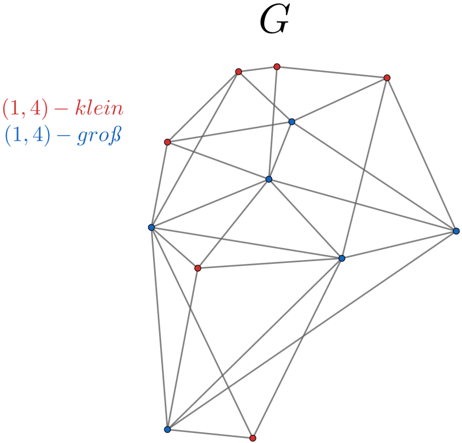
- v ist $(K, d) - klein$, in G, falls $deg_G(v) \leq Kd$, andernfalls $(K, d) - groß$
- v und w sind $(\varepsilon, d) - mates$, falls sie mindestens εd gemeinsame Nachbarn haben
- G ist $(K, \varepsilon_1, \varepsilon_2, d) - unmated$, falls jeder $(K, d) - kleine$ Knoten in G echt weniger als $\varepsilon_1 d$ viele $(\varepsilon_2, d) - mates$ hat

Weitere Definitionen

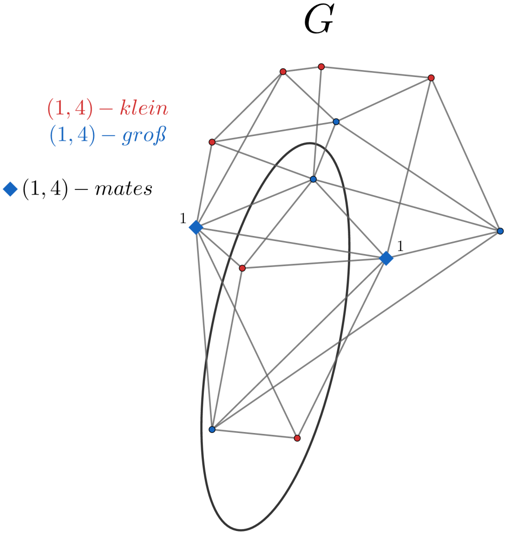
G



Weitere Definitionen



Weitere Definitionen

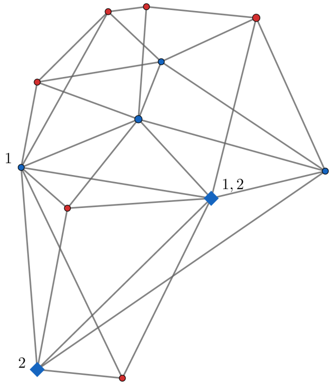


Weitere Definitionen

G

$(1,4) - klein$
$(1,4) - groß$

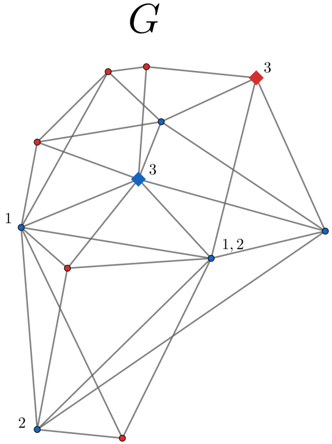
◆ $(1,4) - mates$



Weitere Definitionen

$(1,4)-klein$
$(1,4)-gro\ss$

◆ $(1,4)-mates$

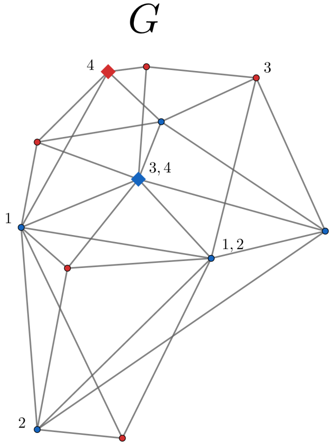


Weitere Definitionen

$(1,4)-klein$

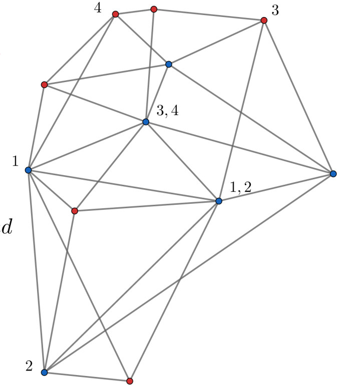
$(1,4)-groß$

◆ $(1,4)-mates$



Weitere Definitionen

G



$(1,4)-klein$

$(1,4)-groß$

- $(1,4)-mates$

$G\ ist\ (1,1,1,4)-unmated$

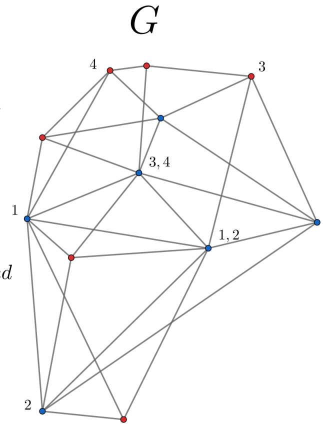
Weitere Definitionen

Definition

F heißt

- $(K, d) - \textit{klein}$, falls jeder Knoten in F $(K, d) - \textit{klein}$ in G ist
- $(\varepsilon, d) - \textit{mate} - \textit{frei}$, falls es keine $(\varepsilon, d) - \textit{mates}$ in F gibt
- $(c, d) - \textit{sauber}$, falls $e(G) - e(G/F) \leq c \cdot d \cdot v(F)$

Weitere Definitionen

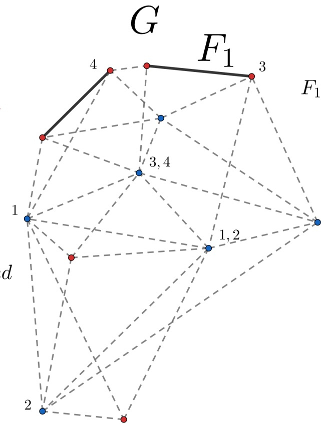


$(1,4)-klein$
$(1,4)-groß$

- $(1,4)-mates$

$G\ ist\ (1,1,1,4)-unmated$

Weitere Definitionen



F_1 *ist* $(1,4)$ – *klein*

$(1,4) - klein$

$(1,4) - groß$

◆ $(1,4) - mates$

G *ist* $(1,1,1,4)$ – *unmated*

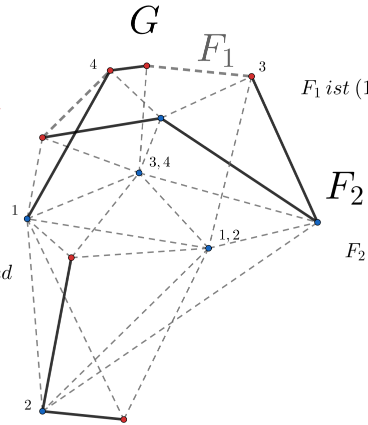
Weitere Definitionen

$(1,4)-klein$

$(1,4)-groß$

◆ $(1,4)-mates$

$G\ ist\ (1,1,1,4)-unmated$



$F_1\ ist\ (1,4)-klein$

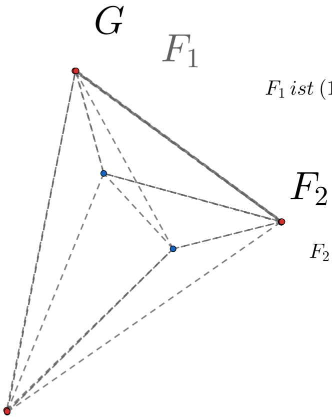
$F_2\ ist\ (1,4)-mate-frei$

Weitere Definitionen

$(1,4)-klein$
$(1,4)-groß$

- $(1,4)-mates$

$G\ ist\ (1,1,1,4)-unmated$



$F_1\ ist\ (1,4)-klein$

$F_2\ ist\ (1,4)-mate-frei$

$e(G) = 29,\ e(G/F) = v(F) = 10$

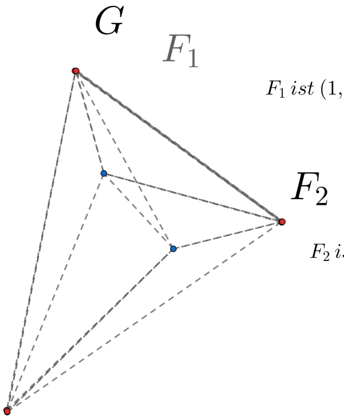
Weitere Definitionen

$\color{red}{(1,4)-klein}$

$\color{blue}{(1,4)-groß}$

- $(1,4)-mates$

$G\ ist\ (1,1,1,4)-unmated$



$F_1\ ist\ (1,4)-klein$

$F_2\ ist\ (1,4)-mate-frei$

$$e(G)=29,\ e(G/F)=v(F)=10$$
$$e(G)-e(G/F)\leq 0.475\cdot 4\cdot v(F_2)$$
$$F_2\ ist\ also\ (0.475,4)-sauber$$

Lemma II

Lemma

Sei $G = (A, B)$ bipartit mit $|A| \geq \ell|B|$ so, dass jeder Knoten in A mindestens d_0 Nachbarn in B hat. Ist G $(K, \varepsilon_{1,0}, \varepsilon_{2,0}, d_0) - \mathit{unmated}$, dann gibt es in G ein $(\varepsilon_{2,0}, d_0) - \mathit{mate}$–freies $\ell - \mathit{claw} - \mathit{matching}$ F von B nach A, sodass jeder Knoten in $V(F) \cap A$ höchstens $\varepsilon_{1,0} \cdot d_0$ Nachbarn in $B \backslash V(F)$ hat.

Beweis.

Fügen in A alle Kanten zwischen $(\varepsilon_{2,0}, d_0) - \mathit{mates}$ ein und können dann Lemma I anwenden. Dadurch kriegen wir das gewünschte $\ell - \mathit{claw} - \mathit{matching}$ und per Konstruktion sind darin keine $(\varepsilon_{2,0}, d_0) - \mathit{mates}$ enthalten. □

Lemma III

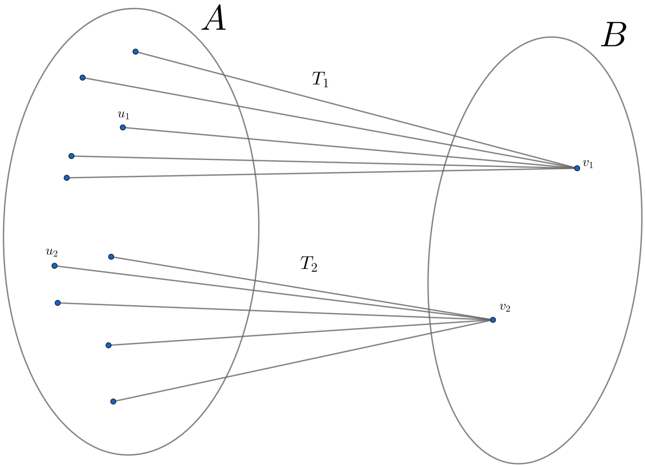
Lemma

Sei $G = (A, B)$ bipartit mit $|A| = \ell|B|$ so, dass jeder Knoten in A genau d'_0 Nachbarn in B hat. Ist G $(K, \varepsilon'_{1,0}, \varepsilon'_{2,0}, d'_0) - unmated$, und gibt es in G ein $(\varepsilon'_{2,0}, d'_0) - mate$–freies $\ell - claw - matching$ F_1 von B nach A mit $V(F_1) = V(G)$, dann enthält G mindestens eines der folgenden:

- Einen Subgraphen H mit $v(H) \leq (\ell + 1)(K + 1)d'_0$ und $e(H) \geq (\varepsilon'_{1,0})^2 \cdot \frac{(d'_0)^2}{2}$
- Ein $(K, d'_0) - kleines$, $(\varepsilon'_{2,0}, d'_0) - mate - freies$, $(\varepsilon'_{1,0} + \ell \cdot \varepsilon'_{2,0}, d'_0) - sauberes$ $\ell - claw - matching$ F von B nach A, sodass $v(F) \geq v(G)(1 - \frac{\ell}{K})$

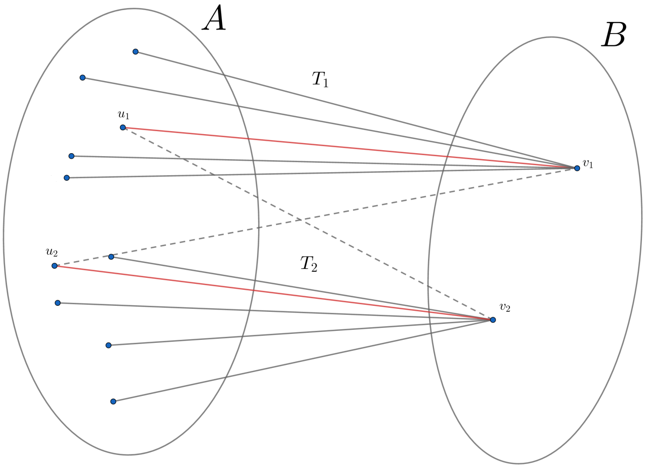
Lemma III

Beweis.



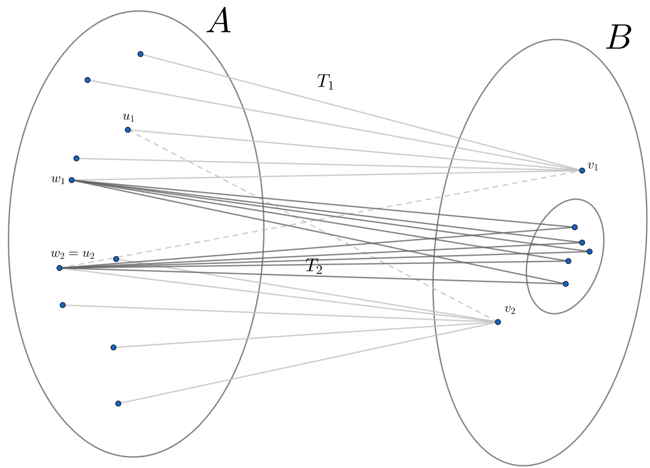
Lemma III

Beweis.



Lemma III

Beweis.



Zwischenstand

Neue Schranke

$$\Uparrow$$

$$\textit{Theorem } 1$$

$$\textit{Theorem } 1.1 \qquad\qquad \textit{Theorem } 1.2$$

$$\Uparrow \qquad \Uparrow \qquad\qquad \Uparrow$$

Lemma II *Lemma III* *sehr langer Beweis*

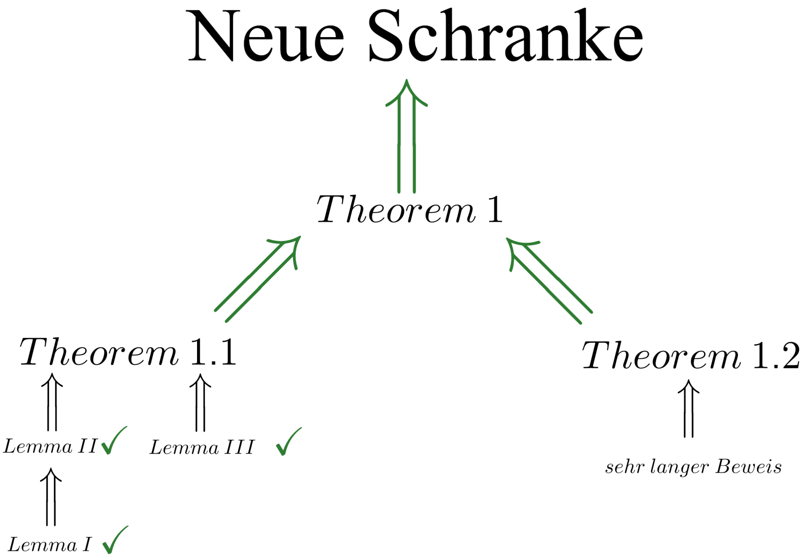
$$\Uparrow$$

Lemma I

Zwischenstand

$$
\begin{tikzcd}
 & & \text{Neue Schranke} & \\
 & & \mathit{Theorem}\ 1 \arrow[u, Rightarrow] & \\
 \mathit{Theorem}\ 1.1 \arrow[urr, Rightarrow] & & & \mathit{Theorem}\ 1.2 \arrow[ul, Rightarrow] \\
 \mathit{Lemma\ II} \checkmark \arrow[u, Rightarrow] & \mathit{Lemma\ III} \checkmark \arrow[ul, Rightarrow] & & \mathit{sehr\ langer\ Beweis} \arrow[u, Rightarrow] \\
 \mathit{Lemma\ I} \checkmark \arrow[u, Rightarrow] & & &
\end{tikzcd}
$$

Zwischenstand



Zwischenstand

Neue Schranke

$\Uparrow$

Theorem 1

$\Nearrow$ $\Nwarrow$

Theorem 1.1 — *Theorem 1.2*

$\Uparrow$ $\Uparrow$ — $\Uparrow$

Lemma II ✓ *Lemma III* ✓ — *sehr langer Beweis*

$\Uparrow$

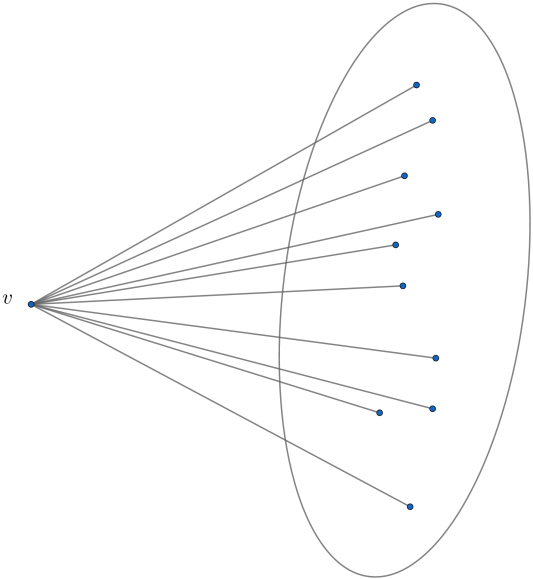
Lemma I ✓

Lemmata II, III $\Longrightarrow$ Satz 1.1

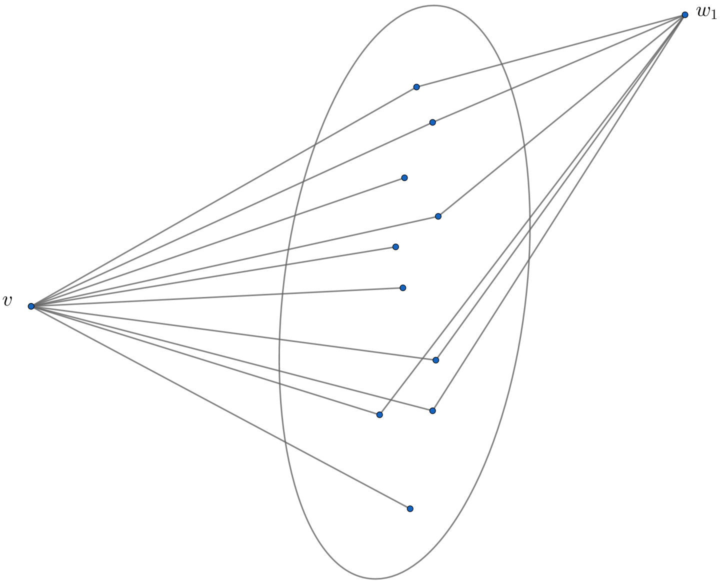
Beweis.

Falls G nicht $(K, \varepsilon_{1,0}, \varepsilon_{2,0}, d_0) -$ *unmated* ist, gibt es v mit $\varepsilon_{1,0}d$ vielen $(\varepsilon_{2,0}, d_0) -$ *mates*. $H = G[N(v) \cup \{w|w \text{ mate von } v\}]$ erfüllt dann $1.1.i$ $\triangle$

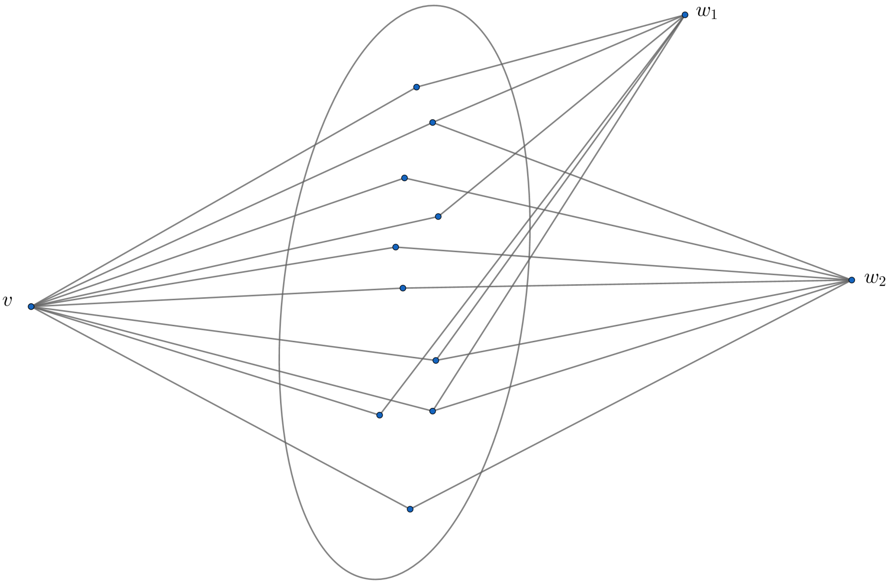
Lemmata II, III $\implies$ Satz 1.1



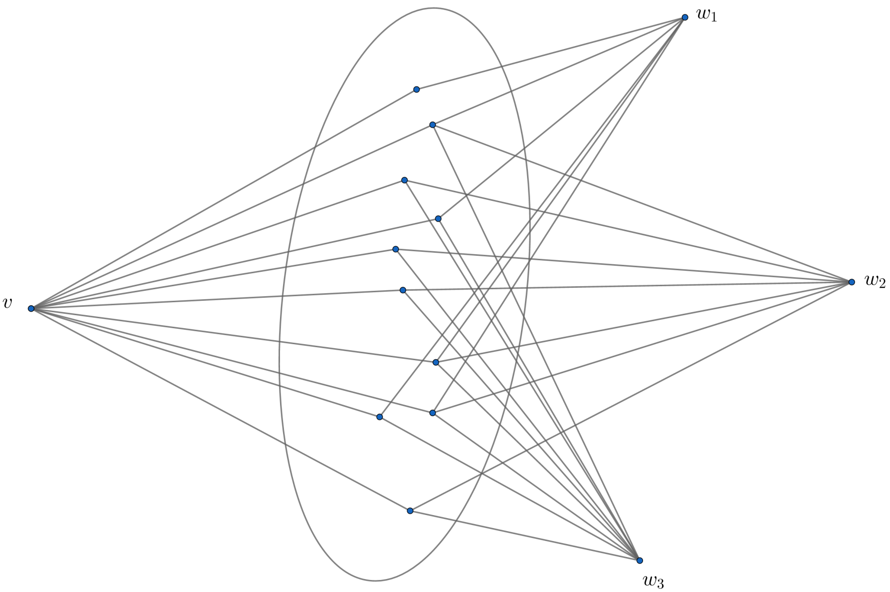
Lemmata II, III $\implies$ Satz 1.1



Lemmata II, III $\Longrightarrow$ Satz 1.1



Lemmata II, III $\implies$ Satz 1.1



G ist $(K, \varepsilon_{1,0}, \varepsilon_{2,0}, d_0) - unmated$

Beweis.

Lemma II liefert $(\varepsilon_{2,0}, d_0) - mate - freies\ \ell - claw - matching\ F_1$ von B nach A; jeder Knoten in A hat maximal $\varepsilon_{1,0} d_0$ Nachbarn in $B \backslash V(F_1)$.
Wähle G' mit $V(G') = V(F_1)$ und $E(F_1) \subseteq E(G')$, sodass jeder Knoten in $A \cap V(G')$ genau d_0' Nachbarn in $G' \cap B$ hat. Können jetzt Lemma III anwenden. Fall $i) \implies 1.1.ii$
Im Fall ii) wählen wir $H = (G'/E(F)) \backslash (A \backslash V(F))$ und kommen irgendwie zu Satz 1.1.iii. $\square$

Fast fertig

Neue Schranke ✓

$\Uparrow$

Theorem 1 ✓

$\Uparrow$ $\Uparrow$

Theorem 1.1 ✓ — *Theorem* 1.2

$\Uparrow$ $\Uparrow$ $\Uparrow$

Lemma II ✓ — *Lemma III* ✓ — *sehr langer Beweis*

$\Uparrow$

Lemma I ✓

Theorem 1.2

Theorem (1.2)

Sei G ein Graph mit $d = d(G) \geq \frac{k}{\min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}}$. Dann gibt es in G mindestens eine der folgenden Substrukturen:

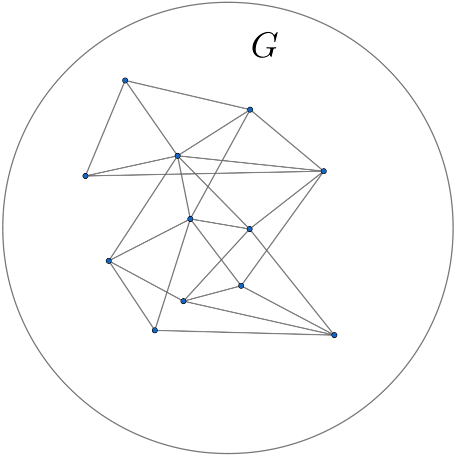
Theorem 1.2

Theorem (1.2)

Sei G ein Graph mit $d = d(G) \geq \frac{k}{\min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}}$. Dann gibt es in G mindestens eine der folgenden Substrukturen:

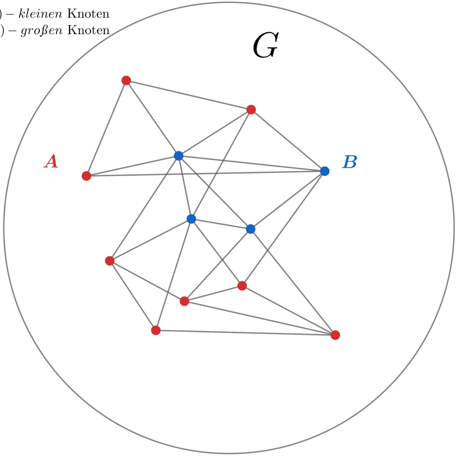
1. *Einen Subgraphen H mit $v(H) \leq 3k^2 Kd$ und $e(H) \geq \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \cdot \frac{d^2}{2}$*
2. *Einen bipartiten Subgraphen $H = (X, Y)$ mit $|X| \geq \ell |Y|$, sodass jeder Knoten in X mindestens $(1 - 6\varepsilon_1)d$ Nachbarn in Y hat*
3. *Einen $k-$beschränkten Minoren G' mit $d(G') \geq k \cdot (1 - \frac{16}{k} d)$*

Beweisskizze Theorem 1.2



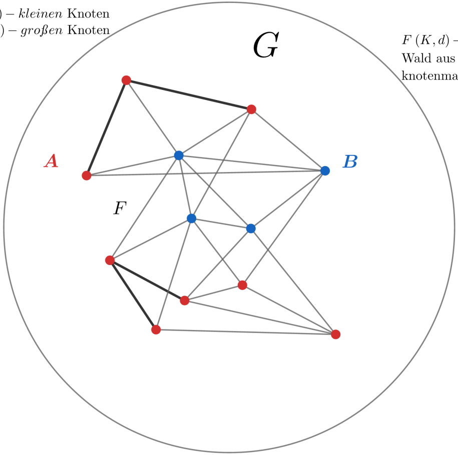
Beweisskizze Theorem 1.2

A die Menge der $(K,d)-$*kleinen* Knoten
B die Menge der $(K,d)-$*großen* Knoten



Beweisskizze Theorem 1.2

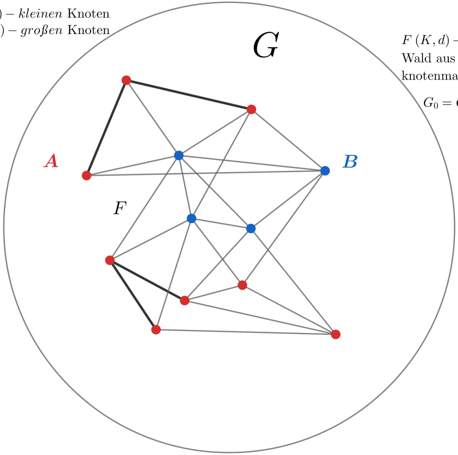
A die Menge der $(K,d)-$*kleinen* Knoten
B die Menge der $(K,d)-$*großen* Knoten



F $(K,d)-$*kleiner*, $(c,d)-$*sauberer*
Wald aus Sternen aus je k Knoten;
knotenmaximal

Beweisskizze Theorem 1.2

A die Menge der $(K,d)-$*kleinen* Knoten
B die Menge der $(K,d)-$*großen* Knoten

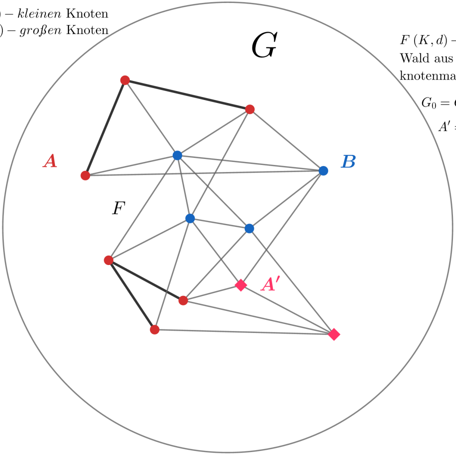


F $(K,d)-$*kleiner*, $(c,d)-$*sauberer* Wald aus Sternen aus je k Knoten; knotenmaximal

$G_0 = G/E(F)$

Beweisskizze Theorem 1.2

A die Menge der $(K,d)-$*kleinen* Knoten
B die Menge der $(K,d)-$*großen* Knoten



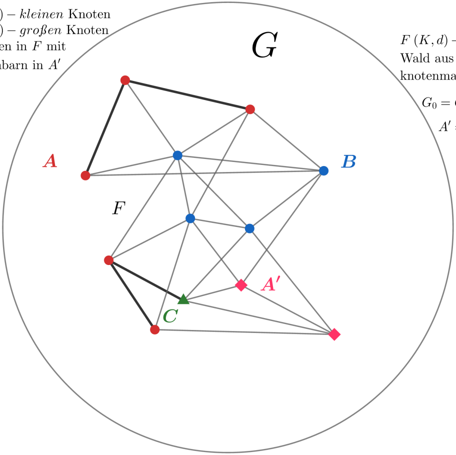
F $(K,d)-$*kleiner*, $(c,d)-$*sauberer* Wald aus Sternen aus je k Knoten; knotenmaximal

$G_0 = G/E(F)$

$A' = A \setminus V(F)$

Beweisskizze Theorem 1.2

A die Menge der $(K,d)-kleinen$ Knoten
B die Menge der $(K,d)-gro\ss en$ Knoten
C die Menge der Knoten in F mit mindestens $3k\varepsilon_2 d$ Nachbarn in A'



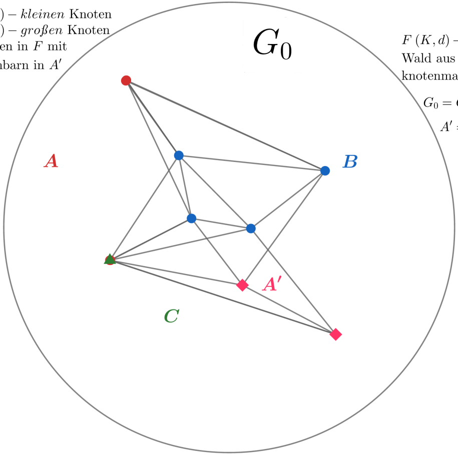
F $(K,d)-kleiner$, $(c,d)-sauberer$ Wald aus Sternen aus je k Knoten; knotenmaximal

$G_0 = G/E(F)$

$A' = A \backslash V(F)$

Beweisskizze Theorem 1.2

A die Menge der $(K, d) - \textit{kleinen}$ Knoten
B die Menge der $(K, d) - \textit{großen}$ Knoten
C die Menge der Knoten in F mit mindestens $3k\varepsilon_2 d$ Nachbarn in A'



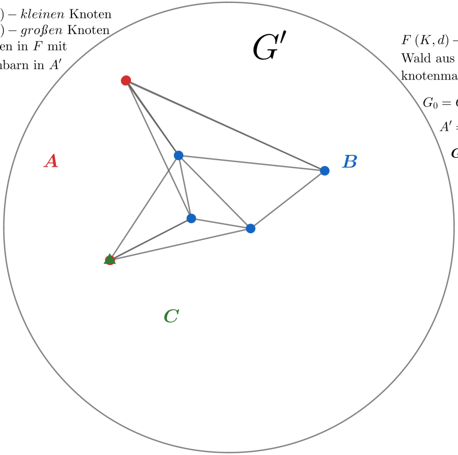
F $(K, d) - \textit{kleiner}$, $(c, d) - \textit{sauberer}$ Wald aus Sternen aus je k Knoten; knotenmaximal

$G_0 = G/E(F)$

$A' = A \setminus V(F)$

Beweisskizze Theorem 1.2

A die Menge der $(K, d) - kleinen$ Knoten
B die Menge der $(K, d) - gro\beta en$ Knoten
C die Menge der Knoten in F mit
mindestens $3k\varepsilon_2 d$ Nachbarn in A'



F $(K, d) - kleiner$, $(c, d) - sauberer$
Wald aus Sternen aus je k Knoten;
knotenmaximal

$G_0 = G/E(F)$

$A' = A \setminus V(F)$

$\boldsymbol{G' = G_0 \setminus A'}$

Fertig

Neue Schranke ✓

Theorem 1 ✓

Theorem 1.1 ✓

Lemma II ✓

Lemma I ✓

Lemma III ✓

Theorem 1.2 ✓

sehr langer Beweis ✓

Fazit und Ausblick

- Nicht das erste paper mit diesen Techniken
- Autor beschreibt mögliche Verbesserungen als "sehr technisch"

Fazit und Ausblick

- Nicht das erste paper mit diesen Techniken
- Autor beschreibt mögliche Verbesserungen als "sehr technisch"
  Ansatz wahrscheinlich fast ausgereizt