
**6. Übungsblatt zur Vorlesung:
Diskrete Geometrie 2 (DG II)**

Felsner/ Schröder

24. Mai 2018

Besprechungsdatum: 29./31. Mai

<http://www.math.tu-berlin.de/~felsner/Lehre/DG2-SS18.html>

- (1) Ein Graph G sei *polytopal*, wenn zu G ein Polytop P_G mit zugrundeliegendem Graph G existiert.
- (a) Zeige, dass K_n polytopal ist.
 - (b) Bestimme die minimale Dimension eines Polytops zum K_n , kurz $\dim(K_n)$.
 - (c) Zeige, dass Graphen von Polytopen im \mathbb{R}^3 planar sind.
- (2) Zwei Polytope $P \subset \mathbb{R}^d, Q \subset \mathbb{R}^n$ heißen affin isomorph, wenn

$$\exists A \in \mathbb{R}^{n \times d}, B \in \mathbb{R}^{d \times n}, t \in \mathbb{R}^n, t' \in \mathbb{R}^d : Q = AP + t, P = BQ + t'$$

Zeige, dass alle Polytope affin isomorph zu einem Schnitt eines Orthanten (o.B.d.A. $O = \{x \mid x_i \geq 0 \forall i\}$) mit einem affinen Unterraum sind.

- (3) Sei $P \subset \mathbb{R}^d$ ein einfaches Polytop. Sei $P' = P \times \{0\}$ die Einbettung von P in \mathbb{R}^{d+1} .
- (a) Sei $T := P \cap H^-$, wobei H^- einen Halbraum beschreibt, der alle Ecken von P bis auf eine im Inneren enthält. Sei diese Ecke $v \in \overset{\circ}{H}^+$ in genau jeweils s_i Seiten der Dimension i enthalten. Man bestimme den h -Vektor von T .
 - (b) Das Polytop $F := \text{conv}(P' \cup (P' + e_{d+1}))$ nennt man Prisma über P . Bestimme den h -Vektor von F .
 - (c) Man finde ein (nicht einfaches) Polytop P , bei dem der h -Vektor von der Wahl der Morse-Funktion abhängt.
- (4) Sei P ein Polytop mit $|\text{Vert}(P)| = n, |\text{Facets}(P)| = m$. Finde einen Algorithmus, der aus der Ecken-Facetten-Inzidenzmatrix $M \in \{0,1\}^{m \times n}$ den Seitenverband von P berechnet. Welche Laufzeit hat der Algorithmus, wenn die Dimension des Polytops d ist?
- (5) (Zusatz) Ein zyklisches Polytop hat immer die gleiche Anzahl Facetten (Diese ist unabhängig von der Wahl der t_1, \dots, t_n). Welche?
Hinweis: Die Anzahl lässt sich als Summe zweier Binomialkoeffizienten schreiben.