

Färbung planarer Graphen

Der 4-Farbensatz

Tim Bastian

tim_bastian97@web.de

Technische Universität Berlin

19. Februar 2021



1. Einführung

1.1. Geschichte

1.2. Grundlegende Definitionen und Sätze

2. 5-Farbensatz

2.1. Jordanscher Kurvensatz

2.2. Euler-Formel

2.3. 5-Farbensatz

3. 4-Farbensatz

3.1. 4-Farbensatz

3.2. Kempes falscher Beweis

3.3. Kempe-Algorithmus

3.4. Beweis

3.5. Der nicht 4-färbbare Graph

Theorem (4-Farbensatz)

Jede Karte lässt sich mit maximal 4 Farben färben.

- erste Erwähnung 1852
 - 1878 erste schriftliche Erwähnung durch Cayley
 - 1879 erster „Beweis“ durch Kempe
 - 1922 erster Durchbruch eines Beweises durch Franklin
- ⇒ Aussage für Karten mit maximal 25 Regionen gezeigt
- 1977 erster gültiger Beweis durch Appel und Haken

Theorem (Handshake-Lemma)

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Dann gilt

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$$

Definition (Untergraph)

Ein Untergraph eines Graphen $G = (V, E)$ ist ein Graph $H = (W, F)$ mit $W \subseteq V$ und $F \subseteq E \cap \binom{W}{2}$.

Definition (Induzierter Untergraph)

Ein induzierter Untergraph eines Graphen $G = (V, E)$ ist ein Untergraph $H = (W, F)$ mit $F = E \cap \binom{W}{2}$. Wir bezeichnen diesen im Folgenden mit $G[W]$.

Definition (Planarer Graph)

Ein Graph $G = (V, E)$ heißt planar, falls es eine kreuzungsfreie Zeichnung von G in der Ebene gibt.

Definition (k -Färbung)

Für eine ganze Zahl k definieren wir die k -Färbung eines Graphen G als Abbildung $\phi : V(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$, sodass $\phi(u) \neq \phi(v)$ für jede Kante aus G mit den Endpunkten u und v .

1. Einführung

1.1. Geschichte

1.2. Grundlegende Definitionen und Sätze

2. 5-Farbensatz

2.1. Jordanscher Kurvensatz

2.2. Euler-Formel

2.3. 5-Farbensatz

3. 4-Farbensatz

3.1. 4-Farbensatz

3.2. Kempes falscher Beweis

3.3. Kempe-Algorithmus

3.4. Beweis

3.5. Der nicht 4-färbbare Graph

Theorem (Jordanscher Kurvensatz)

Eine einfache geschlossene Kurve C in der Ebene zerlegt diese so in zwei Teile (eines beschränkt, eines unbeschränkt), dass C der Rand jedes Teils ist.

Theorem (Eulerformel)

Ist G zusammenhängend und planar gezeichnet, so gilt:

$$|V| - |E| + |F| = 2$$

Theorem (1. Folgerungen aus der Eulerformel)

Ist G planar gezeichnet, dann gilt

- G hat höchstens $3|V| - 6$ Kanten

Beweis.

Jede Kante ist inzident zu maximal zwei Regionen und der Rand jeder Region hat mindestens 3 Kanten (Annahme: keine parallelen Kanten). Daraus folgt sofort $2|E(G)| \geq 3|F|$. Mit Eulers Formel ergibt sich

$$3|E| = 3|V| + 3|F| - 6 \leq 3|V| + 2|E| - 6 \Leftrightarrow |E| \leq 3|V| - 6$$



Theorem (2. Folgerungen aus der Eulerformel)

Ist G planar gezeichnet, dann gilt

- G hat einen Knoten vom Grad ≤ 5

Beweis.

Wir definieren d_{av} als den Durchschnittsgrad aller Knoten. Aus 1. und dem Handshakelemma folgt

$$d_{av} = \frac{\sum_{v \in V} \deg(v)}{|V|} = \frac{2|E|}{|V|} \leq \frac{6|V| - 12}{|V|} < 6.$$

Daher existiert ein Knoten v mit $\deg(v) < 6$. □

Theorem (5-Farben Satz)

Jeder planare Graph hat eine 5-Färbung.

Beweis.

Beweis per Induktion über $V(G)$. Nach Folgerung aus Euler-Formel existiert v mit $\deg(v) \leq 5$.

1. $\deg(v) \leq 4$: Betrachte $G \setminus v \Rightarrow$ laut I.V. 5-färbbar mit Färbung ϕ . v zu höchstens vier Knoten adjazent $\Rightarrow \exists$ Farbe $i \in \{1, \dots, 5\}$, sodass keiner der Nachbarn von v Farbe i besitzt. Färbe v mit i und erhalte die gesuchte 5-Färbung.
2. $\deg(v) = 5$: Es seien v_1, \dots, v_5 die Nachbarn von v in zyklischer Reihenfolge. Annahme: $\phi(v_i) = i$, sonst Fall 1.
Betrachte Untergraphen $J_{1,3}$ von $G \setminus v$. Es können nun 2 Fälle auftreten:
 - 2.1 v_1 und v_3 liegen in verschiedenen Komponenten von $J_{1,3}$. Tausche Farben 1 und 3 in der Komponente von v_1 . Somit Farbe 1 für v frei.



Beweis.

2. $\deg(v) = 5$:

- 2.2 v_1 und v_3 liegen in gemeinsamer Komponente von $J_{1,3}$. \exists Weg $P_{1,3}$ mit Endknoten v_1 und v_3 mit $\phi(u) \in \{1, 3\} \forall u \in P_{1,3}$. Definiere dann $J_{2,4}$ analog. Mit selbiger Argumentation folgt, dass v nach dem Tausch in einer Komponente gefärbt werden kann oder $\exists P_{2,4}$.
- $\Rightarrow P_{1,3}, P_{2,4}$ Knoten-disjunkt
- \Rightarrow Widerspruch zu Satz von Jordan

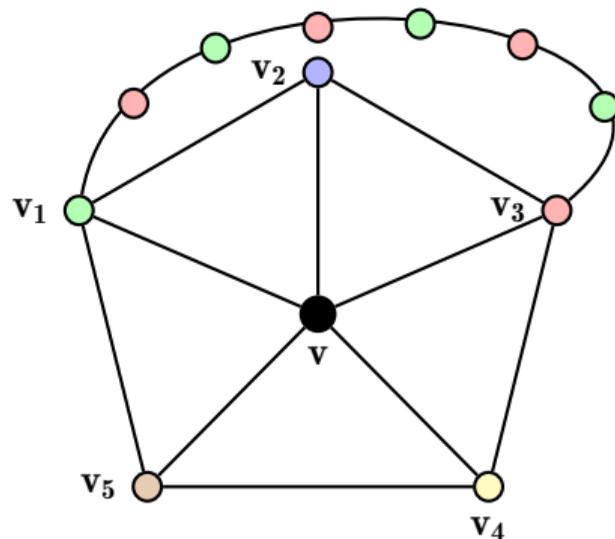


Abbildung: G mit $P_{1,3}$

1. Einführung

- 1.1. Geschichte
- 1.2. Grundlegende Definitionen und Sätze

2. 5-Farbensatz

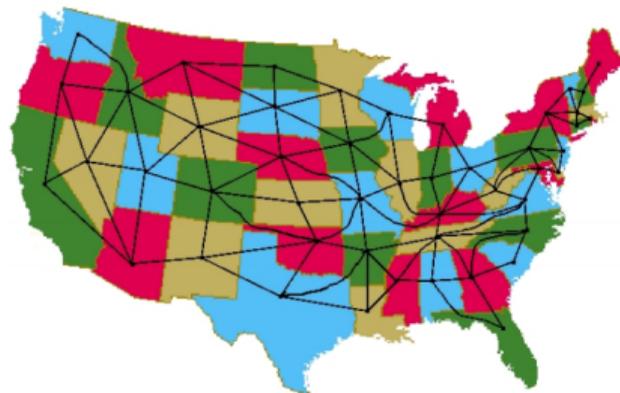
- 2.1. Jordanscher Kurvensatz
- 2.2. Euler-Formel
- 2.3. 5-Farbensatz

3. 4-Farbensatz

- 3.1. 4-Farbensatz
- 3.2. Kempes falscher Beweis
- 3.3. Kempe-Algorithmus
- 3.4. Beweis
- 3.5. Der nicht 4-färbbare Graph

Theorem (4-Farbensatz (Karte))

Jede Karte lässt sich mit maximal 4 Farben färben.



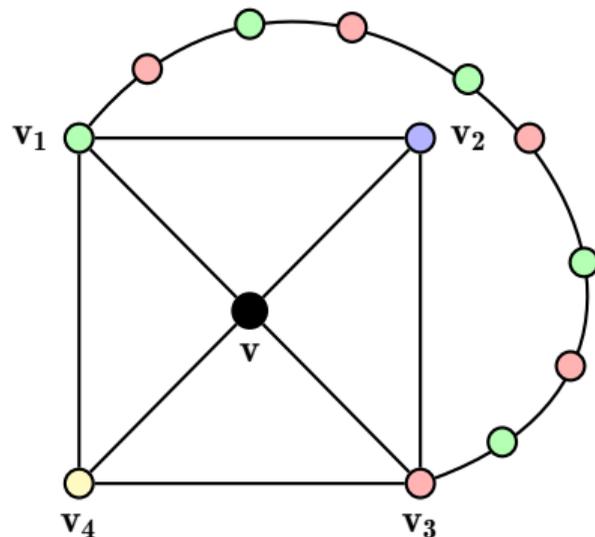
Theorem (4-Farben Satz)

Jeder planare Graph hat eine 4-Färbung.

Beweis.

Sei $v \in V$ mit $\deg(v) \leq 5$. Existieren in der Nachbarschaft nur drei Farben, so sind wir fertig. Es enthalte $N(v)$ also 4 Farben. Es können zwei Fälle auftreten:

1. v hat vier Nachbarn, in denen alle Farben auftauchen. Gehe in diesem Fall vor wie im 5-Farben Satz.



Beweis.

2. v hat fünf Nachbarn mit vier Farben. Wiederum mit Kempe-Ketten:

- v_1 und v_3 in verschiedenen Komponenten von $J_{\text{rot,blau}} \Rightarrow$ Farbenwechsel
- v_1 und v_4 in verschiedenen Komponenten von $J_{\text{rot,gelb}} \Rightarrow$ Farbenwechsel

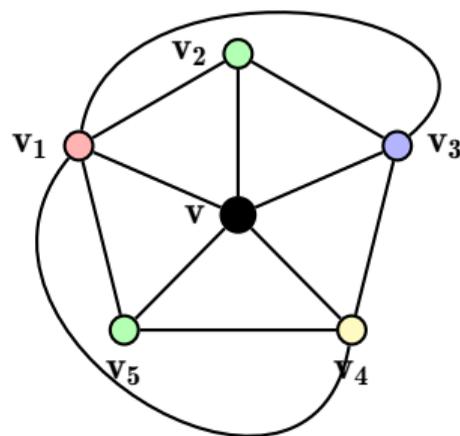
Sonst: Ketten von v_1 nach v_3 und v_4 .

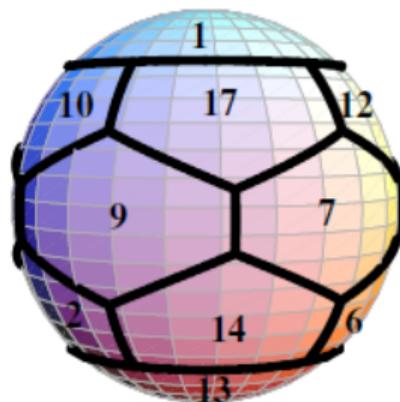
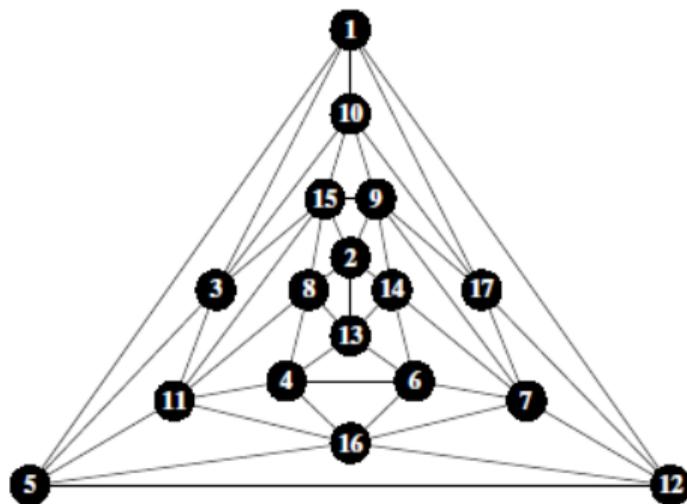
$\Rightarrow v_3$ und v_5 in verschiedenen Komponenten von $J_{\text{rot,blau}}$

$\Rightarrow v_4$ und v_2 in verschiedenen Komponenten von $J_{\text{rot,gelb}}$

Setze:

- $\phi'(v_2) = \text{gelb}$
- $\phi'(v_5) = \text{rot}$
- $\phi'(v) = \text{blau}$





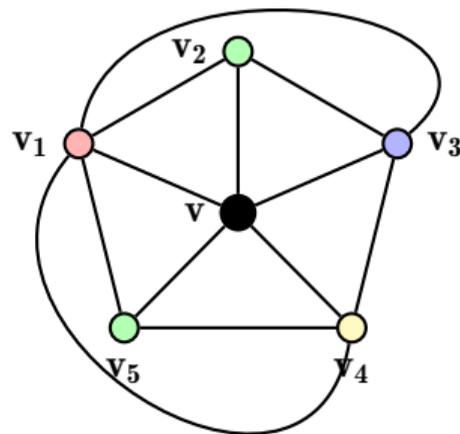
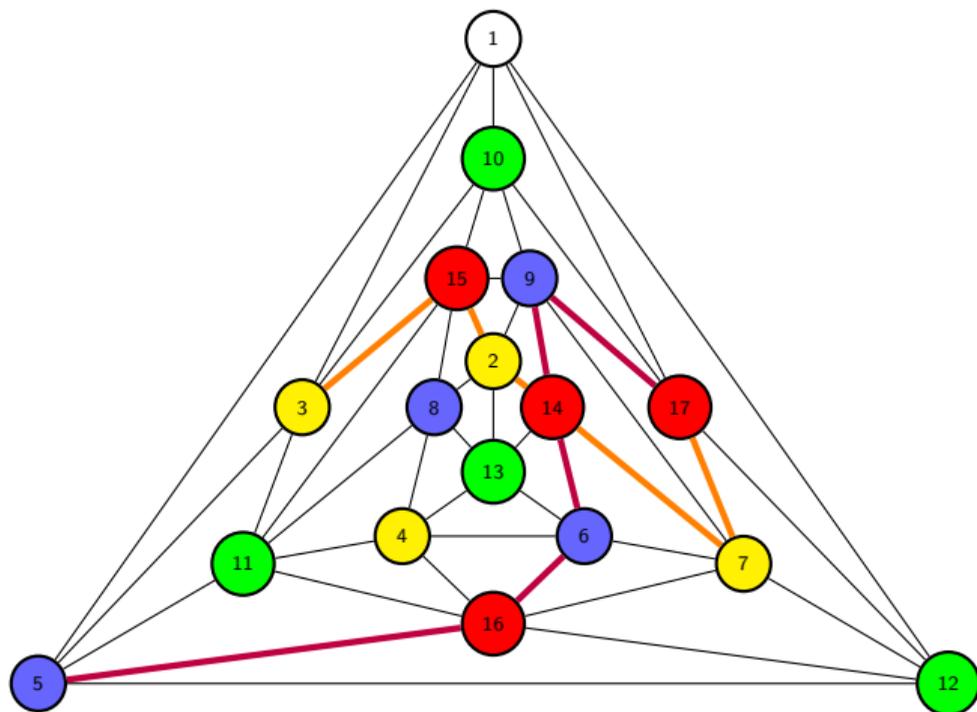


Abbildung: Färbung des Errera Graphen mit $P_{5,17}$ (lila) und $P_{3,17}$ (orange)

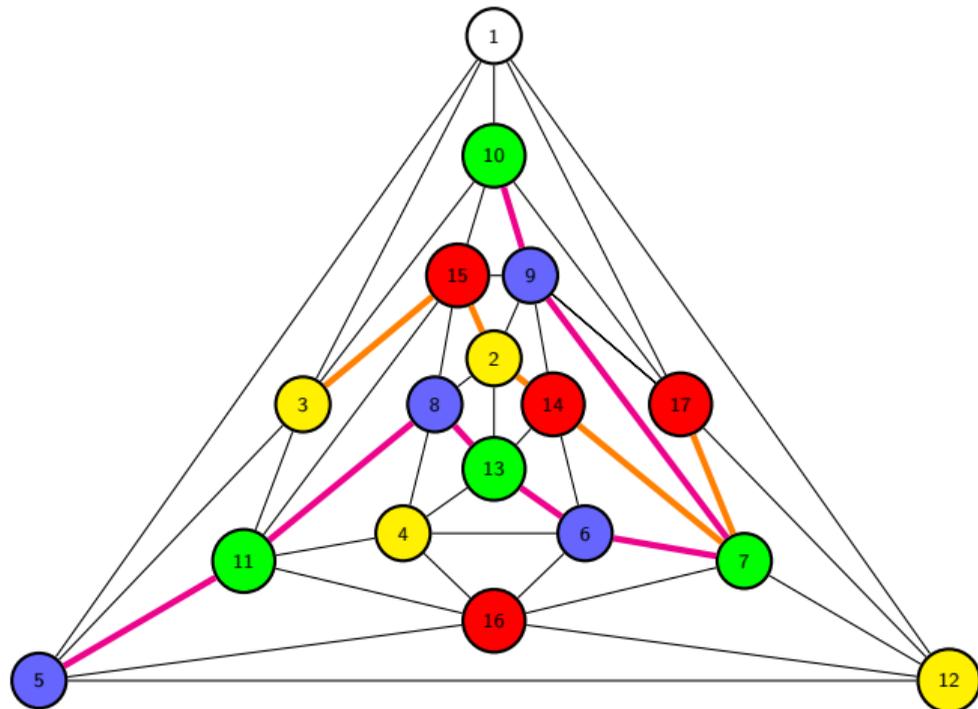


Abbildung: $P_{3,17}$ wird gebrochen und $P_{10,5}$ (magenta) entsteht

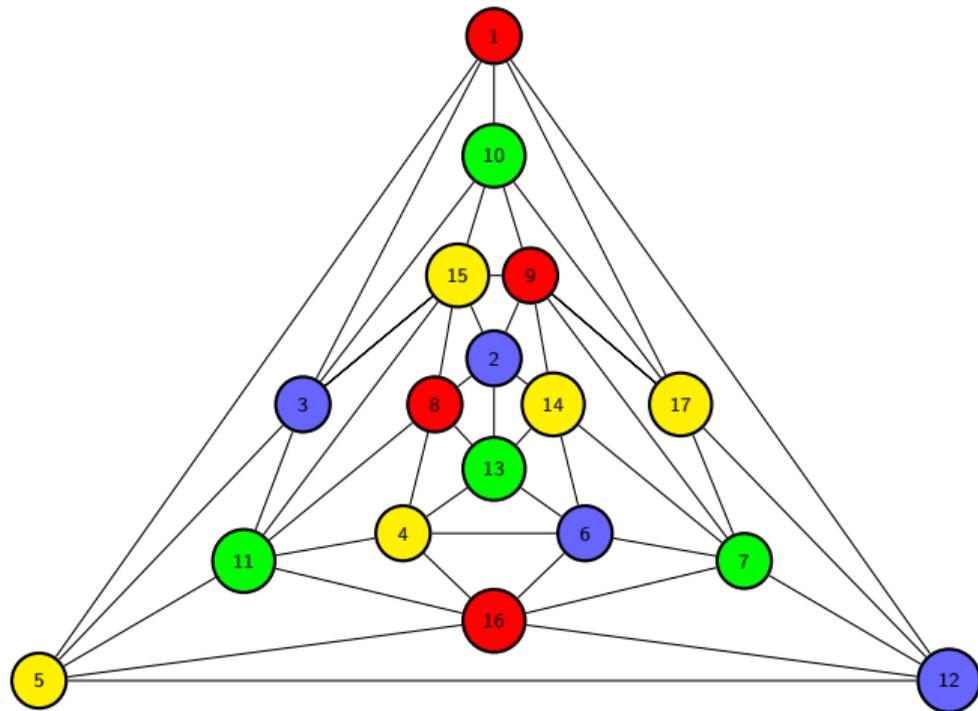


Abbildung: Gültige Färbung des Errera-Graphen

Algorithm 1 Kempe-Algorithmus

Input: $G = (V, E)$ planar

```
1:  $L \leftarrow []$ 
2: while  $V \neq \emptyset$  do
3:   for  $v_i \in V$  do
4:     if  $\deg(v_i) \leq 5$  then
5:        $L \leftarrow L + v_i$ 
6:        $V \leftarrow V - v_i$ 
7:       break
8:     end if
9:   end for
10: end while
11: for  $i \in L$  in umgedrehter Reihenfolge do
12:   Färbe nach induktiver Kempe Methode
13: end for
14: if Gültige Färbung then
15:    $TRUE$ 
16: else
17:    $G = (V, E)$  mit randomisierte unnummerierten  $v_i$ 
18:   Kempe-Algorithmus( $G$ )
19: end if
```

This leaves the reader to face 50 pages containing text and diagrams, 85 pages filled with almost 2500 additional diagrams, and 400 microfiche pages that contain further diagrams and thousands of individual verifications of claims made in the 24 lemmas in the main section of text.

Definition (Intern 6-zusammenhängender Graph)

Ein Graph G heißt intern 6-zusammenhängend, falls für jede Menge X aus maximal 5 Knoten $G \setminus X$ zusammenhängend ist oder $|X| = 5$ und $G \setminus X$ genau zwei Zusammenhangskomponenten hat, von welchen eine aus genau einem Knoten besteht.

Lemma (Birkhoff)

Jedes minimale Gegenbeispiel des 4-Farben Satzes ist eine intern 6-zusammenhängende Triangulierung.

- **Konfigurationen**
- Reduzierbarkeit
- Entladung

- Erlauben es, kleinere Teile einer Triangulierung T zu betrachten
- Tupel $(G, \gamma(v))$

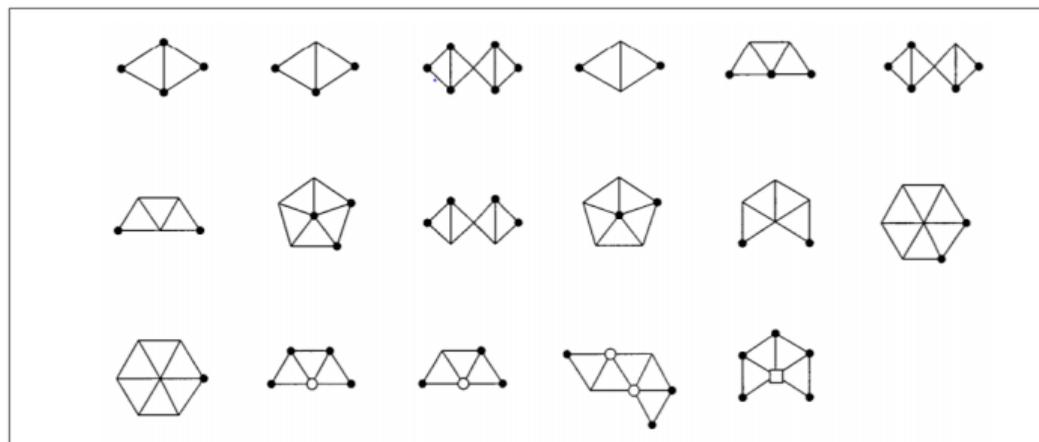


Abbildung: Auswahl von Konfigurationen

- Jede zu einer der 633 Konfigurationen isomorphe Konfiguration wird als „gute Konfiguration“ bezeichnet.

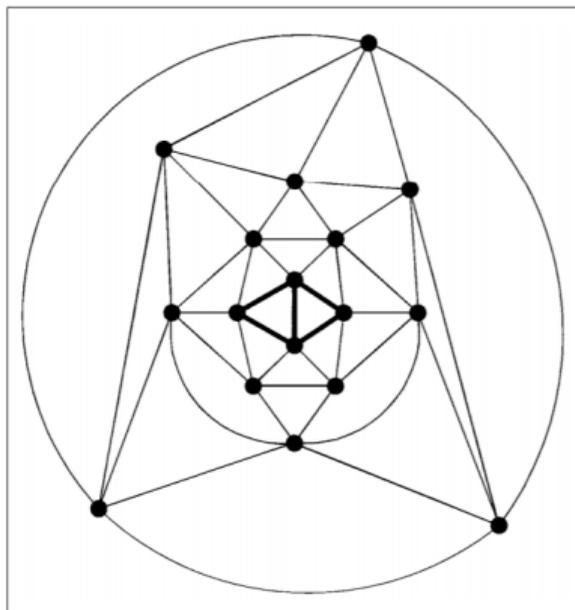


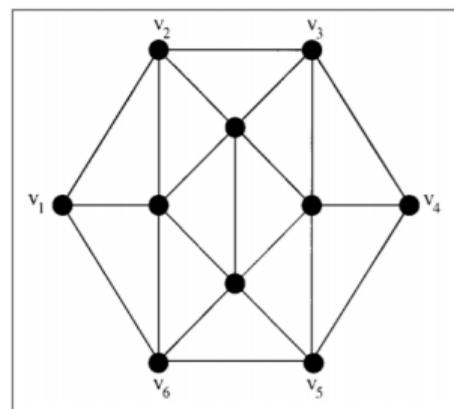
Abbildung: Intern 6-zusammenhängender Graph mit Konfiguration 1

Theorem

Wenn T ein minimales Gegenbeispiel zum 4-Farben Satz ist, kommt keine gute Konfiguration in T vor

- Konfigurationen
- **Reduzierbarkeit**
- Entladung

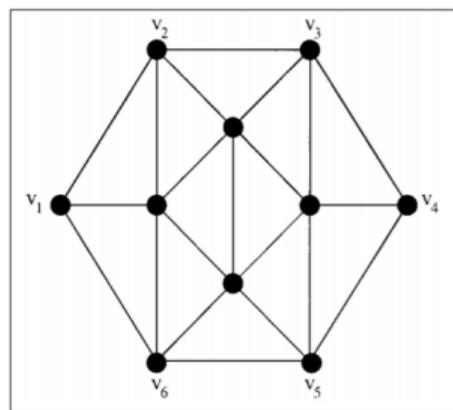
- Wichtig zum Beweis von obigem Theorem 1
- Eine Konfiguration heißt *reduzierbar*, wenn sie in keinem minimalen Gegenbeispiel vorkommt
- Definiere:
 - T intern 6-zusammenhängende Triangulierung
 - $K = (G, \gamma)$ Konfiguration 1
 - Durch $\gamma(v)$ kennen wir die Nachbarschaft von $G \Rightarrow$ Graph S
 - $R := S \setminus V(G)$ ist C_6
 - $T' := T \setminus V(G)$



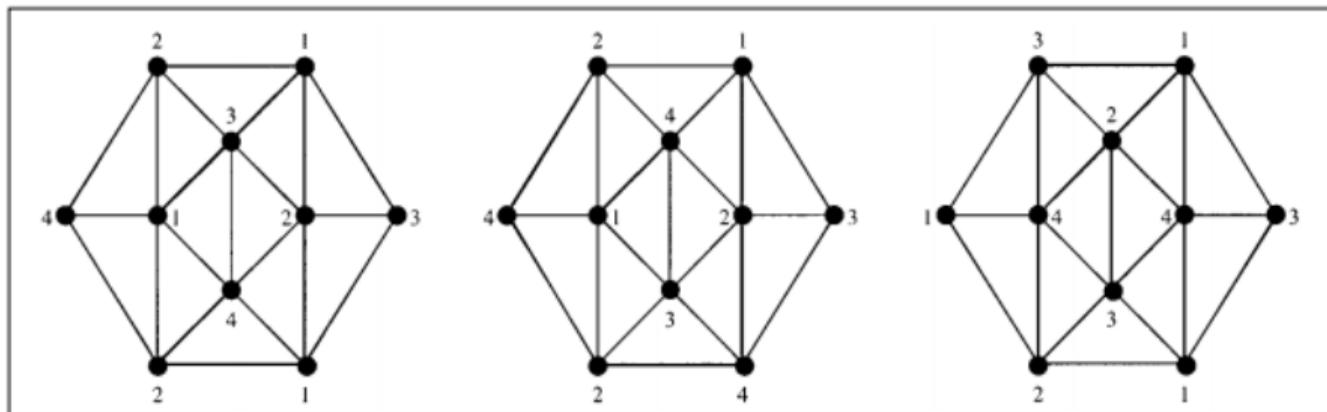
Objekt	Bezeichnung	Färbungsmenge
T	Triangulierung	minimales Gegenbeispiel zur 4-Färbung
K	Konfiguration 1	
R	6-Kreis, $S \setminus V(G)$	\mathcal{K}
S	Nachbarschaft von G	C : 4-Färbungen aus \mathcal{K} erweiterbar auf S
T'	$T \setminus V(G)$	C' : 4-Färbungen aus \mathcal{K} erweiterbar auf T'

- T minimales Gegenbeispiel $\Rightarrow C' \neq \emptyset$
 - Idee: Zeige $C' = \emptyset$
 - T Gegenbeispiel $\Rightarrow C' \subseteq \mathcal{K} - C$
- \Rightarrow Färbung φ kann nicht in C und C' gleichzeitig vorkommen

- Beispiel: $\varphi = 121312$
- Annahme: $\varphi \in C'$
- $\Rightarrow \psi$ Erweiterung von φ auf T'
- Betrachte $J_{1,4}$ von T'
- Definiere L als Komponente, die v_1 in $J_{1,4}$ enthält
- Erhalte ψ' durch Umfärben der Knoten in L
- Erhalte φ' als Färbung von R nach Umfärbung $\Rightarrow \varphi' \in C'$

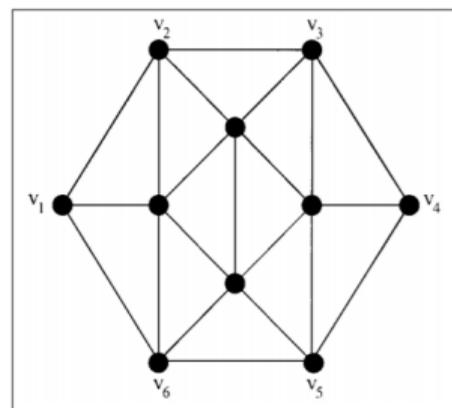


- Erinnerung: $\varphi = 121312$
- Erhalte φ' als Färbung von R nach Umfärbung $\Rightarrow \varphi' \in C'$
- Möglichkeiten:
 - $v_3, v_5 \notin V(L) \Rightarrow \varphi' = 421312 \Rightarrow \varphi' \in C \quad \checkmark$
 - $v_3 \notin V(L), v_5 \in V(L) \Rightarrow \varphi' = 421342 \Rightarrow \varphi' \in C \quad \checkmark$



- Erinnerung: $\varphi = 121312$
- $\Rightarrow v_3 \in V(L)$
- \Rightarrow Pfad P in L von v_1 zu v_3
 - Definiere $J_{2,3}$ analog
 - Definiere M als Komponente von $J_{2,3}$ mit v_2
- $\Rightarrow v_4, v_6 \notin M$
- Erhalte ψ'' durch Umfärbung der Komponenten in M
- φ'' Beschränkung von ψ'' auf R
- $\Rightarrow \varphi'' = 131312 \Rightarrow \varphi'' \in C \quad \checkmark$

Also: $\varphi \notin C'$



Theorem

In jeder intern δ -zusammenhängenden Triangulierung T erscheint mindestens eine gute Konfiguration.

- Konfigurationen
- Reduzierbarkeit
- **Entladung**

- Effektiver Weg, Eulers Formel zu benutzen
- Ordne jedem Knoten Ladung von $10(6 - \deg(v))$ zu
- Summe aller Ladungen 120, da:

Theorem (1. Folgerungen aus der Eulerformel)

Ist G planar gezeichnet, dann gilt

- G hat höchstens $3|V| - 6$ Kanten

Beweis.

Jede Kante ist inzident zu maximal zwei Regionen und der Rand jeder Region hat mindestens 3 Kanten (Annahme: keine parallelen Kanten). Daraus folgt sofort $2|E(G)| \geq 3|F|$. Mit Eulers Formel ergibt sich

$$3|E| = 3|V| + 3|F| - 6 \leq 3|V| + 2|E| - 6 \Leftrightarrow |E| \leq 3|V| - 6$$



- Effektiver Weg, Eulers Formel zu benutzen
- Ordne jedem Knoten Ladung von $10(6 - \deg(v))$ zu
- Summe aller Ladungen 120, da:

Eulers Folgerung:

$$|E| = 3|V| - 6$$

Handshake-Lemma: $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E| = 6|V| - 12 \Leftrightarrow 12 = 6|V| - \sum_{v \in V} \deg(v)$

Summe Ladungen: $\sum_{v \in V} 10(6 - \deg(v)) = 10(6|V| - \sum_{v \in V} \deg(v)) = 10 \cdot 12 = 120$

- Verschiebe Ladungen nach folgender Regeln entlang der Pfeile:

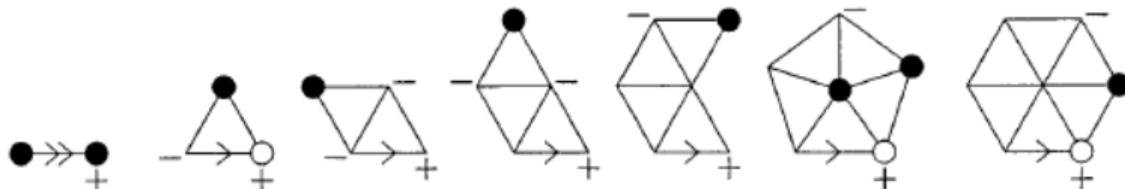


Abbildung: Auszug Entladungsregeln

- Minus-Zeichen neben dem Knoten: Knotengrad ist maximal Grad des Symbols
- Plus-Zeichen neben dem Knoten: Knotengrad ist minimal Grad des Symbols
- kein Zeichen neben dem Knoten: Knotengrad entspricht Grad des Symbols
- Gesamtsumme ändert sich nicht
- Gesamtsumme positiv: $\exists v$ mit $\text{charge}(v) > 0$
- Gute Konfiguration tritt in zweiter Nachbarschaft von v auf

Lemma

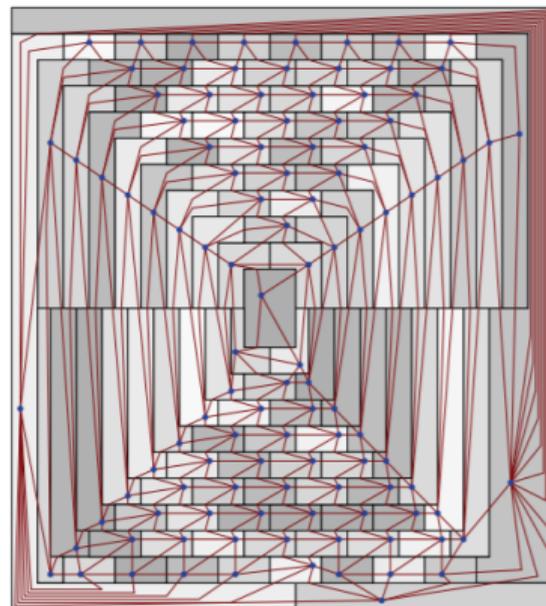
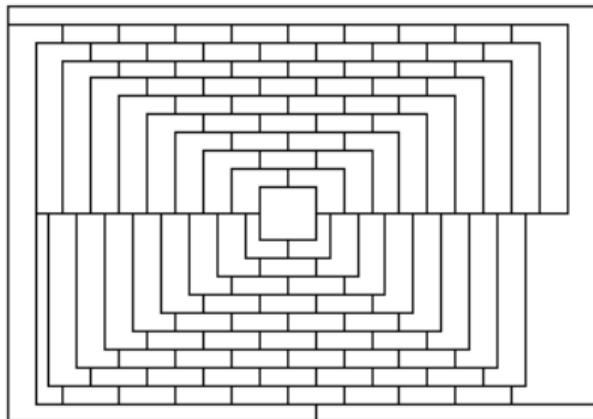
Jedes minimale Gegenbeispiel des 4-Farben Satzes ist eine intern 6-zusammenhängende Triangulierung.

Theorem

Wenn T ein minimales Gegenbeispiel zum 4-Farben Satz ist, kommt keine gute Konfiguration in T vor

Theorem

In jeder intern 6-zusammenhängenden Triangulierung T erscheint mindestens eine gute Konfiguration.



Danke für eure Aufmerksamkeit!