8. Übungsblatt zur Vorlesung: **Felsner/ Scheucher/ Schröder**

Diskrete Geometrie 2 (DG II) 7. Juni 2018

Besprechungsdatum: 12./14. Juni

`http://www.math.tu-berlin.de/~felsner/Lehre/DG2-SS18.html`

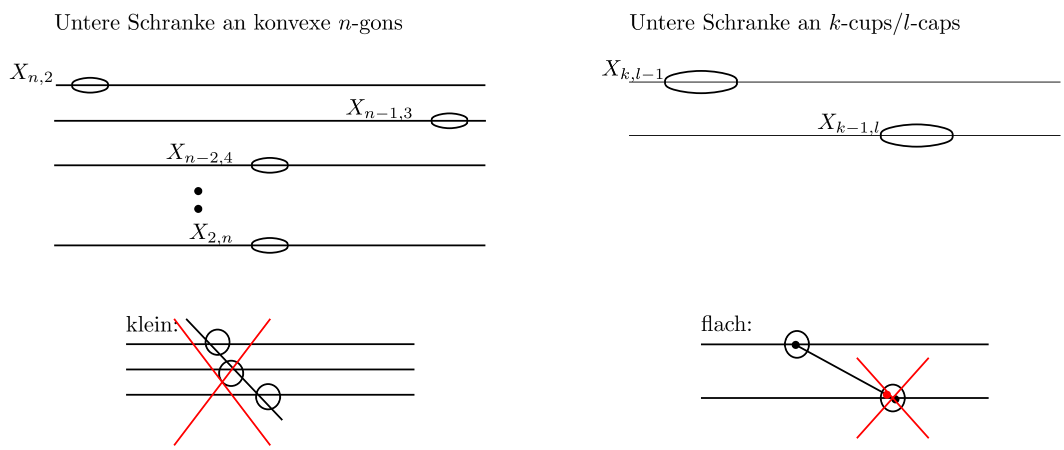
---

(1) Beweisen Sie folgenden Teil aus dem Beweis von Suk:
Sei $\{x_1, \ldots, x_k\} \subset \mathbb{R}^2$ ein k-cap. Sei weiter $T_i = \Delta(x_i, x_{i+1}, S_i)$, wobei S_i den Schnittpunkt der Geraden $\overline{x_{i-1}x_i}$ und $\overline{x_{i+1}x_{i+2}}$ beschreibt.

(a) Sei $Q_i \subset T_i$ eine Kette in T_i wie in der Vorlesung, also eine Menge, sodass $\forall p, q \in Q_i : p \in \operatorname{conv}(q, x_{i-1}, x_{i+2})$ oder andersherum. Zeige, dass mit $|Q_i| \geq f(k, \ell)$ die Existenz eines k-left-caps oder ℓ-right-caps in Q_i gewährleistet ist. Ein k-left-cap sei eine Menge L mit k Elementen aus Q_i, sodass $L + x_i$ in konvexer Lage ist. Ein ℓ-right-cap ist analog definiert durch Größe ℓ und x_{i+1}.

(b) Zeige, dass sich ein k-left-cap $L_i \subseteq Q_i$ aus (a) mit einem ℓ-right-cap $R_{i-1} \subseteq Q_{i-1}$ zu einem konvexen $(k+\ell)$-gon zusammenfügen lässt.

(2) Zeige $f(k,l) \geq \binom{k+l-4}{k-2} + 1$ und $g(n) \geq 2^{n-2} + 1$. Zur Veranschaulichung:



(3) In der Vorlesung wurde ein effizienter Algorithmus zum Zählen von k-gons erwähnt. Wirf einen Blick in die folgende Publikation von Mitchell, Rote, Sundaram und Woeginger und überzeuge dich (und in der Übung auch deine Mitstundenten) von der Korrektheit: `http://page.mi.fu-berlin.de/rote/Papers/pdf/Counting+convex+polygons+in+planar+point+sets.pdf`

(4) Analog zum planaren Fall ist eine Menge $S \subset \mathbb{R}^d$ (i) *in allgemeiner Lage*, wenn keine $d+1$ Punkte aus X in einer Hyperebene liegen, und (ii) *in konvexer Lage*, wenn kein Punkt von X im Inneren der konvexen Hülle $\operatorname{conv}(X)$ liegt. Weiter sei $g^{(d)}(n)$ das kleinste $N \in \mathbb{N}$, sodass jede Menge $S \subset \mathbb{R}^d$ mit $|S| \geq N$ in allgemeiner Lage eine Teilmenge $X \subset S$ in konvexer Lage mit $|X| = n$ hat.
Zeige, dass $g^{(d)}(n) \leq g^{(d-1)}(n-1) + 1$ für $n \geq d \geq 2$ gilt.
(Tipp: Betrachte eine Projektion in eine Hyperebene.)