11. Übungsblatt zur Vorlesung: **Felsner/ Schröder**
Diskrete Geometrie 2 (DG II) 28. Juni 2018
Besprechungsdatum: 3./5. Juli
`http://www.math.tu-berlin.de/~felsner/Lehre/DG2-SS18.html`

Für Punktmengen in der Ebene darf auf diesem Blatt allgemeine Lage angenommen werden, es liegen also keine 4 Punkte auf einem Kreis und keine 3 auf einer Geraden.

(1) Sei $P \in \binom{\mathbb{R}^2}{n}$. Eine partielle Triangulierung von P sei eine Triangulierung von $Q \subseteq P$, sodass $\operatorname{conv}(Q) = \operatorname{conv}(P)$.
Zeige oder widerlege:
Es gibt eine partielle Triangulierung FT von P, die eine "Full circle condition" erfüllt: Der Kreis um jedes Dreieck in FT enthält alle Punkte von P.

(2) Sei $P \in \binom{\mathbb{R}^2}{n}$. Sei s der Schwerpunkt von P. Beweise anhand linearer Algebra: Die Gleichungen

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_T(p_i) = 3\mathrm{vol}\left(\operatorname{conv}(P)\right)$$

und

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_T(p_i) \cdot p_i = 3\mathrm{vol}\left(\operatorname{conv}(P)\right) \cdot s$$

sind linear unabhängig.

(3) Sei $P \in \binom{\mathbb{R}^2}{n}$ in konvexer Lage.

(a) Zeige, dass man mit weniger als $2n$ Flips auskommt, um von einer beliebigen Triangulierung zu einer beliebigen anderen Triangulierung von P zu gelangen.

(b) Zeige, dass alle Triangulierungen von P regulär sind.
Hinweis: Verwende eine verstärkte Induktion. Überlege dir, dass man sogar 3 Gewichte vorher festlegen kann.

(c) Zähle die Anzahl der Facetten des Sekundärpolytops von P (des sogenannten Assoziaeders).

(4) Sei $P \in \binom{\mathbb{R}^2}{n}$. Beweise oder widerlege:

(a) Ein Dreieck sei spitzwinklig, wenn jeder Winkel im Dreieck spitz, also kleiner als $\frac{\pi}{2}$ ist. Sei T eine Triangulierung von P, sodass jedes Dreieck spitzwinklig ist. Dann ist $T = DT(P)$

(b) Die Delaunay-Triangulierung minimiert unter allen Triangulierungen die Gesamtlänge aller Kanten.

(c) Die Delaunay-Triangulierung minimiert unter allen Triangulierungen den maximalen Winkel.