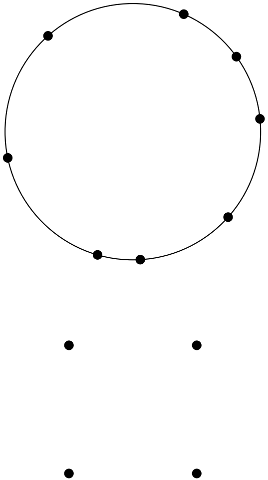
Circle graphs are quadratically χ-bounded

James Davies and Rose McCarty

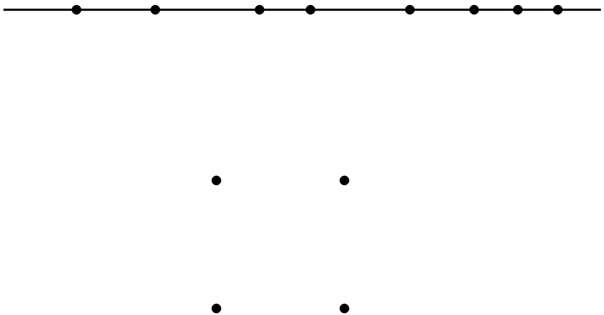
Wir beweisen, dass für jeden Circle-Graph G

$\chi(G) \leq 7\omega(G)^2$ gilt

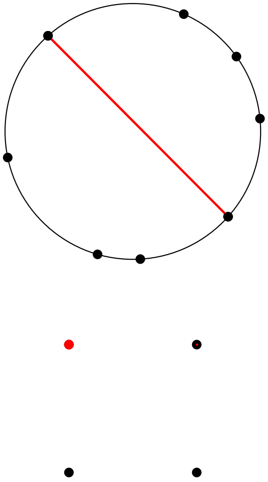
Was sind Circle-Graphen?



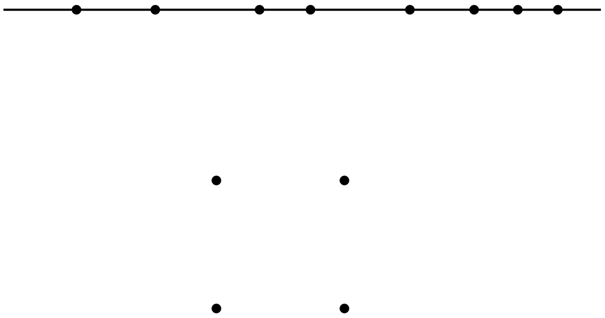
Was sind Overlap-Graphen?



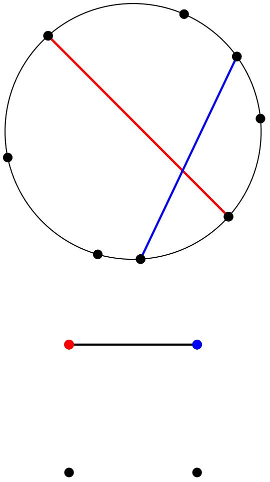
Was sind Circle-Graphen?



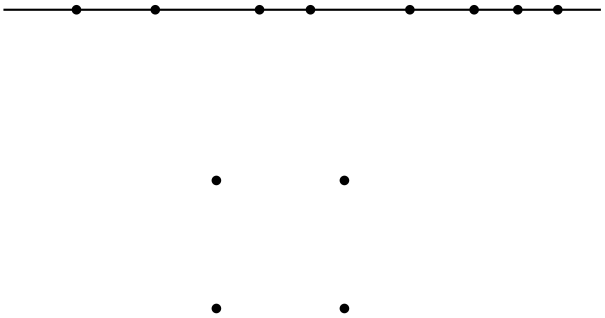
Was sind Overlap-Graphen?



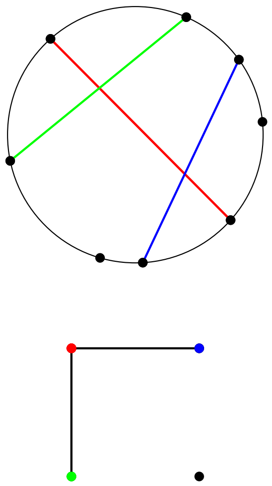
Was sind Circle-Graphen?



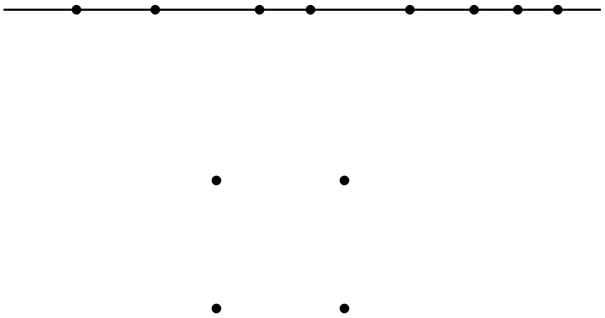
Was sind Overlap-Graphen?



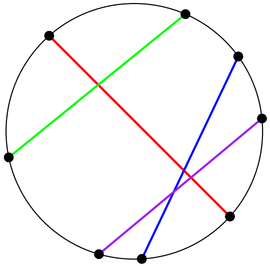
Was sind Circle-Graphen?

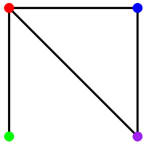


Was sind Overlap-Graphen?

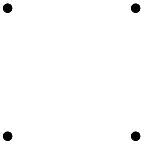


Was sind Circle-Graphen?

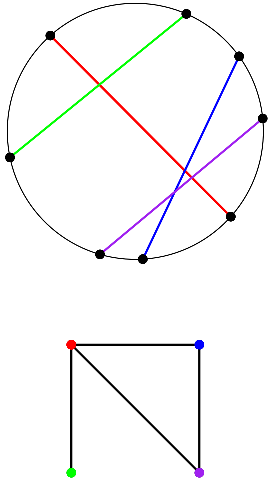




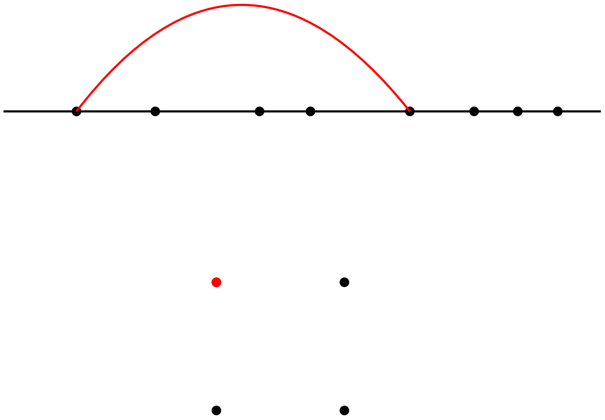
Was sind Overlap-Graphen?



Was sind Circle-Graphen?

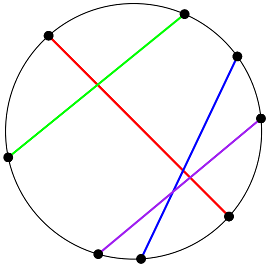


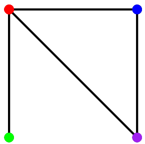
Was sind Overlap-Graphen?

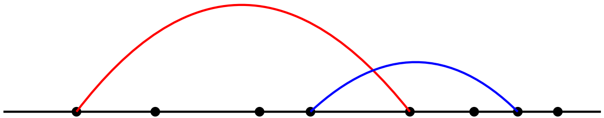


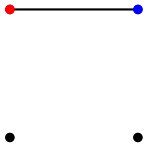
Was sind Circle-Graphen?

Was sind Overlap-Graphen?

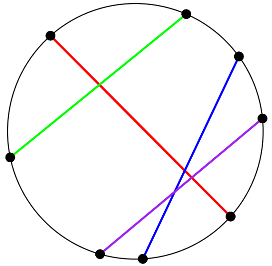


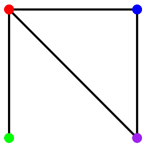




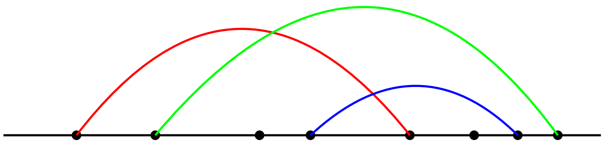


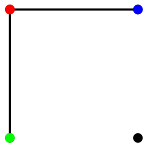
Was sind Circle-Graphen?



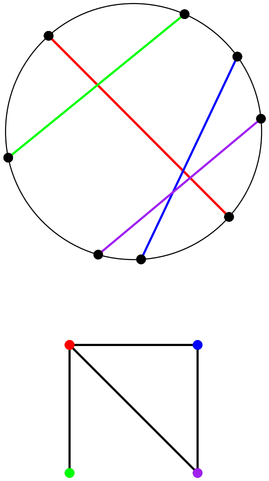


Was sind Overlap-Graphen?

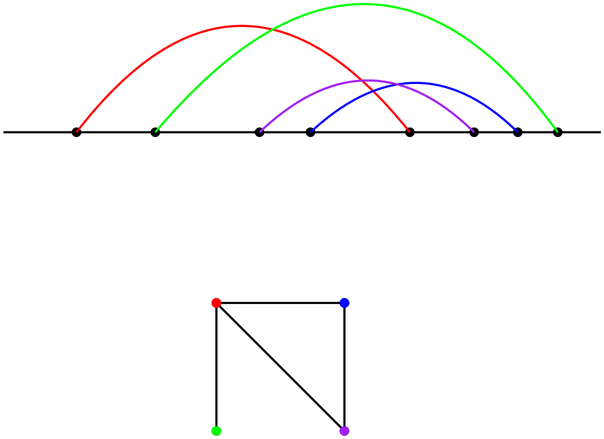




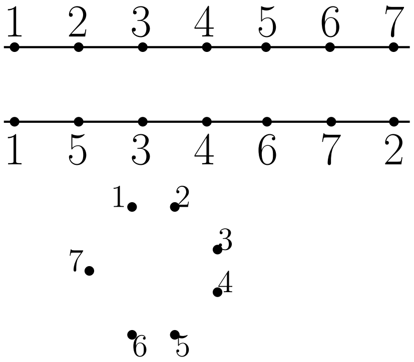
Was sind Circle-Graphen?



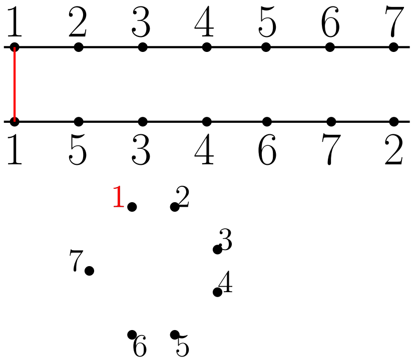
Was sind Overlap-Graphen?



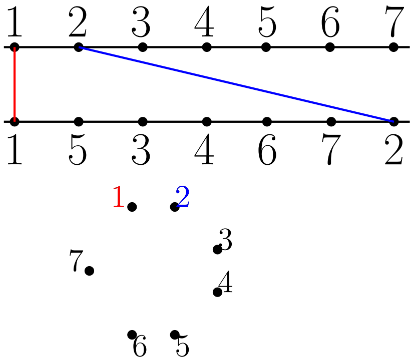
Was sind Permutationsgraphen



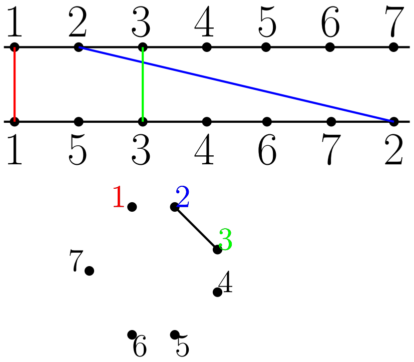
Was sind Permutationsgraphen



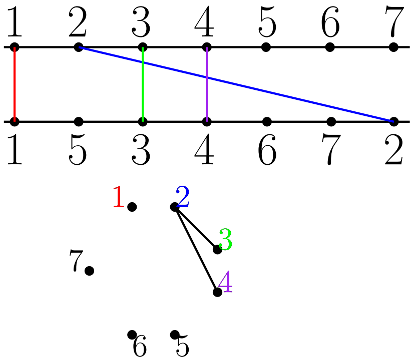
Was sind Permutationsgraphen



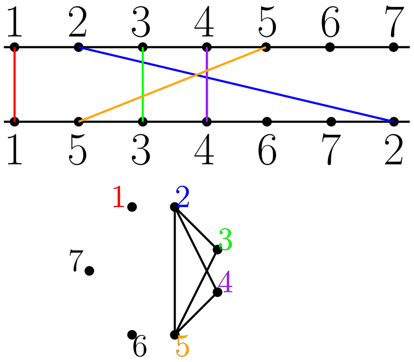
Was sind Permutationsgraphen



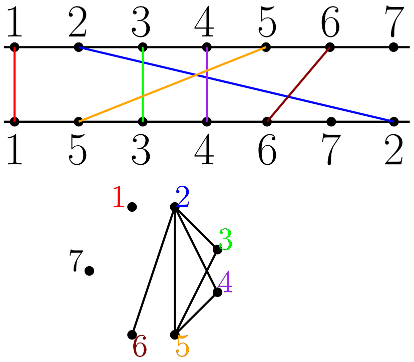
Was sind Permutationsgraphen



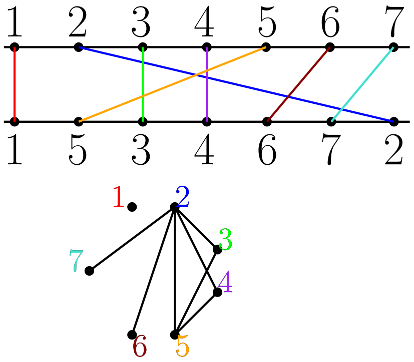
Was sind Permutationsgraphen



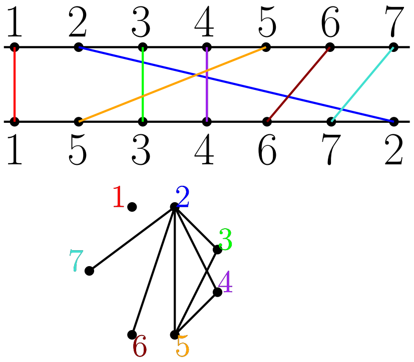
Was sind Permutationsgraphen



Was sind Permutationsgraphen

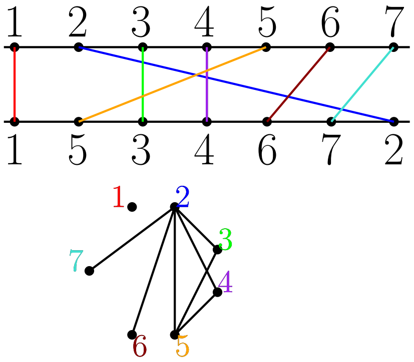


Was sind Permutationsgraphen



Bijektion zwischen den Graphen?

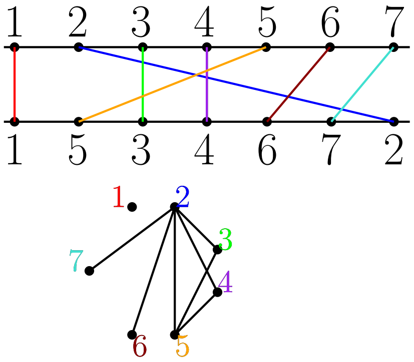
Was sind Permutationsgraphen



Bijektion zwischen den Graphen?

Circle-Graph $\Leftrightarrow$ Overlap-Graph

Was sind Permutationsgraphen

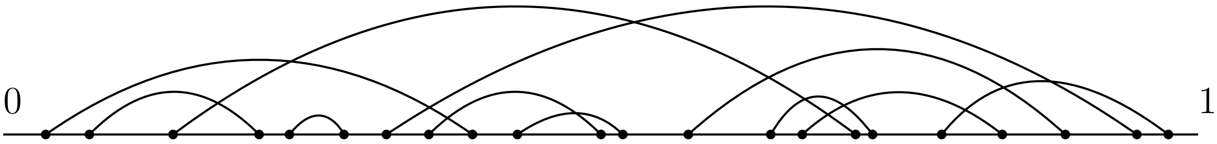


Bijektion zwischen den Graphen?

Circle-Graph $\Leftrightarrow$ Overlap-Graph

Permutationsgraph $\Leftrightarrow$ Overlap-Graph+Pillar

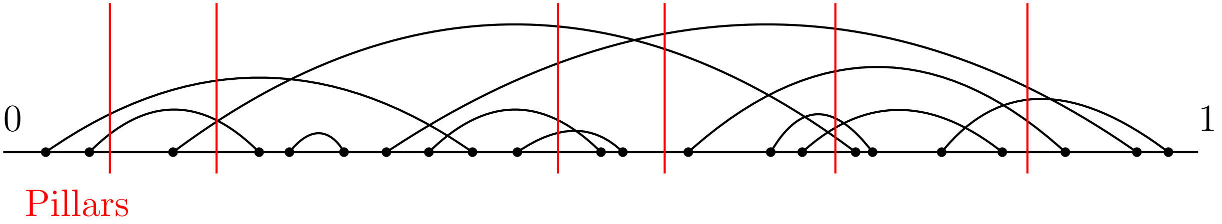
Wichtige Definitionen:



Wichtige Definitionen:

Pillar=p $\in$ (0,1), p nicht Endpunkt eines Intervalls aus $\mathcal{I}$:= Intervallsystem

Segment=Intervall (p_1, p_2) : $p_1, p_2 \in \{0, 1\} \cup$ Pillars, $\nexists$ Pillar $\in (p_1, p_2)$



Wichtige Definitionen:

Pillar=p $\in$ (0,1), p nicht Endpunkt eines Intervalls aus $\mathcal{I}$:= Intervallsystem

Segment=Intervall (p_1, p_2) : $p_1, p_2 \in \{0, 1\} \cup$ Pillars, $\nexists$ Pillar $\in (p_1, p_2)$

$(P, \prec, c)$= Pillars, totale Ordnung, Färbung

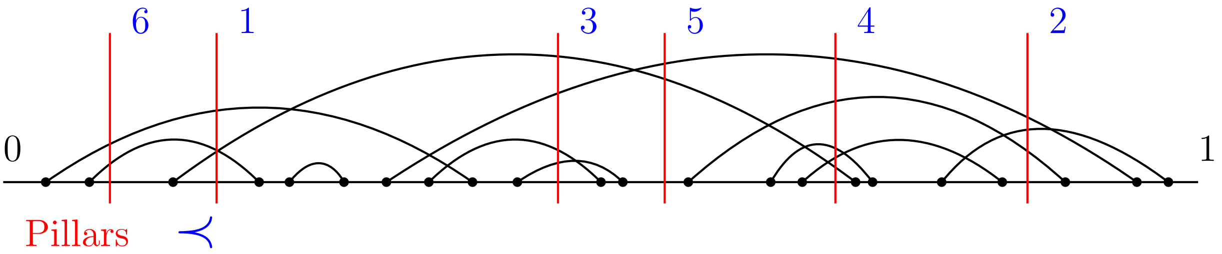
P=endliche Menge an Pillars

$\prec$=totale Ordnung auf P

c=Färbung der Pillars : $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ überlappende Intervalle mit $f(I_1) \neq f(I_2)$

$\Rightarrow c(p_1) \neq c(p_2)$

$f(I) = \min_{\prec}(I \bigcap P)$



Wichtige Definitionen:

Pillar=p $\in$ (0,1), p nicht Endpunkt eines Intervalls aus $\mathcal{I}$:= Intervallsystem

Segment=Intervall (p_1, p_2) : $p_1, p_2 \in \{0, 1\} \cup$ Pillars, $\nexists$ Pillar $\in (p_1, p_2)$

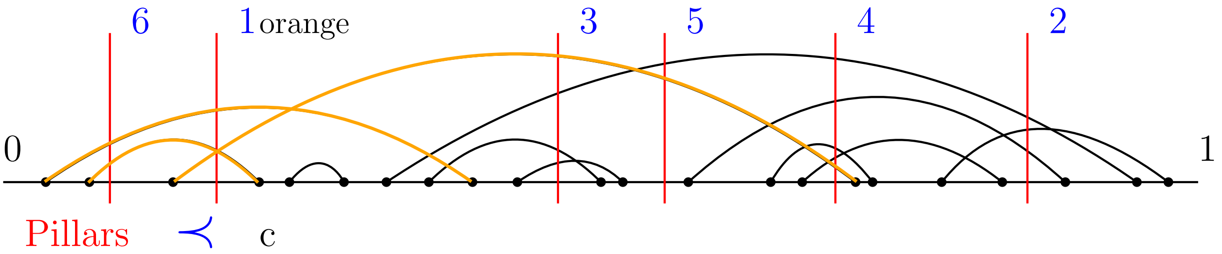
$(P, \prec, c)$= Pillars, totale Ordnung, Färbung

P=endliche Menge an Pillars

$\prec$=totale Ordnung auf P

c=Färbung der Pillars : $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ überlappende Intervalle mit $f(I_1) \neq f(I_2)$
$\Rightarrow c(p_1) \neq c(p_2)$

$f(I) = \min_{\prec}(I \bigcap P)$



Wichtige Definitionen:

Pillar=p $\in$ (0,1), p nicht Endpunkt eines Intervalls aus $\mathcal{I}$:= Intervallsystem

Segment=Intervall (p_1, p_2) : $p_1, p_2 \in \{0,1\} \cup$ Pillars, $\nexists$ Pillar $\in (p_1, p_2)$

$(P, \prec, c)$= Pillars, totale Ordnung, Färbung

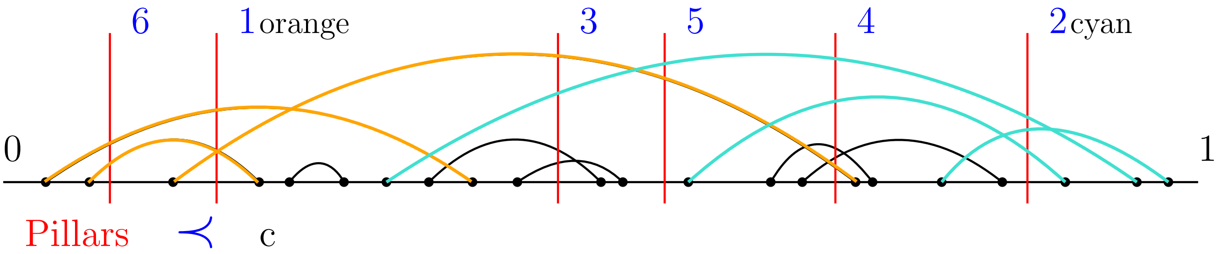
P=endliche Menge an Pillars

$\prec$=totale Ordnung auf P

c=Färbung der Pillars : $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ überlappende Intervalle mit $f(I_1) \neq f(I_2)$

$\Rightarrow c(p_1) \neq c(p_2)$

$f(I) = \min_{\prec}(I \bigcap P)$



Wichtige Definitionen:

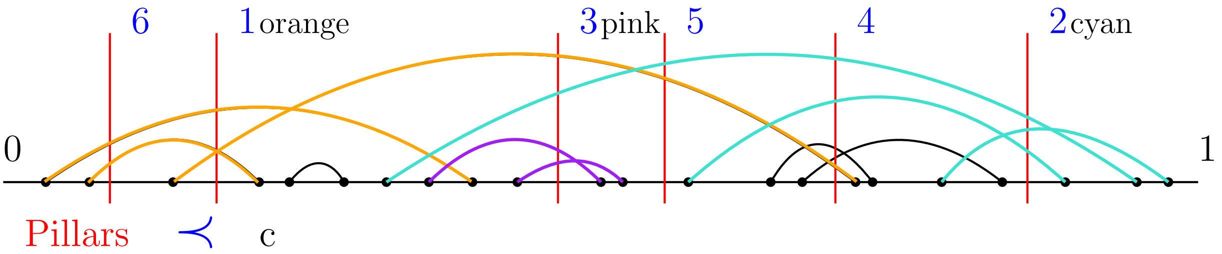
Pillar=p $\in$ (0,1), p nicht Endpunkt eines Intervalls aus $\mathcal{I}$:= Intervallsystem

Segment=Intervall (p_1, p_2) : $p_1, p_2 \in \{0, 1\} \cup$ Pillars, $\nexists$ Pillar $\in (p_1, p_2)$

$(P, \prec, c)$= Pillars, totale Ordnung, Färbung

P=endliche Menge an Pillars
$\prec$=totale Ordnung auf P
c=Färbung der Pillars : $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ überlappende Intervalle mit $f(I_1) \neq f(I_2)$
$\Rightarrow c(p_1) \neq c(p_2)$

$f(I) = \min_{\prec}(I \bigcap P)$



Wichtige Definitionen:

Pillar=p $\in$ (0,1), p nicht Endpunkt eines Intervalls aus $\mathcal{I}$:= Intervallsystem

Segment=Intervall $(p_1, p_2) : p_1, p_2 \in \{0, 1\} \cup$ Pillars, $\nexists$ Pillar $\in (p_1, p_2)$

$(P, \prec, c)$= Pillars, totale Ordnung, Färbung

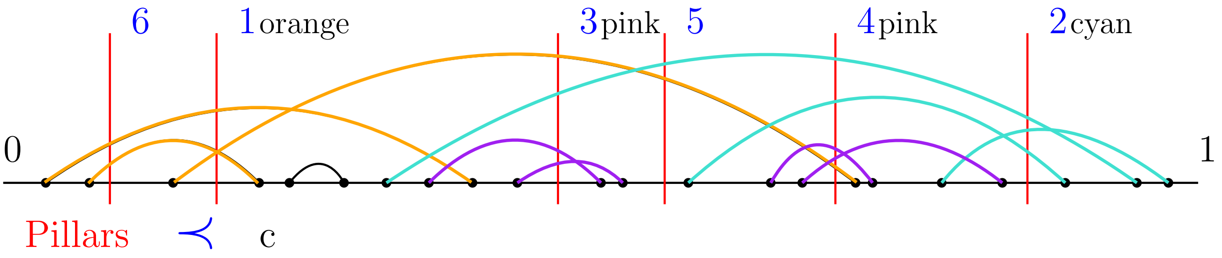
P=endliche Menge an Pillars

$\prec$=totale Ordnung auf P

c=Färbung der Pillars : $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ überlappende Intervalle mit $f(I_1) \neq f(I_2)$

$\Rightarrow c(p_1) \neq c(p_2)$

$f(I) = \min_{\prec}(I \cap P)$



Wichtige Definitionen:

Pillar=p $\in$ (0,1), p nicht Endpunkt eines Intervalls aus $\mathcal{I}$:= Intervallsystem

Segment=Intervall (p_1, p_2) : $p_1, p_2 \in \{0, 1\} \cup$ Pillars, $\nexists$ Pillar $\in (p_1, p_2)$

$(P, \prec, c)$= Pillars, totale Ordnung, Färbung

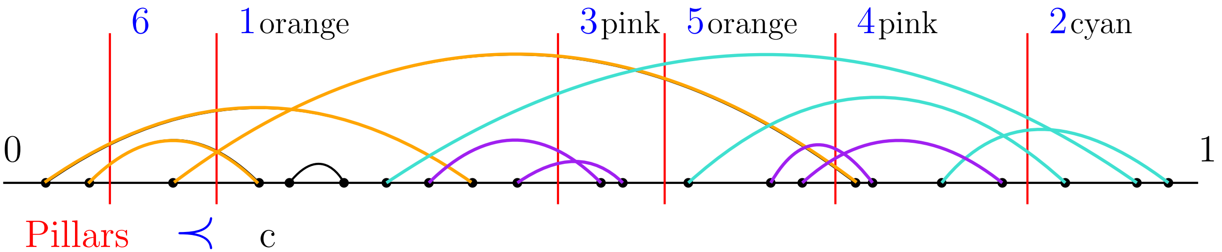
P=endliche Menge an Pillars

$\prec$=totale Ordnung auf P

c=Färbung der Pillars : $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ überlappende Intervalle mit $f(I_1) \neq f(I_2)$

$\Rightarrow c(p_1) \neq c(p_2)$

$f(I) = \min_{\prec}(I \bigcap P)$



Wichtige Definitionen:

Pillar=p $\in$ (0,1), p nicht Endpunkt eines Intervalls aus $\mathcal{I}$:= Intervallsystem

Segment=Intervall (p_1, p_2) : $p_1, p_2 \in \{0,1\} \cup$ Pillars, $\nexists$ Pillar $\in (p_1, p_2)$

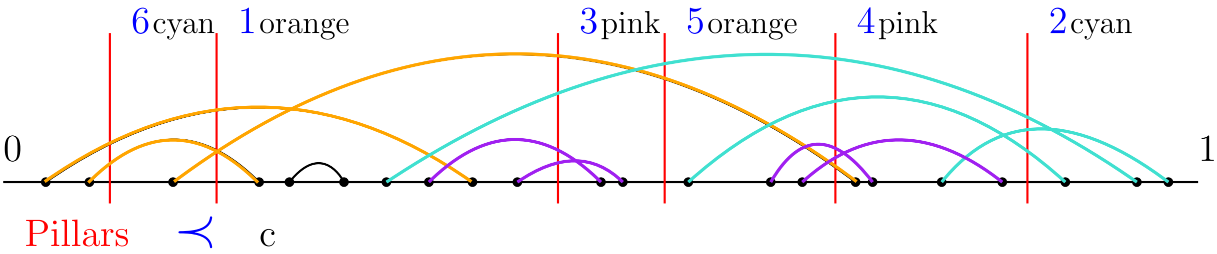
$(P, \prec, c)$= Pillars, totale Ordnung, Färbung

P=endliche Menge an Pillars

$\prec$=totale Ordnung auf P

c=Färbung der Pillars : $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ überlappende Intervalle mit $f(I_1) \neq f(I_2)$
$\Rightarrow c(p_1) \neq c(p_2)$

$f(I) = \min_{\prec}(I \bigcap P)$



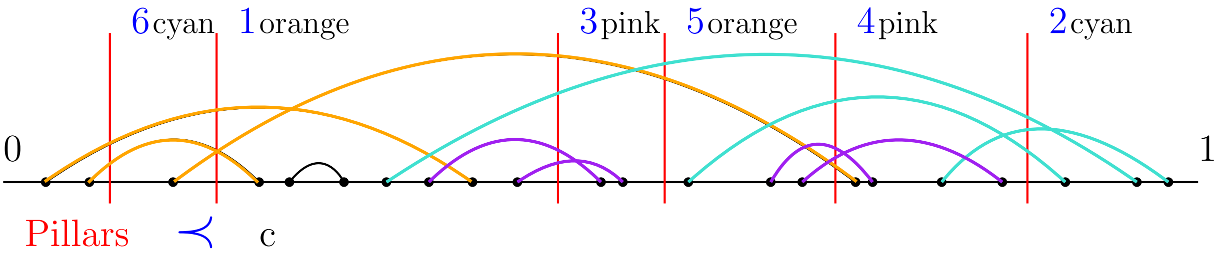
Wichtige Definitionen:

Pillar=p $\in$ (0,1), p nicht Endpunkt eines Intervalls aus $\mathcal{I}$:= Intervallsystem

Segment=Intervall (p_1, p_2) : $p_1, p_2 \in \{0, 1\} \cup$ Pillars, $\nexists$ Pillar $\in (p_1, p_2)$

$(P, \prec, c)$= Pillars, totale Ordnung, Färbung

$$f(I) = \min_{\prec}(I \bigcap P)$$



Wichtige Definitionen:

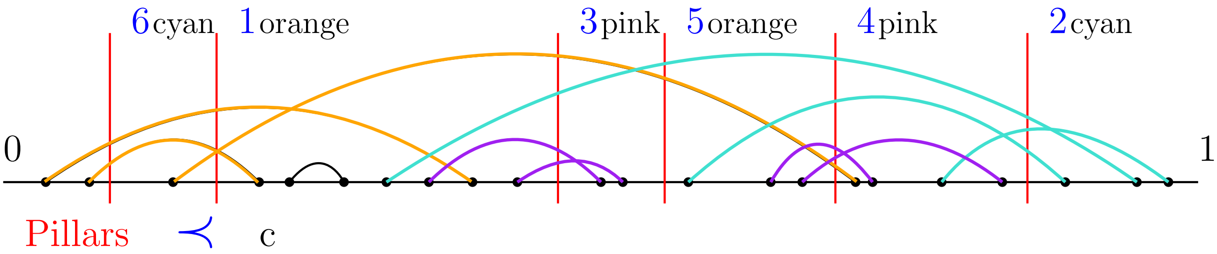
Pillar=p $\in$ (0,1), p nicht Endpunkt eines Intervalls aus $\mathcal{I}$:= Intervallsystem

Segment=Intervall (p_1, p_2) : $p_1, p_2 \in \{0, 1\} \cup$ Pillars, $\nexists$ Pillar $\in (p_1, p_2)$

$(P, \prec, c)$= Pillars, totale Ordnung, Färbung

$(P, \prec, c)$ ist vollständig

$f(I) = \min_{\prec}(I \bigcap P)$



Wichtige Definitionen:

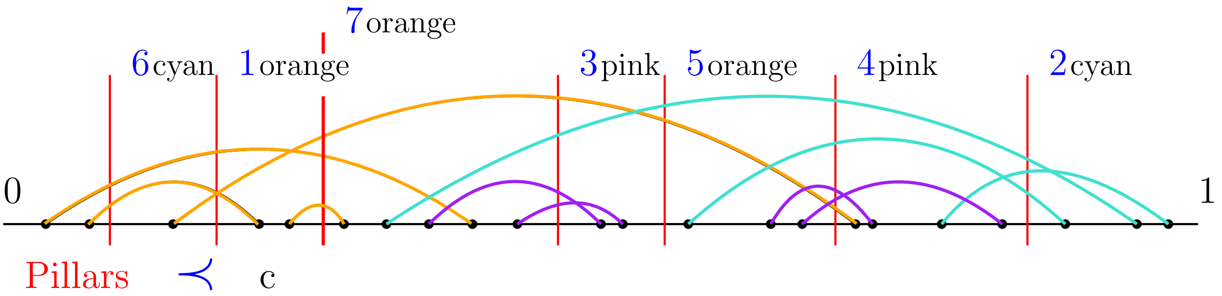
Pillar=p $\in$ (0,1), p nicht Endpunkt eines Intervalls aus $\mathcal{I}$:= Intervallsystem

Segment=Intervall $(p_1, p_2) : p_1, p_2 \in \{0, 1\} \cup$ Pillars, $\nexists$ Pillar $\in (p_1, p_2)$

$(P, \prec, c)$= Pillars, totale Ordnung, Färbung

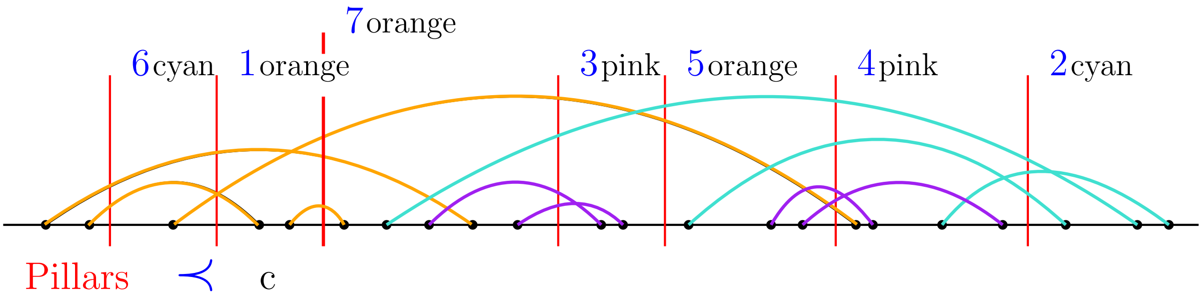
$(P, \prec, c)$ ist vollständig

$$f(I) = \min_{\prec}(I \bigcap P)$$



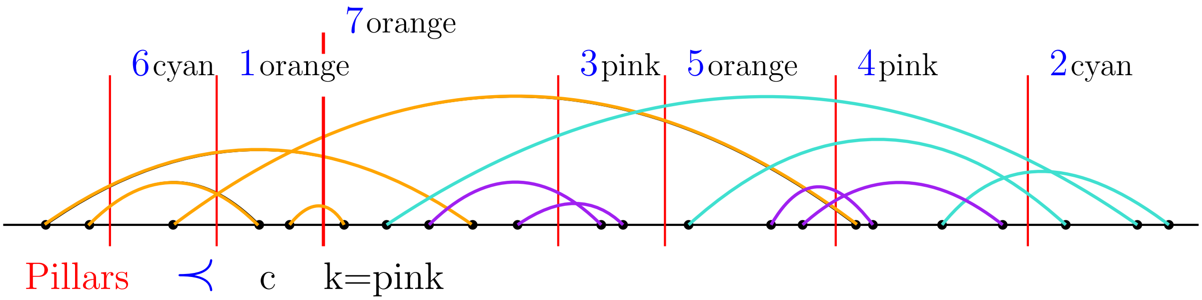
Permutationslemma

Der Graph, G$(I \in \mathcal{I} : c(f(I)) = k)$ ist ein Permutations-Graph



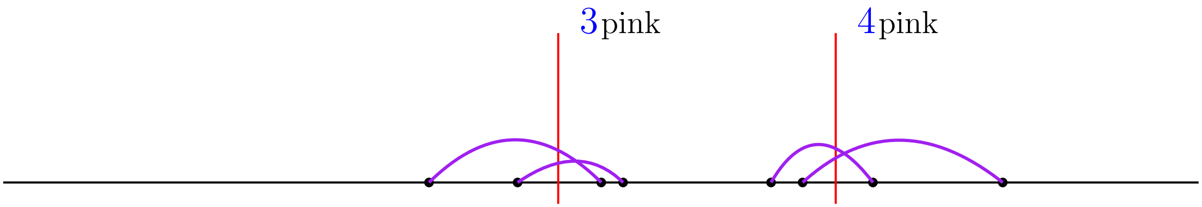
Permutationslemma

Der Graph, $\mathrm{G}(I \in \mathcal{I} : c(f(I)) = k)$ ist ein Permutations-Graph



Permutationslemma

Der Graph, G$(I \in \mathcal{I} : c(f(I)) = k)$ ist ein Permutations-Graph

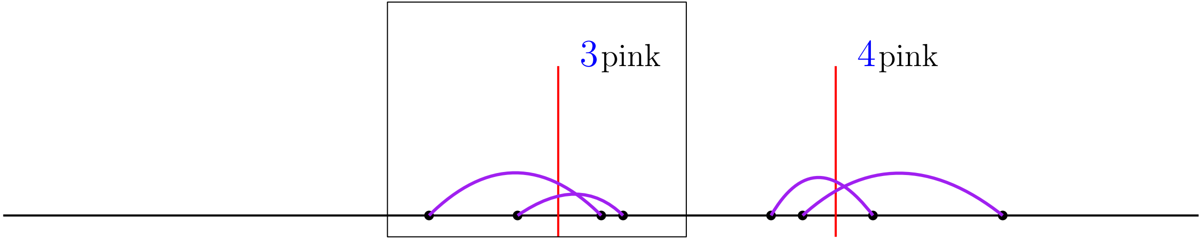


Pillars $\prec$ c k=pink

Permutationslemma

Der Graph, G($I \in \mathcal{I} : c(f(I)) = k$) ist ein Permutations-Graph

$G_k(I \in \mathcal{I} : I \to p_k)$ ist ein Permutations-Graph



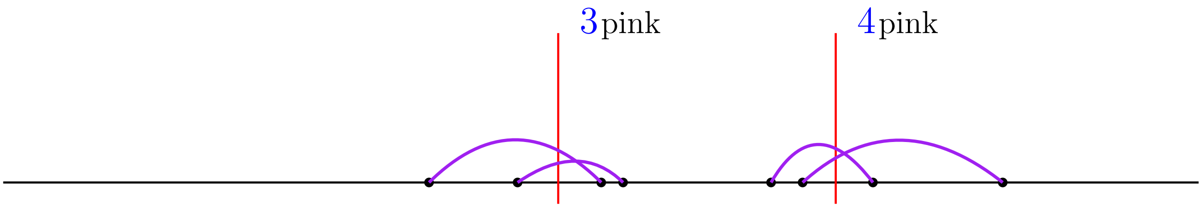
Pillars $\prec$ c k=pink G_3

Permutationslemma

Der Graph, G$(I \in \mathcal{I} : c(f(I)) = k)$ ist ein Permutations-Graph

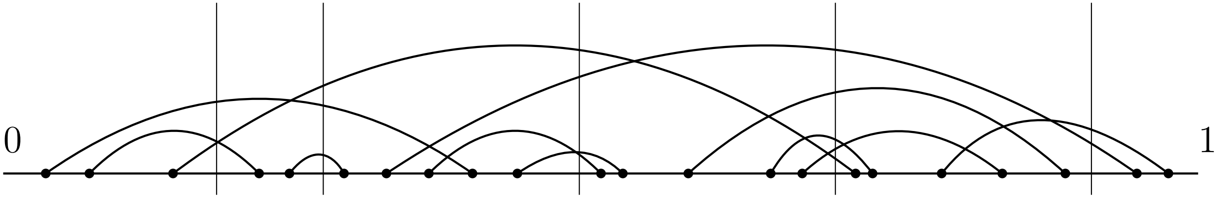
$G_k(I \in \mathcal{I} : I \to p_k)$ ist ein Permutations-Graph

Disjunkte Vereinigung von Permutations-Graphen sind Permutationsgraphen



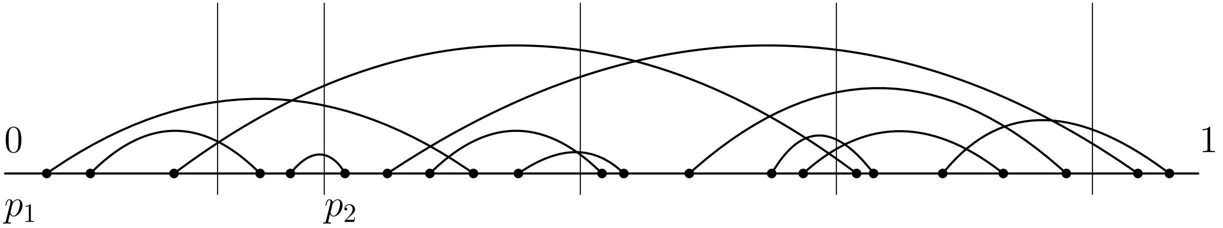
Pillars $\quad \prec \quad$ c $\quad$ k=pink

Mehr Definitionen:



Mehr Definitionen:

$d_P(p_1, p_2)$= Anzahl der Paare $\{S_1, S_2\}$



Mehr Definitionen:

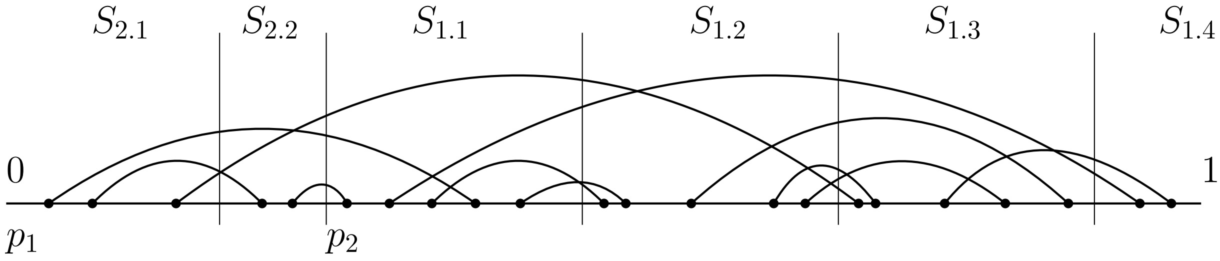
$d_P(p_1, p_2)$= Anzahl der Paare $\{S_1, S_2\}$

S_1, S_2 sind Segmente von $P \cup \{p_1, p_2\}$ mit:

$$S_1 \cap (p_1, p_2) = \emptyset$$

$$S_2 \cap (p_1, p_2) = S_2$$

$\exists I \in \mathcal{I}$mit Enden in S_1, S_2



Mehr Definitionen:

$d_P(p_1, p_2)$= Anzahl der Paare $\{S_1, S_2\}$

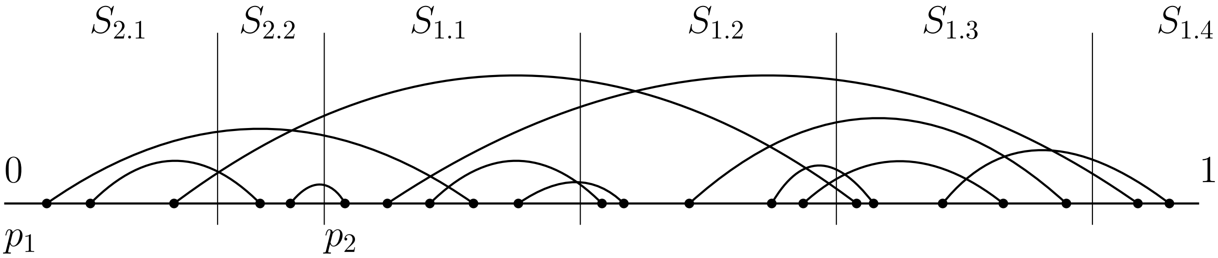
S_1, S_2 sind Segmente von $P \cup \{p_1, p_2\}$ mit:

$S_1 \cap (p_1, p_2) = \emptyset$

$S_2 \cap (p_1, p_2) = S_2$

$\exists I \in \mathcal{I}$ mit Enden in S_1, S_2

$\{S_{1.1}, S_{2.1}\}$ $\{S_{1.1}, S_{2.2}\}$
$\{S_{1.2}, S_{2.1}\}$ $\{S_{1.2}, S_{2.2}\}$
$\{S_{1.3}, S_{2.1}\}$ $\{S_{1.3}, S_{2.2}\}$
$\{S_{1.4}, S_{2.1}\}$ $\{S_{1.4}, S_{2.2}\}$



Mehr Definitionen:

$d_P(p_1,p_2)$= Anzahl der Paare $\{S_1,S_2\}$

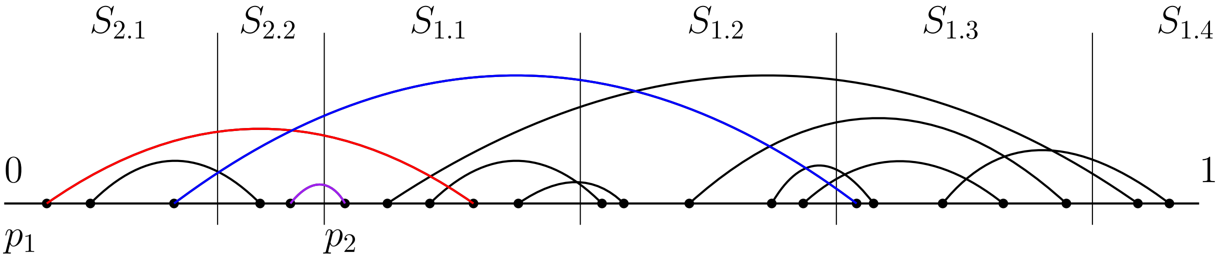
S_1, S_2 sind Segmente von $P \cup \{p_1,p_2\}$ mit:

$S_1 \cap (p_1,p_2) = \emptyset$

$S_2 \cap (p_1,p_2) = S_2$

$\exists I \in \mathcal{I}$ mit Enden in S_1, S_2

$\{S_{1.1}, S_{2.1}\}$	$\{S_{1.1}, S_{2.2}\}$
$\{S_{1.2}, S_{2.1}\}$	$\{S_{1.2}, S_{2.2}\}$
$\{S_{1.3}, S_{2.1}\}$	$\{S_{1.3}, S_{2.2}\}$
$\{S_{1.4}, S_{2.1}\}$	$\{S_{1.4}, S_{2.2}\}$



Mehr Definitionen:

$d_P(p_1, p_2)$= Anzahl der Paare $\{S_1, S_2\}$

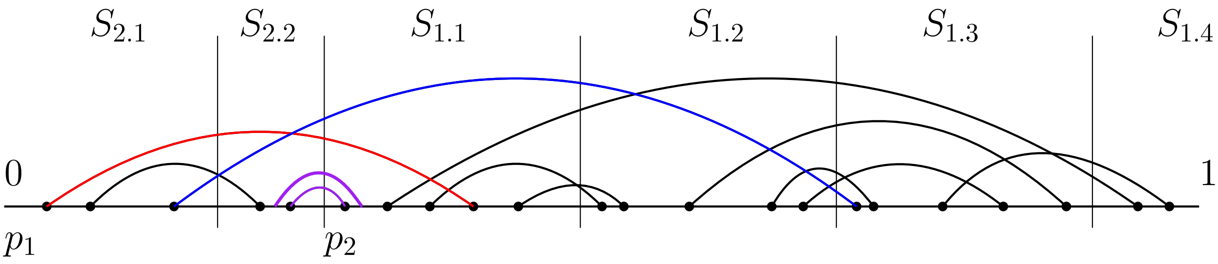
S_1, S_2 sind Segmente von $P \cup \{p_1, p_2\}$ mit:

$S_1 \cap (p_1, p_2) = \emptyset$

$S_2 \cap (p_1, p_2) = S_2$

$\exists I \in \mathcal{I}$mit Enden in S_1, S_2

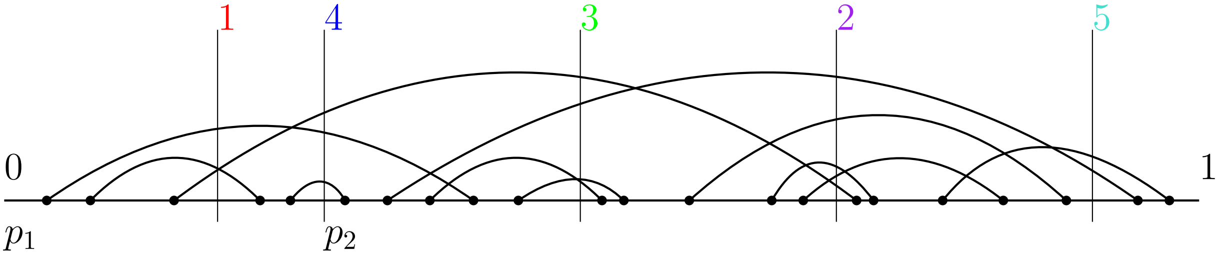
$\{S_{1.1}, S_{2.1}\}$ $\{S_{1.1}, S_{2.2}\}$
$\{S_{1.2}, S_{2.1}\}$ $\{S_{1.2}, S_{2.2}\}$
$\{S_{1.3}, S_{2.1}\}$ $\{S_{1.3}, S_{2.2}\}$
$\{S_{1.4}, S_{2.1}\}$ $\{S_{1.4}, S_{2.2}\}$



Mehr Definitionen:

$d_P(p_1, p_2)$= Anzahl der Paare $\{S_1, S_2\}$

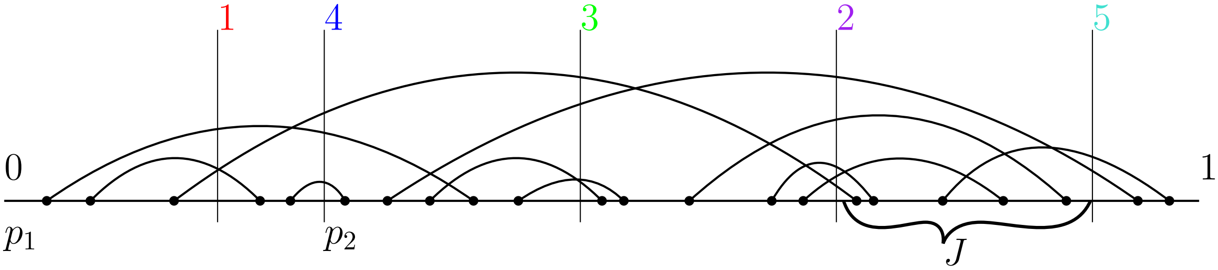
$d_{(P,\prec)}(J)$= Anzahl der Pillars p: $\exists I \in \mathcal{I}, I$ überlappt $J, f(I) = p$



Mehr Definitionen:

$d_P(p_1, p_2)$= Anzahl der Paare $\{S_1, S_2\}$

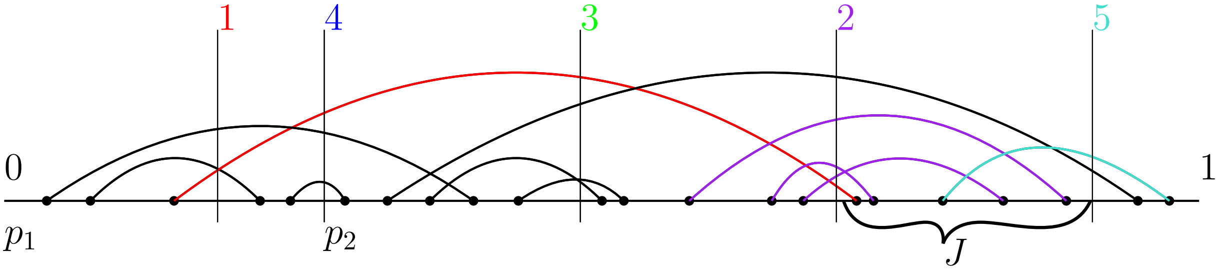
$d_{(P,\prec)}(J)$= Anzahl der Pillars p: $\exists I \in \mathcal{I}, I$ überlappt $J, f(I) = p$



Mehr Definitionen:

$d_P(p_1, p_2)$= Anzahl der Paare $\{S_1, S_2\}$

$d_{(P,\prec)}(J)$= Anzahl der Pillars p: $\exists I \in \mathcal{I}, I$ überlappt $J, f(I) = p$

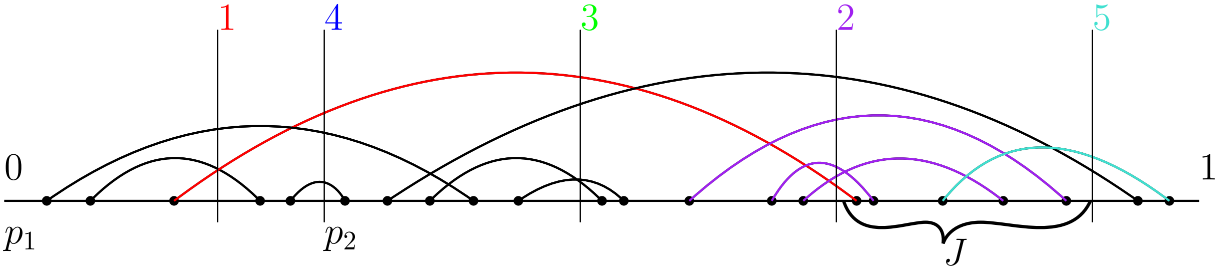


Mehr Definitionen:

$d_P(p_1, p_2)$= Anzahl der Paare $\{S_1, S_2\}$

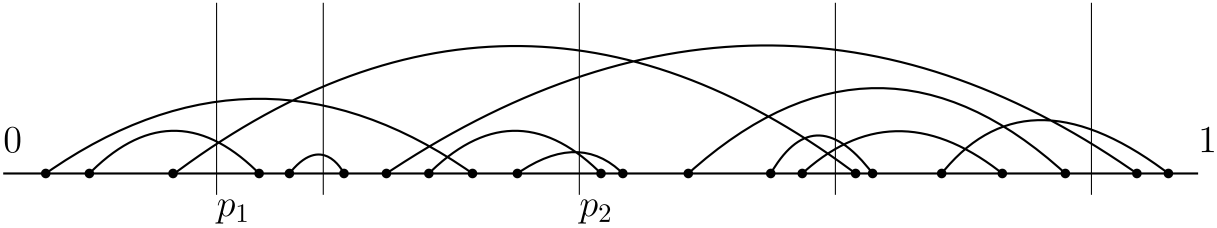
$d_{(P,\prec)}(J)$= Anzahl der Pillars p: $\exists I \in \mathcal{I}, I$ überlappt $J, f(I) = p$

Für $J = (p_1, p_2)$ gilt: $d_{(P,\prec)}(J) \leq d_P(p_1, p_2)$



P-Grad-Lemma

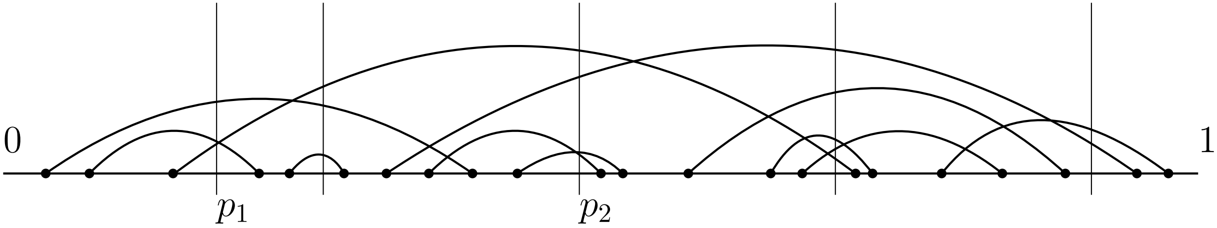
$\mathcal{I}$ Intervallsystem, Overlap-Graph mit Cliquenzahl ω
P = Pillars, $p_1, p_2 \in P, p_1 < p_2$
$\Rightarrow d_P(p_1, p_2) \leq \omega|P|$



P-Grad-Lemma

$\mathcal{I}$ Intervallsystem, Overlap-Graph mit Cliquenzahl ω
P = Pillars, $p_1, p_2 \in P, p_1 < p_2$
$\Rightarrow d_P(p_1, p_2) \leq \omega|P|$

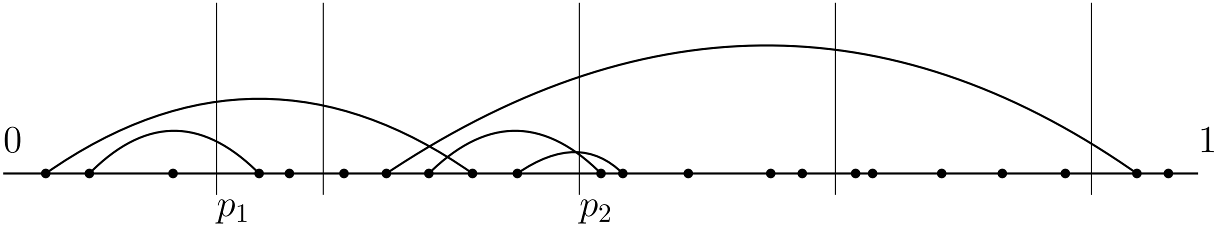
1. Löschen aller nicht relevanten Intervalle



P-Grad-Lemma

$\mathcal{I}$ Intervallsystem, Overlap-Graph mit Cliquenzahl ω
P = Pillars, $p_1, p_2 \in P, p_1 < p_2$
$\Rightarrow d_P(p_1, p_2) \leq \omega|P|$

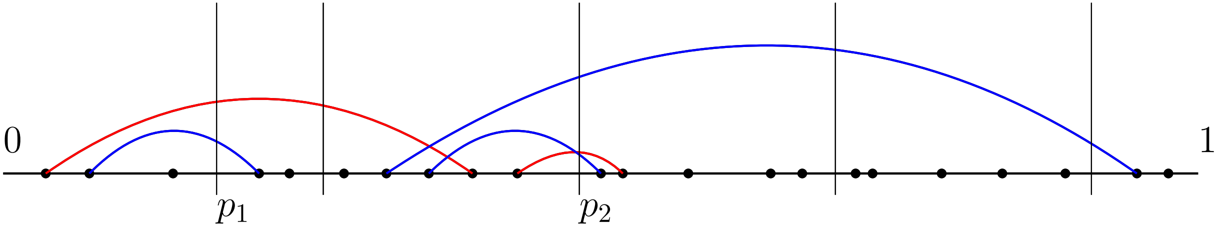
1. Löschen aller nicht relevanten Intervalle



P-Grad-Lemma

$\mathcal{I}$ Intervallsystem, Overlap-Graph mit Cliquenzahl ω
P = Pillars, $p_1, p_2 \in P, p_1 < p_2$
$\Rightarrow d_P(p_1, p_2) \leq \omega |P|$

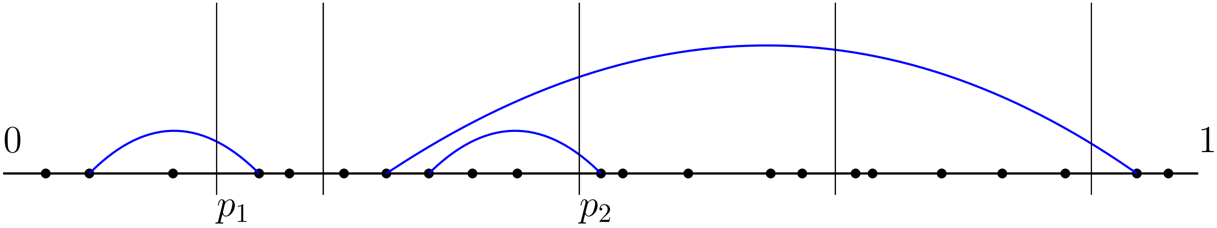
1. Löschen aller nicht relevanten Intervalle
2. Graph ist Permutationsgraph $\Rightarrow \chi = \omega$
3. Graph färben, einzelne Farbklassen ansehen



P-Grad-Lemma

$\mathcal{I}$ Intervallsystem, Overlap-Graph mit Cliquenzahl ω
P = Pillars, $p_1, p_2 \in P, p_1 < p_2$
$\Rightarrow d_P(p_1, p_2) \leq \omega|P|$

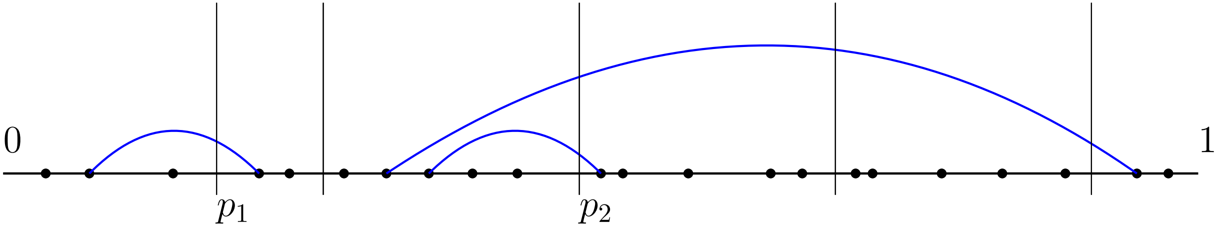
1. Löschen aller nicht relevanten Intervalle
2. Graph ist Permutationsgraph $\Rightarrow \chi = \omega$
3. Graph färben, einzelne Farbklassen ansehen



P-Grad-Lemma

$\mathcal{I}$ Intervallsystem, Overlap-Graph mit Cliquenzahl ω
P = Pillars, $p_1, p_2 \in P, p_1 < p_2$
$\Rightarrow d_P(p_1, p_2) \leq \omega |P|$

1. Löschen aller nicht relevanten Intervalle
2. Graph ist Permutationsgraph $\Rightarrow \chi = \omega$
3. Graph färben, einzelne Farbklassen ansehen
   $d_P(p_1, p_2) \leq \underbrace{d_P(p_1, p_2) + d_P(p_1, p_2) + \ldots}_{\omega \text{ viele}} \leq \omega |P|$
4. Zeige: $d_P(p_1, p_2) \leq |P|$



P-Grad-Lemma

$\mathcal{I}$ Intervallsystem, Overlap-Graph mit Cliquenzahl ω

P = Pillars, $p_1, p_2 \in P, p_1 < p_2$

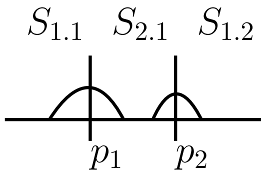
$\Rightarrow d_P(p_1, p_2) \leq \omega |P|$

4. Zeige: $d_P(p_1, p_2) \quad \leq |P|$

Induktion über anzahl der Pillars

IA: $|P|$=2 $\quad d_P(p_1, p_2) \leq 2 = |P|$

IS: $n \to n+1$

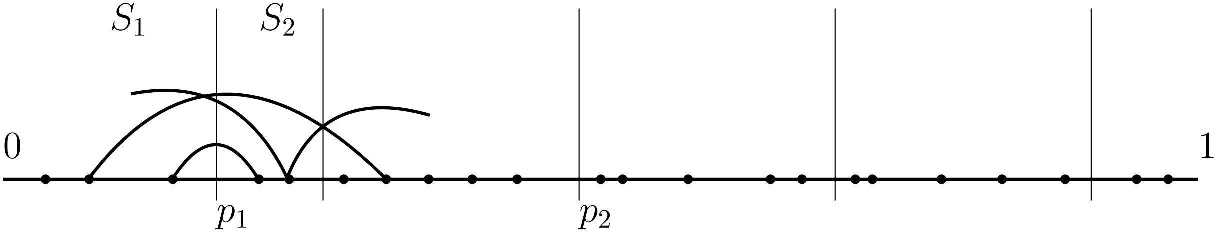


$\{S_{1.1}, S_{2.1}\}$

$\{S_{1.2}, S_{2.1}\}$

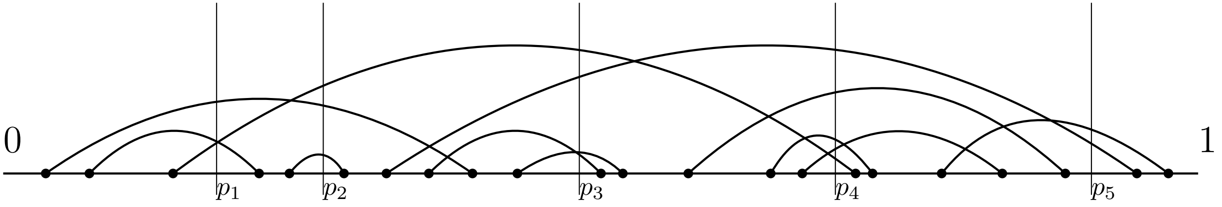
Fall 1. $\exists$ Segment, dass nur 0 oder 1 mal zu $d_P((p_1, p_2))$ zählt

Fall 2. Alle Segmente zählen mindestens zweimal zu $d_P((p_1, p_2))$ ↯



$\log_2$-Färbungslemma

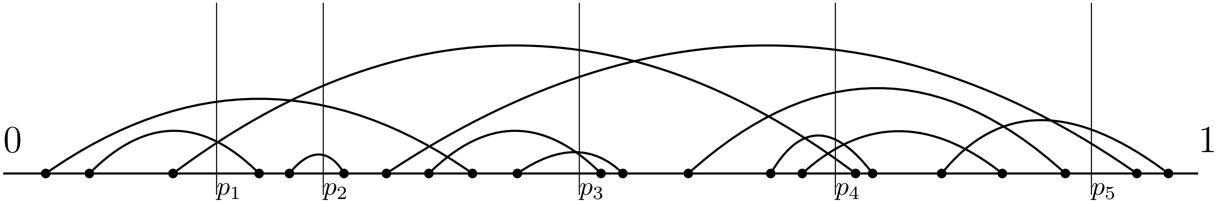
Für jedes Intervallsystem $\mathcal{I}$ mit maximal $2^k - 1$ Pillars existiert eine totale Ordnung $\prec$ und eine Färbung c, sodass $d_{(P,\prec)}(J) \leq k$ für alle J



$\log_2$-Färbungslemma

Für jedes Intervallsystem $\mathcal{I}$ mit maximal $2^k - 1$ Pillars existiert eine totale Ordnung $\prec$ und eine Färbung c, sodass $d_{(P,\prec)}(J) \leq k$ für alle J

$$\Rightarrow x \text{ Pillars} \rightarrow \exists \prec\colon |c| \leq \log_2(x+1)$$



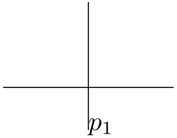
$\log_2$-Färbungslemma

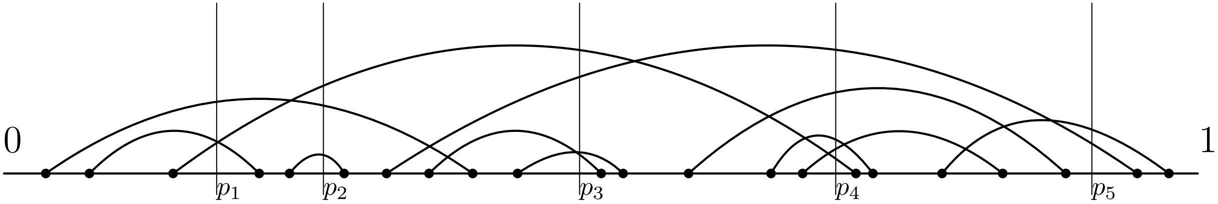
Für jedes Intervallsystem $\mathcal{I}$ mit maximal $2^k - 1$ Pillars existiert eine totale Ordnung $\prec$ und eine Färbung c, sodass $d_{(P,\prec)}(J) \leq k$ für alle J

Beweis per Induktion:

IA: k=1 ✓

IS: k → k+1





$\log_2$-Färbungslemma

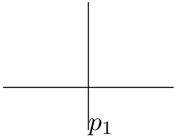
Für jedes Intervallsystem $\mathcal{I}$ mit maximal $2^k - 1$ Pillars
existiert eine totale Ordnung $\prec$ und eine Färbung c,
sodass $d_{(P,\prec)}(J) \leq k$ für alle J

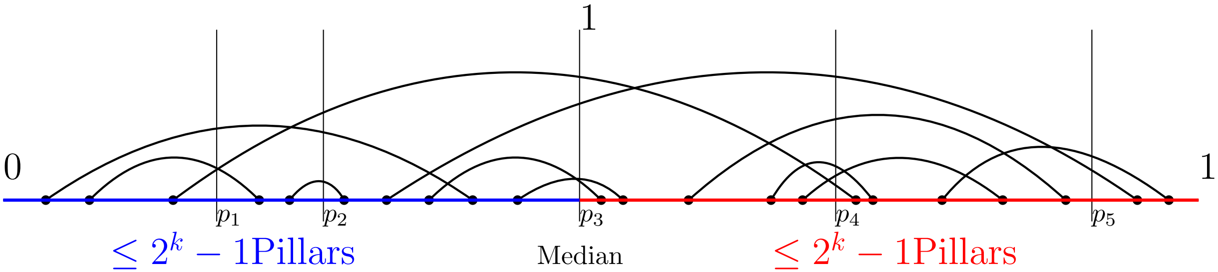
Beweis per Induktion:

IA: k=1 ✓

IS: k $\rightarrow$ k+1

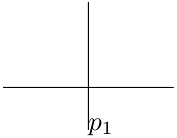
Median bei $\prec$ als kleinstes Element, dann IV links und rechts anwenden





$\log_2$-Färbungslemma

Für jedes Intervallsystem $\mathcal{I}$ mit maximal $2^k - 1$ Pillars existiert eine totale Ordnung $\prec$ und eine Färbung c, sodass $d_{(P,\prec)}(J) \leq k$ für alle J

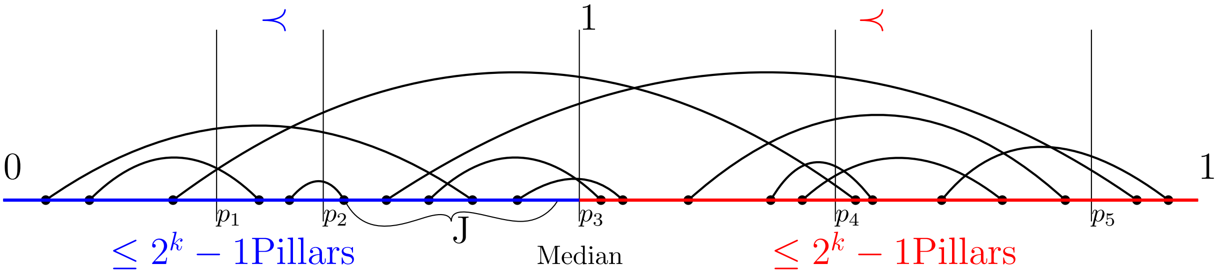


Beweis per Induktion:

IA: k=1 ✓

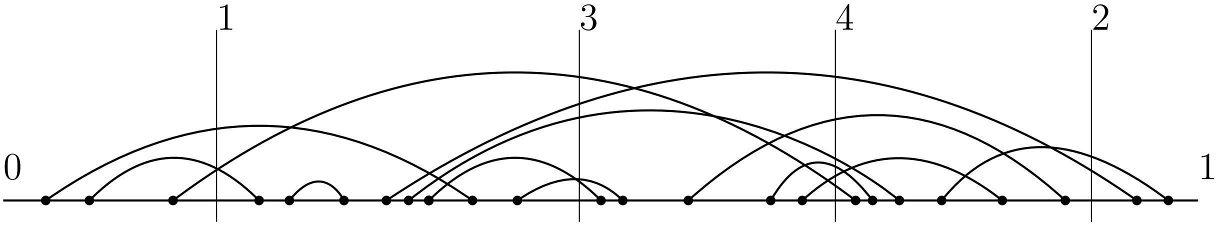
IS: k → k+1

Median bei $\prec$ als kleinstes Element, dann IV links und rechts anwenden



Hauptbeweis:

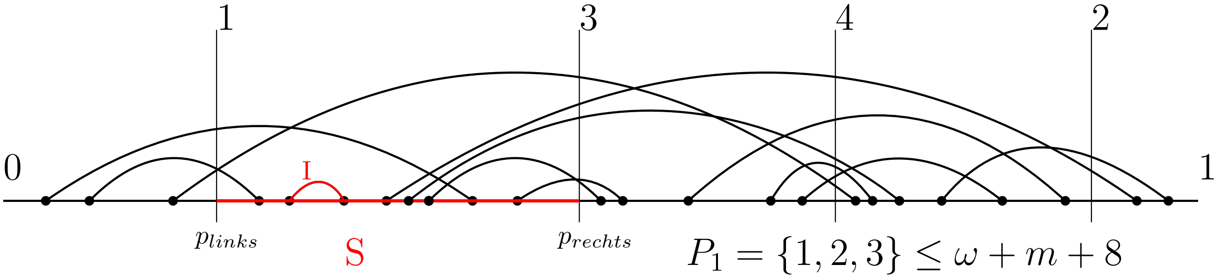
Jeder Overlap-Graph mit Cliquenzahl ω hat ein $(P, \prec, c)$
mit $|c| \leq \omega + 2m + 8$ $\qquad m = \lceil 2\log_2(\omega) \rceil$



Hauptbeweis:

Jeder Overlap-Graph mit Cliquenzahl ω hat ein $(P, \prec, c)$
mit $|c| \leq \omega + 2m + 8$ $m = \lceil 2\log_2(\omega) \rceil$

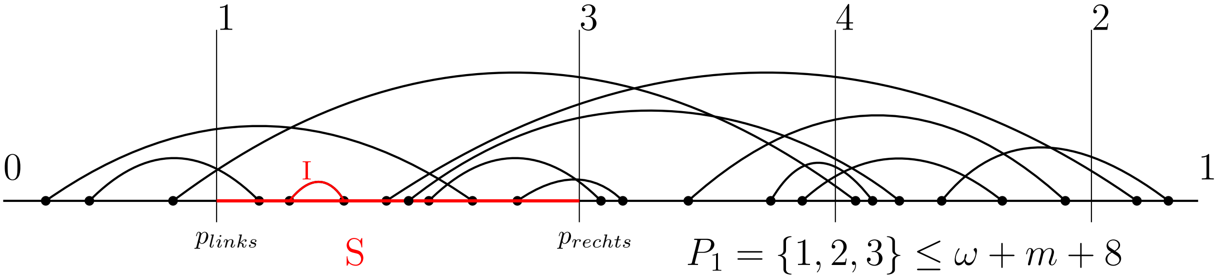
Wähle $(P, \prec, c)$ iterativ mit $|c| \leq \omega + 2m + 8$ und $d_{(P,\prec)} \leq \omega + m + 8$



$P_1 = \{1, 2, 3\} \leq \omega + m + 8$

Claim:

$$\exists P^* \subset S \text{ mit } |P^*| \leq \omega^2 - 1,\ I \cap P^* \neq \emptyset,\ \ d_{P_1}(\text{Segment von } P^*) \leq \omega + 8$$



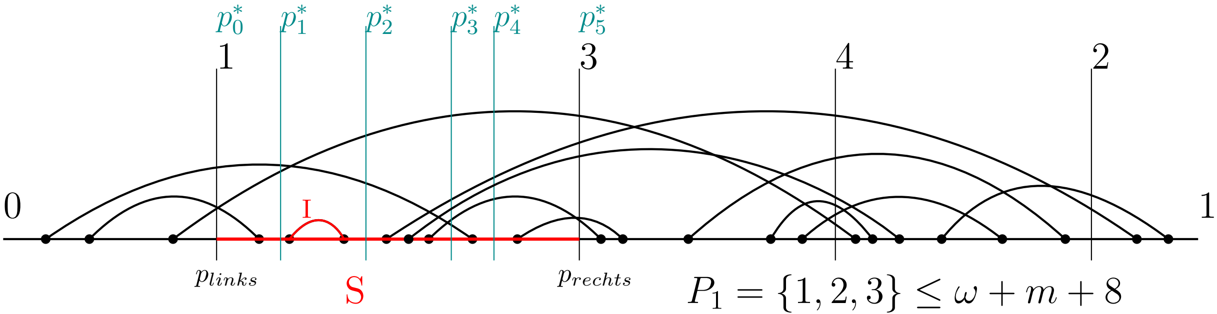
$P_1 = \{1, 2, 3\} \leq \omega + m + 8$

Claim:

$$\exists P^* \subset S \text{ mit } |P^*| \leq \omega^2 - 1,\ I \cap P^* \neq \emptyset,\ \ d_{P_1}(\text{Segment von } P^*) \leq \omega + 8$$

Wähle: $p_{links} = p_0^* < p_1^* < \ldots < p_{t+1}^* = p_{rechts}$, so dass

$$d_{P_1}(p_i^*, p_{i+1}^*) = \omega + 8,\ \ 1 \leq d_{P_1}(p_t^*, p_{t+1}^*) \leq \omega + 8$$

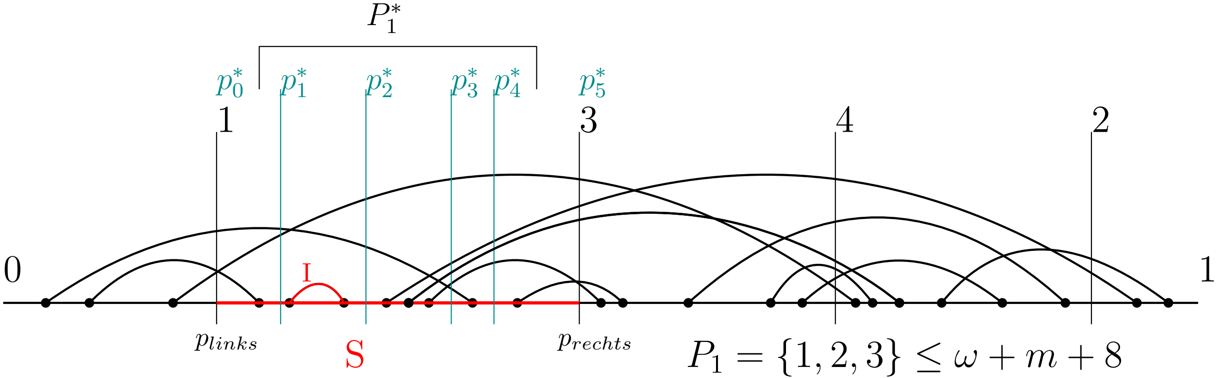


Claim:

$$\exists P^* \subset S \text{ mit } |P^*| \leq \omega^2 - 1,\ I \cap P^* \neq \emptyset,\ \ d_{P_1}(\text{Segment von } P^*) \leq \omega + 8$$

Wähle: $p_{links} = p_0^* < p_1^* < \ldots < p_{t+1}^* = p_{rechts}$, so dass

$$d_{P_1}(p_i^*, p_{i+1}^*) = \omega + 8,\ \ 1 \leq d_{P_1}(p_t^*, p_{t+1}^*) \leq \omega + 8$$



Claim:

$$\exists P^* \subset S \text{ mit } |P^*| \leq \omega^2 - 1,\ I \cap P^* \neq \emptyset,\ \ d_{P_1}(\text{Segment von } P^*) \leq \omega + 8$$

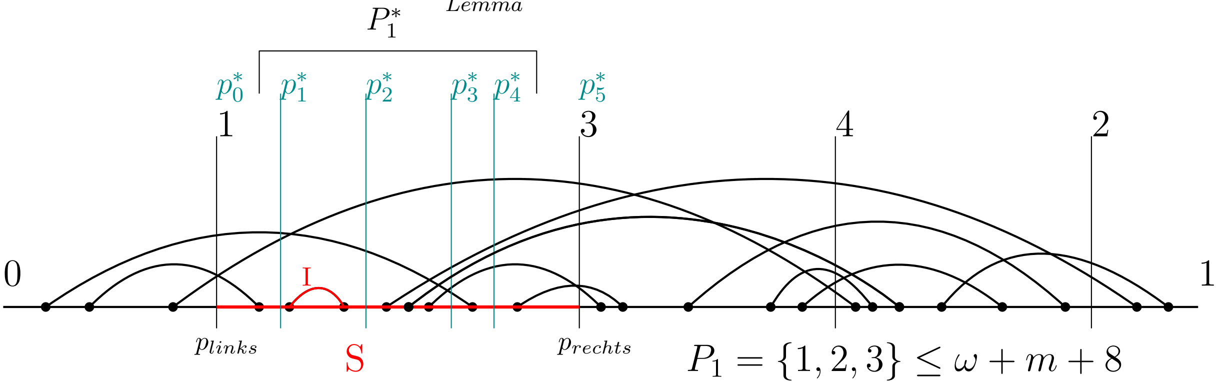
Wähle: $p_{links} = p_0^* < p_1^* < \ldots < p_{t+1}^* = p_{rechts}$, so dass

$$d_{P_1}(p_i^*, p_{i+1}^*) = \omega + 8,\ \ 1 \leq d_{P_1}(p_t^*, p_{t+1}^*) \leq \omega + 8$$

$$|P_1^*| * (\omega + 8) = \sum_{i=0}^{t-1} d_{P_1}(p_i^*, p_{i+1}^*) < \sum_{i=0}^{t} d_{P_1}(p_i^*, p_{i+1}^*)$$

$$\Rightarrow |P_1^*| < \omega^2 - 1$$

$$= d_{P_1 \cup P_1^*}(p_l, p_r) \underset{Lemma}{\overset{P-Grad}{\leq}} \omega(|P_1| + |P_1^*|) \leq \omega(\omega + m + 8 + |P_1^*|)$$



Claim:

$$\exists P^* \subset S \text{ mit } |P^*| \leq \omega^2 - 1,\ I \cap P^* \neq \emptyset,\ \ d_{P_1}(\text{Segment von } P^*) \leq \omega + 8$$

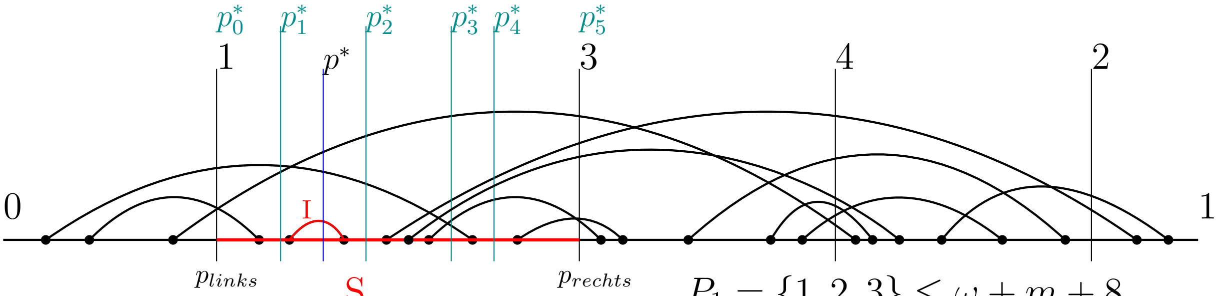
Wähle: $p_{links} = p_0^* < p_1^* < \ldots < p_{t+1}^* = p_{rechts}$, so dass

$d_{P_1}(p_i^*, p_{i+1}^*) = \omega + 8,\ \ 1 \leq d_{P_1}(p_t^*, p_{t+1}^*) \leq \omega + 8$

$$|P_1^*| * (\omega + 8) = \textstyle\sum_{i=0}^{t-1} d_{P_1}(p_i^*, p_{i+1}^*) < \sum_{i=0}^{t} d_{P_1}(p_i^*, p_{i+1}^*)$$

$$\Rightarrow |P_1^*| < \omega^2 - 1$$

$$= d_{P_1 \cup P_1^*}(p_l, p_r) \underset{Lemma}{\overset{P-Grad}{\leq}} \omega(|P_1| + |P_1^*|) \leq \omega(\omega + m + 8 + |P_1^*|)$$



$P_1 = \{1, 2, 3\} \leq \omega + m + 8$

Hauptbeweis:

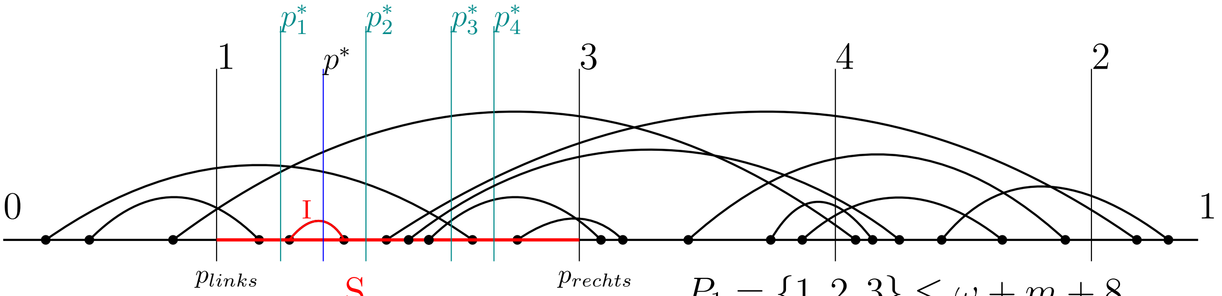
Jeder Overlap-Graph mit Cliquenzahl ω hat ein $(P, \prec, c)$

mit $|c| \leq \omega + 2m + 8$ $\quad m = \lceil 2\log_2(\omega) \rceil$

Wähle $(P, \prec, c)$ iterativ mit $|c| \leq \omega + 2m + 8$ und $d_{(P,\prec)} \leq \omega + m + 8$

$\exists P^* \subset S$ mit $|P^*| \leq \omega^2 - 1$, $I \cap P^* \neq \emptyset$, $d_{P_1}(\text{Segment von } P^*) \leq \omega + 8$

$\log_2$-Färbungs: können $\omega^2 - 1$ Pillars mit $\lceil \log_2(\omega^2) \rceil = m$ färben, erhalten $\prec^*$ für P^*



$P_1 = \{1, 2, 3\} \leq \omega + m + 8$

Hauptbeweis:

Jeder Overlap-Graph mit Cliquenzahl ω hat ein $(P, \prec, c)$

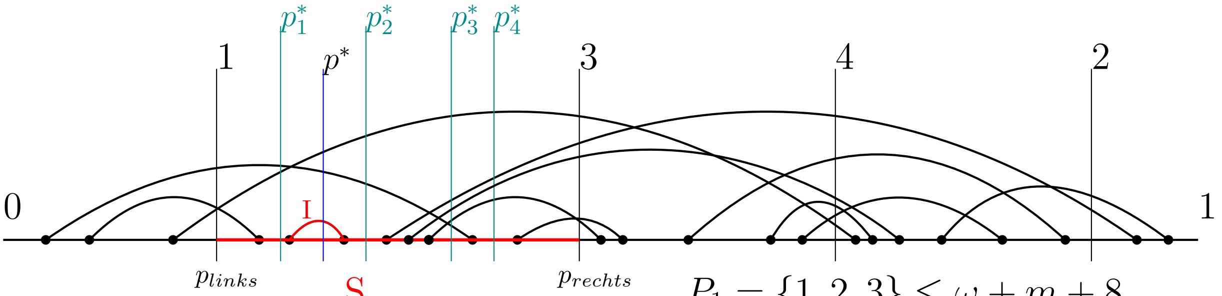
mit $|c| \leq \omega + 2m + 8$ $\qquad m = \lceil 2\log_2(\omega) \rceil$

Wähle $(P, \prec, c)$ iterativ mit $|c| \leq \omega + 2m + 8$ und $d_{(P,\prec)} \leq \omega + m + 8$

$\exists P^* \subset S$ mit $|P^*| \leq \omega^2 - 1$, $I \cap P^* \neq \emptyset$, $d_{P_1}(\text{Segment von } P^*) \leq \omega + 8$

$\log_2$-Färbungs: können $\omega^2 - 1$ Pillars mit $\lceil \log_2(\omega^2) \rceil = m$ färben, erhalten $\prec^*$ für P^*

Farbe: erst nach $\prec$,dann nach $\prec^*$ Färben



$P_1 = \{1, 2, 3\} \leq \omega + m + 8$

Hauptbeweis:

Jeder Overlap-Graph mit Cliquenzahl ω hat ein $(P, \prec, c)$

mit $|c| \leq \omega + 2m + 8$ $\qquad m = \lceil 2\log_2(\omega) \rceil$

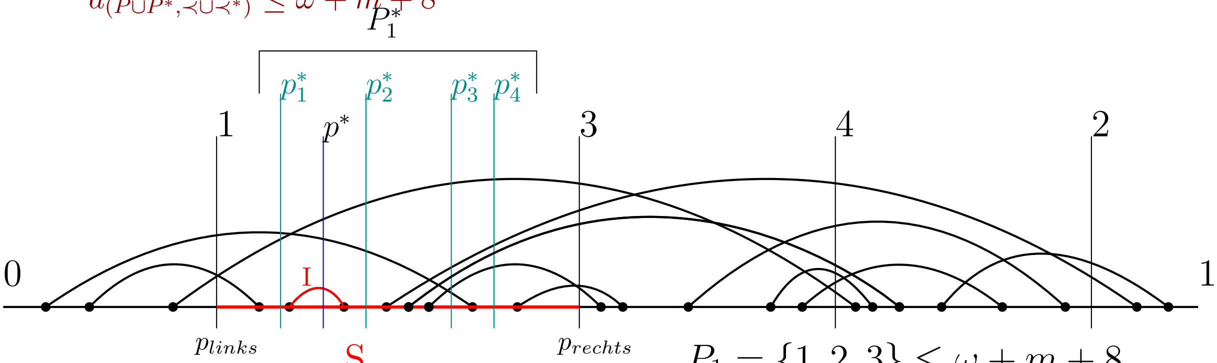
Wähle $(P, \prec, c)$ iterativ mit $|c| \leq \omega + 2m + 8$ und $d_{(P,\prec)} \leq \omega + m + 8$

$\exists P^* \subset S$ mit $|P^*| \leq \omega^2 - 1$, $I \cap P^* \neq \emptyset$, $d_{P_1}(\text{Segment von } P^*) \leq \omega + 8$

$\log_2$-Färbungs: können $\omega^2 - 1$ Pillars mit $\lceil \log_2(\omega^2) \rceil = m$ färben, erhalten $\prec^*$ für P^*

Farbe: erst nach $\prec$,dann nach $\prec^*$ Färben

$d_{(P \cup P^*, \prec \cup \prec^*)} \leq \omega + m + 8$



$P_1 = \{1, 2, 3\} \leq \omega + m + 8$

Hauptbeweis:

Jeder Overlap-Graph mit Cliquenzahl ω hat ein $(P, \prec, c)$

mit $|c| \leq \omega + 2m + 8$ $\qquad m = \lceil 2 \log_2(\omega) \rceil$

Wähle $(P, \prec, c)$ iterativ mit $|c| \leq \omega + 2m + 8$ und $d_{(P,\prec)} \leq \omega + m + 8$

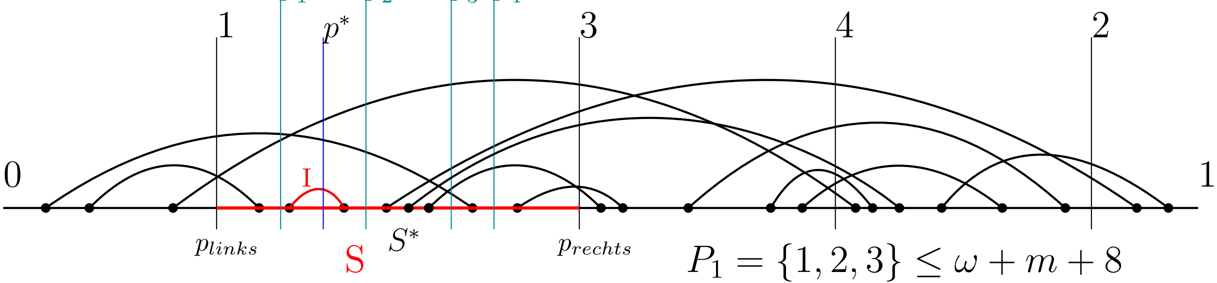
$\exists P^* \subset S$ mit $|P^*| \leq \omega^2 - 1$, $I \cap P^* \neq \emptyset$, $d_{P_1}(\text{Segment von } P^*) \leq \omega + 8$

$\log_2$-Färbungs: können $\omega^2 - 1$ Pillars mit $\lceil \log_2(\omega^2) \rceil = m$ färben, erhalten $\prec^*$ für P^*

Farbe: erst nach $\prec$,dann nach $\prec^*$ Färben

$d_{(P \cup P^*, \prec \cup \prec^*)} \leq \omega + m + 8$

$$d_{(P \cup P^*, \prec \cup \prec^*)}(S^*) \leq d_{(P,\prec)}(S^*) + d_{(P^*,\prec^*)}(S^*)$$
$$\leq d_{(P_1,\prec)}(S^*) + d_{(P^*,\prec^*)}(S^*) \leq d_{P_1}(S^*) + d_{(P^*,\prec^*)}(S^*)$$
$$\leq \omega + 8 + m$$



$P_1 = \{1, 2, 3\} \leq \omega + m + 8$