7. Übungsblatt zur Vorlesung: **Felsner/ Scheucher/ Schröder**

Diskrete Geometrie 2 (DG II) 31. Mai 2018

Besprechungsdatum: 5./7. Juni

`http://www.math.tu-berlin.de/~felsner/Lehre/DG2-SS18.html`

WARM UP

Ein zyklisches Polytop hat immer die gleiche Anzahl Facetten (Diese ist unabhängig von der Wahl der $t_1, ..., t_n$.). Welche?

Hinweis: Die Anzahl lässt sich als Summe zweier Binomialkoeffizienten schreiben.

(1) Bearbeite folgende Aufgaben zum Thema monotone Teilfolgen:

- (a) Seien $x_1, \ldots, x_{ab+1} \in \mathbb{R}$. Zeige, dass man $i_1 < \ldots < i_{a+1}$ finden kann, sodass $x_{i_1} \leq \ldots \leq x_{i_{a+1}}$ oder $j_1 < \ldots < j_{b+1}$, sodass $x_{j_1} \geq \ldots \geq x_{j_{b+1}}$.
(Hinweis: Schubfachprinzip)
- (b) Finde für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Beispiel für $x_1, \ldots, x_{n^2} \in \mathbb{R}$ ohne monotone Teilfolge der Länge $n+1$.

(2) Sei eine Orientierung ϕ des Würfels Q_n gegeben. Zeige:

- (a) Ist ϕ eine Unique-sink-orientation (USO) und s die Senke des Würfels, so gibt es von jeder Ecke v einen gerichteten Weg von v nach s.
- (b) Ist ϕ azyklisch, so gilt: ϕ ist USO, genau dann wenn ϕ auf jeder 2-dim. Seite genau eine Senke hat.

(3) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $S \subseteq \mathbb{R}^2$ eine hinreichend große Punktmenge in allgemeiner Lage. Man färbe die 4-elementigen Teilmengen von S rot, falls diese in konvexer Lage sind, und blau andernfalls. Zeige, dass S eine konvexe Teilmenge der Größe n beinhaltet.
(Hinweis: $|S| \geq R_4(n, 5)$ sollte hinreichend sein.)

(4) Zeige folgende Verallgemeinerung der Konstruktion von Esther Klein:
Für $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ gilt: Aus $n+3$ Punkten im $\mathbb{R}^n$ in allgemeiner Lage (keine $n+1$ auf einer Hyperebene) lassen sich $n+2$ auswählen, sodass diese Ecken eines konvexen Polytops sind (also in konvexer Lage sind).