**5. Übungsblatt zur Vorlesung:** **Felsner/ Schröder**

**Diskrete Geometrie 2 (DG II)** 17. Mai 2018

Besprechungsdatum: 22./24. Mai

`http://www.math.tu-berlin.de/~felsner/Lehre/DG2-SS18.html`

---

(1) Sei $P \subset \mathbb{R}^d$ ein Polytop mit $0 \in \mathring{P}$, $V = \mathrm{Vert}(P)$ .

(a) Man zeige: $V^{**} = P$.

(b) Sei nun $P$ simplizial und einfach. Man zeige, dass $|V| = d + 1$ oder $d = 2$.

(2) Einheitskreiskontaktgraphen (EKKG) lassen sich darstellen, indem Knoten Translate des Einheitskreises zugeordnet sind, sodass es zwischen den Punkten eine Kante gibt, genau dann wenn sich die Kreise berühren (also insbesondere nicht, wenn sie sich schneiden).

(a) Man finde einen EKKG $G$ mit $\chi(G) = 4$, sodass sich je zwei Kreise nicht schneiden (Pennygraph).

(b) Sei $G$ ein EKKG, sodass sich je zwei Kreise schneiden oder berühren. Man zeige, dass man $G$ mit 3 Farben färben kann.

(3) Sei $P \subset \mathbb{R}^d$ ein Polytop mit $f$-Vektor $(f_i)_i$. Sei $P' = P \times \{0\}$ die Einbettung von $P$ in $\mathbb{R}^{d+1}$.

(a) Das Polytop $Y := \mathrm{conv}\,(P' \cup \{e_{d+1}\})$ nennt man Pyramide über $P$. Bestimme den $f$-Vektor von $Y$.

(b) Das Polytop $F := \mathrm{conv}\,(P' \cup (P' + e_{d+1}))$ nennt man Prisma über $P$. Bestimme den $f$-Vektor von $F$.

(c) Sei $T := P \cap H^-$, wobei $H^-$ einen Halbraum beschreibt, der alle Ecken von $P$ bis auf eine im Inneren enthält. Sei diese Ecke $v \in \mathring{H}^+$ in genau jeweils $s_i$ Seiten der Dimension $i$ enthalten. Man bestimme den $f$-Vektor von $T$.

(4) Seien $p, q \in P$ Ecken eines Polytops $P$, die auf der gleichen Seite einer Hyperebene $H$ sind . Man zeige, dass man entlang der Kanten von $P$ von $p$ nach $q$ gehen kann, ohne dass man die Hyperebene $H$ passiert.