10. Übungsblatt zur Vorlesung: Graphentheorie (DS II)

Felsner/ Schröder

20. Dezember 2019

Besprechungsdatum: 9.-10. Januar

`http://www.math.tu-berlin.de/~felsner/Lehre/dsII19.html`

---

(1) Graphenparameter

(a) Finde einen Graphen G, dessen Paramenter $\alpha(G), \omega(G), \chi(G), \theta(G)$ paarweise verschieden sind.

(b) Finde $k, n \in \mathbb{N}$ sodass $T_k(n)$ der kleineste Turán-Graph (bezüglich der Kantenanzahl) ist, der den Petersen-Graph als Teilgraph enthält.

(c) Finde $k, n \in \mathbb{N}$ sodass $T_k(n)$ der kleinste reguläre Turán-Graph ist, der den Petersen-Graph als Teilgraph enthält.

(2) Satz von Helly

(a) Zeige den Satz von Helly für $d = 1$ ohne Verwendung linearer Algebra.

(b) Zeige den Satz von Helly.
[Hinweis: Nutze den Satz von Radon: Jede Menge von $n + 2$ Punkten im $\mathbb{R}^n$ lässt sich in 2 Mengen aufteilen, deren konvexe Hüllen sich schneiden.]

(3) Extremale Graphentheorie
Berechne $ex(n, K_{1,t})$ für jede Kombination von $n > t > 1$.

(4) Bonusweihnachtsaufgabe (gibt Extrapunkte):
In dieser Aufgabe verwenden wir das planare Separatortheorem um gewichtsmaximale Matchings zu berechnen. Sei $G = (V, E)$ ein $w : E \to \mathbb{R}$ gegebene Kantengewichte. Wir suchen ein Matching M maximalen Gewichts $w(M) := \sum_{e \in M} w(e)$.

(a) Sei M ein Matching. Wir nennen einen Weg oder Kreis P *verbessernd*, wenn $M'(P) := M \backslash P + P \backslash M$ ein Matching ist, und $w(M'(P)) > w(M)$.
Zeige, dass ein Matching M genau dann maximales Gewicht hat wenn kein verbessernder Weg/Kreis existiert.

(b) Zeige die folgende Aussage. Sei M ein gewichtsmaximales Matching in $G - v$ und P ein verbessernder Weg mit Startknoten v, sodass $w(M'(P)) - w(M)$ maximal ist. Falls kein solcher existiert, sei $P = \emptyset$. Dann ist das Matching $M'(P)$ ein Matching maximalen Gewichts in G.

(c) Sei G planar. Entwickle einen Algorithmus zur Berechnung einen gewichtsmaximalen Matchings mit Laufzeit $T(n) \leq 2T\left(\frac{3}{4}n\right) + c\sqrt{n}B(n) + C(n)$ für irgendein $c \in \mathbb{R}$, wobei die Laufzeit zur Suche eines maximal verbessernden Wegs mit festem Startknoten durch $B(n)$ und eines Separators durch $C(n)$ beschrieben werden.

[Hinweis: Es gibt Linearzeit-Algorithmen zur Berechnung von Separatoren in planaren Graphen.]

Frohe Weihnachten
&
Guten Rutsch