

---

**10. Übungsblatt zur Vorlesung:  
Diskrete Geometrie 2 (DG II)**

**Felsner/ Schröder**  
21. Juni 2018

Besprechungsdatum: 26./28. Juni

<http://www.math.tu-berlin.de/~felsner/Lehre/DG2-SS18.html>

---

Hinweis: Für alle Punktmenge im  $\mathbb{R}^2$  kann auf diesem Blatt allgemeine Lage angenommen werden, es liegen also keine 4 auf einem Kreis und keine 3 auf einer Geraden.

- (1) Sei  $T$  eine Triangulierung von  $P \subset \mathbb{R}^2$  und  $\alpha(T) = \min \{\beta \text{ Winkel im Dreieck } \Delta \mid \Delta \in T\}$ . Man zeige, dass die Delaunay-Triangulierung den Minimalwinkel maximiert:

$$\alpha(DT(P)) \geq \alpha(T)$$

Tipp: In der Vorlesung wurde ein Ansatz über verbessernde Flips besprochen.

- (2) Zeige, dass es für jedes  $n \in \mathbb{N}$  eine Triangulierung einer Punktmenge  $P \in \binom{\mathbb{R}^2}{n}$  gibt, die nicht mit weniger als  $\binom{n}{2} - \mathcal{O}(n)$  verbessernden Flips zur Delaunay-Triangulierung gemacht werden kann.

Tipp: Ein Beispiel wurde schon in der Vorlesung skizziert.

- (3) Sei  $\pi \in S_n$  eine zufällige Permutation von  $[n]$ , gleichverteilt gewählt. Zu jeder Menge  $\Pi_k := \{\pi_1, \dots, \pi_k\}$  sei das Paar  $P(\Pi_k) := (\max \Pi_k, \min \Pi_k)$  assoziiert.

- (a) Berechne den Erwartungswert der Anzahl solcher Paare.

$$\mathbb{E}(|\{P(\Pi_k) \mid k \in [n]\}|)$$

- (b) Finde einen randomisiert inkrementellen Sortieralgorithmus mit erwarteter Laufzeit  $\mathcal{O}(n \log n)$ . (Randomisiert inkrementell heißt ein Algorithmus, der zunächst die Reihenfolge des Inputs randomisiert, ihn dann Stück für Stück einliest und in jedem Schritt optimale Substrukturen aufbaut.)

- (4) Sei  $P \in \binom{\mathbb{R}^2}{n}$  und  $DT(P)$  die zugehörige Delaunay-Triangulierung. Sei weiter  $MST(P) = \operatorname{argmin} \left( \left\{ \sum_{\{v,w\} \in E} \operatorname{dist}(v,w) \mid (P,E) \text{ Baum} \right\} \right)$  ein minimaler Spannbaum der Knoten von  $P$ . Zeige, dass alle Kanten von  $MST(P)$  in  $DT(P)$  enthalten sind.