Signotope

Zur Kombinatorik von Pseudohyperebenenarrangements

Diplomarbeit von Helmut Weil

am Fachbereich Mathematik und Informatik
der Freien Universität Berlin
betreut von Dr. Stefan Felsner

8. Februar 1999

Vorwort

Eine wichtige Technik in der algorithmischen Geometrie ist der Sweep. Diese Arbeit behandelt die Kombinatorik im Zusammenhang mit Sweeps von Arrangements von Pseudohyperebenen. Während jedes Pseudogeradenarrangement in der euklidischen Ebene einen Sweep mit einer Pseudogeraden erlaubt, ist dies in höheren Dimensionen nicht klar. Ein Ergebnis dieser Arbeit wird sein, daß es für jedes $d > 1$ eine Klasse von Arrangements in allgemeiner Lage im $\mathbb{R}^d$ gibt, die einen Sweep mit einer Pseudohyperebene erlauben. Diese Arrangements sind dadurch charakterisiert, daß sich eine Hyperebene H, die nicht Teil des Arrangements ist, finden läßt, so daß die Spur des Arrangements auf H topologisch äquivalent zu einem standardisierten Arrangement von Hyperebenen im $\mathbb{R}^{d-1}$, dem zyklischen Arrangement, ist. In der Sprache der Theorie der orientierten Matroide sind das genau die Arrangements, deren orientiertes Matroid ein Ein–Element–Lifting des alternierenden orientierten Matroids vom Rang d ist. Die Menge dieser Klassen von Arrangements sind in Bijektion mit der Menge $S_r(n)$ der Abbildungen der Menge der r–elementigen Teilmengen von $\{1, 2, \ldots, n\}$ in die Menge $\{-, +\}$, die einer verallgemeinerten Monotoniebedingung genügen. Dabei ist n die Anzahl der Pseudohyperebenen des Arrangements und $r = d+1$. Diese Abbildungen sind die Signotope aus dem Titel der Arbeit. $S_r(n)$ trägt eine natürliche Ordnugsstruktur, deren wichtigste Eigenschaft eine Surjektion von maximalen Ketten in $S_{r-1}(n)$ auf $S_r(n)$ ist, die der kombinatorische Ausdruck eines Sweeps ist. Die Grundidee der Bijektion zwischen Arrangements im $\mathbb{R}^d$ und Signotopen besteht darin, daß ein Sweep eine azyklische Orientierung des Gerüsts des von dem Arrangement induzierten Zellkomplexes erlaubt. Das von $d + 1$ Pseudohyperebenen induzierte Arrangement ist ein Homöomorph eines Simplexes, für dessen Orientierung es genau zwei Möglichkeiten gibt. Ein Signotop ordnet nun den Indizes jedes so induzierten „Pseudo“–Simplexes ein Zeichen aus $\{-, +\}$ zu, je nach dieser Orientierung.

Wie sich im Verlauf der Beschäftigung mit diesem Thema herausgestellt hat, sind Signotope letztlich nichts als eine andere Schreibweise für die aus der Literatur bekannten *Higher Bruhat Orders* von Manin und Schechtman. Der Begriff Signotop selbst wurde von Felsner geprägt. Ich habe mich nach einiger Überlegung dafür entschieden, den Begriff beizubehalten, da sich die Schreibweisen doch erheblich unterscheiden und er mir im Lauf der Zeit auch „ans Herz gewachsen“ ist.

Im ersten Teil der Arbeit beschränke ich mich zunächst auf Pseudogeradenarrangents in der euklidischen Ebene. Hier ging es mir vor allem darum, darzustellen, wie sich Signotope als Modell bestimmter gemeinsamer Eigenschaften von Arrangements von n Pseudogeraden in der euklidischen Ebene, Permutationen und Teilmengen von $\{1, 2, \ldots, n\}$ quasi von selbst aufdrängen. Mit Hilfe der Technik des Sweeps zeige ich daneben, daß ein Pseudogeradenarrangement eine, in gewissem Sinne duale, geometrische Darstellung als zonotopale Kachelung eines $2n$–Ecks hat, von der ich dann beim Erstellen der Bilder im Rest der Arbeit ausgiebig Gebrauch mache.

Im zweiten Teil untersuche ich dann allgemein Signotope als kombinatorische Objekte.

Besondere Aufmerksamkeit erhält dabei natürlich die Ordnungsstruktur auf Signotopen. Dieser Teil ist im Wesentlichen rein kombinatorisch und enthält relativ wenig Anschauliches, wofür der dritte Teil dann einige Entschädigung bietet. Dort verbinde ich die Ergebnisse des zweiten Teils zunächst wieder mit der Geometrie. Mit Hilfe der Theorie der orientierten Matroide zeige ich, daß es Pseudohyperebenenarrangements in jeder Dimension gibt, die mit Signotopen codiert werden können. Danach gebe ich noch ein Ausblick auf zwei mögliche Erweiterungen des Signotopbegriffs und stelle dazu einige Überlegungen an.

Die Literaturliste am Ende der Arbeit enthält auch Einträge, die mir beim Verstehen der Zusammenhänge geholfen haben, ohne direkt in der Arbeit zitiert zu werden.

Zum Schluß möchte ich mich noch bedanken bei Dr. Stefan Felsner, der mich mit der Materie in Berührung gebracht und es verstanden hat, mich dafür zu begeistern. Während der Arbeit hat er mir oft genug die entscheidenden Impulse gegeben und mir auch in Phasen der Stagnation geholfen, weiterzumachen. Die Bilder auf Seite 35 und 85 hat er mir freundlicherweise zur Verfügung gestellt.

Meiner Tochter Judith und meiner Frau Tina danke ich für ihre Unterstützung, vor allem aber für ihre Geduld mit mir.

Widmen möchte ich diese Arbeit meiner Mutter, die leider vor Abschluß der Arbeit verstorben ist.

Inhaltsverzeichnis

I Pseudogeradenarrangements 1

1 Einführung . . . 3
2 Markierte Arrangements . . . 8
3 Sweeps . . . 10
4 Zulässige Folgen . . . 12
5 Zonotopale Kachelungen . . . 16
6 Die schwache Bruhat Ordnung . . . 22
7 Dreiecke in einfachen Arrangements . . . 27

II Signotope 31

8 Einführung . . . 33
9 Konstruktionen . . . 36
10 Ketten von Signotopen . . . 44
11 Globale Struktur . . . 49
12 Lokale Struktur . . . 59
13 Zählen . . . 62

III Höhere Dimensionen und Ausblick 65

14 Signotope und orientierte Matroide . . . 67
15 Reorientationen . . . 72
16 Signotope mit Null . . . 73
17 Polytope . . . 76

Teil I

Pseudogeradenarrangements

1 Einführung

Eine Familie von Geraden in der euklidischen oder projektiven Ebene, die sich paarweise genau einmal schneiden, bildet ein *Geradenarrangement*. Ein Arrangement partitioniert die Ebene in Zellen der Dimensionen 0, 1 und 2, die *Punkte*, *Kanten* und *Flächen*. Viele kombinatorische Eigenschaften dieses Zellenkomplexes, wie etwa die Anzahl der Zellen der verschiedenen Dimensionen, hängen in keiner Weise von der „Geradheit" der Geraden ab. Das Konzept wurde deshalb schon sehr früh auf Arrangements von *Pseudogeraden* erweitert. Die erste Arbeit, die sich mit Pseudogeradenarrangements beschäftigt, stammt aus dem Jahr 1926 von Levi [Lev26]. Dort ist auch schon der Hinweis enthalten, daß es sich dabei um eine wirkliche Erweiterung handelt, d.h. daß es Zellenkomplexe gibt, die von Pseudogeradenarrangements, nicht aber von Geradenarrangements erzeugt werden können. Einen grundlegenden Überblick zu dem Thema gibt Grünbaum in [Grü72]. Die erste kombinatorische Codierung von euklidischen Arrangements mittels $\{-,+\}$–Mustern findet sich in Ringel [Rin56] aus dem Jahr 1956. Aus den 80er Jahren sind vor allem die Arbeiten von Goodman und Pollack (für einen Überblick siehe [GP93]) über *Allowable Sequences of Permutations*, auf die wir noch zurückkommen werden, interessant. Der moderne Zugang über orientierte Matroide ist ausführlich in [BLS$^+$93] und, etwas leichter zugänglich, in [Zie94] dargestellt.

Im Gegensatz zum Großteil der Literatur werde ich Pseudogeradenarrangements nur in der euklidischen Ebene betrachten. Dabei kann man sich unter einer Pseudogeraden einfach eine Kurve vorstellen, die sich topologisch „wie eine Gerade verhält". Insbesondere fordern wir von einer Pseudogeraden ℓ,

- daß sie unbeschränkt ist, d.h. daß es zu jeder geschlossenen Kurve c einen Punkt von ℓ gibt, der nicht im Inneren von c liegt,
- daß sie sich nicht selbst schneidet und
- daß für je zwei Punkte der Ebene, die nicht auf ℓ liegen, eindeutig entscheidbar ist, ob sie auf derselben oder auf verschiedenen Seiten von ℓ liegen.

Definition. Eine Familie von Pseudogeraden in der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ heißt *Pseudogeradenarrangement*, wenn je zwei der Kurven genau einen Punkt gemeinsam haben, an dem sie sich überkreuzen.

Ein Pseudogeradenarrangement heißt *einfach*, wenn sich in jedem Punkt höchstens zwei der Pseudogeraden schneiden. Die Grösse eines Arrangements ist die Anzahl der Pseudogeraden. Ein Arrangement $\mathcal{A}$ induziert einen Zellenkomplex $\Delta(\mathcal{A})$, dessen 0–, 1– bzw. 2–dimensionale Zellen wir *Punkte*, *Kanten* bzw. *Flächen* des Arrangements nennen. Zwei Arrangements $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$ sehen wir als äquivalent an, wenn ihre Zellen–Komplexe $\Delta(\mathcal{A})$, $\Delta(\mathcal{A}')$ isomorph sind unter Beachtung der Numerierung der Pseudogeraden, d.h. wenn ein Isomorphismus $f : \Delta(\mathcal{A}) \to \Delta(\mathcal{A}')$ existiert, so daß für jede Kante $e \in \Delta(\mathcal{A})$ und jede Pseudogerade ℓ in $\mathcal{A}$ gilt: $e \in \ell \iff f(e) \in f(\ell)$.

Ein Pseudogeradenarrangement heißt *streckbar* bzw. *realisierbar*, wenn es zu einem Geradenarrangement äquivalent ist.

Da ich mich in dieser Arbeit nicht mit Fragen der Realisierbarkeit beschäftige, wird, wenn

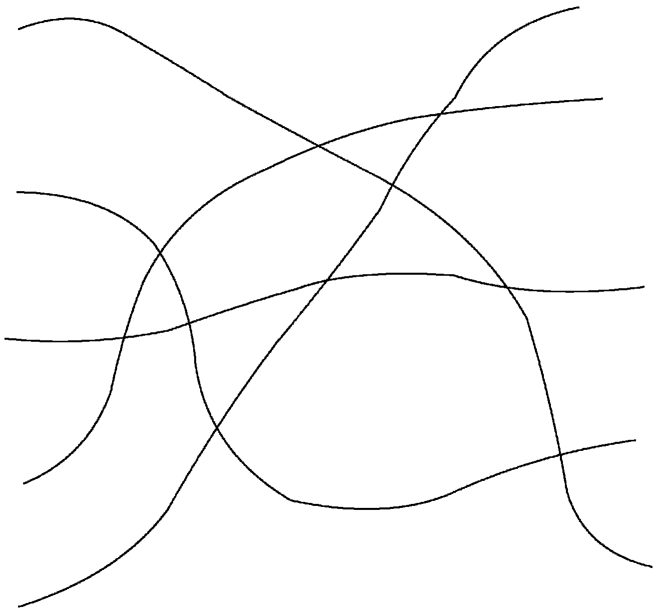

Abbildung 1. Ein einfaches Arrangement $\mathcal{A}_5$ mit 5 Pseudogeraden

nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt wird, ein Arrangement immer ein Pseudogeradenarrangement sein.

Satz 1.1. *Ein einfaches Arrangement der Grösse n teilt die Ebene in $\binom{n}{2}$ Punkte, $n(n-2)$ endliche und $2n$ unendliche Kanten und $\binom{n+1}{2}+1$ Flächen, von denen $2n$ unbeschränkt und $\binom{n-1}{2}$ beschränkt sind.*

Beweis. Die Punkte eines Arrangements sind die Schnittpunkte von Pseudogeraden. In einem einfachen Arrangement schneidet sich jedes Paar Pseudogeraden ℓ_i und ℓ_j für $1 \leq i < j \leq n$ genau einmal, d.h. die Anzahl der Punkte ist gleich der Anzahl der Möglichkeiten, aus n Zahlen zwei auszuwählen, also $\binom{n}{2}$.

Eine endliche Kante ist ein Teilstück einer Pseudogeraden ℓ zwischen zwei Punkten auf ℓ, das keinen weiteren Punkt des Arrangements enthält. Auf ℓ liegen genau $n-1$ Schnittpunkte und damit $n-2$ endliche Kanten. Die unendlichen Kanten sind die beiden Teilstücke von ℓ, die nach Entfernen der endlichen Kanten und der Schnittpunkte von ℓ übrigbleiben. Da das Arrangement n Pseudogeraden enthält, folgt, daß es $n(n-2)$ endliche und $2n$ unendliche Kanten gibt.

Verfolgen wir den Verlauf einer Pseudogeraden ℓ (in einer beliebigen Richtung), dann grenzen an jede Kante von ℓ genau zwei Flächen, eine links und eine rechts von ℓ. Alle diese Flächen sind verschieden. Insgesamt grenzt ℓ also an jeder Seite an genau n Flächen. Entfernen wir ℓ aus dem Arrangement, und zwar Kante für Kante, dann verschmelzen in jedem Schritt die beiden Flächen links und rechts der Kante zu einer. Da ℓ beliebig gewählt war, folgt, daß ein Arrangement der Größe $n \geq 2$ genau n Flächen (beschränkte und unbeschränkte) mehr hat als ein Arrangement der Größe $n-1$. Ein Arrangement der Größe $n=1$ hat genau $2 = \binom{2}{2}+1$ Flächen. Damit folgt per vollständiger Induktion, daß ein Arrangement der Größe $n \geq 2$ genau $n + \binom{n}{2} + 1 = \binom{n+1}{2} + 1$ Flächen hat. Da jede unendliche Fläche an zwei unendliche Kanten grenzt, sind $2n$ Flächen unendlich, und mit $\binom{n+1}{2} + 1 - 2n = \binom{n-1}{2}$ ist auch die behauptete Anzahl endlicher Flächen gezeigt. □

Eine beschränkte Fläche in $\mathcal{A}$ ist ein *(Pseudo)–Dreieck*, wenn sie mit genau drei Punkten und (damit) genau drei Kanten in $\mathcal{A}$ inzident ist.

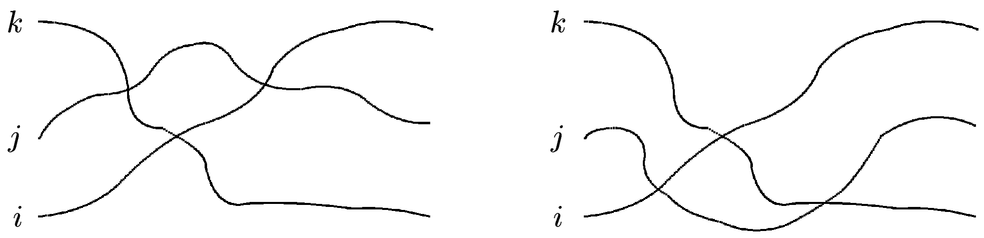

Abbildung 2. Ein elementarer Flip

Dreiecke sind besonders interessant, weil an ihnen lokale Transformationen möglich sind, um aus einem Arrangement ein anderes, nicht äquivalentes zu erhalten. Dazu schiebt man eine der an dem Dreieck anliegenden Pseudogeraden so über die ihr gegenüberliegende Ecke des Dreiecks, daß sie keinen anderen Punkt des Arrangements berührt oder überstreicht. Danach bilden die drei beteiligten Pseudogeraden wieder ein Dreieck, aber mit umgedrehter Orientierung. Eine solche Transformation heißt *Dreicksflip*. Wir werden darauf später noch ausführlich eingehen. Zunächst wollen wir uns der Frage widmen, wieviele Dreiecke ein einfaches Arrangement haben kann.

Grünbaum zeigt in [Grü72], daß die maximale Anzahl von Dreiecken in einfachen Pseudogeradenarrangements der Größe $n \geq 3$ in der projektiven Ebene $\frac{n(n-1)}{3}$ ist. Sein Argument läßt sich ohne weiteres in die euklidische Ebene übertragen. Es beruht auf der Beobachtung, daß in einem einfachen Arrangement zwei Dreiecke keine Kante gemeinsam haben können, weil sonst zwei der Ecken Schnittpunkt je dreier Pseudogeraden wären (siehe Abbildung 3). Also liegen in einem euklidischen Arrangement an einer Pseudogeraden höchstens $n-2$ Dreiecke, und weil ein Dreieck an 3 Pseudogeraden liegt, folgt als obere Schranke $\frac{n(n-2)}{3}$.

Anders verhält es sich mit der minimalen Anzahl der Dreiecke. Bereits Levi ([Lev26]) hat, wieder für die projektive Ebene, gezeigt, daß in einem Pseudogeradenarrangement der Größe $n \geq 3$ an jeder Pseudogeraden mindestens 3 Dreiecke liegen, woraus eine untere Schranke von n folgt. Es scheint allerdings nicht möglich, den Beweis auf den euklidischen Fall zu übertragen. Erst kürzlich ist es Felsner und Kriegel ([FK97]) gelungen, einen Beweis zu liefern, den ich hier übernehmen möchte.

Satz 1.2. *Sei $\mathcal{A}$ ein einfaches Arrangement der Größe $n \geq 3$, p_3 die Anzahl der Dreiecke in $\mathcal{A}$. Dann gilt*

$$n - 2 \;\leq\; p_3 \;\leq\; \frac{n(n-2)}{3}$$

Beweis. Zum Beweis der unteren Schranke betrachten wir den endlichen Teil des Arran-

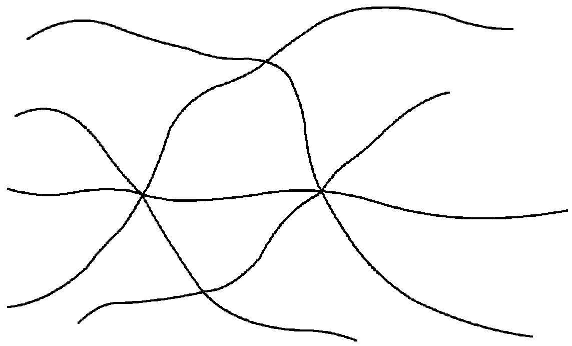

Abbildung 3. Zwei Dreiecke an einer Kante

gements, d.h. die Punkte und die beschränkten Kanten und Flächen, als planaren Graphen und markieren die beiden Seiten jeder Kante mit $\oplus$ oder $\ominus$. Dazu sei e eine solche Kante, die auf der Pseudogeraden ℓ liege. ℓ_1 und ℓ_2 seien die beiden Pseudogeraden, deren Schnittpunkte mit ℓ die Enden von e bilden. Der Schnittpunkt von ℓ_1 und ℓ_2 liegt auf einer Seite von ℓ und damit von e, und diese Seite von e markieren wir mit $\oplus$, die andere mit $\ominus$. Zur Illustration siehe Abbildung 4. Damit ist klar, daß die Anzahl der $\oplus$-Markierungen gleich der Anzahl der endlichen Kanten in $\mathcal{A}$ ist.

Zu jeder Kante e liegt an ihrer $\oplus$–Seite eine Dreiecksregion, die von den drei Pseudogeraden ℓ, ℓ_1, ℓ_2 eingeschlossen wird. Diese Region bezeichnen wir mit $T(e)$. $T(e)$ wird im Allgemeinen mehrere Flächen des Arrangements umfassen. Eine Fläche f ist genau dann zu einer Kante e an der $\oplus$–Seite inzident, wenn gilt: $f \subseteq T(e)$.

Behauptung. Ist f eine beschränkte Fläche eines einfachen Arrangements und $N(f)$ die Anzahl der Kanten von f, deren $\oplus$–Seiten ins Innere von f zeigen, dann gilt:

(i) Ist f ein Dreieck, dann ist $N(f) = 3$

(ii) Ist f ein Viereck, dann ist $N(f) = 2$

(iii) Ist f ein k–Eck und $k \geq 5$, dann ist $N(f) \leq 2$

Teil (i) folgt aus der Beobachtung, daß, wenn f ein Dreieck ist, für jede seiner Kanten e gilt $f = T(e)$.

Sei f jetzt ein Viereck und e_1, e_2 gegenüberliegende Kanten von f. Beide Kanten haben diesselben Kanten als Nachbarn, d.h. die beiden Pseudogeraden, die $T(e_1)$ und $T(e_2)$ begrenzen, sind gleich. Es ist leicht zu sehen, daß dann entweder $T(e_1) = f \cup T(e_2)$ oder $T(e_2) = f \cup T(e_1)$ gelten muß. Im ersten Fall zeigt die $\oplus$–Seite von e_1 und die $\ominus$–Seite von e_2 ins Innere von f, im zweiten Fall ist es umgekehrt. Für das andere Paar gegenüberliegender Kanten gilt dasselbe. Damit folgt Teil (ii) der Behauptung.

Die Behauptung für eine Fläche mit mehr als 4 Seiten folgt sofort, wenn wir zeigen können, daß je zwei Kanten mit $\oplus$–Seite im Inneren benachbart sind, d.h. einen Punkt gemeinsam haben, denn zwei Nachbarn einer Kante eines k–Ecks mit $k \geq 5$ können nicht benachbart sein.

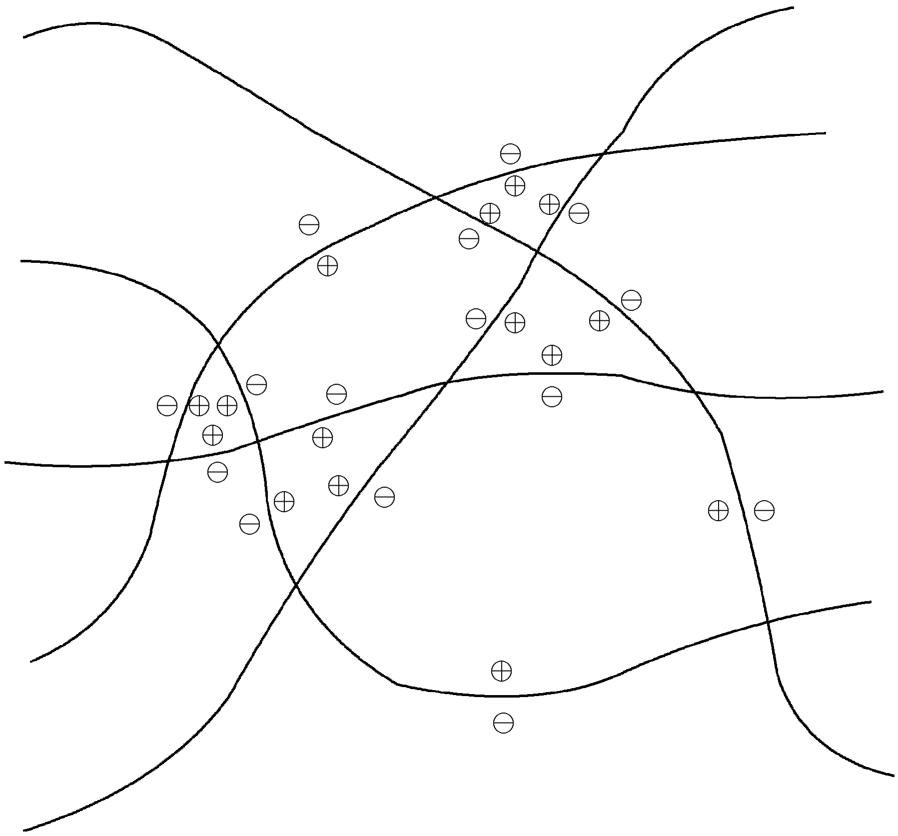

Abbildung 4. Markierung der Kanten von $\mathcal{A}_5$

Seien dazu also f eine solche Fläche mit $k \geq 5$ Seiten und $e_1, e_2, \ldots, e_k$ die anliegenden Kanten, im Uhrzeigersinn um f herum angeordnet, und $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_k$ die Pseudogeraden, auf denen die Kanten mit entsprechendem Index liegen. Die Kante e_1 habe ihre $\oplus$–Markierung in f. Wir wollen zeigen, daß dann die Markierung von e_i für $3 \leq i \leq k-1$ in f $\ominus$ sein muß. Da die $\oplus$–Seite von e_1 ins Innere von f zeigt, gilt $f \subseteq T(e_1)$.

Wir unterscheiden zwei Fälle. Zunächst sei $4 \leq i \leq k-2$. Die Pseudogerade ℓ_i teilt $T(e_1) \setminus f$ in drei Regionen R_1, R_2 und R_3 auf. Dabei wird R_1 von ℓ_2, ℓ_i und dem Kantenzug $e_3, \ldots, e_{i-1}$ begrenzt, R_2 von ℓ_2, ℓ_i und ℓ_k und R_3 von ℓ_i, ℓ_k und den Kanten $e_{i+1}, \ldots, e_{k-1}$. Abbildung 5 ist eine allgemeine Skizze der Situation.

Betrachten wir zuerst die Pseudogerade ℓ_{i-1}. Sie muß ℓ_2 schneiden, um in die Region R_1 zu gelangen, und betritt die Region R_2 über den Punkt $e_i \cap e_{i-1}$. Ganz analog kommt ℓ_{i+1} über ℓ_k in R_3 und von dort nach R_2 über $e_i \cap e_{i+1}$. Jetzt muß ℓ_{i-1} die Region R_2 über ℓ_k verlassen und ℓ_{i+1} über ℓ_2. Das ist aber nur möglich, wenn sich ℓ_{i-1} und ℓ_{i+1} in R_2 schneiden, d.h. die $\oplus$–Seite von e_i an R_2 liegt.

Ist $i = 3$, dann gibt es die Region R_1 nicht und $\ell_{i-1} = \ell_2$, aber der Weg von $\ell_{i+1} = \ell_4$ führt wie oben über ℓ_k in R_3 und über $e_3 \cap e_4$ in die Region R_2, die sie nur über ℓ_2 verlassen kann, womit wieder die $\oplus$–Markierung von e_3 in R_2 liegt.

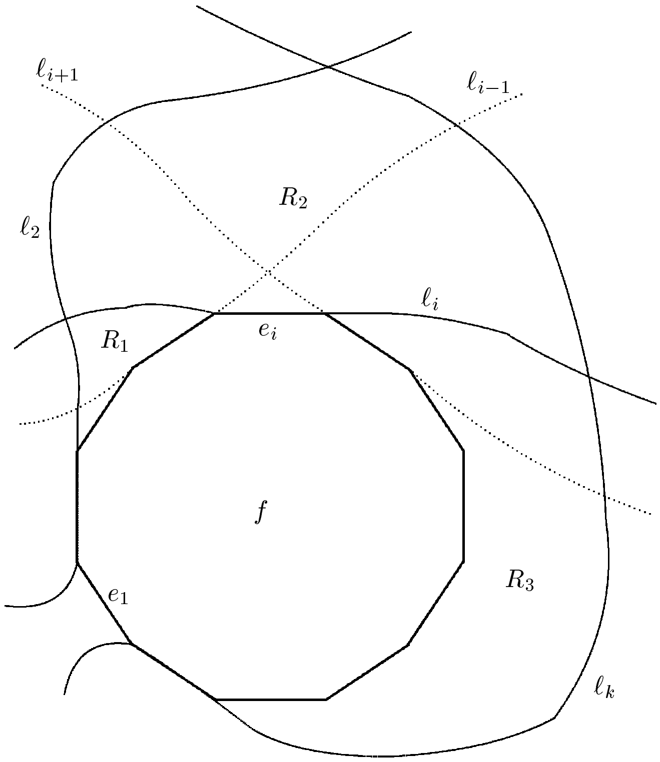

Abbildung 5. Kante e_1 hat $\oplus$ in f

Der Fall $i = k - 1$ ist symmetrisch zum Fall $i = 3$.

In jedem Fall liegt also die $\oplus$–Seite von e_i in der Region R_2, und damit in f die $\ominus$–Seite. $\triangle$

Mit den bisherigen Ergebnissen und der Beobachtung, daß eine Kante an einer unbeschränkten Fläche immer mit $\ominus$ markiert ist, können wir jetzt die $\oplus$–Markierungen eines Arrangements auf zwei Arten zählen. Sei E die Anzahl der endlichen Kanten, F die Anzahl der endlichen Flächen, dann haben wir

$$E = \sum_f N(f) \leq 2F + p_3$$

wobei die Summe über alle endlichen Flächen f genommen wird. Da $E = n(n-2)$ und $2F = (n-1)(n-2)$ folgt damit $n - 2 \leq p_3$. $\square$

2 Markierte Arrangements

Für die weiteren Betrachtungen wollen wir Arrangements in eine leichter zu handhabende Form bringen, die im wesentlichen darin besteht, ein „unten“ und „oben“ festzulegen. Es sei $\mathcal{A}$ ein Pseudogeradenarrangement der Größe $n \geq 1$ und F eine der unbeschränkten Flächen von $\mathcal{A}$. Die Pseudogeraden betrachten wir als orientiert, so daß F links von jeder Pseudogeraden liegt. Das Paar $(\mathcal{A}, F)$ nennen wir ein *markiertes* Arrangement mit

Nordfläche F. Zu F gibt es eine komplementäre unbeschränkte Fläche $\overline{F}$ in $\mathcal{A}$, die von F durch alle Pseudogeraden von $\mathcal{A}$ getrennt ist. $\overline{F}$ werden wir die *Südfläche* von $\mathcal{A}$ nennen. Hat man ein Koordinatensystem in der Ebene, kann man auf die explizite Angabe der Nordfläche verzichten. Sie ist dann einfach diejenige unbeschränkte Fläche, die fast den ganzen Strahl $(0, \infty)$ enthält.

Ein wichtiges Hilfsmittel, das in dieser Arbeit immer wieder in verschiedenen Verkleidungen vorkommen wird, ist das *orientierte Gerüst* eines markierten Arrangements $(\mathcal{A}, F)$, d.h. genauer der gerichtete Graph $G(\mathcal{A})$, dessen Knoten die Punkte von $\mathcal{A}$ und dessen Kanten die endlichen Kanten von $\mathcal{A}$ mit der von der Orientierung der Pseudogeraden induzierten Orientierung sind. Zur späteren Verwendung notieren wir noch, daß wir die Kantenmenge von $G(\mathcal{A})$ disjunkt in n Mengen $A_1, \dots, A_n$ zerlegen können, so daß A_i die Kanten auf ℓ_i enthält. Jede dieser Mengen A_i enthält die Kanten eines gerichteten Kantenzugs, der kein Kreis ist, weil sich die Pseudogeraden nicht selbt schneiden. Wir können sogar noch mehr sagen:

Lemma 1.3. *Sei $(\mathcal{A}, F)$ ein markiertes Pseudogeradenarrangement der Größe $n \geq 1$, dann ist das orientierte Gerüst $G(\mathcal{A})$ azyklisch.*

Beweis. Sei π die Permutation von $[n]$, die der Reihenfolge entspricht, in der man die Pseudogeraden von $\mathcal{A}$ trifft, wenn man sich „im Unendlichen" im Uhrzeigersinn von $\overline{F}$ nach F bewegt. Zum Beweis des Lemmas nehmen wir dessen Gegenteil an. Wenn $G(\mathcal{A})$ nicht azyklisch ist, wählen wir einen Zykel C, so daß die von den Kanten des Zykels eingeschlossene Region von $\mathcal{A}$ minimal ist. Es ist leicht zu sehen, daß diese Region eine Fläche von $\mathcal{A}$ sein muß. Die Kanten von C können um diese Fläche im Uhrzeigersinn oder im Gegenuhrzeigersinn orientiert sein. Da die beiden Fälle symmetrisch sind, betrachten wir nur den ersten Fall. Sind jetzt $e_1, e_2, \dots, e_k$ die Kanten von C und $\ell_{i_1}, \ell_{i_2}, \dots, \ell_{i_k}$ die Pseudogeraden, auf denen die jeweiligen Kanten liegen, dann schneiden sich zwei aufeinanderfolgende ℓ_{i_j} und $\ell_{i_{j+1}}$ in einem Knoten von C. Da C im Uhrzeigersinn orientiert ist, folgt mit der Definition von π, daß $i_j <_\pi i_{j+1}$. Weil C ein Zykel ist, folgt damit $i_1 <_\pi i_2 <_\pi \cdots <_\pi i_k <_\pi i_1$ und das ist ein Widerspruch. $\square$

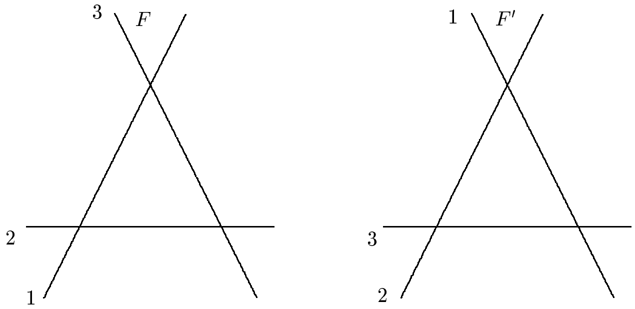

Abbildung 6. Zwei nicht äquivalente markierte Arrangements

Zwei markierte Arrangements wollen wir als äquivalent betrachten, wenn es einen Isomorphismus der induzierten Zellenkomplexe gibt, der neben der Numerierung der Pseudogeraden auch ihre Orientierung beachtet, d.h. wenn die orientierten Gerüste der Arrangements durch Umnumerieren der Pseudogeraden ineinander überführt werden können. Daß zwei isomorphe Arrangements nicht auch als markierte Arrangements isomorph sein müssen, zeigen schon die Arrangements in Abbildung 6 mit jeweils nur drei Pseudogeraden, d.h. diese Äquivalenz ist eine Verfeinerung der früher beschriebenen Äquivalenz zwischen nicht markierten Arrangements.

Praktisch werden wir nur mit Arrangements zu tun haben, deren Pseudogeraden „am linken Rand" der Zeichenebene von unten nach oben numeriert und von „links nach rechts" orientiert sind. Die Nordfläche liegt also „oben".

3 Sweeps

Eine wichtige algorithmische Technik in der Geometrie ist der *Sweep*. Edelsbrunner und Guibas ([EG89]) benutzen Sweeps mit einer Pseudogeraden zur Konstruktion des Seitenverbands von Arrangements. Informell besteht ein Sweep eines Arrangements darin, die Ebene mit einer Pseudogeraden ℓ_S, der *Sweepline*, von links nach rechts zu überstreichen und aus den Veränderungen der Inzidenzen von ℓ_S mit den Pseudogeraden des Arrangements Informationen über das Arrangement selbst zu gewinnen. Ist man nur an der Inzidenzstruktur des Arrangements interessiert, genügt es, endlich viele Instanzen von ℓ_S zu betrachten, zwischen denen sich die Inzidenzen mit den Zellen des Arrangements verändert haben. Die meisten Codierungen der kombinatorischen Eigenschaften eines Pseudogeradenarrangements stehen in engem Zusammenhang mit einem solchen *diskreten* Sweep des Arrangements. In diesem Abschnitt soll zunächst gezeigt werden, daß die Technik des Sweeps auf jedes Arrangement anwendbar ist, um danach den Zusammenhang zu einigen Codierungen deutlich zu machen.

Definition. Ein *Sweep* eines markierten Arrangements $(\mathcal{A}, F)$ der Größe $n \geq 1$ ist eine Folge $c_0, c_1, \dots, c_r$ von Kurven mit denselben fixierten Endpunkten $x \in F$ und $\overline{x} \in \overline{F}$, die folgenden Bedingungen genügen:

(1) Keine der Kurven enthält einen Punkt des Arrangements.

(2) Jede Kurve c_i hat genau einen Schnittpunkt mit jeder Pseudogeraden ℓ_j.

(3) Je zwei der Kurven haben nur die beiden Endpunkte x und $\overline{x}$ gemeinsam.

(4) Zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Kurven c_i und c_{i+1}, d.h. im Inneren der geschlossenen Kurve $c_i \cup c_{i+1}$, liegt genau ein Punkt des Arrangements.

(5) Jeder Punkt des Arrangements liegt zwischen zwei aufeinanderfolgenden Kurven, insbesondere liegen alle Punkte im Inneren der geschlossenen Kurve $c_0 \cup c_r$.

Diese Definition gibt für einen Sweep keine „Richtung" vor, d.h. die jeweils umgekehrte Folge von Kurven ist auch ein Sweep. Wie üblich betrachten wir Sweeps von links nach rechts. In Abbildung 7 ist ein Sweep des Arrangements aus Abbildung 1 dargestellt.

Lemma 1.4. *Sei $(\mathcal{A}, F)$ ein markiertes Arrangement von Pseudogeraden in der euklidischen Ebene, dann gibt es eine Folge von Kurven, die ein Sweep für $\mathcal{A}$ ist.*

Beweis. Da das orientierte Gerüst von $\mathcal{A}$ azyklisch ist, gibt es eine topologische Sortierung $v_1, v_2, \dots, v_r$ seiner Knoten. Wir halten $x \in F$ und $\overline{x} \in \overline{F}$ fest und definieren induktiv eine

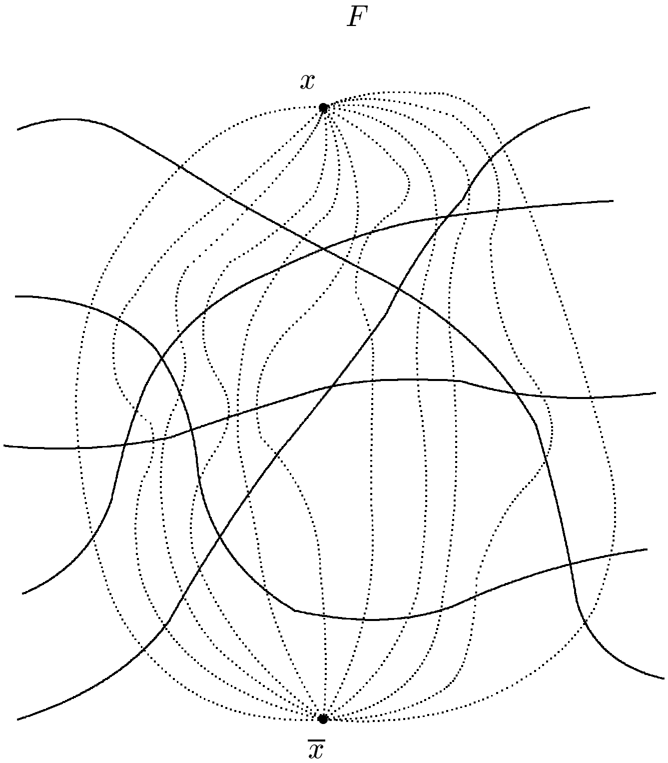

Abbildung 7. Ein Sweep des markierten Arrangements $(\mathcal{A}_5, F)$

Folge von Kurven c_i mit Endpunkten x und $\overline{x}$ für $i = 0, 1, \ldots, r$, so daß in jedem Schritt die folgende Invariante $(*)$ gültig bleibt:

$(*)$ Die Punkte $v_1, \ldots, v_i$ liegen links von c_i und die Punkte $v_{i+1}, \ldots, v_r$ rechts von c_i.

Sei R die Vereinigung aller beschränkten Zellen von $\mathcal{A}$. Um R legen wir ein ϵ–Streifen. Die Kurve c_0 definieren wir dann als Vereinigung von drei Kurven. Die erste verbindet x mit einem Punkt p auf dem äußeren Rand des ϵ–Streifens um R innerhalb von F, die zweite $\overline{x}$ mit einem Punkt q auf dem Rand des ϵ–Streifens in $\overline{F}$. Die dritte ist der äußere linke Rand des ϵ–Streifens zwischen p und q. Mit einem geeigneten ϵ ergibt das eine Kurve wie gewünscht.

Nehmen wir jetzt an, daß für ein $0 < i < r$ bereits die Kurven $c_0, \ldots, c_{i-1}$ konsistent mit der Invariante definiert sind. Es sei π die Permutation von $[n]$, die der Reihenfolge, in der die Pseudogeraden von $\mathcal{A}$ die Kurve c_0 zwischen $\overline{x}$ und x schneiden, entspricht. Sind $\ell_{i_1}, \ell_{i_2}, \ldots, \ell_{i_k}$ die Pseudogeraden, die sich im Punkt v_i schneiden, dann nehmen wir an, daß $i_1 <_\pi i_2 < \pi \ldots <_\pi i_k$. Wir betrachten die Region T, die von den Pseudogeraden ℓ_{i_1} und ℓ_{i_k} und der Kurve c_{i-1} eingeschlossen wird. Da v_i minimal in der Restriktion von $G(\mathcal{A})$ auf $\{v_i, v_{i+1}, \ldots, v_r\}$ ist und alle v_j mit $j < i$ links von c_{i-1} liegen, ist v_i der einzige Punkt von $\mathcal{A}$ in T. Dann können wir c_i definieren als den rechten Rand eines ϵ–Streifens um c_{i-1} und T (in Abbildung 8 ist die Situation skizziert). Mit einem passenden ϵ ergibt das die gewünschte Kurve. □

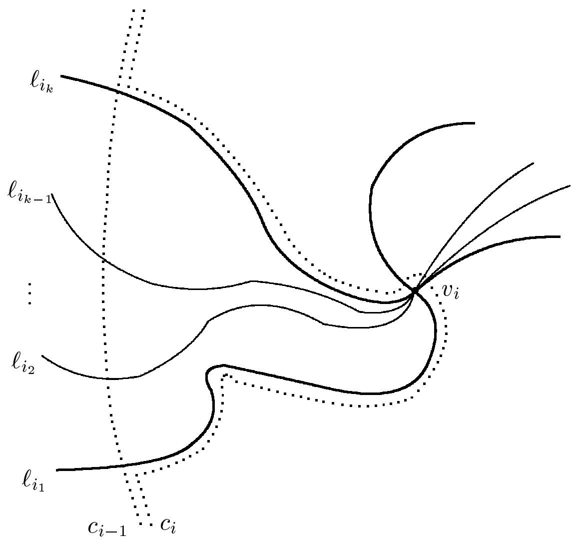

Abbildung 8. Definition von c_i aus c_{i-1}, ℓ_{i_1} und ℓ_{i_k}

4 Zulässige Folgen

Von Goodman und Pollack ([GP84]) stammt eine rein kombinatorische Codierung von Arrangements mittels *allowable sequences*, bzw. auf deutsch *zulässiger Folgen* von Permutationen, die folgendermaßen definiert sind:

Definition. Eine Folge $\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_r$ von Permutationen von $[n]$ heißt *zulässig*, wenn sie die folgenden Bedingungen erfüllt:

(1) π_0 ist die Identitätspermutation auf $[n]$.

(2) Jede Permutation π_i für $1 \leq i \leq r$ entsteht aus der vorhergehenden π_{i-1} durch Umkehren der Reihenfolge der Elemente eines zusammenhängenden Teilstücks M_i von π_{i-1}.

(3) Je zwei Elemente $x, y \in [n]$ sind gemeinsam in genau einem dieser Teilstücke M_i enthalten, d.h. vertauschen ihre Ordnung genau einmal.

Aus (1) und (3) folgt sofort, daß π_r, die letzte Permutation in der Folge, die Umkehrung der Identitatspermutation ist. Werden in jedem Schritt von π_{i-1} nach π_i genau zwei Elemente vertauscht, dann ist $r = \binom{n}{2}$ und die Folge heißt *einfach*.

Da die Anfangspermutation feststeht, kann eine zulässige Folge von Permutationen leicht und eindeutig aus der Folge ihrer *Moves* $M_1, M_2, \ldots, M_r$ rekonstruiert werden. Wir werden deshalb zulässige Folgen in beiden Darstellungen verwenden, je nach dem jeweiligen Kontext. Auf die Frage, welche Folgen $M_1, M_2, \ldots, M_r$ eine zulässige Folge von Permutationen ergeben, werden wir im einfachen Fall im Abschnitt 6, Satz 1.13 noch zurückkommen.

Mithilfe von Lemma 1.4 läßt sich jetzt sehr einfach der Zusammenhang mit Arrangements herstellen. Ist $c_0, c_1, \ldots, c_r$ ein Sweep eines markierten Pseudogeradenarrangements $(\mathcal{A}, F)$ der Größe n, dann induziert die Reihenfolge, in der jede der Kurven c_i die Pseudogeraden des Arrangements von „Süd“ nach „Nord“ schneidet eine Permutation π_i von $[n]$. Betrachten wir die Pseudogeraden $\ell_{i_1}, \ldots, \ell_{i_k}$, die sich im Punkt v_i von $\mathcal{A}$ schneiden. Nach Definition des Sweeps ist v_i der einzige Schnittpunkt, der zwischen c_{i-1} und c_i liegt. Daher bilden die Indizes $i_1, \ldots i_k$ dieser Pseudogeraden sowohl in π_{i-1} als auch in π_i ein zusammenhängendes Teilstück. Da sich je zwei der beteiligten Pseudogeraden in v_i überkreuzen, müssen diese Indizes in π_i und π_{i-1} in jeweils umgekehrter Reihenfolge stehen. Der Rest der beiden Permutationen ist gleich. Durch geeignete Umnumerierung der Pseudogeraden kann man auf jeden Fall erreichen, das π_0 die Identitätspermutation ist. Die Zulässigkeitsbedingung (3) ergibt sich daraus, daß sich alle Pseudogeraden gegenseitig genau einmal schneiden. War $\mathcal{A}$ ein einfaches Arrangement, dann ist $r = \binom{n}{2}$ und $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{\binom{n}{2}}$ eine einfache zulässige Folge.

Auf diese Art erhält man also aus jedem markierten Arrangement $(\mathcal{A}, F)$ über einen Sweep eine zulässige Folge von Permutationen. Im Beweis von Lemma 1.4 haben wir den Sweep $c_0, c_1, \ldots, c_r$ aus einer topologischen Sortierung $v_1, v_2, \ldots, v_r$ des orientierten Gerüsts $G(\mathcal{A})$ konstruiert, und wir sehen, daß die Knoten v_i den Moves M_i für $i = 1, 2, \ldots, r$ entsprechen, d.h. M_i enthält genau die Indizes der Pseudogeraden, die sich im Punkt v_i schneiden. Eine andere topologische Sortierung von $G(\mathcal{A})$ ergibt einen anderen Sweep und damit eine andere zulässige Folge. Betrachten wir zwei zulässige Folgen $\Sigma = M_1, M_2, \ldots, M_r$ und $\Sigma' = M'_1, M'_2, \ldots, M'_r$, die wir jeweils aus den topologischen Sortierungen $S = v_1, v_2, \ldots, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_r$ und $S' = v_1, v_2, \ldots, v_{i+1}, v_i, \ldots, v_r$, die sich nur in einer Transposition benachbarter Elemente unterscheiden, erhalten. Es ist $M_i = M'_{i+1}$ und $M'_i = M_{i+1}$ und $M_k = M'_k$ für alle $k < i$ und alle $k > i+1$. Die beiden Knoten v_i und v_{i+1} sind beide minimal in der Einschränkung von $G(\mathcal{A})$ auf $\{v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, \ldots, v_r\}$, also kann es keine Pseudogerade in $\mathcal{A}$ geben, die durch beide Punkte geht. Damit gilt $M_i \cap M_{i+1} = \emptyset = M'_i \cap M'_{i+1}$.

Wir nennen zwei zulässige Folgen Σ und Σ' *elementar äquivalent*, wenn Σ durch Vertauschen zweier benachbarter, disjunkter Moves in Σ' überführt werden kann und *äquivalent*, wenn es eine Folge $\Sigma = \Sigma_0, \Sigma_1, \ldots, \Sigma_m = \Sigma'$ gibt, so daß Σ_{k-1} und Σ_k elementar äquivalent sind für alle $k = 1, 2, \ldots, m$.

Da es möglich ist, jede topologische Sortierung eines gerichteten Graphen in jede andere durch eine Folge adjazenter Transpositionen von Knoten, die durch keine Kante verbunden sind, zu verwandeln, folgt, daß je zwei zulässige Folgen, die wir aus demselben Arrangement erhalten, äquivalent sind.

Beispiel. Die zulässige Folge Σ_5, die man aus dem Sweep von $\mathcal{A}_5$ in Abbildung 7 erhält, ist:

$$(12345)(13245)(13425)(14325)(41325)(41352)(43152)(43512)(43521)(45321)(54321)$$

Als Folge der Moves, die hier Transpositionen sind:

$$(23)(24)(34)(14)(25)(13)(15)(12)(35)(45)$$

Für den umgekehrten Weg, d.h. die Konstruktion eines Arrangements aus einer zulässigen Folge, benötigt man, wie Goodman und Pollack es ausgedrückt haben, nicht viel mehr als „Malen nach Zahlen“.

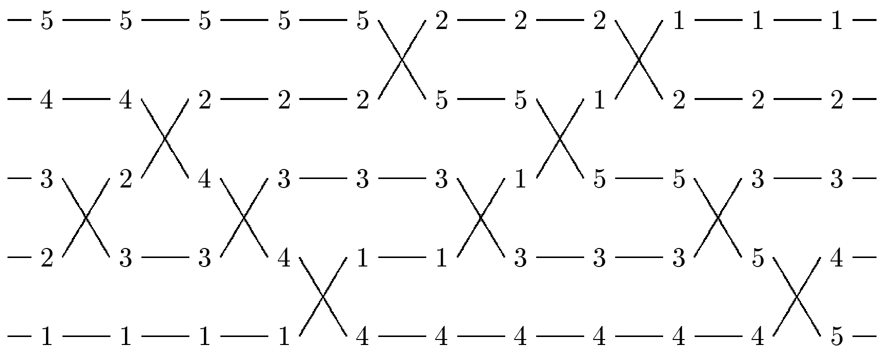

Abbildung 9. Konstruktion eines Arrangements aus der zulässigen Folge Σ_5

Sei $\Sigma = \pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_r$ eine zulässige Folge von Permutationen von $[n]$. Man beginnt damit, sich in der Ebene ein Gitter mit n horizontalen und $r+1$ vertikalen Linien zu denken. Die vertikalen Linien bezeichnen wir mit $p_0, p_1, \ldots, p_r$, den Schnittpunkt von p_i mit der j-ten horizontalen Linie (von unten) mit $p_i(j)$. Auf $p_i(j)$ schreibt man den Wert von $\pi_i(j)$. Jetzt muß man nur noch gleiche Zahlen auf direkt aufeinanderfolgenden vertikalen Linien mit einer Strecke verbinden, wie in Abbildung 9 zu sehen. Genauer beginnt man, n horizontale Strecken von links zu den Punkten $p_0(1)$ bis $p_0(n)$ zu zeichnen. Danach verbindet man schrittweise für $i = 1, 2, \ldots, r$ die Punkte $p_{i-1}(j)$ und $p_i(k)$ miteinander genau dann, wenn $\pi_{i-1}(j) = \pi_i(k)$. Da π_{i-1} und π_i Permutationen sind, ist diese Zuordnung eindeutig. Wegen der Zulässigkeitsbedingung (2) für Σ bilden die Punkte $p_{i-1}(j)$, deren „Gegenüber“ $p_i(k)$ nicht auf derselben Höhe liegt, ein zusammenhängendes Teilstück auf beiden vertikalen Linien p_{i-1} und p_i, das jeweils insgesamt auf derselben Höhe liegt. Das Verfahren kann also nicht steckenbleiben. Am Ende verlängert man die Strecken noch horizontal nach rechts von den Punkten $p_r(i)$ für $i = 1, \ldots, n$ aus. Das Pseudogeradenarrangement (Abbildung 10), das man so erhält, wird *Wiring-Diagramm* genannt. Als Nordfläche nimmt man natürlich die unbeschränkte Fläche über allen Pseudogeraden.

Die vertikalen Linien p_i, die wir bei der Konstruktion des Wiring-Diagramms benutzt haben, bilden im wesentlichen einen Sweep des Arrangements (man muß sie nur noch mit je einem Punkt in der Nord- bzw. Südfläche verbinden). Also ist die Abbildung von Arrangements auf zulässige Folgen surjektiv. Um auch die Injektivität zu zeigen, sei $(\mathcal{A}, F)$ ein markiertes Pseudogeradenarrangement mit einem Sweep $c_0, \ldots, c_r$, so daß für alle $i = 0, 1, \ldots, r$ die Reihenfolge, in der die Pseudogeraden von $\mathcal{A}$ die Kurve c_i schneiden, der Permutation π_i aus Σ entspricht. Dann ist ganz offensichtlich für alle $i = 1, \ldots, r$ der Teil von $\mathcal{A}$ zwischen c_{i-1} und c_i isomorph zu dem Teil des aus Σ konstruierten Wiring-Diagramms zwischen p_{i-1} und p_i. Diese Isomorphismen lassen sich zu einem Isomorphismus der beiden Arrangements verkleben.

Das Ergebnis dieses Abschnitts können wir in dem folgenden Satz zusammenfassen:

Satz 1.5. *Es gibt eine Bijektion zwischen Äquivalenzklassen von zulässigen Folgen von Permutationen von $[n]$ und markierten Pseudogeradenarrangements der Größe n.* $\square$

Als weitere Folgerung aus dem Beweis der Surjektivität ergibt sich noch das

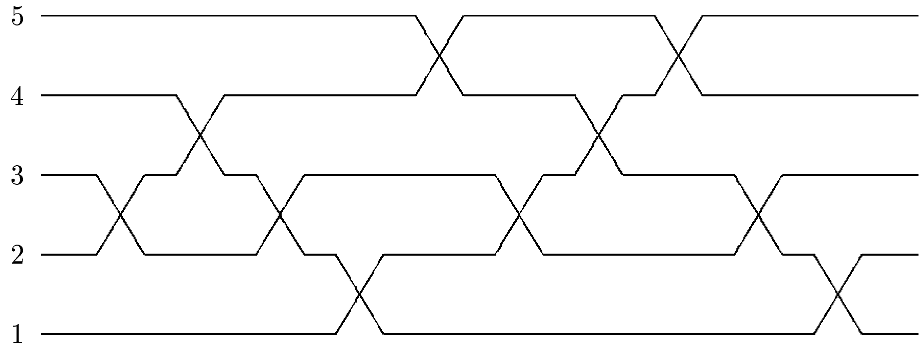

Abbildung 10. Wiring-Diagramm von $\mathcal{A}_5$

Lemma 1.6. *Jedes markierte Arrangement ist isomorph zu einem Wiring-Diagramm.* □

Lokale Folgen

Eine weitere, von den zulässigen Folgen abgeleitete Codierung von Pseudogeradenarrangements erhält man, wenn man für jede Pseudogerade ℓ_i, $i = 1, \ldots, n$, die Reihenfolge, in der sie von den anderen Pseudogeraden geschnitten wird, in einem Vektor α_i notiert. Bei einfachen Arrangements sind die α_i Permutationen von $[n] \setminus \{i\}$, ansonsten etwas allgemeiner geordnete Partitionen von $[n] \setminus \{i\}$, die nicht die leere Menge enthalten.

Definition. Seien $M_1, \ldots, M_r$ die Moves einer zulässige Folge Σ von Permutationen von $[n]$. Dann nennen wir für alle $i \in [n]$ die Teilfolgen $\sigma_i = M_{i_1}, M_{i_2}, \ldots, M_{i_{n-1}}$ aller Moves, die i enthalten, die *lokalen Folgen* von Σ.

Da i in allen Elementen von σ_i enthalten ist, werden wir i meist weglassen, d.h. auch die Folge $M_{i_1} \setminus \{i\}, M_{i_2} \setminus \{i\}, \ldots, M_{i_{n-1}} \setminus \{i\}$ als lokale Folge bezeichnen.

Beispiel. Die lokalen Folgen der zulässigen Folge Σ_5 sind:

$$\sigma_1 = 4352 \quad \sigma_2 = 3451 \quad \sigma_3 = 2415 \quad \sigma_4 = 2315 \quad \sigma_5 = 2134$$

Lemma 1.7. *Zwei zulässige Folgen sind äquivalent genau dann, wenn ihre lokalen Folgen übereinstimmen.*

Beweis. Seien Σ und Σ' äquivalente zulässige Folgen. Nach Definition der Äquivalenz gibt es eine Kette zulässiger Folgen $\Sigma = \Sigma_0, \Sigma_1, \ldots, \Sigma_m = \Sigma'$ so, daß sich Σ_k und Σ_{k+1} jeweils nur durch eine adjazente Vertauschung disjunkter Moves unterscheiden. Damit muß aber die relative Position nicht disjunkter Moves zueinander in allen Folgen der Kette, insbesondere in Σ und Σ' gleich bleiben, für die lokalen Folgen also $\sigma_i = \sigma_i'$ für alle $i \in [n]$ gelten. Umgekehrt können zwei zulässige Folgen Σ und Σ' mit $\sigma_i = \sigma_i'$ für alle $i \in [n]$ sich höchstens in der relativen Position disjunkter Moves zueinander unterscheiden. □

Kommen wir wieder zurück zu Arrangements. Sei Σ eine wie im Beweis zu Satz 1.5 aus einem Sweep des markierten Arrangement $\mathcal{A}$ der Größe n konstruierte zulässige Folge. Im

Abschnitt 2 hatten wir gesagt, daß die Kanten des orientierten Gerüsts $G(\mathcal{A})$ in n disjunkte Kantenzüge $A_1, \ldots, A_n$ zerlegt werden können. Diese Kantenzüge sind in Bijektion mit den lokalen Folgen von Σ. Dazu seien $v \to u$ eine Kante aus A_i und M_v und M_u die Teilmengen von $[n]$, die genau die Indizes der Pseudogeraden, die sich im Punkt v bzw. u des Arrangements schneiden, enthalten. Die Punkte des Arrangements entsprechen, wie wir gesehen haben, den Moves von Σ. Damit folgt, daß M_v und M_u Moves von Σ sind. Da $v \to u \in A_i$, liegen beide Punkte auf der Pseudogeraden ℓ_i, auf der u der direkte Nachfolger von v ist. Weil $i \in M_v$ und $i \in M_u$, folgt $M_v \in \sigma_i$ und $M_u \in \sigma_i$, und zwar ebenfalls direkt aufeinanderfolgend. Ist $\mathcal{A}'$ ein anderes markiertes Arrangement, dessen Pseudogeraden auch so indiziert seien, das die Nummerierung auf der linken Sweepkurve c_0 der Identitätspermutation entspricht, dann gilt, $\mathcal{A}'$ ist äquivalent zu $\mathcal{A}$ genau dann, wenn $G(\mathcal{A}')$ und $G(\mathcal{A})$ übereinstimmen. Das heißt, es gilt:

Satz 1.8. *Äquivalenzklassen markierter Arrangements der Größe $n \geq 1$ sind in Bijektion mit den lokalen Folgen einer zulässigen Folge von Permutationen von $[n]$.* □

5 Zonotopale Kachelungen

Eine sehr schöne graphische Darstellung von markierten Arrangements liefern zweidimensionale *zonotopale Kachelungen* eines *Zonotops*. Anschaulich ist das eine standardisierte Darstellung des dualen (trivialerweise planaren) Graphen des Gerüsts des Arrangements. In Abbildung 11 ist der Zusammenhang für unser Beispielarrangement $\mathcal{A}_5$ dargestellt. Dem Nachweis einer Bijektion zwischen markierten Arrangements und zonotopalen Kachelungen ist der Rest dieses Abschnitts gewidmet.

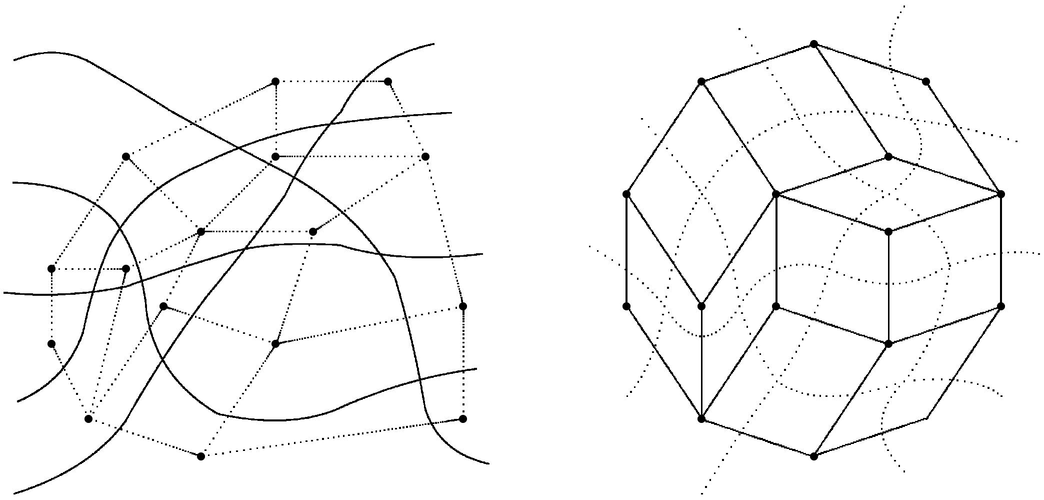

Abbildung 11. Dualer Graph als zonotopale Kachelung

Sei $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ eine Menge von Vektoren im $\mathbb{R}^2$. Aus einem Vektor v_i erhält man das *Geradensegment* $[-v_i, +v_i] = \{\lambda v_i \mid -1 \leq \lambda \leq 1\}$. Das zweidimensionale *Zonotop*

$Z(V)$ ist definiert als die Minkowski–Summe der Geradensegmente der Vektoren aus V:

$$Z(V) \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} [-v_i, +v_i] \quad = \quad \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \mid -1 \le \lambda_i \le 1 \text{ für alle } 1 \le i \le n \right\}$$

Da der Nullvektor zu einem Zonotop nichts beiträgt, wollen wir ihn von vorneherein aus V ausschließen. Ein zweidimensionales Zonotop $Z(V)$ ist ein zentralsymmetrisches, konvexes Polygon. Sind die Vektoren aus V paarweise linear unabhängig, dann ist $Z(V)$ ein $2n$–Eck.

Eine *zonotopale Kachelung* $\mathcal{K}$ ist eine Füllung des Zonotops $Z(V)$ mit Translationen von Zonotopen $Z(V_i)$, wobei jedes $V_i \subseteq V$ ist. Zeichnen wir eine Ecke P des Randes von $Z(V)$ aus, dann nennen wir $(\mathcal{K}, P)$ eine *markierte* zonotopale Kachelung mit *Nordpol* P.

Bestehen alle V_i aus genau zwei nicht-kollinearen Vektoren, sind also alle $Z(V_i)$ Parallelogramme, bzw. bei Vektoren gleicher Länge Rhomben, dann ist $\mathcal{K}$ eine *einfache* oder *kubische* zonotopale Kachelung.

Es werden in dieser Arbeit noch einige Bilder von zonotopalen Kachelungen zu sehen sein, die alle ein (im Rahmen der Zeichengenauigkeit) regelmäßiges $2n$–Eck füllen, also ein Zonotop einer Menge Vektoren gleicher Länge. Das ist keine Einschränkung. Betrachtet man nämlich die Äquivalenzklassen bezüglich des von einer markierten zonotopalen Kachelung induzierten Zellenkomplexes, dann ist offensichtlich jede zonotopale Kachelung eines Zonotops $Z(V)$ mit $|V| = n$, wobei die Vektoren aus V paarweise nicht-kollinear sind, äquivalent zu einer Kachelung eines regelmäßigen $2n$–Ecks.

Jede Kante einer zonotopalen Kachelung ist eine Translation eines der Geradensegmente $[-v_i, +v_i]$. Sei $\mathcal{E}_i$ die Menge der Kanten, die Translationen von $[-v_i, +v_i]$ sind, dann bilden die $\mathcal{E}_i$ für $i = 1, \ldots, n$ eine Partition der Menge aller Kanten der Kachelung. Gibt es keine linear abhängigen Vektoren in V, sind die $\mathcal{E}_i$ gerade die Parallelklassen der Kanten. Die *i-te Zone* $\mathcal{Z}_i$ einer Kachelung $\mathcal{K}$ ist definiert als die Vereinigung aller Kacheln, die eine Kante aus $\mathcal{E}_i$ enthalten. Von diesen Zonen haben Zonotope vermutlich auch ihren Namen.

Lemma 1.9. *Sei $Z(V)$ das Zonotop zu einer Menge $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ paarweise nicht kollinearer Vektoren im $\mathbb{R}^2$. Dann gilt für den Flächeninhalt von $Z(V)$ die Beziehung:*

$$\mathrm{vol}(Z(V)) \;=\; \sum_{1 \le i < j \le n} \mathrm{vol}(Z(\{v_i, v_j\}))$$

Beweis. $Z(V)$ ist ein zentralsymmetrisches $2n$–Eck. Wir nehmen an, daß die Vektoren so numeriert sind, daß die entsprechenden Segmente in der zyklischen Reihenfolge $[-v_1, +v_1], [-v_2, +v_2], \ldots, [-v_n, +v_n]$ den Rand von $Z(V)$ bilden. Dann konstruieren wir eine Kachelung von $Z(V)$, indem wir für $j = 2, \ldots, n$ die Parallelogramme $Z(\{v_1, v_j\})$ direkt an den Segmenten $[-v_j, v_j]$ am Rand einer Seite von $Z(V)$ bilden. Der Rest von $Z(V)$ ist das Zonotop $Z(V \setminus \{v_1\})$ und damit ist

$$\mathrm{vol}(Z(V)) = \mathrm{vol}(Z(V \setminus \{v_1\})) + \sum_{j=2}^{n} \mathrm{vol}(Z(\{v_1, v_j\}))$$

Die folgende Abbildung 12 sollte die Konstruktion und auch die Folgerung für den Flächeninhalt klarmachen:

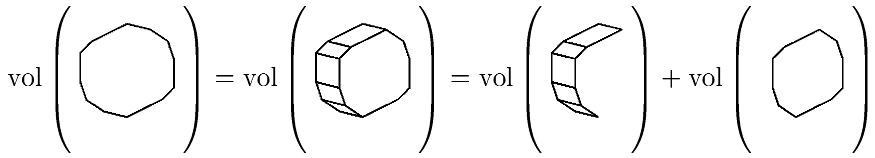

Abbildung 12. Das Volumen eines Zonotops

Genauso können wir auch für $i = 2, 3, \ldots, n-1$ folgern, daß:

$$\mathrm{vol}(Z(\{v_i, \ldots, v_n\})) = \mathrm{vol}(Z(\{v_{i+1}, \ldots, v_n\})) + \sum_{j=i+1}^{n} \mathrm{vol}(Z(\{v_i, v_j\}))$$

Insgesamt erhalten wir:

$$\mathrm{vol}(Z(V)) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \mathrm{vol}(Z(\{v_i, v_j\})) = \sum_{1 \le i < j \le n} \mathrm{vol}(Z(\{v_i, v_j\}))$$

$\square$

Als nächstes wollen wir nun ein Äquivalent zu Lemma 1.4 für zonotopale Kachelungen zeigen. Sei $Z(V)$ das Zonotop zu einer Menge $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ paarweise linear unabhängiger Vektoren im $\mathbb{R}^2$ mit $\vec{0} \notin V$, also ein zentralsymmetrisches $2n$–Eck, und P eine Ecke von $Z(V)$. Wir drehen $Z(V)$ so, daß P der eindeutige höchste Punkt von $Z(V)$ ist, d.h. der Punkt mit der maximalen y–Koordinate. Dann ist die P gegenüberliegende Ecke $\overline{P}$ der tiefste Punkt. Die Vektoren sollen in der Reihenfolge numeriert sein, in der man die korrespondierenden Kanten von $Z(V)$ trifft, wenn man von $\overline{P}$ nach P den linken Rand von $Z(V)$ entlangläuft. Dies ist ein kürzester Pfad, d.h. ein Kantenzug minimaler Länge, in $Z(V)$ von $\overline{P}$ nach P. In einer zonotopalen Kachelung $\mathcal{K}$ von $Z(V)$ gibt es noch weitere kürzeste Pfade von $\overline{P}$ nach P.

Definition. Mit diesen Festsetzungen definieren wir einen *Sweep* der markierten zonotopalen Kachelung $(\mathcal{K}, P)$ als eine Folge $p_0, p_1, \ldots, p_r$ von kürzesten Pfaden von $\overline{P}$ nach P mit den Eigenschaften:

(1) Je zwei aufeinanderfolgende Pfade p_{i-1} und p_i haben genau eine *Kachel* $K_i = Z(V_i)$ zwischen sich, d.h. im Inneren der geschlossenen Kurve $p_{i-1} \cup p_i$.

(2) Jede Kachel $K_i = Z(V_i)$ liegt zwischen genau einem Paar aufeinanderfolgender Pfade p_{i-1} und p_i. Insbesondere ist p_0 der linke und p_r der rechte Rand von $Z(V)$.

Folgerungen. In einem Zonotop, das wie oben so rotiert ist, daß eine ausgezeichnete Ecke P der höchste Punkt ist, gibt es keine waagrechte Kante. Da die Vektoren aus V paarweise nicht kollinear waren, sind sie es auch nach der Rotation, und es könnte höchstens ein Paar gegenüberliegender Kanten e und $\overline{e}$ geben, die waagrecht sind. Aber wegen der Konvexität des Zonotops würde für so ein Paar $e, \overline{e}$ folgen, daß alle Punkte auf e maximale und alle Punkte auf $\overline{e}$ minimale (oder umgekehrt) y–Werte haben, und das widerspräche unserer Forderung an P und $\overline{P}$. Da jede Kante in der zonotopalen Kachelung parallel zu einer Kante (bzw. einem Paar gegenüberliegender Kanten) des Zonotops ist, gibt es also überhaupt keine waagrechte Kante in der Kachelung. Zwei Folgerungen daraus wollen wir festhalten:

(*i*) Die kürzesten Pfade in $\mathcal{K}$ von $\overline{P}$ nach P sind genau die y–monotonen Pfade von $\overline{P}$ nach P.

(*ii*) Jede Kachel $K = Z(V_i)$ hat je eine eindeutige höchste und tiefste Ecke. Damit können wir für jede Kachel eindeutig einen linken und einen rechten Rand unterscheiden.

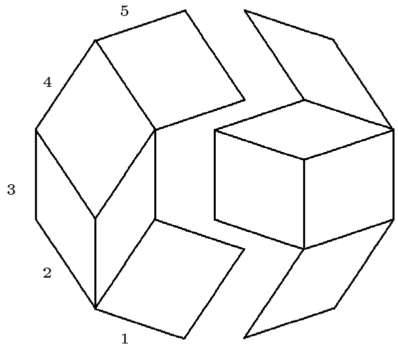

Abbildung 13. Translation an einem Sweep-Pfad

Ein Sweep induziert eine lineare Ordnung $K_1, K_2, \ldots, K_r$ auf den Kacheln mit der Eigenschaft, daß die Vereinigung der Kacheln jedes Anfangsstücks $K_1, \ldots, K_i$ für $1 \leq i \leq r$ von der Vereinigung der restlichen Kacheln $K_{i+1}, \ldots, K_r$ durch eine Translation parallel zur x–Achse getrennt werden kann. Diese Eigenschaft nennen wir *Trennbarkeit*. Zur Illustration siehe Abbildung 13. Umgekehrt induziert eine lineare Ordnung $K_1, K_2, \ldots, K_r$ der Kacheln, die die Trennbarkeitseigenschaft hat, einen Sweep der Kachelung. Man definiert einfach p_i als den linken Rand der Vereinigung der Kacheln $K_{i+1}, \ldots, K_r$ für $i = 0, 1, \ldots, r$. Um zu zeigen, daß eine zonotopale Kachelung einen Sweep hat, genügt es also, zu zeigen, daß es eine lineare Ordnung der Kacheln mit der Trennbarkeitseigenschaft gibt.

Lemma 1.10. *Jede markierte zonotopale Kachelung* $(\mathcal{K}, P)$ *hat einen Sweep.*

Beweis. Wir definieren einen gerichteten Graphen G, dessen Knoten die Kacheln von $\mathcal{K}$ sind. Die gerichteten Kanten von G wollen wir *Pfeile* nennen, um Verwechslungen mit den Kanten von $\mathcal{K}$ auszuschließen. Sind K und K' Kacheln von $\mathcal{K}$, dann ist $K \to K'$ ein Pfeil von G genau dann, wenn $K \cap K'$ eine rechte Kante von K und eine linke Kante von K' ist. Mit anderen Worten entspricht jeder Kante e der Kachelung, die nicht im Rand von $Z(V)$ liegt, ein Pfeil von G, der von der Kachel links von e in die Kachel rechts von e zeigt. Die obige Folgerung (*ii*) zeigt, daß diese Pfeile wohldefiniert sind. Im Lichte der (noch zu zeigenden) Korrespondenz zwischen zonotopalen Kachelungen und Pseudogeradenarrangements ist dieser Graph nichts anderes als das orientierte Gerüst des Arrangements.

Angenommen, es gibt einen Zykel C in G. Sei $K \to K'$ ein Pfeil dieses Zykels, und $e = K \cap K'$ die entsprechende Kante von $\mathcal{K}$. Es seien $f_1, \ldots, f_k$ die linken Kanten von K', von unten nach oben numeriert, p_1 ein y–monotoner Pfad von $\overline{P}$ zur tiefsten Ecke von K' und p_2 ein y–monotoner Pfad von der höchsten Ecke von K' zu P. Dann ist $p = p_1, f_1, \ldots f_k, p_2$ ein y–monotoner Pfad von $\overline{P}$ nach P mit $e \in p$. Die Situation ist in Abbildung 14 skizziert. Und es gilt: Jede Kachel X mit $K' \to X$ liegt rechts von p. Um den Zykel C zu schließen, muß es einen Pfeil in G geben, der eine Kante von p von rechts nach links überquert. Aber das ist ein Widerspruch.

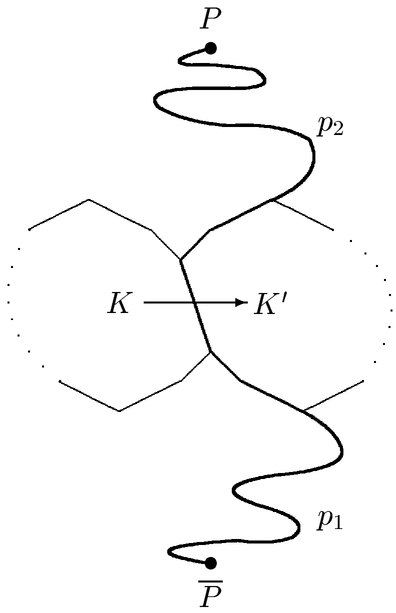

Abbildung 14. Illustration zum Beweis von Lemma 1.10

Es bleibt noch zu zeigen, daß jede topologische Sortierung dieses gerichteten Graphen G die Trennbarkeitseigenschaft hat. Sei dazu $K_1, K_2, \ldots, K_r$ eine topologische Sortierung von G. K_1 ist eine Quelle von G, das heißt die linken Kanten der Kachel K_1 liegen alle am linken Rand des der Kachelung $\mathcal{K}$ zugrundeliegenden Zonotops $Z(V)$. K_1 kann also ganz offensichtlich von $K_2, \ldots, K_r$ getrennt werden.

Sei $1 < j < r$. Wir nehmen an, daß $\mathcal{L} = K_1 \cup K_2 \cup \cdots \cup K_{j-1}$ von $\mathcal{R} = K_j \cup K_{j+1} \cup \cdots \cup K_r$ getrennt werden kann und wollen zeigen, daß dann auch $\mathcal{L} \cup K_j$ von $\mathcal{R} \setminus K_j$ getrennt werden kann. Dabei soll der ganze linke Rand des der Kachelung zugrundeliegenden Zonotops $Z(V)$ zu $\mathcal{L}$ gehören und analog der rechte Rand von $Z(V)$ zu $\mathcal{R}$. Damit erreichen wir, daß sowohl $\mathcal{L}$ als auch $\mathcal{R}$ immer zusammenhängend sind, und ersparen uns triviale, aber unangenehme Fallunterscheidungen. In der in Abbildung 15 dargestellten Folge von Trennungen ist das jedoch weggelassen.

Seien $e_1, \ldots, e_k$ die linken und $e_{k+1}, \ldots, e_{2k}$ die rechten Kanten von K_j, im Uhrzeigersinn um K_j herum numeriert. Da K_j eine Quelle in der Restriktion von G auf $K_j, \ldots, K_r$ ist, bilden $e_1, \ldots, e_k$ ein zusammenhängendes Teilstück des linken Randes von $\mathcal{R}$, das von den Ecken $e_k \cap e_{k+1}$ und $e_{2k} \cap e_1$ begrenzt wird. Damit kann K_j aus $\mathcal{R}$ herausgelöst werden. Andererseits, weil $\mathcal{L}$ und $\mathcal{R}$ „zusammenpassen“, müssen $e_1, \ldots, e_k$ und $e_k \cap e_{k+1}$ und $e_{2k} \cap e_1$ in derselben Reihenfolge und jeweils in derselben Höhe auch im rechten Rand von $\mathcal{L}$ ein zusammenhängendes Teilstück bilden. Also „passt“ K_j auch an $\mathcal{L}$ und kann damit auch zusammen mit $\mathcal{L}$ von $\mathcal{R} \setminus K_j$ getrennt werden.

Damit ist das Lemma gezeigt. □

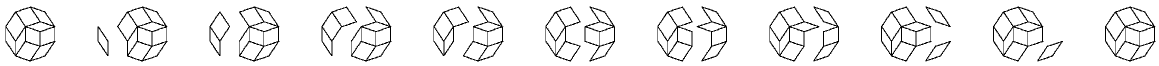

Abbildung 15. Eine „Trennfolge" von $\mathcal{K}_5$

Lemma 1.11. *Es gibt eine Bijektion zwischen Äquivalenzklassen von zulässigen Folgen von Permutationen von $[n]$ und markierten zonotopalen Kachelungen von Zonotopen $Z(V)$ mit $|V| = n$.*

Beweis. Sei $Z(V)$ das Zonotop zu den Vektoren $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ im $\mathbb{R}^2$ und $(\mathcal{K}, P)$ eine markierte zonotopale Kachelung von $Z(V)$. Mit jedem Pfad p_i, $i = 0, 1, \ldots, r$ eines Sweeps von $\mathcal{K}$ assoziieren wir eine Folge π_i der Indizes der Parallelklassen der Kanten des Pfades in der Reihenfolge von $\overline{P}$ nach P. D.h. $\pi_i(j) = k$ gdw. die j–te Kante von unten im Pfad p_i in der Klasse $\mathcal{E}_k$ ist. Dann ist π_0 sicher eine Permutation von $[n]$, und bei geeigneter Indizierung der Vektoren aus V sogar die Identitätspermutation. Zwischen zwei aufeinanderfolgenden Pfaden p_{i-1} und p_i liegt definitionsgemäß genau eine Kachel K, deren linke Kanten in p_{i-1} ein zusammenhängendes Teilstück bilden ebenso wie die rechten Kanten in p_i. Da K ein Zonotop ist, sind die linken Kanten aus denselben Parallelklassen wie die rechten, nur in umgekehrter Reihenfolge. Abgesehen davon sind p_{i-1} und p_i gleich. Wenn also π_{i-1} eine Permutation von $[n]$ ist, dann auch π_i und die Indizes der Kanten von K erfüllen die Bedingungen an einen Move M_i. Daß π_r die Umkehrung von π_0 ist, folgt daraus, daß $Z(V)$ ein Zonotop ist. Damit muß jedes Paar $j < k \in [n]$ zwischen π_0 und π_r mindestens einmal vertauscht werden. Es bleibt also noch zu zeigen, daß jedes dieser Paare höchstens einmal vertauscht wird. Dazu verwenden wir das Ergebnis von Lemma 1.9, daß der Flächeninhalt eines zweidimensionalen Zonotops gegeben ist durch

$$\mathrm{vol}(Z(V)) = \sum_{i<j} \mathrm{vol}(Z(\{v_i, v_j\}))$$

Das Umdrehen von $i_1, i_2, \ldots, i_k$ korrespondiert mit einer Kachel $K = Z(\{v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_k}\})$, die selbst ein Zonotop ist. Nach obiger Formel ist $\mathrm{vol}(K) = \sum_{s<t} \mathrm{vol}(Z(\{v_{i_s}, v_{i_t}\}))$. Jedes Paar Indizes $j < k$ wird, wie gesehen, mindestens einmal vertauscht, d.h. der positive Summand $\mathrm{vol}(Z(\{v_j, v_k\}))$ kommt mindestens einmal vor. Damit ist der gesamte Flächeninhalt von $Z(V)$ aber bereits erschöpft, also werden j und k auch höchstens einmal vertauscht.

Im Beweis des vorherigen Lemmas haben wir gesehen, daß Sweeps von $\mathcal{K}$ topologischen Sortierungen des Graphen G entsprechen. Die Indizes der Kacheln in der Sortierung ergeben dann die Moves der zulässigen Folge. Seien Σ, Σ' zulässige Folgen, die wir aus den Sweeps von $\mathcal{K}$ zu den topologischen Sortierungen $\kappa = K_1, \ldots, K_i, K_{i+1}, \ldots, K_r$ und $\kappa' = K_1, \ldots, K_{i+1}, K_i, \ldots, K_r$ erhalten. κ und κ' unterscheiden sich also nur durch eine adjazente Transposition. Die Kacheln K_i und K_{i+1} sind beide Quellen in der Restriktion von G auf $K_i, K_{i+1}, \ldots, K_r$, damit liegt der linke Rand beider Kacheln im Pfad p_{i-1} beider Sweeps. Bis einschließlich diesem $(i-1)$–ten Pfad sind die beiden Sweeps identisch.

Da die Indizes der Parallelklassen der Kanten von p_{i-1} eine Permutation von $[n]$ bilden, kann keine linke Kante von K_i in einer gemeinsamen Klasse mit einer linken Kante von K_{i+1} sein, d.h. die korrespondierenden Moves M_i und M_{i+1} in Σ bzw. M'_i und M'_{i+1} in Σ' sind disjunkt. Wie im Beweis von Satz 1.5 folgt: Je zwei zulässige Folgen, die derselben Kachelung entsprechen, sind äquivalent.

Es bleibt zu zeigen, wie man eine zonotopale Kachelung aus einer zulässigen Folge erhält. Seien $M_1, \ldots, M_r$ die Moves einer zulässigen Folge $\pi_0, \ldots, \pi_r$ von Permutationen von $[n]$. Wir zeichnen zunächst den linken Rand eines regelmäßigen $2n$–Ecks Z so, daß eine ausgezeichnete Ecke P der höchste und die gegenüberliegende Ecke $\overline{P}$ der tiefste Punkt ist. Die Kanten beschriften wir von unten nach oben mit $1, 2, \ldots, n$, also in Übereinstimmung mit π_0. Dann konstruieren wir eine Kachelung von Z von links nach rechts, indem wir für $i = 1, 2, \ldots, r$ die durch den Move M_i mit $|M_i| = k$ festgelegten Kanten zu einem regelmäßigen $2k$–Eck ergänzen, etwa durch Spiegelung im Mittelpunkt der Strecke durch den Anfangspunkt der tiefsten und den Endpunkt der höchsten Kante, und danach die neuen Kanten entsprechend beschriften. Aus den Eigenschaften der zulässigen Folge ergibt sich, daß nach jedem Schritt die folgenden Invarianten gültig bleiben:

(1) Der rechte Rand der bisherigen Konstruktion ist ein y-monotoner Pfad p_i von $\overline{P}$ nach P.

(2) Die Beschriftung dieses Pfads p_i entspricht π_i.

Da π_r die Umkehrung von π_0 ist, sind alle Kanten in p_r rechte Kanten und damit Kanten des rechten Rands von Z. Wir haben also eine zonotopale Kachelung von Z. Man konstruiert leicht eine Menge von Vektoren $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$, so daß $Z = Z(V)$.

Sind Σ und Σ' zwei elementar äquivalente zulässige Folgen, d.h. es gibt ein k, so daß $M_k = M'_{k+1}$, $M'_k = M_{k+1}$ und $M_i = M'_i$ für alle $i \neq k$, dann haben in obiger Konstruktion die Kacheln K_k und K_{k+1} keine Kanten gemeinsam. Es ist also egal, welche der beiden wir zuerst anfügen, die resultierende Kachelung ist diesselbe. Daß dagegen aus zwei nicht äquivalenten zulässigen Folgen verschiedene Kachelungen konstruiert werden, ist offensichtlich.

□

Als direkte Folgerung aus diesem Lemma und Satz 1.5 erhalten wir den

Satz 1.12. *Es gibt eine Bijektion zwischen Äquivalenzklassen von markierten Pseudogeradenarrangements der Größe n und markierten zonotopalen Kachelungen eines Zonotops $Z(V)$ mit $|V| = n$.* □

6 Die schwache Bruhat Ordnung

Sei $(\mathcal{A}, F)$ ein einfaches markiertes Arrangement der Grösse n und $P_1, \ldots, P_r$ eine topologische Sortierung des orientierten Gerüsts $G(\mathcal{A})$. Da $\mathcal{A}$ einfach ist, ist $r = \binom{n}{2}$ und jeder Punkt P_k ist Schnittpunkt zweier eindeutiger Pseudogeraden ℓ_i und ℓ_j. Wir können $P_1, \ldots, P_r$ also als Folge von Paaren $(i_1, j_1), \ldots, (i_r, j_r)$ schreiben und mit Satz 1.5 ist das die Folge der Moves einer einfachen zulässigen Folge von Permutationen Σ, von denen jeder die Transposition zweier benachbarter Elemente repräsentiert. Die Eigenschaften einer zulässigen Folge ergeben, daß Σ eine maximale Kette in der schwachen Bruhat Ordnung ist.

Die *schwache Bruhat Ordnung* ist eine (Halb–)Ordnung auf der symmetrischen Gruppe S_n definiert durch: $\pi <_w \sigma$, wenn σ aus π durch eine Folge von invertierenden adjazenten Transpositionen erhalten werden kann. Das minimale Element in dieser Ordnung ist die Identitätspermutation, das maximale deren Umkehrung.

Der folgende Satz charakterisiert diejenigen Folgen von Paaren, die eine maximale Kette in der schwachen Bruhat Ordnung bilden, und damit einfache zulässige Folgen bzw. einfache markierte Arrangements beschreiben. Nach Lemma 1.6 gibt es eine Repräsentation eines solchen Arrangements als Wiring–Diagramm oder auch allgemeiner einfach als Arrangement x–monotoner Pseudogeraden, bezüglich der diese Folge die Schnittpunkte nach wachsender x–Koordinate ordnet.

Satz 1.13. *Sei $n \geq 3$ und $S = (i_1, j_1), (i_2, j_2), \ldots, (i_{\binom{n}{2}}, j_{\binom{n}{2}})$ eine Folge von Paaren mit $(i_t, j_t) \in [n] \times [n]$ und $i_t < j_t$ für alle $1 \leq t \leq \binom{n}{2}$, dann ist S die Folge der Transpositionen einer maximalen Kette in der schwachen Bruhat Ordnung auf der symmetrischen Gruppe S_n genau dann, wenn S die folgenden Bedingungen für alle $1 \leq i < j < k \leq n$ erfüllt:*

(*i*) $(i, j) \in S$

(*ii*) *entweder* $(i,j) \prec_S (i,k) \prec_S (j,k)$ *oder* $(j,k) \prec_S (i,k) \prec_S (i,j)$

Beweis. Sei zuerst $S = (i_1, j_1), \ldots, (i_{\binom{n}{2}}, j_{\binom{n}{2}})$ eine Folge, die (i) und (ii) erfüllt.

Eine einfache Folgerung aus (i) und der Voraussetzung $|S| = \binom{n}{2}$ ist, daß jedes Paar $(i,j) \in [n] \times [n]$ mit $i < j$ in der Folge genau einmal vorkommt.

Wir versuchen jetzt, aus S eine Folge $\pi_0, \pi_1, \ldots$ von Permutationen aufzubauen mit $\pi_0 = (1, 2, \ldots, n)$, so daß π_{t+1} aus π_t entsteht, indem i_{t+1} mit j_{t+1} vertauscht wird, falls $\pi_t^{-1}(j_{t+1}) - \pi_t^{-1}(i_{t+1}) = 1$, d.h. i_{t+1} und j_{t+1} in π_t direkt aufeinander folgen. Angenommen, wir würden im t–ten Schritt, für ein $t \in \{0, 1, \ldots, \binom{n}{2} - 1\}$, steckenbleiben, d.h. $(i,j) = (i_{t+1}, j_{t+1})$ ist das nächste Paar aus S und $\pi_t^{-1}(j) - \pi_t^{-1}(i) > 1$. Dann gibt es ein $k \in [n] \setminus \{i, j\}$ so, daß $\pi_t^{-1}(i) < \pi_t^{-1}(k) < \pi_t^{-1}(j)$. Wir unterscheiden drei Fälle:

1.Fall: $k < i$: Dann folgt aus Bedingung (ii): entweder $(k,i) \prec_S (k,j) \prec_S (i,j)$ oder $(i,j) \prec_S (k,j) \prec_S (k,i)$. Das bedeutet zum Zeitpunkt t ist entweder k schon mit i und mit j vertauscht worden, also $\pi_t^{-1}(k) > \pi_t^{-1}(j)$, oder k ist weder mit i noch mit j vertauscht worden, also $\pi_t^{-1}(k) < \pi_t^{-1}(i)$.

2.Fall: $i < k < j$: Dann folgt aus Bedingung (ii): entweder $(i,k) \prec_S (i,j) \prec_S (k,j)$ oder $(k,j) \prec_S (i,j) \prec_S (i,k)$. Das bedeutet zum Zeitpunkt t ist entweder k schon mit i vertauscht worden, aber nicht mit j, also $\pi_t^{-1}(k) < \pi_t^{-1}(i)$, oder k ist schon mit j vertauscht worden, aber nicht mit i, also $\pi_t^{-1}(k) > \pi_t^{-1}(j)$.

3.Fall: $j < k$: Dann folgt aus Bedingung (ii): entweder $(i,j) \prec_S (i,k) \prec_S (j,k)$ oder $(j,k) \prec_S (i,k) \prec_S (i,j)$. Das bedeutet zum Zeitpunkt t ist entweder k mit keinem der beiden anderen vertauscht worden, also $\pi_t^{-1}(k) > \pi_t^{-1}(j)$, oder k ist schon mit beiden vertauscht worden, also $\pi_t^{-1}(k) < \pi_t^{-1}(i)$.

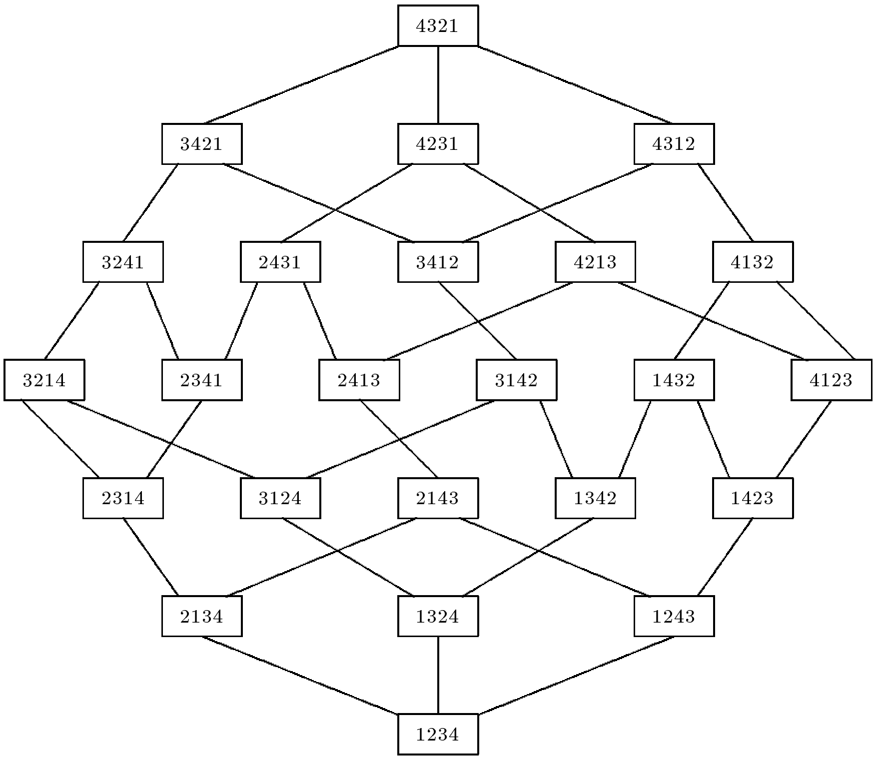

Abbildung 16. Die schwache Bruhat Ordnung auf S_4

In allen drei Fällen ergibt sich ein Widerspruch zur Annahme, also liefert uns das beschriebene Verfahren eine Folge von $\binom{n}{2}+1$ Permutationen $\pi_0, \pi_1, \ldots$, so daß sich zwei aufeinanderfolgende Permutationen nur durch Vertauschung zweier benachbarter Elemente unterscheiden und π_0 ist die Identitätspermutation. Mit Bedingung (i) folgt, daß die π_t eine maximale Kette in der schwachen Bruhat Ordnung bilden.

Ist umgekehrt $S = (i_1, j_1), \ldots, (i_{\binom{n}{2}}, j_{\binom{n}{2}})$ die Folge der Transpositionen einer maximalen Kette in der schwachen Bruhat Ordnung, dann kommt trivialerweise jede Transposition (i,j) für alle $1 \leq i < j \leq n$ in S vor. Für $1 \leq i < j < k \leq n$ gilt: i und k können frühestens dann benachbart sein, wenn entweder i und j oder j und k bereits vertauscht wurden. Hat eine der beiden Transpositionen (i,j) oder (j,k) bereits stattgefunden, dann kann die jeweils andere erst folgen, nachdem i und k vertauscht wurden, denn bis dahin steht entweder i zwischen j und k, oder k zwischen i und j. Aber das ist nichts anderes als die Bedingung $(\ddot{u})$ in Worte gefaßt. $\square$

Die beiden Bedingungen aus dem Satz an eine Folge S sind offensichtlich invariant unter Vertauschung zweier disjunkter, in S adjazenter Paare (i,j) und (k,m). Das eröffnet uns die Möglichkeit einer anderen Codierung von Äquivalenzklassen einfacher zulässiger Folgen. Wir definieren uns eine Abbildung f_S, die für jedes Tripel (i,j,k) mit $1 \leq i < j < k \leq n$ unterscheidet, welche der beiden Möglichkeiten aus Bedingung $(\ddot{u})$ zutrifft, d.h. ob die betreffenden Paare in S in lexikographischer oder umgekehrt lexikographischer Ordnung vorkommen:

$$f_S(i,j,k) = \begin{cases} - & \text{, wenn } (i,j) \prec_S (i,k) \prec_S (j,k) \\ + & \text{, wenn } (j,k) \prec_S (i,k) \prec_S (i,j) \end{cases}$$

Sind S und S' die Transpositionen zweier äquivalenter zulässiger Folgen, dann folgt aus dem oben gesagten, daß $f_S(i,j,k) = f_{S'}(i,j,k)$ für alle $1 \le i < j < k \le n$.

Betrachten wir noch einmal die Elemente zulässiger Folgen, also Permutationen. Für eine Permutation π von $[n]$ sei $\mathrm{Inv}(\pi)$ die Menge ihrer *Inversionen*, d.h. der Paare $\{i,j\}$ mit $i < j$ und $\pi(i) > \pi(j)$. Eine Permutation ist durch die Angabe ihrer Inversionen eindeutig bestimmt. Ebenso wie man maximale Ketten in der schwachen Bruhat Ordnung mit einer Tripelsignierung codieren kann, kann man auch die einzelnen Elemente dieser Ketten, nämlich Permutationen, über ihre *Inversionen* mittels einer Paarsignierung codieren, indem man für eine Permutation π und jedes Paar $i < j$ definiert

$$f_\pi(i,j) = \begin{cases} - & \text{, wenn } \{i,j\} \notin \mathrm{Inv}(\pi) \\ + & \text{, wenn } \{i,j\} \in \mathrm{Inv}(\pi) \end{cases}$$

Satz 1.14. *Eine Abbildung $f : \binom{[n]}{2} \to \{-,+\}$ ist die Paarsignierung einer Permutation π von $[n]$ genau dann, wenn f für alle $1 \le i < j < k \le n$ den folgenden beiden Bedingungen genügt:*

(1) $f(i,j) = f(j,k) = + \implies f(i,k) = +$

(2) $f(i,k) = + \implies f(i,j) = +$ *oder* $f(j,k) = +$

Beweis. Die Notwendigkeit der beiden Bedingungen sieht man sofort, wenn man sie für eine Permutation π formuliert:

(1) $\pi^{-1}(k) > \pi^{-1}(j)$ und $\pi^{-1}(j) > \pi^{-1}(i) \implies \pi^{-1}(k) > \pi^{-1}(i)$

(2) $\pi^{-1}(k) > \pi^{-1}(i) \implies \pi^{-1}(j) > \pi^{-1}(i)$ oder $\pi^{-1}(k) > \pi^{-1}(j)$

Zum Nachweis, daß diese Bedingungen auch hinreichend sind, genügt es, für eine Abbildung $f : \binom{[n]}{2} \to \{-,+\}$, die den Bedingungen (1) und (2) genügt, die folgende Behauptung zu zeigen:

Behauptung. Sei π eine Permutation von $[n]$ mit Paarsignierung f_π, so daß für alle $1 \le k < m \le n$ gilt: $f_\pi(k,m) = + \implies f(k,m) = +$. Dann gilt entweder $f \equiv f_\pi$, oder es gibt ein adjazentes Paar (i,j) in π mit $f(i,j) = +$ und $f_\pi(i,j) = -$.

Damit können wir dann, beginnend mit der Identitätspermutation π_{id}, deren Paarsignierung $f_{\pi_{id}} \equiv -$ auf jeden Fall die Bedingung $f_{\pi_{id}}(k,m) = + \implies f(k,m) = +$ erfüllt, jeweils durch Inversion des adjazenten Paares (i,j) eine Permutation π' konstruieren, für die weiterhin die Bedingung $f_{\pi'}(k,m) = + \implies f(k,m) = +$ gültig ist. Diesen Vorgang iterieren wir solange, bis wir eine Permutation erreichen, deren Paarsignierung f ist.

Zum Beweis der Behauptung nehmen wir an, daß $f_\pi \not\equiv f$ und wählen $i < j$ mit $f_\pi(i,j) = -$ und $f(i,j) = +$ so, daß $\pi^{-1}(j) - \pi^{-1}(i)$, der Abstand von i und j in π, minimal ist mit dieser Eigenschaft, und behaupten, daß dann $\pi^{-1}(j) - \pi^{-1}(i) = 1$, also (i, j) das gesuchte Paar ist.

Angenommen, es ist nicht so, dann gibt es $k \in [n]\backslash\{i, j\}$ so, daß $\pi^{-1}(i) < \pi^{-1}(k) < \pi^{-1}(j)$. Wir unterscheiden drei Fälle:

1.Fall: $k < i < j$:

> Dann ist $f_\pi(k, i) = +$, also auch $f(k, i) = +$. Weil $f(i, j) = +$ nach Voraussetzung, folgt mit Bedingung (1) auch $f(k, j) = +$. Aber $\pi^{-1}(j) - \pi^{-1}(k) < \pi^{-1}(j) - \pi^{-1}(i)$, und das ist ein Widerspruch zur geforderten Minimalität.

2.Fall: $i < k < j$:

> Weil $f(i, j) = +$ folgt mit Bedingung (2), daß $f(i, k) = +$ oder $f(k, j) = +$. Da sowohl $\pi^{-1}(k) - \pi^{-1}(i) < \pi^{-1}(j) - \pi^{-1}(i)$ als auch $\pi^{-1}(k) - \pi^{-1}(j) < \pi^{-1}(j) - \pi^{-1}(i)$ haben wir wieder den Widerspruch zur Minmalität.

3.Fall: $i < j < k$:

> Ganz analog zum ersten Fall muß wegen $f_\pi(j, k) = +$ auch $f(j, k) = +$ sein, und wegen $f(i, j) = +$ und Bedingung (1) muß $f(i, k) = +$ sein. Wieder erhalten wir einen Widerspruch aus $\pi^{-1}(k) - \pi^{-1}(i) < \pi^{-1}(j) - \pi^{-1}(i)$. $\triangle$

Damit ist der Satz gezeigt. $\square$

Bemerkung. Wenn wir die Zeichen durch $- < +$ ordnen, dann lassen sich die Bedingungen aus Satz 1.14 auch so formulieren:

$$f(i, j) \leq f(i, k) \leq f(j, k) \text{ oder } f(j, k) \leq f(i, k) \leq f(i, j)$$

Und damit liegt es nahe, diese Eigenschaft als *Monotonie* zu bezeichnen.

Mit dem folgenden Lemma können wir die schwache Bruhat Ordnung mit der Inklusionsordnung auf der Menge der Inversionsmengen von Permutationen identifizieren bzw. mit der Ordnung auf Paarsignierungen, die definiert ist durch $f < g \iff f \not\equiv g$ und $f(i, j) \leq g(i, j)$ für alle $i < j \in [n]$.

Lemma 1.15. *Seien π und σ Permutationen von $[n]$, dann gilt:*

$$\pi <_{\mathrm{w}} \sigma \iff \mathrm{Inv}(\pi) \subset \mathrm{Inv}(\sigma)$$

Beweis. Da das Invertieren benachbarter Elemente in einer Permutation die Anzahl der Inversionen vergrößert, folgt aus $\pi <_w \sigma$ sofort $\mathrm{Inv}(\pi) \subset \mathrm{Inv}(\sigma)$. Andrerseits, wenn $\mathrm{Inv}(\pi) \subset \mathrm{Inv}(\sigma)$, können wir $\pi(1)$ durch adjazente Transpositionen in σ an die erste Stelle schieben. Alle diese Transpositionen müssen sortierend sein, d.h. eine Inversion $\{x, \pi(1)\} \in \mathrm{Inv}(\sigma)$ in eine Nichtinversion verwandeln, weil sonst $\{x, \pi(1)\} \notin \mathrm{Inv}(\pi)$ gelten würde. Danach können wir auf die selbe Art $\pi(2), \pi(3), \ldots$ an die Positionen $2, 3, \ldots$ in σ schieben und erhalten am Ende eine Folge sortierender adjazenter Transpositionen, die σ

in π verwandeln. □

Man kann in der Definition von Signierungen auch noch eine Dimension weiter zurückgehen. Interpretiert man eine Permutation von $[n]$ als maximale Kette in der Inklusionsordnung der Teilmengen von $[n]$, also einfach als Reihenfolge, in der man die leere Menge mit den Elementen von $[n]$ auffüllt, bis keines mehr übrig ist, dann sind die einzelnen Elemente dieser Kette Teilmengen M von $[n]$, die mit einer Signierung als Indikatorfunktion codiert werden können.

$$f_M(i) = \begin{cases} - & \text{, wenn } i \notin M \\ + & \text{, wenn } i \in M \end{cases}$$

Die Monotoniebedingung lautet in diesem Fall $f(i) \leq f(j)$ oder $f(j) \leq f(i)$ für alle $1 \leq i < j \leq n$ und ist trivialerweise immer erfüllt.

Wir haben also Tripelsignierungen, die Ketten von Paarsignierungen codieren, die wiederum Ketten von „Einzel"–Signierungen codieren. Alle diese Signierungen erfüllen eine Monotoniebedingung. Die Verallgemeinerung dieser Signierungen auch auf höhere Dimensionen wird Thema des zweiten Teils der Arbeit sein. Doch zuvor wollen wir uns speziell den Tripelsignierungen noch einmal von der geometrischen Seite, also über Pseudogeradenarrangements nähern.

7 Dreiecke in einfachen Arrangements

Sei $(\mathcal{A}, F)$ ein markiertes einfaches Pseudogeradenarrangement der Größe $n \geq 3$. Wir erinnern uns, daß die Markierung eines Arrangements eine Orientierung der Pseudogeraden relativ zur Nordfläche F beinhaltet, d.h. daß wir zu jedem Punkt entscheiden können, ob er über einer Pseudogeraden ℓ liegt, oder darunter. Dies wollen wir ausnutzen, um eine Orientierung von Tripeln von Pseudogeraden in $\mathcal{A}$ zu definieren. Sei $1 \leq i < j < k \leq n$ und ℓ_i, ℓ_j und ℓ_k Pseudogeraden in $\mathcal{A}$. Dann gibt es für die Lage des Schnittpunkts S_{ik} von ℓ_i und ℓ_k relativ zu ℓ_j genau zwei Möglichkeiten: Entweder S_{ik} liegt über ℓ_j, oder darunter. Im ersten Fall sagen wir, die von den drei Pseudogeraden eingeschlossene Dreiecksregion hat die Orientierung $-$, im anderen Fall $+$. Diese Definition ist insofern von der Wahl von S_{ik} als Bezugspunkt abhängig, als man bei den beiden anderen Schnittpunkten S_{ij} oder S_{jk} die Worte „über" und „unter" vertauschen muß. Anders gesagt: S_{ik} liegt über $\ell_j \iff S_{ij}$ liegt unter $\ell_k \iff S_{jk}$ liegt unter ℓ_i. Diese so orientierten Dreiecksregionen sind im Allgemeinen keine „echten" Dreiecke, d.h. Flächen des von $\mathcal{A}$ induzierten Zellenkomplexes. Im Satz 1.2 haben wir gezeigt, daß mindestens $n-2$ davon wirklich Dreiecke sind und in dem Zusammenhang auch schon darauf hingewiesen, daß an Dreiecken lokale Transformationen eines Arrangements in ein anderes, nicht äquivalentes möglich sind. Dabei wird eine der drei an dem Dreieck beteiligten Pseudogeraden so über den Schnittpunkt der beiden anderen geschoben, daß sie keinen anderen Punkt des Arrangements berührt oder überstreicht. Jetzt können wir das auch so ausdrücken, daß ein solcher *Flip* eines Dreiecks im Umdrehen der Orientierung des Dreiecks besteht. In Abbildung 17 ist ein Flip im Wiring-Diagramm vom linken „$-$"–Dreieck zum rechten „$+$"–Dreieck zu sehen.

Ringel ([Rin56]) hat bereits gezeigt, daß jedes einfache Arrangement durch eine Folge

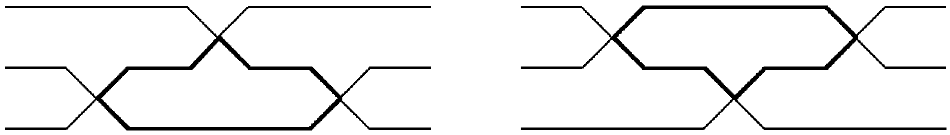

Abbildung 17. Dreiecksflip im Wiring–Diagramm

von Dreiecksflips in jedes andere transformiert werden kann. (Wir werden dieses Ergebnis als Nebenprodukt eines allgemeineren Satzes im nächsten Teil erhalten.) Betrachten wir den Graphen $\mathcal{G}_n$, dessen Knoten alle kombinatorisch verschiedenen einfachen markierten Pseudogeradenarrangements der Größe $n \geq 3$ in der euklidischen Ebene sind, mit Kanten zwischen zwei (Äquivalenzklassen von) Arrangements, wenn sie sich nur in der Orientierung eines Dreiecks unterscheiden, dann bedeutet das, daß $\mathcal{G}_n$ zusammenhängend ist. Wieder mit Satz 1.2 über die Anzahl von Dreiecken in einfachen Arrangements ergibt sich ein Minimalgrad in $\mathcal{G}_n$ von $n-2$ und ein Maximalgrad von $\frac{n(n-2)}{3}$.

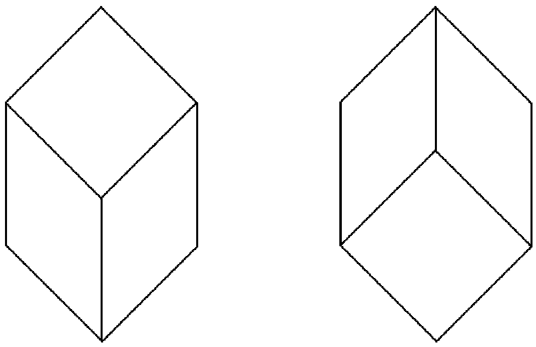

Abbildung 18. Ein Flip in einer zonotopalen Kachelung

Bevor wir jetzt die Tripelsignierungen des letzten Abschnitts als neue Codierung für Arrangements einführen, wollen wir noch einen Blick auf Flips in den Repräsentationen, die wir bisher kennengelernt haben, werfen. In der Darstellung eines Arrangements durch eine zonotopale Kachelung besteht ein Flip im Umdrehen der Projektion eines Würfels wie in Abbildung 18. Etwas komplizierter ist es, einen Flip in der Codierung als zulässige Folge von Permutationen zu beschreiben. Zunächst ist klar, daß die Pseudogeraden mit den Indizes $i < j < k$ in einem Arrangement ein Dreieck einschließen, wenn die drei Schnittpunkte im orientierten Gerüst G des Arrangements ebenfalls ein Dreieck bilden. Eine zulässige Folge Σ entspricht einer topologische Sortierung von G. Mit Satz 1.13 folgt, daß es für die Richtung der Kanten nur eine der beiden Möglichkeiten in Abbildung 19 gibt. Es folgt, daß i, j, und k ein Dreieck bilden, wenn es eine zu Σ äquivalente zulässige Folge Σ' gibt, in der die Transpositionen (ij), (ik) und (jk) direkt aufeinanderfolgen. Ein Flip besteht dann im Vertauschen der beiden äußeren Transpositionen. Damit sehen wir auch gleich, daß in den lokalen Folgen σ_i, σ_j und σ_k jeweils j und k, i und k bzw. i und j direkt aufeinander folgen. Der Flip besteht im Vertauschen der Reihenfolge in jeder der drei lokalen Folgen.

Definieren wir zu einem einfachen markierten Arrangement $\mathcal{A}$ der Größe n, daß codiert wird durch die zulässige Folge Σ, eine Funktion $f_{\mathcal{A}} : \binom{[n]}{3} \to \{-,+\}$, die jedem Tripel

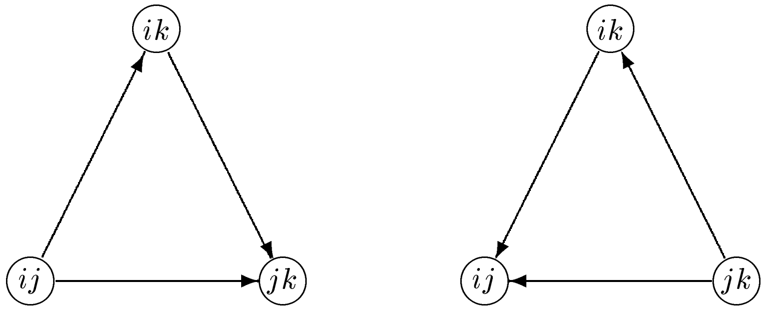

Abbildung 19. Ein Flip im orientierten Gerüst

$i < j < k$ die Orientierung von ℓ_i, ℓ_j und ℓ_k in $\mathcal{A}$ zuordnet, dann zeigen die obigen Bemerkungen, daß $f_\mathcal{A}$ der Tripelsignierung von Σ (bzw. der durch Σ gegebenen maximalen Kette S in der schwachen Bruhat Ordnung) entspricht.

Betrachten wir das durch vier Pseudogeraden ℓ_i, ℓ_j, ℓ_k und ℓ_m aus $\mathcal{A}$ induzierte Arrangement. Es gibt im wesentlichen, d.h. ohne Beachtung der Indizierung, nur ein Arrangement mit vier (Pseudo)-Geraden mit acht unbeschränkten Flächen. Jede dieser Flächen kann man zur Markierung benutzen und erhält die acht verschiedenen markierten Arrangements, die als zonotopale Kachelungen in Abbildung 20 dargestellt sind. Unter jede dieser Kachelung ist die Tripelsignierung in der Reihenfolge $f(1,2,3)f(1,2,4)f(1,3,4)f(2,3,4)$ geschrieben, wobei die Segmente am linken Rand von unten nach oben mit $1,2,3,4$ indiziert seien.

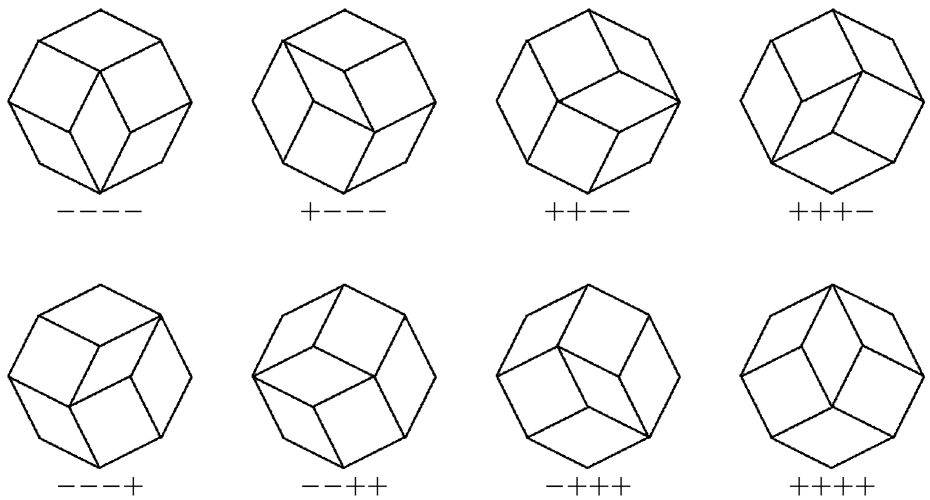

Abbildung 20. Alle zonotopalen Kachelungen der Größe 4

Setzen wir wieder $- < +$, dann können wir ablesen, daß für die Orientierungen und damit auch für Arrangement–Signierungen die Monotonie notwendig ist.

Satz 1.16. *Eine Funktion* $f : \binom{[n]}{3} \to \{-,+\}$ *ist die Tripelsignierung eines markierten Arrangements der Größe* $n \geq 3$ *genau dann, wenn* f *monoton ist, d.h. wenn für alle*

$1 \leq i < j < k < m \leq n$ *die folgende Bedingung erfüllt:*

$$f(i,j,k) \leq f(i,j,m) \leq f(i,k,m) \leq f(j,k,m)$$

$$\textit{oder } f(i,j,k) \geq f(i,j,m) \geq f(i,k,m) \geq f(j,k,m)$$

Den zum Beweis des Satzes noch fehlenden Nachweis, daß die Bedingungen hinreichend sind, verschieben wir in den zweiten Teil dieser Arbeit auf Seite 48, wo er aus dem allgemeineren Satz 2.8 folgt.

Teil II

Signotope

8 Einführung

In diesem Teil der Arbeit soll das Konzept der Paar– und Tripelsignierungen verallgemeinert werden. Es sei L eine linear geordnete Menge mit $\left|L\right| = n \geq 1$ und $\binom{L}{r}$ für $r \leq n$ die Menge der r–elementigen Teilmengen von L. Zu einer Teilmenge $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ von L mit $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$ und $1 \leq i \leq k$ ist $A^{\lfloor i \rfloor} = A \setminus \{a_i\}$, also A ohne das i–größte Element von A. Für $A \in \binom{L}{r+1}$ nennen wir die Folge $P(A) = A^{\lfloor 1 \rfloor}, A^{\lfloor 2 \rfloor}, \ldots, A^{\lfloor r+1 \rfloor}$, also die geordneten r–elementigen Teilmengen von A in umgekehrt lexikographischer Reihenfolge, ein r*–Paket*, oder, wenn der Wert von r klar ist, kurz *Paket*. Dabei werden wir, soweit keine Mißverständnisse zu befürchten sind, in der Notation nicht zwischen der Menge A und dem r–Paket $P(A)$ unterscheiden und beides mit P bezeichnen.

Definition. Sei $1 \leq r \leq n$ und L eine linear geordnete Menge mit $\left|L\right| = n$. Eine Abbildung $\alpha : \binom{L}{r} \to \{-, +\}$ heißt r*–Signotop* auf L, wenn für jedes r–Paket P in der Folge $\alpha(P^{\lfloor 1 \rfloor}), \alpha(P^{\lfloor 2 \rfloor}), \ldots, \alpha(P^{\lfloor r+1 \rfloor})$ höchstens einmal das Zeichen wechselt, oder äquivalent dazu, wenn für alle $1 \leq i < j < k \leq r+1$ gilt:

$$\alpha(P^{\lfloor i \rfloor})\alpha(P^{\lfloor j \rfloor})\alpha(P^{\lfloor k \rfloor}) \notin \{-+-, +-+\}$$

Diese Eigenschaft bezeichnen wir mit *Monotonie auf* P.

Das Urbild von $+$ nennen wir $\mathrm{Inv}(\alpha)$, die Menge der *Inversionen* von α.

Zu jedem r–Paket P definieren wir $\mathrm{Rand}_\alpha(P)$ als die beiden r–Mengen in P, an denen das Vorzeichen wechselt, bzw., falls es keinen Vorzeichenwechsel gibt, das erste und das letzte, also:

$$\mathrm{Rand}_\alpha(P) = \begin{cases} \{P^{\lfloor 1 \rfloor}, P^{\lfloor r+1 \rfloor}\} & \text{wenn } \alpha(P^{\lfloor 1 \rfloor}) = \alpha(P^{\lfloor r+1 \rfloor}) \\ \{P^{\lfloor i \rfloor}, P^{\lfloor i+1 \rfloor}\} & \text{wenn } \alpha(P^{\lfloor i \rfloor}) \neq \alpha(P^{\lfloor i+1 \rfloor}) \end{cases}$$

Ein $T \in \binom{L}{r}$ nennen wir *flipbar* in α bzw. eine *Mutation* von α, wenn die Abbildung $\alpha^T : \binom{L}{r} \to \{-, +\}$, die sich von α nur an der Stelle T unterscheidet, wieder ein Signotop ist. Dieses „Umdrehen" eines Zeichens bezeichnen wir als *Flip*. Ein solcher Flip an der Stelle T ist genau dann möglich, wenn die Monotonie auf jedem Paket P unabhängig vom Zeichen von T ist, also genau dann, wenn für alle Pakete P mit $T \in P$ gilt: $T \in \mathrm{Rand}_\alpha(P)$. Die Menge der Mutationen von α bezeichnen wir mit $\mathrm{Mut}(\alpha)$.

Da wir außer der linearen Ordnung und der Anzahl n der Elemente keine Forderungen an die Grundmenge L stellen, werden wir der Einfachheit halber $L = [n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ mit der natürlichen Ordnung annehmen.

Eine sehr hilfreiche Darstellung eines Signotops α sind die *Paketsignaturen*. Dabei schreibt man die Elemente der Menge $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_{r+1}\}$ mit $p_1 < p_2 < \cdots < p_{r+1}$ sortiert in eine Reihe und unter jedes Element p_i den Wert von $\alpha(P^{\lfloor i \rfloor}) = \alpha(P \setminus \{p_i\})$. Mit dieser Schreibweise läßt sich manche langwierige Argumentation „auf einen Blick" erfassen.

Beispiel. Ein 3-Signotop auf [5] mit den Werten

123	124	125	134	135	145	234	235	245	345
−	+	−	+	−	−	+	+	−	−

Dazu die Paketsignaturen:

$$\begin{array}{cccc} 1&2&3&4\\ +&+&+&- \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 1&2&3&5\\ +&-&-&- \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 1&2&4&5\\ -&-&-&+ \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 1&3&4&5\\ -&-&-&+ \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 2&3&4&5\\ -&-&+&+ \end{array}$$

Hier sieht man sofort, daß die Monotoniebedingung auf jedem Paket erfüllt ist.

Definition. Auf der Menge der r–Signotope auf $[n]$ definieren wir eine Relation $\lessdot$ durch: $\alpha \lessdot \beta$ genau dann, wenn es ein $T \in \binom{[n]}{r}$ gibt, so daß $\mathrm{Inv}(\beta) \setminus \mathrm{Inv}(\alpha) = \{T\}$. Die transitive Hülle von $\lessdot$, also die Relation $<$ mit $\alpha < \beta$ genau dann, wenn es eine Kette von Signotopen $\alpha = \gamma_0 \lessdot \gamma_1 \lessdot \cdots \lessdot \gamma_k = \beta$ gibt, definiert eine Ordnung auf der Menge der r–Signotope auf $[n]$, die wir mit $S_r(n)$ bezeichnen.

Während in [FW98] die gewöhnliche Inklusionsordnung auf den Inversionsmengen, also $\alpha \subset \beta \iff \mathrm{Inv}(\alpha) \subset \mathrm{Inv}(\beta)$, Gegenstand der Untersuchung ist, werde ich in dieser Arbeit $S_r(n)$ als Struktur zugrundelegen.

Folgerungen.

(1) Zu jedem $\alpha \in S_r(n)$ ist das *Komplement* $-\alpha$, das man erhält, indem man definiert $-\alpha(T) = + \iff \alpha(T) = -$, wieder ein r–Signotop.

(2) $S_r(n)$ ist eine strikte Ordnung mit eindeutigem minimalem Element $\widehat{0} \equiv -$ und maximalem Element $\widehat{1} \equiv +$ und Rangfunktion $\mathrm{rang}(\alpha) = \left|\mathrm{Inv}(\alpha)\right|$. Jede maximale Kette in $S_r(n)$ hat die Länge $\binom{n}{r}$.

(3) Seien $I_k = [k, k+r-1] = \{k, k+1, \ldots, k+r-1\}$ für $k \leq n-r+1$ die r–elementigen *Intervalle* in $[n]$. Für jedes r–Paket P mit $I_k \in P$ ist $I_k \in \{P^{\lfloor 1 \rfloor}, P^{\lfloor r+1 \rfloor}\}$. Zu jedem $T \in \binom{[n]}{r}$, das kein Intervall ist, gibt es ein Paket, so daß $T \notin \{P^{\lfloor 1 \rfloor}, P^{\lfloor r+1 \rfloor}\}$. Im minimalen Signotop $\widehat{0}$ gilt $\mathrm{Rand}_{\widehat{0}}(P) = \{P^{\lfloor 1 \rfloor}, P^{\lfloor r+1 \rfloor}\}$ für jedes Paket P. Es folgt, daß $\mathrm{Mut}(\widehat{0}) = \{I_k \mid k = 1, 2, \ldots, n-r+1\}$. Die Atome in $S_r(n)$ sind also genau die Signotope α_{I_k} mit $\alpha_{I_k}(T) = + \iff T = I_k$. Dieselbe Argumentation gilt auch für das maximale Signotop $\widehat{1}$, also sind die Coatome in $S_r(n)$ genau die Signotope β_{I_k} mit $\beta_{I_k}(T) = - \iff T = I_k$.

(4) $S_1(n)$ ist isomorph zum booleschen Verband der Teilmengen von $[n]$, geordnet per Inklusion.

(5) $S_2(n)$ ist isomorph zur schwachen Bruhat Ordnung auf der symmetrischen Gruppe S_n. Das ergibt sich aus Satz 1.14 im Abschnitt 6, wo wir gezeigt haben, daß eine Paarsignierung eine Permutation genau dann codiert, wenn sie auf jedem 2–Paket monoton, nach der jetzigen Terminologie also ein 2–Signotop ist.

(6) Das Hasse–Diagramm von $S_r(r+1)$ ist ein $2(r+1)$–Eck. Denn $[r+1]$ selbst ist ein r–Paket, dessen Elemente beginnend mit $\widehat{0} \in S_r(r+1)$ nur entweder in lexikographischer oder in umgekehrt lexikographischer Reihenfolge geflipt werden können, und damit besteht die Ordnung aus zwei Ketten, die nur den Anfangs– und den Endpunkt gemeinsam haben.

Manin und Schechtman ([MS89]) und später Ziegler ([Zie93]) haben Signotope unter dem Namen *höhere Bruhat Ordnung* als Verallgemeinerung der schwachen Bruhat Ordnung untersucht. Ziegler definiert *konsistente* Mengen als Teilmengen von $\binom{[n]}{r}$, deren Schnitt mit jedem r–Paket ein Anfangs- oder Endstück dieses Pakets ist, und das entspricht genau der Monotonie eines Signotops $\alpha \in S_r(n)$, übertragen auf seine Inversionsmenge $\mathrm{Inv}(\alpha)$. Dann zeigt Ziegler, daß die höhere Bruhat Ordnung $B(n, r-1)$ äquivalent ist zur *Single–Step* Inklusionsordnung auf der Menge der konsistenten Teilmengen von $\binom{[n]}{r}$. Die Single–Step Inklusionsordnung ist definiert durch $U < V$ genau dann, wenn es konsistente Mengen $U = U_0, U_1, \ldots, U_k = V$ gibt mit $\left|U_{i-1} \cap U_i\right| = 1$ für alle $1 \leq i \leq k$, und das entspricht wieder genau der Ordnung $S_r(n)$, übertragen auf Inversionsmengen. $S_r(n)$ ist also äquivalent zur höheren Bruhat Ordnung $B(n, r-1)$ und ein Signotop in dieser Sichtweise nichts anderes als die Indikatorfunktion konsistenter Teilmengen, d.h. $\alpha \in S_r(n)$ entspricht $U \in B(n, r-1)$ über die Beziehung $\alpha(T) = + \iff T \in U$.

Dieser zweite Teil der Arbeit besteht hauptsächlich aus einer Zusammenfassung der Ergebnisse und der dazugehörigen Beweise, zum Teil in anderer Form, aus [Zie93] und [FW98].

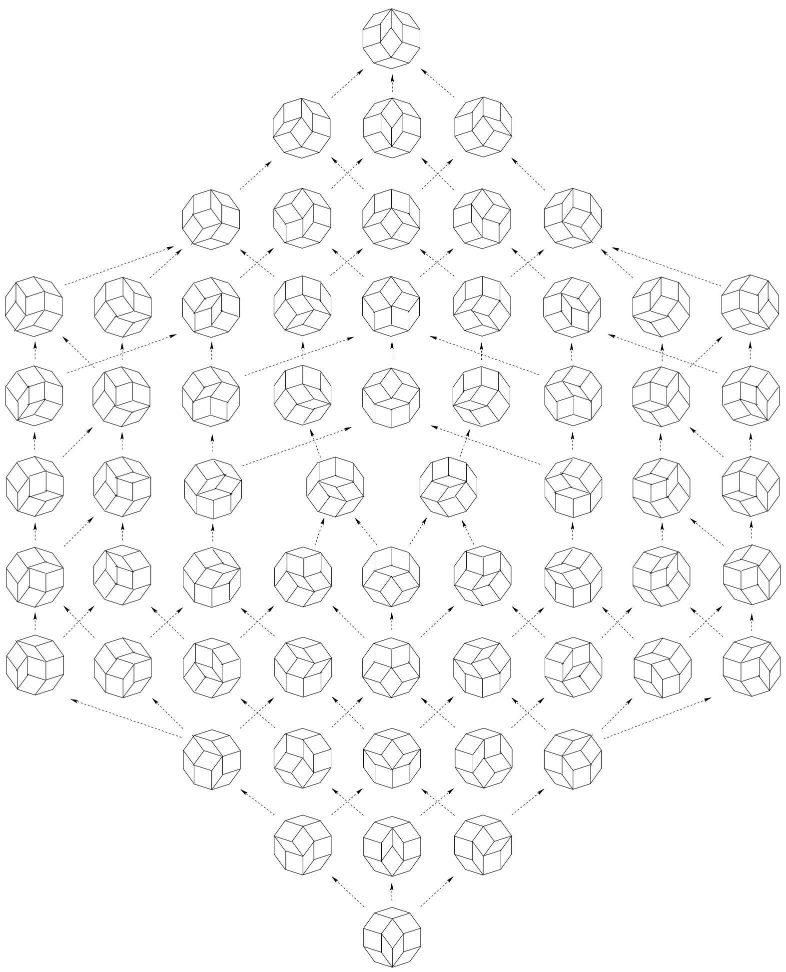

Abbildung 21. Darstellung von $S_3(5)$ mit zonotopalen Kachelungen

9 Konstruktionen

In diesem Abschnitt werden einige Konstruktionen, um aus einem gegebenen Signotop ein neues zu erzeugen, vorgestellt. Einige dieser Konstruktionen, etwa die Boundaries, haben eher technischen Charakter, andere stehen für sich selbst.

Deletion und Kontraktion

Eine häufig verwendete Beweismethode bei der Untersuchung mathematischer Strukturen mit zwei Parametern, einer „Anzahl von Elementen“ und einer „Dimension“, ist die Induktion über diese beiden Parameter mithilfe einer Operation, die die Anzahl der Elemente verringert und einer anderen, die die Dimension verkleinert. Diese Operationen, die üblicherweise als Deletion und Kontraktion bezeichnet werden, wollen wir jetzt für Signotope definieren. Zur Vereinfachung der Darstellung nehmen wir als Grundmenge wieder allgemein eine linear geordnete Menge L mit $|L| = n$.

Definition. Sei $\alpha \in S_r(n) = S_r(|L|)$.

> Ist $X \subseteq L$ mit $|L \setminus X| \geq r$, dann ist die *Deletion* von X in α die induzierte Funktion $\alpha{\uparrow}_X$ auf $\binom{L\setminus X}{r}$
>
> Ist $X \subseteq L$ mit $|X| < r$, dann ist die *Kontraktion* von α auf X definiert als die Funktion $\alpha{\downarrow}_X$ auf $\binom{L\setminus X}{r-|X|}$ mit $\alpha{\downarrow}_X\ (T) = \alpha(T \cup X)$.

$\alpha{\uparrow}_X$ ist ein r–Signotop auf $L \setminus X$ und $\alpha{\downarrow}_X$ ein $(r - |X|)$–Signotop auf $\binom{L\setminus X}{r-|X|}$.

Bemerkung. Sei $x \in L$, dann ist $\alpha{\uparrow}_x \in S_r(L \setminus \{x\})$ und $\alpha{\downarrow}_x \in S_{r-1}(L \setminus \{x\})$ und α kann geschrieben werden als:

$$\alpha(T) = \begin{cases} \alpha{\uparrow}_x\ (T) & \text{falls } x \notin T \\ \alpha{\downarrow}_x\ (T \setminus \{x\}) & \text{falls } x \in T \end{cases}$$

Spiegelung

Um diese Konstruktion darzustellen, betrachten wir zunächst für $X \subseteq [n]$ die Abbildung

$$\Phi(X) = \{n - x + 1 \,|\, x \in X\}$$

Diese Abbildung hat folgende Eigenschaften:

(1) $\Phi^{-1} = \Phi$.

(2) Für $1 \leq i \leq r \leq n$ und jedes r–Paket P gilt: $\Phi(P^{\lfloor i \rfloor}) = \Phi(P)^{\lfloor r-i+2 \rfloor}$.

Eigenschaft (1) folgt aus der Tatsache, daß $n - (n - x + 1) + 1 = x$ für alle $x \in [n]$ ist.

Um Eigenschaft (2) zu sehen, bemerken wir zuerst, daß Φ die Ordnung auf $[n]$ umkehrt, d.h. $x < y$ gdw. $\Phi(x) > \Phi(y)$. Sei $P = \{x_1, x_2, \ldots, x_{r+1}\} \subseteq [n]$. Weil $i = r + 1 - (r - i + 2) + 1$, ist $n - x_i + 1$ das $(r - i + 2)$–größte Element von $\Phi(P)$. Also ist

$$\Phi(P)^{\lfloor r-i+2 \rfloor} = \Phi(P) \setminus \{n - x_i + 1\} = \Phi(P \setminus \{x_i\}) = \Phi(P^{\lfloor i \rfloor})$$

Bemerkung. Mit $X\Delta Y$ bezeichnen wir die symmetrische Differenz der Mengen X und Y, also die Menge $(X \cup Y) \setminus (X \cap Y)$. Während die lexikographische Ordnung auf $\binom{[n]}{r}$ durch $X <_{lex} Y \iff min(X\Delta Y) \in X$ gegeben ist, ist die antilexikographische Ordnung durch $X <_{anti-lex} Y \iff max(X\Delta Y) \in X$ definiert. Die Abbildung Φ eingeschränkt auf $\binom{[n]}{r}$ transformiert die lexikographische in die anti-lexikographische Ordnung (und umgekehrt) in dem Sinn, daß jeweils das k–größte Element der einen Ordnung auf das k–größte der anderen Ordnung abgebildet wird. Es gilt nämlich für alle $x \in X\Delta Y$:

$$\Phi(min(X\Delta Y)) = n - min(X\Delta Y) + 1 \geq n - x + 1 = \Phi(x)$$

$$\Phi(max(X\Delta Y)) = n - max(X\Delta Y) + 1 \leq n - x + 1 = \Phi(x)$$

Und damit also

$$\begin{aligned} X <_{lex} Y &\iff min(X\Delta Y) \in X \\ &\iff \Phi(min(X\Delta Y)) = max\Phi(X\Delta Y) \in \Phi(X) \\ &\iff \Phi(X) <_{anti-lex} \Phi(Y) \end{aligned}$$

Jetzt können wir zu einem r–Signotop α die *Spiegelung* von α als die Komposition von α und Φ, also $\alpha_\Phi = \alpha \circ \Phi$ definieren.

Lemma 2.1. *Die Spiegelung eines r–Signotops ist ein r–Signotop.*

Beweis. Sei $\alpha \in S_r(n), P \in \binom{[n]}{r+1}$ und $1 \leq i < j < k \leq r+1$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \alpha_\Phi(P^{\lfloor i \rfloor})\alpha_\Phi(P^{\lfloor j \rfloor})\alpha_\Phi(P^{\lfloor k \rfloor}) &= \alpha(\Phi(P^{\lfloor i \rfloor}))\alpha(\Phi(P^{\lfloor j \rfloor}))\alpha(\Phi(P^{\lfloor k \rfloor})) \\ &= \alpha(\Phi(P)^{\lfloor r+2-i \rfloor})\alpha(\Phi(P)^{\lfloor r-j+2 \rfloor})\alpha(\Phi(P)^{\lfloor r-k+2 \rfloor}) \\ &\notin \{-+-, +-+\} \end{aligned}$$

weil α monoton auf dem Paket $\Phi(P)$ ist. $\square$

Anschaulich kann man die Spiegelung auch so beschreiben: Stellen wir ein Signotop als Zeichenfolge aus $\{-,+\}^{\binom{n}{r}}$ dar, wobei wir die lexikographische Reihenfolge der Elemente von $\binom{[n]}{r}$ implizieren, dann ist die Spiegelung diesselbe Zeichenfolge, allerdings in der antilexikographischen Reihenfolge interpretiert.

Beispiel. Ein 3-Signotop auf [5]. Über der Zeichenfolge stehen die Elemente von $\binom{[5]}{3}$ in lexikographischer Reihenfolge:

123	124	125	134	135	145	234	235	245	345
−	+	−	+	−	−	+	+	−	−

Dann schreiben wir über derselben Zeichenfolge die antilexikographische Reihenfolge:

345	245	145	235	135	125	234	134	124	123
−	+	−	+	−	−	+	+	−	−

Zur Darstellung der Spiegelung in kanonischer Form, d.h. in lexikographischer Reihenfolge, sortieren wir um:

123	124	125	134	135	145	234	235	245	345
−	−	−	+	−	−	+	+	+	−

Boundaries

Ziegler definiert in [Zie93] die *Boundary*–Funktion zur Konstruktion eines $(r+1)$–Signotops aus einem r–Signotop α für $P \in \binom{[n]}{r+1}$ durch:

$$\mathfrak{R}\alpha(P) = + \iff \alpha(P^{\lfloor r+1 \rfloor}) = + \text{ und } \alpha(P^{\lfloor 1 \rfloor}) = -$$

Nennen wir dies die *rechte* Boundary–Funktion, dann kann man analog die *linke* Boundary–Funktion definieren:

$$\mathfrak{L}\alpha(P) = + \iff \alpha(P^{\lfloor 1 \rfloor}) = + \text{ und } \alpha(P^{\lfloor r+1 \rfloor}) = -$$

Bildlich kann man sich das so vorstellen, daß man am rechten (bzw. linken) Ende der Paketsignatur ein Zeichen anfügt, so daß die resultierenden $r+2$ Zeichen immer noch monoton sind. Für $P = \{p_1, \ldots, p_{r+1}\}$ sehen die Vorschriften für die rechte und linke Boundary in Abhängigkeit von der Paketsignatur so aus:

$$\begin{array}{lcccc}
\mathfrak{R}: & \begin{smallmatrix} p_1 & \cdots & p_{r+1} \\ - & \cdots & + \end{smallmatrix}\; + & \begin{smallmatrix} p_1 & \cdots & p_{r+1} \\ - & \cdots & - \end{smallmatrix}\; - & \begin{smallmatrix} p_1 & \cdots & p_{r+1} \\ + & \cdots & - \end{smallmatrix}\; - & \begin{smallmatrix} p_1 & \cdots & p_{r+1} \\ + & \cdots & + \end{smallmatrix}\; - \\
\mathfrak{L}: & -\; \begin{smallmatrix} p_1 & \cdots & p_{r+1} \\ - & \cdots & + \end{smallmatrix} & -\; \begin{smallmatrix} p_1 & \cdots & p_{r+1} \\ - & \cdots & - \end{smallmatrix} & +\; \begin{smallmatrix} p_1 & \cdots & p_{r+1} \\ + & \cdots & - \end{smallmatrix} & -\; \begin{smallmatrix} p_1 & \cdots & p_{r+1} \\ + & \cdots & + \end{smallmatrix}
\end{array}$$

Der Vollständigkeit halber sei noch erwähnt, daß man durch Umkehrung der Rollen von $+$ und $-$ in der Definition die jeweils komplementären Boundaries erhält.

$$-\mathfrak{R}\alpha(P) = - \iff \alpha(P^{\lfloor r+1 \rfloor}) = - \text{ und } \alpha(P^{\lfloor 1 \rfloor}) = +$$

$$-\mathfrak{L}\alpha(P) = - \iff \alpha(P^{\lfloor 1 \rfloor}) = - \text{ und } \alpha(P^{\lfloor r+1 \rfloor}) = +$$

Dabei gilt: $\mathfrak{R}\alpha = \mathfrak{L}(-\alpha)$ und $-\mathfrak{R}\alpha = -\mathfrak{L}(-\alpha)$.

Lemma 2.2. *Jede der Boundary–Funktionen erzeugt aus einem r–Signotop auf $[n]$ ein $(r+1)$–Signotop auf $[n]$.*

Vor dem Beweis noch eine Bemerkung zur Notation: Mehrmalige Anwendung der Operation $^{\lfloor\,\rfloor}$ soll von links nach rechts gelesen werden, d.h. $P^{\lfloor t \rfloor \lfloor s \rfloor} = (P^{\lfloor t \rfloor})^{\lfloor s \rfloor}$, so daß für $P \in \binom{[n]}{r+1}$, $1 \leq t \leq r+2$ und $1 \leq s \leq r+1$ die folgende Beziehung gilt:

$$P^{\lfloor t \rfloor \lfloor s \rfloor} = \begin{cases} P^{\lfloor s+1 \rfloor \lfloor t \rfloor} & \text{wenn } t \leq s \\ P^{\lfloor s \rfloor \lfloor t-1 \rfloor} & \text{wenn } t > s \end{cases}$$

Beweis. Sei $\alpha \in S_r(n)$. Aus Symmetriegründen genügt es, die rechte Boundary–Funktion $\mathfrak{R}\alpha$ betrachten. Sei $1 \leq i < j < k \leq r+2 \leq n$ und $P \in \binom{[n]}{r+2}$. Wir werden die folgenden beiden Behauptungen zeigen:

(1) $\mathfrak{R}\alpha(P^{\lfloor i \rfloor}) = +$ und $\mathfrak{R}\alpha(P^{\lfloor k \rfloor}) = + \implies \mathfrak{R}\alpha(P^{\lfloor j \rfloor}) = +$

(2) $\mathfrak{R}\alpha(P^{\lfloor j \rfloor}) = + \implies \mathfrak{R}\alpha(P^{\lfloor i \rfloor}) = +$ oder $\mathfrak{R}\alpha(P^{\lfloor k \rfloor}) = +$

Da damit ausgeschlossen wird, daß $\mathfrak{R}\alpha(P^{\lfloor i \rfloor})\,\mathfrak{R}\alpha(P^{\lfloor j \rfloor})\,\mathfrak{R}\alpha(P^{\lfloor k \rfloor}) \in \{+-+, -+-\}$, wird das Lemma damit gezeigt sein.

Zum Beweis von (1) ist eine ausgiebige Fallunterscheideung nötig.

1. Fall: $1 < i < j < k < r+2$.

   Wegen $\Re\alpha(P^{\lfloor i\rfloor}) = +$ und $\Re\alpha(P^{\lfloor k\rfloor}) = +$ gilt: $\alpha(P^{\lfloor i\rfloor\lfloor r+1\rfloor}) = \alpha(P^{\lfloor r+2\rfloor\lfloor i\rfloor}) = +$ und $\alpha(P^{\lfloor k\rfloor\lfloor r+1\rfloor}) = \alpha(P^{\lfloor r+2\rfloor\lfloor k\rfloor}) = +$ und analog $\alpha(P^{\lfloor i\rfloor\lfloor 1\rfloor}) = \alpha(P^{\lfloor 1\rfloor\lfloor i-1\rfloor}) = -$ und $\alpha(P^{\lfloor k\rfloor\lfloor 1\rfloor}) = \alpha(P^{\lfloor 1\rfloor\lfloor k-1\rfloor}) = -$. Damit folgt wegen der Monotonie von α auf $P^{\lfloor 1\rfloor}$ und $P^{\lfloor r+2\rfloor}$: $\alpha(P^{\lfloor r+2\rfloor\lfloor j\rfloor}) = \alpha(P^{\lfloor j\rfloor\lfloor r+1\rfloor}) = +$ und $\alpha(P^{\lfloor 1\rfloor\lfloor j-1\rfloor}) = \alpha(P^{\lfloor j\rfloor\lfloor 1\rfloor}) = -$. Genau dann ist aber nach Definition $\Re\alpha(P^{\lfloor j\rfloor}) = +$.

2. Fall: $i = 1, j = 2$ und $k < r+2$

   Dann ist einerseits wegen $\Re\alpha(P^{\lfloor 1\rfloor}) = \Re\alpha(P^{\lfloor k\rfloor}) = +$ wieder $\alpha(P^{\lfloor 1\rfloor\lfloor r+1\rfloor}) = \alpha(P^{\lfloor r+2\rfloor\lfloor 1\rfloor}) = +$ und $\alpha(P^{\lfloor k\rfloor\lfloor r+1\rfloor}) = \alpha(P^{\lfloor r+2\rfloor\lfloor k\rfloor}) = +$, und mit der Monotonie von α auf $P^{\lfloor r+2\rfloor}$ folgt $\alpha(P^{\lfloor r+2\rfloor\lfloor 2\rfloor}) = \alpha(P^{\lfloor 2\rfloor\lfloor r+1\rfloor}) = +$. Andrerseits gilt wegen $\Re\alpha(P^{\lfloor 1\rfloor}) = +$ auch $\alpha(P^{\lfloor 1\rfloor\lfloor 1\rfloor}) = \alpha(P^{\lfloor 2\rfloor\lfloor 1\rfloor}) = -$. Damit haben wir wieder: $\Re\alpha(P^{\lfloor 2\rfloor}) = +$.

3. Fall: $i = 1$ und $2 < j < k < r+2$

   Mit den ersten beiden Fällen läßt sich die Behauptung für diesen Fall in zwei Schritten zeigen: Zuerst gilt, wie in zweiten Fall:

   $$\Re\alpha(P^{\lfloor 1\rfloor}) = + \text{ und } \Re\alpha(P^{\lfloor k\rfloor}) = + \implies \Re\alpha(P^{\lfloor 2\rfloor}) = +$$

   Und damit sind wir wieder beim ersten Fall und haben:

   $$\Re\alpha(P^{\lfloor 2\rfloor}) = + \text{ und } \Re\alpha(P^{\lfloor k\rfloor}) = + \implies \Re\alpha(P^{\lfloor j\rfloor}) = +$$

4. Fall: $k = r+2, j = r+1$ und $i > 1$

   Wegen $\Re\alpha(P^{\lfloor r+2\rfloor}) = +$ folgt $\alpha(P^{\lfloor r+2\rfloor\lfloor 1\rfloor}) = \alpha(P^{\lfloor 1\rfloor\lfloor r+1\rfloor}) = -$ und wegen $\Re\alpha(P^{\lfloor i\rfloor}) = +$ folgt $\alpha(P^{\lfloor i\rfloor\lfloor 1\rfloor}) = \alpha(P^{\lfloor 1\rfloor\lfloor i-1\rfloor}) = -$. Die Monotonie von α auf $P^{\lfloor 1\rfloor}$ erzwingt $\alpha(P^{\lfloor 1\rfloor\lfloor r\rfloor}) = \alpha(P^{\lfloor r+1\rfloor\lfloor 1\rfloor}) = -$. Auf der anderen Seite erhalten wir $\alpha(P^{\lfloor r+1\rfloor\lfloor r+1\rfloor}) = \alpha(P^{\lfloor r+2\rfloor\lfloor r+1\rfloor}) = +$ wegen $\Re\alpha(P^{\lfloor r+2\rfloor}) = +$. Also ist auch $\Re\alpha(P^{\lfloor r+1\rfloor}) = +$.

5. Fall: $k = r+2$ und $1 < i < j < r+1$

   Hier können wir wieder in zwei Schritten vorgehen. Zuerst gilt wie im vierten Fall:

   $$\Re\alpha(P^{\lfloor r+2\rfloor}) = + \text{ und } \Re\alpha(P^{\lfloor i\rfloor}) = + \implies \Re\alpha(P^{\lfloor r+1\rfloor}) = +$$

   Und damit sind wir wieder beim ersten Fall und haben:

   $$\Re\alpha(P^{\lfloor r+1\rfloor}) = + \text{ und } \Re\alpha(P^{\lfloor i\rfloor}) = + \implies \Re\alpha(P^{\lfloor j\rfloor}) = +$$

6. Fall: $1 = i < j < k = r+2$

   In diesem Fall gibt es nichts zu zeigen, denn es kann nicht gleichzeitig $\Re\alpha(P^{\lfloor 1\rfloor}) = +$ und $\Re\alpha(P^{\lfloor r+2\rfloor}) = +$ gelten, weil sonst $\alpha(P^{\lfloor 1\rfloor\lfloor r+1\rfloor}) = +$ und $\alpha(P^{\lfloor r+2\rfloor\lfloor 1\rfloor}) = -$ folgen würde, aber $P^{\lfloor 1\rfloor\lfloor r+1\rfloor} = P^{\lfloor r+2\rfloor\lfloor 1\rfloor}$.

Zum Beweis von (2) halten wir zunächst fest, daß wegen $\mathfrak{R}\alpha(P^{\lfloor j\rfloor}) = +$ gilt:

$$\alpha(P^{\lfloor j\rfloor\lfloor 1\rfloor}) = \alpha(P^{\lfloor 1\rfloor\lfloor j-1\rfloor}) = - \text{ und } \alpha(P^{\lfloor j\rfloor\lfloor r+1\rfloor}) = \alpha(P^{\lfloor r+2\rfloor\lfloor j\rfloor}) = +$$

Wir betrachten wieder $P^{\lfloor 1\rfloor}$ und $P^{\lfloor r+2\rfloor}$ als r–Pakete und unterscheiden zwei Fälle:

1. Fall: $\alpha(P^{\lfloor 1\rfloor\lfloor r+1\rfloor}) = \alpha(P^{\lfloor r+2\rfloor\lfloor 1\rfloor}) = +$

Dann erzwingt die Monotonie von α auf $P^{\lfloor r+2\rfloor}$ wegen $\alpha(P^{\lfloor r+2\rfloor\lfloor j\rfloor}) = +$, daß für $1 \leq i < j$ gilt: $\alpha(P^{\lfloor r+2\rfloor\lfloor i\rfloor}) = \alpha(P^{\lfloor i\rfloor\lfloor r+1\rfloor}) = +$. Für $1 < i < j$ folgt wegen der Monotonie von α auf $P^{\lfloor 1\rfloor}$ und $\alpha(P^{\lfloor 1\rfloor\lfloor j-1\rfloor}) = -$, daß $\alpha(P^{\lfloor 1\rfloor\lfloor i-1\rfloor}) = \alpha(P^{\lfloor i\rfloor\lfloor 1\rfloor}) = -$, und für $i = 1$ gilt $\alpha(P^{\lfloor i\rfloor\lfloor 1\rfloor}) = \alpha(P^{\lfloor 1\rfloor\lfloor 1\rfloor}) = -$. Also ist $\mathfrak{R}\alpha(P^{\lfloor i\rfloor}) = +$.

2. Fall: $\alpha(P^{\lfloor 1\rfloor\lfloor r+1\rfloor}) = \alpha(P^{\lfloor r+2\rfloor\lfloor 1\rfloor}) = -$

Hier gilt ganz analog: Wegen $\alpha(P^{\lfloor r+2\rfloor\lfloor j\rfloor}) = +$ und $\alpha(P^{\lfloor 1\rfloor\lfloor j-1\rfloor}) = -$ ist auch $\alpha(P^{\lfloor r+2\rfloor\lfloor k\rfloor}) = \alpha(P^{\lfloor k\rfloor\lfloor r+1\rfloor} = +$ (bzw. $\alpha(P^{\lfloor k\rfloor\lfloor r+1\rfloor}) = \alpha(P^{\lfloor r+2\rfloor\lfloor r+1\rfloor}) = +$, wenn $k = r+2$) und $\alpha(P^{\lfloor 1\rfloor\lfloor k-1\rfloor}) = \alpha(P^{\lfloor k\rfloor\lfloor 1\rfloor} = -$. Und diesmal folgt $\mathfrak{R}\alpha(P^{\lfloor k\rfloor}) = +$.

Damit ist das Lemma gezeigt. □

Sehr ähnliche, aber einfachere Konstruktionen sind die folgenden *schwachen* Boundary–Funktionen, definiert durch:

$$\mathfrak{R}^*\alpha(P) = \alpha(P^{\lfloor r+1\rfloor})$$
$$\mathfrak{L}^*\alpha(P) = \alpha(P^{\lfloor 1\rfloor})$$

In der Darstellung über die Paketsignatur von α muß man einfach das rechte (bzw. linke) Zeichen wiederholen.

$$\mathfrak{L}^*: \quad -\begin{smallmatrix} p_1 & \cdots & p_{r+1} \\ - & \cdots & + \end{smallmatrix} \qquad -\begin{smallmatrix} p_1 & \cdots & p_{r+1} \\ - & \cdots & - \end{smallmatrix} \qquad +\begin{smallmatrix} p_1 & \cdots & p_{r+1} \\ + & \cdots & - \end{smallmatrix} \qquad +\begin{smallmatrix} p_1 & \cdots & p_{r+1} \\ + & \cdots & + \end{smallmatrix}$$

$$\mathfrak{R}^*: \quad \begin{smallmatrix} p_1 & \cdots & p_{r+1} \\ - & \cdots & + \end{smallmatrix}+ \qquad \begin{smallmatrix} p_1 & \cdots & p_{r+1} \\ - & \cdots & - \end{smallmatrix}- \qquad \begin{smallmatrix} p_1 & \cdots & p_{r+1} \\ + & \cdots & - \end{smallmatrix}- \qquad \begin{smallmatrix} p_1 & \cdots & p_{r+1} \\ + & \cdots & + \end{smallmatrix}+$$

Lemma 2.3. *Die schwachen Boundary–Funktionen erzeugen aus einem r–Signotop ein $(r+1)$–Signotop.*

Beweis. Aus Symmetriegründen genügt es wieder, nur eine der beiden Funktionen zu betrachten. Wir wollen diesmal die linke Boundary $\mathfrak{L}^*$ nehmen. Seien also $\alpha \in S_r(n)$, $n \geq r+2 \geq 1$, $P \in \binom{[n]}{r+2}$ und $1 \leq i < j < k \leq r+2$.

Betrachten wir zunächst den Fall $i > 1$, dann ist

$$\mathfrak{L}^*\alpha(P^{\lfloor i\rfloor})\,\mathfrak{L}^*\alpha(P^{\lfloor j\rfloor})\,\mathfrak{L}^*\alpha(P^{\lfloor k\rfloor}) = \alpha(P^{\lfloor i\rfloor\lfloor 1\rfloor})\alpha(P^{\lfloor j\rfloor\lfloor 1\rfloor})\alpha(P^{\lfloor k\rfloor\lfloor 1\rfloor})$$
$$= \alpha(P^{\lfloor 1\rfloor\lfloor i-1\rfloor})\alpha(P^{\lfloor 1\rfloor\lfloor j-1\rfloor})\alpha(P^{\lfloor 1\rfloor\lfloor k-1\rfloor}) \notin \{+-+,-+-\}$$

wegen der Monotonie von α auf $P^{\lfloor 1\rfloor}$.

Ist $i = 1$ und $j = 2$, dann folgt die Monotonie von $\mathfrak{L}^*\alpha$ auf P wegen

$$\mathfrak{L}^*\alpha(P^{\lfloor 1\rfloor}) = \alpha(P^{\lfloor 1\rfloor\lfloor 1\rfloor}) = \alpha(P^{\lfloor 2\rfloor\lfloor 1\rfloor}) = \mathfrak{L}^*\alpha(P^{\lfloor 2\rfloor})$$

Der Fall $i = 1$ und $j > 2$ ergibt sich damit wieder in zwei Schritten. Weil wie gesehen $\overset{*}{\mathfrak{L}}\alpha(P^{\lfloor 1\rfloor}) = \overset{*}{\mathfrak{L}}\alpha(P^{\lfloor 2\rfloor})$ ist, können wir die Monotonie von $\overset{*}{\mathfrak{L}}\alpha$ bezüglich $1, j$ und k aus der bezüglich $2, j$ und k, die wir im ersten Fall gezeigt haben, folgern. □

Bemerkung. Wie sich beim Beweis der letzten beiden Lemmata gezeigt hat, sind die Boundary–Funktionen als Abbildungen von $S_r(n) \to S_{r+1}(n)$ nicht surjektiv. Ist nämlich β ein $(r+1)$–Signotop und P ein $(r+1)$–Paket mit $\beta(P^{\lfloor 1\rfloor}) = \beta(P^{\lfloor r+2\rfloor}) = +$, dann gibt es kein r–Signotop α, so daß $\beta = \mathfrak{R}\alpha$. Ist $\beta(P^{\lfloor 1\rfloor}) \neq \beta(P^{\lfloor 2\rfloor})$, dann gibt es kein α, so daß $\beta = \overset{*}{\mathfrak{L}}\alpha$. Analoges gilt natürlich auch für die anderen Boundaries.

Mithilfe der Spiegelung läßt sich die in den Beweisen der letzten beiden Lemmata erwähnte Symmetrie zwischen linken und rechten Boundaries präzise darstellen.

Es gilt nämlich für jedes r–Paket P:

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}(\alpha_\Phi)(P) = + \iff& \alpha_\Phi(P^{\lfloor 1\rfloor}) = \alpha(\Phi(P^{\lfloor 1\rfloor})) = \alpha(\Phi(P)^{\lfloor r+1\rfloor}) = +\\ &\text{und } \alpha_\Phi(P^{\lfloor r+1\rfloor}) = \alpha(\Phi(P^{\lfloor r+1\rfloor})) = \alpha(\Phi(P)^{\lfloor 1\rfloor}) = -\\ \iff& \mathfrak{R}\alpha(\Phi(P)) = +\end{aligned}$$

Und genauso ist

$$\overset{*}{\mathfrak{L}}(\alpha_\Phi)(P) = \alpha_\Phi(P^{\lfloor 1\rfloor}) = \alpha(\Phi(P)^{\lfloor r+1\rfloor}) = \overset{*}{\mathfrak{R}}\alpha(\Phi(P))$$

Und damit gilt

$$\mathfrak{L}(\alpha_\Phi) = (\mathfrak{R}\alpha)_\Phi \text{ und } \overset{*}{\mathfrak{L}}(\alpha_\Phi) = (\overset{*}{\mathfrak{R}}\alpha)_\Phi$$

d.h. die linke Boundary der Spiegelung ist die Spiegelung der rechten Boundary (und umgekehrt).

Extension und Expansion

Ausgehend von der rechten Boundary–Funktion definiert Ziegler in [Zie93] weiter die (rechte) *Extension* für $\alpha \in S_r(n)$ als die Funktion $\widetilde{\alpha} : \binom{[n+1]}{r+1} \to \{-,+\}$ mit

$$\widetilde{\alpha}(P) = \begin{cases}\alpha(P \setminus \{n+1\}) & \text{wenn } n+1 \in P\\ \mathfrak{R}\alpha(P) & \text{wenn } n+1 \notin P\end{cases}$$

Mit anderen Worten ist die Extension die Funktion mit

$$\widetilde{\alpha}\!\uparrow_{n+1} = \mathfrak{R}\alpha \text{ und } \widetilde{\alpha}\!\downarrow_{n+1} = \alpha$$

Analog lassen sich wieder die linke und die beiden schwachen Extensionen definieren, wobei wir auf der „linken" Seite „mit der 0 erweitern", d.h. Funktionen von $\binom{[0,n]}{r+1} \to \{-,+\}$ erhalten. In der allgemeineren Fassung mit einer beliebigen linear geordneten Grundmenge L ist das natürlich kein Problem. Wir erhalten:

$$\widehat{\alpha}\!\uparrow_{n+1} = \overset{*}{\mathfrak{R}}\alpha \text{ und } \widehat{\alpha}\!\downarrow_{n+1} = \alpha$$

$$\widetilde{\alpha}^*\!\uparrow_0 = \mathfrak{L}\alpha \text{ und } \widetilde{\alpha}^*\!\downarrow_0 = \alpha$$

$$\widehat{\alpha}^*\!\uparrow_0 = \overset{*}{\mathfrak{L}}\alpha \text{ und } \widehat{\alpha}^*\!\downarrow_0 = \alpha$$

Um zu sehen, daß alle diese Konstruktionen neue Signotope erzeugen, ist das folgende Lemma hilfreich, das sich auch in [Zie93] findet.

Lemma 2.4. *Zu $\alpha \in S_r(n)$ und $\beta \in S_{r+1}(n)$ seien γ, γ^* definiert durch*

$$\gamma(P) = \begin{cases} \alpha(P \setminus n+1) & \text{wenn } n+1 \in P \\ \beta(P) & \text{wenn } n+1 \notin P \end{cases}$$

$$\gamma^*(P) = \begin{cases} \alpha(P \setminus 0) & \text{wenn } 0 \in P \\ \beta(P) & \text{wenn } 0 \notin P \end{cases}$$

dann gilt:

(*i*) $\gamma \in S_{r+1}(n+1) \iff \forall P \in \binom{[n]}{r+1} : \alpha(P^{\lfloor 1 \rfloor})\alpha(P^{\lfloor r+1 \rfloor})\beta(P) \notin \{-+-,+-+\}$

(*ii*) $\gamma^* \in S_{r+1}(n+1) \iff \forall P \in \binom{[n]}{r+1} : \beta(P)\alpha(P^{\lfloor 1 \rfloor})\alpha(P^{\lfloor r+1 \rfloor}) \notin \{-+-,+-+\}$

Beweis. Wir widmen uns zunächst (*i*). Sei also $P \in \binom{[n]}{r+1}$ und $Q = P \cup \{n+1\}$. Dann ist $\gamma(Q^{\lfloor i \rfloor}) = \alpha(P^{\lfloor i \rfloor})$ für $i = 1, 2, \ldots, r+1$ und $\gamma(Q^{\lfloor r+2 \rfloor}) = \gamma(P) = \beta(P)$. Damit ist $\alpha(P^{\lfloor 1 \rfloor})\alpha(P^{\lfloor r+1 \rfloor})\beta(P) \notin \{-+-,+-+\}$ trivialerweise notwendig dafür, daß γ monoton auf P ist.

Andrerseits kann die Monotonie von γ auf $P \cup \{n+1\}$ nur dann verletzt sein, wenn es $1 \leq i < j \leq r+1$ gibt, so daß $\alpha(P^{\lfloor i \rfloor}) \neq \alpha(P^{\lfloor j \rfloor})$ und $\beta(P) \neq \alpha(P^{\lfloor j \rfloor})$. Aus $\alpha(P^{\lfloor i \rfloor}) \neq \alpha(P^{\lfloor j \rfloor})$ folgt aber wegen der Monotonie von α auf P, daß $\alpha(P^{\lfloor 1 \rfloor}) = \alpha(P^{\lfloor i \rfloor})$ und $\alpha(P^{\lfloor j \rfloor}) = \alpha(P^{\lfloor r+1 \rfloor})$. Wenn also γ nicht monoton auf $P \cup \{n+1\}$ ist, dann folgt $\alpha(P^{\lfloor 1 \rfloor})\alpha(P^{\lfloor r+1 \rfloor})\beta(P) \in \{-+-,+-+\}$.

Damit ist die Bedingung auch hinreichend und Teil (*i*) ist damit gezeigt.

Der Beweis für (*ii*) verläuft völlig analog mit $Q = P \cup \{0\}$ und $\gamma(Q^{\lfloor i \rfloor}) = \alpha(P^{\lfloor i+1 \rfloor})$ für $i = 1, 2, \ldots, r+1$ und $\gamma(Q^{\lfloor 1 \rfloor}) = \gamma(P) = \beta(P)$. □

Setzt man im obigen Lemma für β eine der Boundaries $\mathfrak{R}\alpha, \mathfrak{L}\alpha, \overset{*}{\mathfrak{R}}\alpha, \overset{*}{\mathfrak{L}}\alpha$ ein, dann erhält man als Korollar den versprochenen Satz:

Satz 2.5. *Ist $\alpha \in S_r(n)$, dann sind $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\alpha}^*, \widehat{\alpha}$ und $\widehat{\alpha}^* \in S_{r+1}(n+1)$.* □

Rambau untersucht in [Ram97] unter anderem auch die höhere Bruhat Ordnung und zeigt, daß die schwache Extension (die er *expansion* nennt) im Gegensatz zu den anderen Konstruktionen eine ordnungstreue Einbettung von $S_r(n)$ in $S_{r+1}(n+1)$ erlaubt. Das folgt sofort mit dem folgenden Lemma:

Lemma 2.6. *Sind $\alpha, \beta \in S_r(n)$ mit $\alpha \lessdot \beta$, dann gilt: $\widehat{\alpha} < \widehat{\beta}$.*

Beweis. Sei T das eindeutige Element aus $\binom{[n]}{r}$ mit $\mathrm{Inv}(\beta) \setminus \mathrm{Inv}(\alpha) = \{T\}$ und $P \in \binom{[n]}{r+1}$, dann ist

$$P \in \mathrm{Inv}(\widehat{\beta}) \setminus \mathrm{Inv}(\widehat{\alpha}) \iff \beta(P^{\lfloor r+1 \rfloor}) = + \text{ und } \alpha(P^{\lfloor r+1 \rfloor}) = - \iff P^{\lfloor r+1 \rfloor} = T$$

und weil $\alpha(T') = \beta(T')$ für alle $T' \neq T$, ist $\widehat{\alpha}(P) = \widehat{\beta}(P)$ für alle P mit $P^{\lfloor r+1 \rfloor} \neq T$.

Betrachten wir zunächst $T \cup \{n+1\}$. Sei $P \in \binom{[n]}{r+1}$ und $1 \leq i \leq r+1$, so daß $T = P^{\lfloor i \rfloor}$ und $Q = P \cup \{n+1\}$. Dann ist $\widehat{\alpha}(Q^{\lfloor j \rfloor}) = \alpha(P^{\lfloor j \rfloor})$ für $1 \leq j \leq r+1$ und $\widehat{\alpha}(Q^{\lfloor r+2 \rfloor}) = \widehat{\alpha}(P) = \alpha(P^{\lfloor r+1 \rfloor})$. Ist $i < r+1$, dann folgt damit wegen $T = P^{\lfloor i \rfloor} \in \mathrm{Rand}_\alpha(P)$ auch $T \cup \{n+1\} = Q^{\lfloor i \rfloor} \in \mathrm{Rand}_{\widehat{\alpha}}(Q)$. Ist $T = P^{\lfloor r+1 \rfloor}$, dann gibt es genau zwei Möglichkeiten, die wir mittels der Paketsignaturen darstellen wollen (wobei $T = \{t_1, \ldots, t_r\}$):

$$(1) \quad \begin{array}{c|cccccc} & t_1 & \ldots & t_r & x & n{+}1 \\ \widehat{\alpha} & - & \ldots & - & - & - \\ \widehat{\beta} & - & \ldots & - & + & + \end{array} \qquad \text{oder} \qquad (2) \quad \begin{array}{c|cccccc} & t_1 & \ldots & t_r & x & n{+}1 \\ \widehat{\alpha} & + & \ldots & + & - & - \\ \widehat{\beta} & + & \ldots & + & + & + \end{array}$$

weil $T \in \mathrm{Rand}_\alpha(P)$ und $T \in \mathrm{Rand}_\beta(P)$.

Wir sehen, daß im Fall (1) vor $T \cup \{n+1\}$ erst $T \cup \{x\}$ geflipt werden muß, im Fall (2) danach und wollen im folgenden zeigen, daß das auch möglich ist.

Sei $X^- = \{x > t_r \mid \alpha(T^{\lfloor r \rfloor} \cup \{x\}) = -\}$ und $X^+ = \{x > t_r \mid \alpha(T^{\lfloor r \rfloor} \cup \{x\}) = +\}$, d.h. für $x \in X^-$ trifft Fall (1) zu, für $x \in X^+$ Fall (2).

Wir wollen zunächst zwei Behauptungen zeigen:

(i) $T \cup \{min(X^-)\}$ ist in $\widehat{\alpha}$ flipbar.

(ii) $T \cup \{max(X^+)\}$ ist in $\widehat{\beta}$ flipbar.

Um (i) zu sehen, seien $x, y \in X^-$ mit $x < y$. Dann ist für $1 \leq j \leq r$:

$$\widehat{\alpha}(T^{\lfloor j \rfloor} \cup \{x,y\}) = \alpha(T^{\lfloor j \rfloor} \cup \{x\}) = \widehat{\alpha}(T^{\lfloor j \rfloor} \cup \{x, n+1\}) = -$$

$$\widehat{\beta}(T^{\lfloor j \rfloor} \cup \{x,y\}) = \beta(T^{\lfloor j \rfloor} \cup \{x\}) = \widehat{\beta}(T^{\lfloor j \rfloor} \cup \{x, n+1\}) = -$$

und damit ergibt sich für das Paket $T \cup \{x, y\}$ die folgende Signatur:

$$\begin{array}{c|ccccc} & t_1 & \ldots & t_r & x & y \\ \widehat{\alpha} & - & \ldots & - & - & - \\ \widehat{\beta} & - & \ldots & - & + & + \end{array}$$

also $T \cup \{x\} \in \mathrm{Rand}_{\widehat{\alpha}}(T \cup \{x, y\})$ und damit $T \cup \{min(X^-)\} \in \mathrm{Rand}_{\widehat{\alpha}}(T \cup \{min(X^-), y\})$ für alle $y \in X^-, y \neq min(X^-)$.

Ganz analog können wir (ii) zeigen. Es gilt nämlich für $x, y \in X^+$ mit $x < y$ und $1 \leq j \leq r$:

$$\widehat{\beta}(T^{\lfloor j \rfloor} \cup \{x,y\}) = \beta(T^{\lfloor j \rfloor} \cup \{x\}) = \widehat{\beta}(T^{\lfloor j \rfloor} \cup \{x, n+1\}) = +$$

$$\widehat{\alpha}(T^{\lfloor j \rfloor} \cup \{x,y\}) = \alpha(T^{\lfloor j \rfloor} \cup \{x\}) = \widehat{\alpha}(T^{\lfloor j \rfloor} \cup \{x, n+1\}) = +$$

also haben wir

$$\begin{array}{c|ccccc} & t_1 & \ldots & t_r & x & y \\ \widehat{\alpha} & + & \ldots & + & - & - \\ \widehat{\beta} & + & \ldots & + & + & + \end{array}$$

und $T \cup \{y\} \in \text{Rand}_{\widehat{\beta}}(T \cup \{x, y\})$, also auch $T \cup \{max(X^+)\} \in \text{Rand}_{\widehat{\beta}}(T \cup \{x, max(X^+)\})$ für alle $x \in X^+, x \neq max(X^+)$. $\triangle$

Durch Iterieren der Argumentation können wir die Existenz von γ_1 und $\gamma_2 \in S_{r+1}(n+1)$ folgern, für die gilt:

- Es existieren aufsteigende Pfade in $S_{r+1}(n+1)$ von $\widehat{\alpha}$ nach γ_1 und von γ_2 nach $\widehat{\beta}$,
- $\gamma_1(T \cup \{x\}) = +$ für alle $x \in X^-$ und $\gamma_2(T \cup \{x\}) = -$ für alle $x \in X^+$
- und $\gamma_1(P) = \widehat{\alpha}(P)$, $\gamma_2(P) = \widehat{\beta}(P)$ sonst.

Insgesamt gilt also: $\gamma_1(P) = \gamma_2(P)$ für alle $P \neq T \cup \{n+1\}$ und $\gamma_1(T \cup \{n+1\}) = -$ und $\gamma_2(T \cup \{n+1\}) = +$. Es folgt $\gamma_1 \lessdot \gamma_2$. $\square$

Damit haben wir einen Pfad in $S_{r+1}(n+1)$ von $\widehat{\alpha}$ nach $\widehat{\beta}$ gefunden, den wir noch einmal explizit als Folge der $T \in \binom{[n+1]}{r+1}$, die jeweils geflipt werden, angeben wollen. Dazu sei $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} = X^-$ und $\{y_1, y_2, \ldots, y_m\} = X^+$, so daß $x_i < x_j$ und $y_i < y_j$ jeweils für $i < j$. Dann ergibt die Flipfolge

$$T \cup \{x_1\}, T \cup \{x_2\}, \ldots, T \cup \{x_k\}, T \cup \{n+1\}, T \cup \{y_1\}, T \cup \{y_2\}, \ldots, T \cup \{y_m\}$$

den gesuchten Pfad.

10 Ketten von Signotopen

Wir wollen nun zu einem sehr nützlichen Werkzeug zur Untersuchung von Signotopen kommen, das weitgehend dem uns schon bei der Betrachtung von Pseudogeradenarrangements begegneten orientierten Gerüst entspricht.

Zunächst definieren wir zu einem r–Signotop auf $[n]$ und $A \in \binom{[n]}{r-2}$ eine Orientierung $\rightarrow_A$ des vollständigen Graphen auf der Knotenmenge $[n] \setminus A$. Die Orientierung der Kanten für $i < j$ sei gegeben durch:

$$i \rightarrow_A j \iff \alpha(A \cup \{i, j\}) = -$$

Behauptung. Die Orientierung $\rightarrow_A$ ist azyklisch, d.h. der Graph ist ein transitives Turnier.

Beweis. Wir nehmen, um daraus einen Widerspruch zu folgern, an, dieser Graph hat einen gerichteten Zykel. Dann hat er auch einen Zykel der Länge 3. Dieser Zykel enthalte die Knoten $i, j, k \in [n] \setminus A$ mit $i < j < k$. Das heißt es trifft einer der beiden Fälle zu:

(1) $i \rightarrow_A j \rightarrow_A k \rightarrow_A i$

(2) $k \rightarrow_A j \rightarrow_A i \rightarrow_A k$

Wegen $i < j < k$ ist $A \cup \{i, j\} <_{lex} A \cup \{i, k\} <_{lex} A \cup \{j, k\}$.

Im Fall (1) ist $\alpha(A \cup \{j, k\})\alpha(A \cup \{i, k\})\alpha(A \cup \{i, j\}) = - + -$ und damit in dem Paket $A \cup \{i, j, k\}$ die Monotonie verletzt.

Ganz analog ist im Fall (2) $\alpha(A \cup \{j,k\})\alpha(A \cup \{i,k\})\alpha(A \cup \{i,j\}) = + - +$ und damit wieder in dem Paket $A \cup \{i,j,k\}$ die Monotonie verletzt. $\triangle$

Transitive Turniere entsprechen linearen Ordnungen, d.h. haben genau eine topologische Sortierung, weil es nur eine Quelle geben kann und der nach Entfernen dieser Quelle verbleibende Graph wieder ein transitives Turnier ist. Wir erhalten so zu jedem $A \in \binom{[n]}{r-2}$ eine Permutation α_A von $[n] \setminus A$, die die lineare Ordnung zu $\to_A$ repräsentiert. (Für $r = 3$ sind das gerade die lokalen Folgen.)

Definition. Damit können wir jetzt das *orientierte Gerüst* $\mathrm{G}(\alpha)$ des Signotops $\alpha \in S_r(n)$ definieren. Die Knoten sind die $(r-1)$–elementigen Teilmengen von $[n]$. Sei $A \in \binom{[n]}{r-2}$, $i, j \in [n] \setminus A$ und $\to_A$ das oben definierte transitive Turnier. Dann ist $A \cup \{i\} \to_\alpha A \cup \{j\}$ eine Kante in $\mathrm{G}(\alpha)$ genau dann, wenn $i \to_A j$. Das ist genau dann der Fall, wenn entweder $\alpha(A \cup \{i,j\}) = -$ und $i < j$ oder $\alpha(A \cup \{i,j\}) = +$ und $i > j$.

Bemerkung. Mit dieser Definition entspricht das orientierte Gerüst eines Signotops nicht genau dem eines Arrangements. Der entsprechende Graph hätte nur die Teilmenge der Kanten von $\mathrm{G}(\alpha)$, für die der Anfangs- und der Endpunkt in der Permutation α_A direkt aufeinander folgen, d.h. Kanten der Form $A \cup \{\alpha_A(i)\} \to A \cup \{\alpha_A(i+1)\}$. Das orientierte Gerüst ist also eine transitive Erweiterung des „geometrischen“ Gerüsts. Für die Arbeit mit Signotopen ist diese etwas großzügigere Definition sinnvoll, weil man die explizite Angabe der α_A umgehen kann, und für jedes $T \in \binom{[n]}{r}$ direkt aus dem Wert $\alpha(T)$ die Richtung der Kante zwischen $T^{\lfloor i \rfloor}$ und $T^{\lfloor j \rfloor}$ für $1 \leq i < j \leq r$ erhält:

$$T^{\lfloor i \rfloor} \to_\alpha T^{\lfloor j \rfloor} \iff \alpha(T) = +$$

Lemma 2.7. *Sei $\alpha \in S_r(n)$, dann ist das orientierte Gerüst $\mathrm{G}(\alpha)$ azyklisch.*

Beweis. Für $r = n$ ist $\mathrm{G}(\alpha)$ die transitive Hülle der lexikographischen Reihenfolge $[n]^{\lfloor n \rfloor}, [n]^{\lfloor n-1 \rfloor}, \ldots, [n]^{\lfloor 1 \rfloor}$, wenn $\alpha([n]) = -$, und deren Umkehrung, wenn $\alpha([n]) = +$.

Für $r = 1$ und $n > 1$ hat $\mathrm{G}(\alpha)$ nur den Knoten $\emptyset$ und keine Kanten.

Für $r = 2$ und $n > 2$ codiert α eine Permutation π von $[n]$ und für $1 \leq i < j \leq n$ gilt $\{i\} \to_\alpha \{j\} \iff i \prec_\pi j$ und $\{j\} \to_\alpha \{i\} \iff j \prec_\pi i$. Es ist klar, daß die Relation $\prec_\pi$ für eine Permutation π transitiv, $\mathrm{G}(\alpha)$ also azyklisch ist.

Sei also jetzt $n > r > 2$, $\beta = \alpha{\uparrow_n} \in S_r(n-1)$ und $\gamma = \alpha{\downarrow_n} \in S_{r-1}(n-1)$. Nehmen wir an, es existiert ein Zykel in $\mathrm{G}(\alpha)$. Wenn wir die ersten drei Fälle zur Induktionsverankerung nutzen, dann können wir nach Induktionsvoraussetzung folgern, daß $\mathrm{G}(\beta)$ und $\mathrm{G}(\gamma)$ azyklisch sind, wobei wir $\mathrm{G}(\gamma)$ als Graph auf der Knotenmenge $\{X \cup \{n\} \mid X \in \binom{[n-1]}{r-2}\}$ betrachten wollen. Dann enthält dieser Zykel Kanten $A \to_\alpha A^{\lfloor i \rfloor} \cup \{n\}$ und $B^{\lfloor j \rfloor} \cup \{n\} \to_\alpha B$, mit $A, B \in \binom{[n-1]}{r-1}$ und $1 \leq i, j < r$. Nach Definition von $\mathrm{G}(\alpha)$ gilt also: $\alpha(A \cup \{n\}) = -$, $\alpha(B \cup \{n\}) = +$ und es gibt einen Pfad in $\mathrm{G}(\beta)$ von B nach A. (siehe Abbildung 22)

Wir werden das zum Widerspruch führen, indem wir folgende Behauptung zeigen:

Behauptung. Ist $X \in \binom{[n-1]}{r-1}$ mit $\alpha(X \cup \{n\}) = -$ und $Y \in \binom{[n-1]}{r-1}$ mit $Y \to_\beta X$, dann folgt $\alpha(Y \cup \{n\}) = -$.

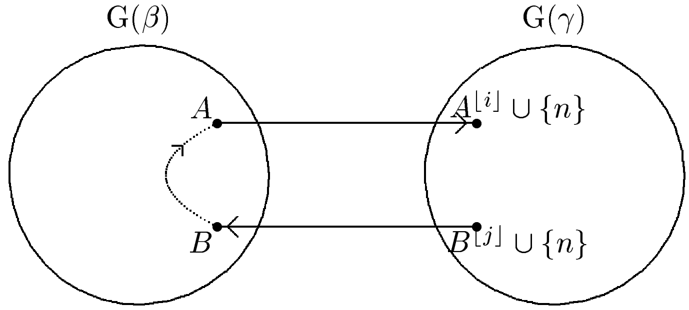

Abbildung 22. Es gibt keinen Pfad in G(β) von B nach A

Wenn das gezeigt ist, wissen wir, daß es obigen Pfad nicht geben kann, und damit auch keinen Zykel in G(α).

Zum Beweis der Behauptung seien also $X, Y \in \binom{[n-1]}{r-1}$, $\alpha(X \cup \{n\}) = -$ und $Y \to_\beta X$. Dann gibt es ein $T \in \binom{[n]}{r}$ und Indices i, j, s.d. $X = T^{\lfloor i\rfloor}$ und $Y = T^{\lfloor j\rfloor}$. Wir betrachten $P = T \cup \{n\}$ und unterscheiden zwei Fälle.

1. Fall: $i < j$

Dann ist $\alpha(P^{\lfloor r+1\rfloor}) = \alpha(T) = -$ wegen $T^{\lfloor j\rfloor} = Y \to_\beta X = T^{\lfloor i\rfloor}$. Mit der Monotonie von α auf P und $\alpha(P^{\lfloor i\rfloor}) = \alpha(X \cup \{n\}) = -$ folgt $\alpha(P^{\lfloor j\rfloor}) = \alpha(Y \cup \{n\}) = -$.

2. Fall: $i > j$

Dann erhalten wir aus $T^{\lfloor j\rfloor} = Y \to_\beta X = T^{\lfloor i\rfloor}$, daß $\alpha(P^{\lfloor r+1\rfloor}) = \alpha(T) = +$ ist. Und wieder erzwingt die Monotonie von α auf P, daß $\alpha(Y \cup \{n\}) = -$ sein muß. $\triangle$

$\square$

Wir kommen jetzt zu einer der wichtigsten Eigenschaften von Signotopen, nämlich daß jedes r–Signotop eine maximale Kette von $(r-1)$–Signotopen beschreibt.

Sei $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{\binom{n}{r-1}}$ eine maximale Kette in $S_{r-1}(n)$, d.h. $\beta_0 = \widehat{0}$ und $\beta_{i-1} \lessdot \beta_i$ für alle $i = 1, 2, \ldots, \binom{n}{r-1}$ (und folglich $\beta_{\binom{n}{r-1}} = \widehat{1}$). Für $t = 1, 2, \ldots, \binom{n}{r-1}$ sei A_t das eindeutige Element in $\mathrm{Inv}(\beta_t) \setminus \mathrm{Inv}(\beta_{t-1})$. Damit erhalten wir eine Folge $A_1, A_2, \ldots, A_{\binom{n}{r-1}}$. Sei $T \in \binom{[n]}{r}$, dann kommen wegen der Monotonie der β_t auf T die $(r-1)$–elementigen Teilmengen $T^{\lfloor i\rfloor}$ von T in $A_1, A_2, \ldots, A_{\binom{n}{r-1}}$ entweder in lexikographischer oder in umgekehrt lexikographischer Reihenfolge vor. Definieren wir $\alpha : \binom{[n]}{r} \to \{-, +\}$ so, daß $\alpha(T) = +$ im letzten Fall, d.h. genau dann, wenn $T^{\lfloor 1\rfloor}, T^{\lfloor 2\rfloor}, \ldots, T^{\lfloor r\rfloor}$ eine Teilfolge von $A_1, \ldots, A_{\binom{n}{r-1}}$ ist, und betrachten $P \in \binom{[n]}{r+1}$. Wenn $\alpha(P^{\lfloor i\rfloor}) = \alpha(P^{\lfloor i+1\rfloor})$ für alle $1 \le i < r$, dann ist α monoton auf P. Andernfalls sei $i < r$ minimal mit der Eigenschaft, daß $\alpha(P^{\lfloor i\rfloor}) \neq \alpha(P^{\lfloor i+1\rfloor})$. Die beiden möglichen Fälle $\alpha(P^{\lfloor i\rfloor}) = +$ und $\alpha(P^{\lfloor i\rfloor}) = -$ sind völlig symmetrisch, so daß es genügt, nur den ersten Fall auszuführen. Mit $\prec$ bezeichnen wir die Relation „*liegt in* *der Folge der A_i vor*". Dann folgt aus $\alpha(P^{\lfloor i \rfloor}) = +$ und $\alpha(P^{\lfloor i+1 \rfloor}) = -$ für alle $k > i+1$

$$P^{\lfloor i \rfloor \lfloor i \rfloor} \prec P^{\lfloor i \rfloor \lfloor k-1 \rfloor} \text{ und } P^{\lfloor i+1 \rfloor \lfloor i \rfloor} \prec P^{\lfloor i+1 \rfloor \lfloor k-1 \rfloor}$$

Fassen wir das zusammen, dann erhalten wir

$$P^{\lfloor k \rfloor \lfloor i \rfloor} = P^{\lfloor i \rfloor \lfloor k-1 \rfloor} \prec P^{\lfloor i \rfloor \lfloor i \rfloor} = P^{\lfloor i+1 \rfloor \lfloor i \rfloor} \prec P^{\lfloor i+1 \rfloor \lfloor k-1 \rfloor} = P^{\lfloor k \rfloor \lfloor i+1 \rfloor}$$

Damit kommen die Teilmengen von $P^{\lfloor k \rfloor}$ in $A_1, \ldots, A_{\binom{n}{r-1}}$ für alle $k > i+1$ in lexikographischer Reihenfolge vor, d.h $\alpha(P^{\lfloor k \rfloor}) = -$ und damit α monoton auf P.

Damit haben wir also eine Abbildung Π, die jeder maximalen Kette in $S_{r-1}(n)$ ein Signotop aus $S_r(n)$ zuordnet.

Nennen wir zwei maximale Ketten C und C' in $S_{r-1}(n)$ *elementar äquivalent*, wenn sie sich nur in der Reihenfolge zweier aufeinanderfolgender Signotope unterscheiden, wenn also ein $t \in \{0, 1, \ldots, \binom{n}{r-1} - 1\}$ existiert, so daß $C = \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{\binom{n}{r-1}}$ und $C' = \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{t+1}, \beta_t, \ldots, \beta_{\binom{n}{r-1}}$. Wir erhalten wie oben zwei Folgen $A_1, A_2, \ldots, A_{\binom{n}{r-1}}$ und $A_1, \ldots, A_{t+1}, A_t, \ldots, A_{\binom{n}{r-1}}$ mit $A_i \in \binom{[n]}{r-1}$ für $i = 1, 2, \ldots, \binom{n}{r-1}$.

Dann muß $|A_t \cap A_{t+1}| < r-2$ gelten, denn sonst wäre $A_t \cup A_{t+1}$ ein $(r-1)$–Paket und die Monotonie der β_i auf $A_t \cup A_{t+1}$ ließe nur eine Reihenfolge, in der A_t und A_{t+1} geflipt werden können, zu. Damit folgt aber, daß Π beide Ketten auf dasselbe r–Signotop abbildet.

Zwei maximale Ketten C und C' in $S_{r-1}(n)$ wollen wir *äquivalent* nennen, wenn es eine Folge $C = C_0, C_1, \ldots, C_m = C'$ von maximalen Ketten in $S_{r-1}(n)$ gibt, so daß für alle $1 \leq t < m$ die Ketten C_t und C_{t+1} elementar äquivalent sind. Dann ist klar, daß mit dem beschriebenen Verfahren jeweils eine ganze Äquivalenzklasse auf ein r–Signotop abgebildet wird.

Satz 2.8. *Es gibt eine Bijektion zwischen Äquivalenzklassen von maximalen Ketten in $S_{r-1}(n)$ und den Elementen von $S_r(n)$.*

Beweis. Es bleibt noch zu zeigen, daß wir zu jedem $\alpha \in S_r(n)$ eine maximale Kette in $S_{r-1}(n)$ finden, die mittels des oben beschriebenen Verfahrens auf α abgebildet wird.

Sei $A_1, A_2, \ldots, A_{\binom{n}{r-1}}$ eine topologische Sortierung von $\mathrm{G}(\alpha)$ zu einem $\alpha \in S_r(n)$. Wir definieren eine Folge von Abbildungen $\beta_t : \binom{[n]}{r-1} \to \{-,+\}$ für $t = 0, 1, \ldots, \binom{n}{r-1}$ durch:

$$\beta_t(A_s) = \begin{cases} + & \text{wenn } t \leq s \\ - & \text{wenn } t > s \end{cases}$$

Da für jedes $T \in \binom{[n]}{r}$ und alle $1 \leq i < j < k \leq r$ entweder $T^{\lfloor i \rfloor} \to_\alpha T^{\lfloor j \rfloor} \to_\alpha T^{\lfloor k \rfloor}$ oder $T^{\lfloor k \rfloor} \to_\alpha T^{\lfloor j \rfloor} \to_\alpha T^{\lfloor i \rfloor}$ gilt, folgt im ersten Fall $\beta_t(T^{\lfloor i \rfloor}) \leq \beta_t(T^{\lfloor j \rfloor}) \leq \beta_t(T^{\lfloor k \rfloor})$ oder im zweiten $\beta_t(T^{\lfloor i \rfloor}) \geq \beta_t(T^{\lfloor j \rfloor}) \geq \beta_t(T^{\lfloor k \rfloor})$, insgesamt also die Monotonie von β_t auf T. Die β_t sind also eine Folge von $(r-1)$–Signotopen, von denen sich zwei aufeinanderfolgende in genau einem Zeichen unterscheiden. Außerdem ist $\beta_0 = \widehat{0}$ und $\beta_{\binom{n}{r-1}} = \widehat{1}$. Wir haben also eine maximale Kette in $S_{r-1}(n)$. Darüberhinaus ist A_t die eindeutige $(r-1)$–Menge mit $\mathrm{Inv}(\beta_t) \setminus \mathrm{Inv}(\beta_{t-1}) = \{A_t\}$ für alle $t = 1, \dots, \binom{n}{r-1}$, d.h. α ist das r–Signotop, auf das $\beta_0, \dots, \beta_{\binom{n}{r-1}}$ abgebildet wird. $\square$

An dieser Stelle können wir jetzt den Beweis für Satz 1.16 auf Seite 29 nachholen.

Beweis. Ist $f : \binom{[n]}{3} \to \{-,+\}$ eine auf 4–elementigen Teilmengen von $[n]$ monotone Abbildung, also in jetziger Terminologie ein 3–Signotop auf $[n]$, dann erhalten wir mit Satz 2.8 eine entsprechende Kette $\beta_0, \dots, \beta_{\binom{n}{2}}$ von 2–Signotopen, die eine einfache zulässige Folge von Permutationen beschreibt. Mit dieser zulässigen Folge erhalten wir ein markiertes Pseudogeradenarrangement, das von f codiert wird. $\square$

Die Anwendung des letzen Satzes in Verbindung mit den Boundary–Funktionen liefert uns noch das folgende Ergebnis:

Satz 2.9. *Jedes Element von $S_r(n)$ ist in einer maximalen Kette in $S_r(n)$.*

Beweis. Sei $\alpha \in S_r(n)$. Wir betrachten das orientierte Gerüst $\mathrm{G}(\overset{*}{\mathfrak{L}}\alpha)$ der linken schwachen Boundary von α. Die Knoten von $\mathrm{G}(\overset{*}{\mathfrak{L}}\alpha)$ sind die r–elementigen Teilmengen von $[n]$. Seien $T, T' \in \binom{[n]}{r}$ mit $T \to_{\overset{*}{\mathfrak{L}}\alpha} T'$, dann ist $P = T \cup T'$ ein r–Paket und entweder

$$T <_{lex} T' \text{ und } \overset{*}{\mathfrak{L}}\alpha(P) = \alpha(P^{\lfloor 1 \rfloor}) = - \text{ und damit } \alpha(T')\alpha(T) \neq +-,$$

$$\text{oder } T' <_{lex} T \text{ und } \overset{*}{\mathfrak{L}}\alpha(P) = \alpha(P^{\lfloor 1 \rfloor}) = + \text{ und damit } \alpha(T)\alpha(T') \neq -+.$$

In beiden Fällen folgt also $\alpha(T) \geq \alpha(T')$, damit bilden die $T \in \binom{[n]}{r}$ mit $\alpha(T) = +$ ein (Ordnungs)-Ideal in der durch $\mathrm{G}(\overset{*}{\mathfrak{L}}\alpha)$ definierten Ordnung und wir finden eine lineare Erweiterung $T_1, T_2, \dots, T_{\binom{n}{r}}$, in der die Elemente dieses Ideals ein Anfangsstück bilden. Präzise gibt es ein $t \in \{1, \dots, \binom{n}{r}\}$, so daß $\alpha(T_i) = +$ für alle $i \leq t$ und $\alpha(T_i) = -$ für alle $i > t$. Definieren wir jetzt die maximale Kette $\beta_0, \dots, \beta_{\binom{n}{r}}$ zu $\overset{*}{\mathfrak{L}}\alpha$ wie im Beweis zu Satz 2.8, dann ist $\beta_t = \alpha$. $\square$

Kombinatorischer Sweep

Sei $\alpha \in S_r(n)$, $A_1, A_2, \dots, A_{\binom{n}{r-1}}$ eine topologische Sortierung von $\mathrm{G}(\alpha)$ und $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{\binom{n}{r-1}}$ die entsprechende maximale Kette in $S_{r-1}(n)$, also $\beta_0 = \widehat{0}$ und $\beta_k(A) = \beta_{k-1}(A)$ für alle $A \neq A_k$ und $\beta_k(A_k) = +$ und $\beta_{k-1}(A_k) = -$.

Definition. Ein *Sweep* von α ist eine Folge $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{\binom{n}{r}}$ von r–Signotopen auf $[n] \cup g$, wobei wir $g < 1$ setzen. Diese Signotope lassen sich explizit angeben durch:

$$\gamma_k(T) = \begin{cases} \alpha(T) & \text{falls } g \notin T \\ \beta_k(T \setminus \{g\}) & \text{falls } g \in T \end{cases}$$

Anders ausgedrückt ist $\gamma_k{\uparrow_g} = \alpha$ und $\gamma_k{\downarrow_g} = \beta_k$.

Wir müssen noch zeigen, daß ein Sweep auf diese Art wohldefiniert ist, also die γ_k tatsächlich Signotope sind.

Behauptung. Sei γ_k ein Element eines Sweeps von $\alpha \in S_r(n)$ in obiger Definition, dann gilt $\gamma_k \in S_r(n+1]$.

Beweis. Um das zu sehen, wenden wir Lemma 2.4 an. In unsere Situation übersetzt bedeutet das, daß wir zeigen müssen, daß für jedes $T \in \binom{[n]}{r}$ gilt:

$$\alpha(T)\beta_k(T^{\lfloor 1 \rfloor})\beta_k(T^{\lfloor r \rfloor}) \notin \{-+-,+-+\}$$

Ist $\alpha(T) = -$, dann gilt $T^{\lfloor r \rfloor} \to_\alpha T^{\lfloor 1 \rfloor}$, d.h. $T^{\lfloor r \rfloor}$ ist in der topologischen Sortierung von $\mathrm{G}(\alpha)$ vor $T^{\lfloor 1 \rfloor}$. In der Folge der β_t wird also $T^{\lfloor r \rfloor}$ vor $T^{\lfloor 1 \rfloor}$ geflipt und das bedeutet $\beta_k(T^{\lfloor 1 \rfloor})\beta_k(T^{\lfloor r \rfloor}) \in \{--,-+,++\}$.

Für $\alpha(T) = +$ ist $T^{\lfloor 1 \rfloor}$ vor $T^{\lfloor r \rfloor}$ und wir erhalten $\beta_k(T^{\lfloor 1 \rfloor})\beta_k(T^{\lfloor r \rfloor}) \in \{++,+-,--\}$. △

Bemerkung. Dieser kombinatorische Sweep entspricht wieder nicht völlig unserer Definition eines Sweeps eines Pseudogeradenarrangements. Erstens ist es mit der bisher entwickelten „Signotopsprache“ nicht ausdrückbar, daß sich die Sweepkurven alle in zwei Punkten schneiden, und zweitens wäre ein Gebilde mit $\binom{n}{r}$ zusätzlichen Elementen ein wenig unhandlich und auch im Blick auf eine mögliche Speicherung und Bearbeitung durch Computerprogramme übertrieben, zumal die Informationen, die ein Sweep liefern könnte, bereits im Signotop enthalten sind.

11 Globale Struktur

Wie früher schon erwähnt, kann man neben der Signotopordnung $S_r(n)$ auch eine andere, ebenso „natürliche“ Ordnung auf der Menge der Signotope betrachten.

Definition. Die *Inklusionsordnung* auf der Menge der r–Signotope auf $[n]$ ist definiert durch $\alpha \subset \beta \iff \mathrm{Inv}(\alpha) \subset \mathrm{Inv}(\beta)$. Die so geordnete Menge bezeichnen wir mit $\mathrm{S}^{\subseteq}_r(n)$.

Es ist klar, daß wenn $\alpha < \beta$ in $S_r(n)$, dann auch $\alpha \subset \beta$ in $\mathrm{S}^{\subseteq}_r(n)$, und man kann fragen, ob diese beiden Ordnungen nicht überhaupt identisch sind. Ziegler hat in [Zie93] gezeigt, daß das im Allgemeinen nicht der Fall ist. Er charakterisiert diejenigen n und r, für die $S_r(n) = \mathrm{S}^{\subseteq}_r(n)$, nämlich $n - r \leq 3$ oder $r \leq 2$. Für $n = 8$ und $r = 4$ gibt er ein Gegenbeispiel an, so daß offen bleibt, ob $S_3(n) = \mathrm{S}^{\subseteq}_3(n)$ für $n \geq 7$. Die positive Antwort darauf haben inzwischen Felsner und Weil in [FW98] gegeben, so daß die Charakterisierung jetzt vollständig ist.

Der Beweisgang in [Zie93], den wir hier im wesentlichen übernehmen, ist eng verwoben mit der Antwort auf eine andere, nicht weniger interessante Frage, nämlich für welche n und r die Ordnung $S_r(n)$ ein Verband ist, so daß wir die Antwort auf beide Fragen in einem Satz zusammenfassen. Dieser Abschnitt wird ganz dem Beweis dieses Satzes gewidmet sein. Zuvor noch eine kurze Bemerkung zur Terminologie: Statt $S_r(n) = \mathrm{S}^{\subseteq}_r(n)$ werden wir häufig auch sagen, daß $S_r(n)$ *per Inklusion geordnet* ist.

Satz 2.10. *$S_r(n)$ ist identisch mit der Inklusionsordnung $\mathrm{S}^{\subseteq}_r(n)$, wenn $n - r \leq 3$ oder $r \leq 3$, aber $S_4(8) \neq \mathrm{S}^{\subseteq}_4(8)$. $S_r(n)$ ist ein Verband, wenn $n - r \leq 2$ oder $r \leq 2$, aber $S_3(6)$ ist kein Verband.*

Beweis. Die Teile des Beweises, die etwas umfangreicher sind, werden wir in einige Lemmata auslagern. Die einfacheren Fälle werden wir gleich hier abhandeln. Der Beweisgang verläuft in folgenden Schritten:

$S_1(n)$ codiert den booleschen Verband der Teilmengen von $[n]$, geordnet per Inklusion.

$S_n(n)$ hat nur zwei Elemente $\widehat{0} < \widehat{1}$ und die Aussagen des Satzes sind trivial.

Für $r = 2$ haben wir die Identität zur Inlusionsordnung bereits im Abschnitt 6, Lemma 1.15 gezeigt, die Verbandseigenschaft ist Inhalt von Lemma 2.11.

$S_{n-1}(n)$ besteht aus zwei bis auf $\widehat{0}$ und $\widehat{1}$ disjunkten Ketten und damit sind auch hier die Aussagen klar.

In Lemma 2.12 werden wir zeigen, daß, wenn $S_{r+1}(n)$ per Inklusion geordnet und ein Verband ist, auch $S_r(n)$ per Inklusion geordnet ist.

Damit folgt dann $S_{n-2}(n) = \mathrm{S}^{\subseteq}_{n-2}(n)$.

In Lemma 2.13 werden wir zeigen, daß unter dieser Voraussetzung auch $S_{n-2}(n)$ ein Verband ist.

Und damit können wir nochmal Lemma 2.12 anwenden und folgern, daß dann auch $S_{n-3}(n) = \mathrm{S}^{\subseteq}_{n-3}(n)$ gilt.

Der noch fehlende Fall $S_3(n) = \mathrm{S}^{\subseteq}_3(n)$ (für $n \geq 7$) ist Inhalt von Lemma 2.14.

Zum Schluß werden wir noch zwei Beispiele angeben, die zeigen, daß $S_3(6)$ kein Verband ist und $S_4(8)$ nicht per Inklusion geordnet.

Damit wird der Satz dann gezeigt sein.

Lemma 2.11. *$S_2(n)$ ist ein Verband.*

Beweis. In Lemma 1.15 im Abschnitt 6 haben wir gezeigt, daß für $r = 2$ die Signotopordnung mit der Inklusionsordnung der Inversionsmengen übereinstimmt. Es genügt also zu zeigen, daß $\mathrm{S}^{\subseteq}_2(n)$ ein Verband ist. Wir werden zuerst nachweisen, daß es zu α und $\beta \in \mathrm{S}^{\subseteq}_2(n)$ einen *Join* $\alpha \vee \beta$ gibt, also ein Signotop γ, das minimal ist mit der Eigenschaft $\alpha \subset \gamma$ und $\beta \subset \gamma$. Dazu nehmen wir induktiv an, daß wir für $\alpha{\uparrow}_n$ und $\beta{\uparrow}_n$ bereits einen Join $\gamma_{n-1} \in \mathrm{S}^{\subseteq}_2(n-1)$ gefunden haben, was für $n - 1 = 2$ trivial ist, und konstruieren daraus einen Join γ_n von α und β.

Für $i < j < n$ setzen wir $\gamma_n(i,j) = \gamma_{n-1}(i,j)$. Dann konstruieren wir in der Reihenfolge $i = n-1, n-2, \ldots, 1$ die neuen Werte. Und zwar soll $\gamma_n(i,n) = +$ sein genau dann, wenn eine der folgenden beiden Bedingungen erfüllt ist:

(1) $\alpha(i,n) = +$ oder $\beta(i,n) = +$

(2) Es gibt ein j mit $i < j < n$, so daß $\gamma_{n-1}(i,j) = +$ und $\gamma_n(j,n) = +$

Die erste Bedingung ist notwendig dafür, daß γ eine obere Schranke für α und β ist. Mit der zweiten Bedingung schließen wir aus, daß $\gamma_k(j,n)\gamma_n(i,n)\gamma_n(i,j) = + - +$. Es ist klar, daß der Join von α und β nicht weniger $+$–Zeichen haben kann als γ_n, d.h. wenn γ_n ein Signotop ist, dann ist $\gamma_n = \alpha \vee \beta$. Da nach Induktionsvoraussetzung γ_{n-1} ein Signotop ist, müssen wir nur noch zeigen, daß für alle $i < j < n$ gilt: $\gamma_n(j,n)\gamma_n(i,n)\gamma_n(i,j) \neq -+-$. Nehmen wir das Gegenteil an, um daraus einen Widerspruch herzuleiten. Es sei also $i < j < n$ so daß $\{i,j\}$ maximal in der lexikographischen Ordnung auf $\binom{[n]}{2}$ ist mit der Eigenschaft $\gamma_n(j,n)\gamma_n(i,n)\gamma_n(i,j) = -+-$. Nach Konstruktion von γ_n gelten die beiden Implikationen: $\gamma_n(i,j) = - \implies \alpha(i,j) = \beta(i,j) = -$ und $\gamma_n(j,n) = - \implies \alpha(j,n) = \beta(j,n) = -$. Mit der Monotonie von α und β folgt $\alpha(i,n) = \beta(i,n) = -$. Dann muß $\gamma_n(i,n) = +$ wegen Bedingung (2) gesetzt worden sein, d.h. es gibt ein x mit $i < x < n$, so daß $\gamma_{n-1}(i,x) = +$ und $\gamma_n(x,n) = +$. Wir betrachten zwei Fälle:

1. Fall: $x < j$

> Es ist $\gamma_{n-1}(i,x) = +$ und $\gamma_{n-1}(i,j) = \gamma_n(i,j) = -$. Da nach Induktionsvoraussetzung γ_{n-1} ein Signotop ist, muß $\gamma_{n-1}(x,j) = -$ sein. Weil $\gamma_n(x,j) = \gamma_{n-1}(x,j)$ folgt damit $\gamma_n(x,j)\gamma_n(x,k)\gamma_n(j,k) = -+-$. Aber $\{i,j\} <_{lex} \{x,j\}$ im Widerspruch zur geforderten Maximalität von $\{i,j\}$.

2. Fall: $j < x$

> Hier halten wir zunächst fest, daß wegen $\gamma_n(j,n) = -$ Bedingung (2) für j nicht erfüllt ist, d.h. insbesondere, daß $\gamma_{n-1}(j,x) = -$ oder $\gamma_n(x,n) = -$. Da $\gamma_n(x,n) = +$ ist, muß also $\gamma_{n-1}(j,x) = -$ sein. Aber das bedeutet, daß $\gamma_{n-1}(j,x)\gamma_{n-1}(i,x)\gamma_{n-1}(i,j) = -+-$, und damit γ_{n-1} kein Signotop ist, im Widerspruch zur Induktionsvoraussetzung.

Durch Vertauschung der Rollen von $+$ und $-$ in diesem Verfahren konstruiert man den Meet $\alpha \wedge \beta$. □

Lemma 2.12. *Wenn $S_{r+1}(n)$ ein Verband ist und $S_{r+1}(n) = \mathrm{S}^{\subseteq}_{r+1}(n)$, dann ist auch $S_r(n) = \mathrm{S}^{\subseteq}_r(n)$.*

Beweis. Seien α und $\beta \in S_r(n)$ mit $\alpha \subset \beta$. Wir wissen, daß $\alpha < \beta$ genau dann gilt, wenn es eine maximale Kette in $S_r(n)$ gibt, die beide Signotope enthält, d.h. wenn es ein $\gamma \in S_{r+1}(n)$ gibt, so daß α und β in einem Sweep von γ vorkommen. Nach Lemma 2.4 ist das genau dann der Fall, wenn für alle $P \in \binom{[n]}{r+1}$ die beiden Bedingungen gelten:

(1) $\gamma(P)\alpha(P^{\lfloor 1 \rfloor})\alpha(P^{\lfloor r+1 \rfloor}) \notin \{-+-,+-+\}$

(2) $\gamma(P)\beta(P^{\lfloor 1 \rfloor})\beta(P^{\lfloor r+1 \rfloor}) \notin \{-+-,+-+\}$

Formulieren wir diese Bedingungen mit Hilfe der Boundary–Funktionen $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{R}$ aus Abschnitt 9 um, dann erhalten wir die beiden Bedingungen:

(A) $\mathfrak{L}\alpha(P) = +$ oder $\mathfrak{L}\beta(P) = + \implies \gamma(P) = +$.

(B) $\mathfrak{R}\alpha(P) = +$ oder $\mathfrak{R}\beta(P) = + \implies \gamma(P) = -$

oder äquivalent zu (B):

(B') $\gamma(P) = + \implies -\mathfrak{R}\alpha(P) = +$ und $-\mathfrak{R}\beta(P) = +$.

Die Boundaries sind Signotope aus $S_{r+1}(n)$. Es ist $\mathfrak{L}\alpha(P) = +$ genau dann, wenn $\alpha(P^{\lfloor 1 \rfloor})\alpha(P^{\lfloor r+1 \rfloor}) = +-$. Wegen $\alpha \subset \beta$ gilt also $\mathfrak{L}\alpha(P) = + \implies \beta(P^{\lfloor 1 \rfloor}) = +$ und damit $\mathfrak{R}\beta(P) = -$, bzw. $-\mathfrak{R}\beta(P) = +$. Also haben wir $\mathfrak{L}\alpha \subseteq -\mathfrak{R}\beta$.

Analog folgert man $\mathfrak{L}\beta(P) = + \implies \beta(P^{\lfloor r+1 \rfloor}) = - \implies \alpha(P^{\lfloor r+1 \rfloor}) = -$, und damit also $\mathfrak{R}\alpha(P) = -$, bzw. $-\mathfrak{R}\alpha(P) = +$. Und das ergibt $\mathfrak{L}\beta \subseteq -\mathfrak{R}\alpha$.

Setzen wir voraus, daß $S_{r+1}(n) = \mathrm{S}^{\subseteq}_{r+1}(n)$, dann ist also $\mathfrak{L}\alpha \leq -\mathfrak{R}\beta$ und $\mathfrak{L}\beta \leq -\mathfrak{R}\alpha$. Setzen wir weiter voraus, daß $S_{r+1}(n)$ ein Verband ist, dann gibt es den Join $\mathfrak{L}\alpha \vee \mathfrak{L}\beta$ und den Meet $-\mathfrak{R}\alpha \wedge -\mathfrak{R}\beta$ in $S_{r+1}(n)$. Das heißt, es gibt ein $\gamma \in S_{r+1}(n)$ mit

$$\mathfrak{L}\alpha \vee \mathfrak{L}\beta \leq \gamma \leq -\mathfrak{R}\alpha \wedge -\mathfrak{R}\beta$$

Dieses γ erfüllt die Bedingungen (A) und (B'). □

Lemma 2.13. *Wenn $S_{n-2}(n) = \mathrm{S}^{\subseteq}_{n-2}(n)$, dann ist $S_{n-2}(n)$ ein Verband.*

Beweis. Zuerst eine Bemerkung zu r-Paketen, wenn $r = n-2$. Es gibt genau n solche Pakete, nämlich $P_i = [n] \setminus \{i\}$ für $i = 1, \ldots, n$. Für jedes dieser Pakete P_i mit $1 < i < n$ gilt $P_i^{\lfloor 1 \rfloor} \in P_1$ und $P_i^{\lfloor r+1 \rfloor} \in P_n$.

Seien α und $\beta \in S_{n-2}(n)$. Dann sind $\alpha{\uparrow_1}$ und $\beta{\uparrow_1}$ Signotope auf $P_1 = [2, n]$ und $\alpha{\uparrow_n}$ und $\beta{\uparrow_n}$ Signotope auf $P_n = [n-1]$. Da $S_{n-2}(n-1)$ ein Verband ist, existieren die Joins $\gamma_1 = \alpha{\uparrow_1} \vee \beta{\uparrow_1}$ und $\gamma_n = \alpha{\uparrow_n} \vee \beta{\uparrow_n}$.

Damit können wir wieder eine Abbildung $\gamma : \binom{[n]}{n-2} \to \{-,+\}$ definieren mit minimalem Rang, so daß $\alpha \subseteq \gamma$, $\beta \subseteq \gamma$ und $\gamma \in S_{n-2}(n)$. Es soll $\gamma \equiv \gamma_1$ auf P_1 und $\gamma \equiv \gamma_n$ auf P_n sein. Die beiden Pakete P_1 und P_n haben genau ein gemeinsames Element, nämlich $P_1^{\lfloor r+1 \rfloor} = P_n^{\lfloor 1 \rfloor} = [2, n-1]$. Wenn $\alpha(P_1^{\lfloor 1 \rfloor}) = +$ oder $\beta(P_1^{\lfloor 1 \rfloor}) = +$, dann müssen auch $\gamma_1(P_1^{\lfloor 1 \rfloor}) = \gamma_n(P_1^{\lfloor 1 \rfloor}) = +$ sein. Wenn $\alpha(P_1^{\lfloor 1 \rfloor}) = \beta(P_1^{\lfloor 1 \rfloor}) = -$, dann könnte $\gamma_1(P_1^{\lfloor 1 \rfloor}) = +$ nur gelten, wenn $\gamma_1(P_1^{\lfloor i \rfloor}) = +$ für ein $1 < i < r+1$ und $\gamma_1(P_1^{\lfloor r+1 \rfloor}) = -$. Aber dann wäre $\alpha(P_1^{\lfloor r+1 \rfloor}) = \beta(P_1^{\lfloor r+1 \rfloor}) = -$ und folglich $\alpha(P_1^{\lfloor i \rfloor}) = \beta(P_1^{\lfloor i \rfloor}) = -$ für alle $1 \leq i \leq r+1$. Dasselbe gilt analog für γ_n, d.h. es ist auf jeden Fall $\gamma_1(P_1^{\lfloor 1 \rfloor}) = \gamma_n(P_1^{\lfloor 1 \rfloor})$ und damit unsere bisherige Konstruktion von γ eindeutig.

Für die restlichen Pakete füllen wir die fehlenden Werte von γ in lexikographisch aufsteigender Reihenfolge, also $P_{n-1}, P_{n-2}, \ldots, P_2$. Innerhalb eines Paketes gehen wir ebenfalls in lexikographischer Reihenfolge, d.h. von rechts nach links, vor und setzen $\gamma(P_i^{\lfloor j \rfloor}) = +$ genau dann, wenn eine der drei Bedingungen zutrifft:

(1) $\alpha(P_i^{\lfloor j \rfloor}) = +$ oder $\beta(P_i^{\lfloor j \rfloor}) = +$

(2) $\gamma_1(P_i^{\lfloor 1 \rfloor}) = +$ und $\gamma_n(P_i^{\lfloor r+1 \rfloor}) = +$

(3) $\gamma_n(P_i^{\lfloor r+1 \rfloor}) = -$ und $\gamma(P_i^{\lfloor j+1 \rfloor}) = +$

Bedingung (1) sichert wieder, daß $\alpha \subseteq \gamma$ und $\beta \subseteq \gamma$. Bedingung (2) und (3) verhindern das Vorkommen von $+-+$ auf irgendeinem Paket. Aber auch $-+-$ ist ausgeschlossen, denn wenn das erste Mal auf einem Paket $\gamma(P^{\lfloor j \rfloor}) = +$ links von $\gamma(P^{\lfloor j+1 \rfloor}) = -$ gesetzt ist, dann wird links davon kein $-$ mehr gesetzt (Bedingung (3)). Damit müßte das linke $-$ an erster Stelle stehen, also $\gamma(P^{\lfloor 1 \rfloor}) = -$. Aber rechts von $P^{\lfloor j \rfloor}$ haben wir nur $-$, weil nach Voraussetzung j maximal mit $\gamma(P^{\lfloor j \rfloor}) = +$ ist. Damit muß auch $\gamma(P^{\lfloor r+1 \rfloor}) = -$ sein. Damit folgt aber, daß α und β auf ganz P identisch $-$ sind, und es bleibt kein Grund übrig, um $\gamma(P^{\lfloor j \rfloor}) = +$ zu setzen.

Insgesamt haben wir also, daß γ der Join von α und β bezüglich der Inklusionsordnung $\mathrm{S}^{\subseteq}_{n-2}(n)$ ist, und damit, weil die Ordnungen gleich sind, auch bezüglich $S_{n-2}(n)$. Den Meet für α und β konstruiert man wieder analog durch Vertauschen der Rollen von $+$ und $-$. $\square$

Lemma 2.14. *$S_3(n) = \mathrm{S}^{\subseteq}_3(n)$ für alle $n \geq 7$.*

Beweis. Seien $\alpha, \beta \in S_3(n)$, $n \geq 7$. Wir müssen zeigen, daß $\alpha \subset \beta \implies \alpha < \beta$. Dazu wollen wir zeigen, daß es ein Signotop α' gibt mit $\alpha \lessdot \alpha'$ und $\alpha' \subseteq \beta$. D.h. wir suchen ein $T \in \binom{[n]}{3}$ mit $\alpha(T) = -$, $\beta(T) = +$ und $T \in \mathrm{Mut}(\alpha)$. Durch Iteration der Argumentation erhält man eine Kette $\alpha = \alpha_0 \lessdot \alpha_1 \lessdot \cdots \lessdot \alpha_t = \beta$ und die Existenz dieser Kette zeigt ist äquivalent zu $\alpha < \beta$.

Es sei $\mathcal{A}$ ein Pseudogeradenarrangement, das durch α codiert wird. Zu einem Tripel $\{i, j, k\}$ mit $i < j < k$ nennen wir den Abschnitt auf der Pseudogeraden ℓ_j in $\mathcal{A}$, der zwischen den Schnittpunkten mit ℓ_i und ℓ_k liegt, die *Basis* von $\{i, j, k\}$. Ist $T \in \mathrm{Sep}(\alpha, \beta)$, dann nennen wir T auch ein *Differenztripel*. Wir halten fest, daß wegen $\alpha \subset \beta$ für jedes Differenztripel T gilt $\alpha(T) = -$ und $\beta(T) = +$. Außerdem erinnern wir uns, daß die *lokalen Folgen* α_i, für $i = 1, \ldots, n$ eine zu α äquivalente Codierung von $\mathcal{A}$ sind. Die lokale Folge α_i enthält dabei die Reihenfolge, in der die Pseudogerade ℓ_i die anderen Pseudogeraden schneidet. Für alle $\{i_1, i_2, j\}$ mit $i_1 < i_2$ gilt die folgende Äquivalenz:

$(*)\quad \alpha(\{i_1, i_2, j\}) = + \iff i_2 \prec i_1$ in α_j

Wenn ein Differenztripel in α flipbar sein soll, dann muß insbesondere seine Basis eine Kante im Arrangement $\mathcal{A}$ sein. Wir werden zunächst zeigen, daß es solche Tripel gibt und diese dann so ordnen, daß ein maximales flipbar sein muß.

Behauptung A. Es gibt ein Differenztripel, dessen Basis eine Kante im Arrangement $\mathcal{A}$ ist.

Beweis. Wir wählen zunächst ein Differenztripel $\{i, j, k\}$ mit $i < j < k$ und minimaler „Breite“ $k - i$.

Wenn ℓ_j zwischen den Schnittpunkten mit ℓ_i und ℓ_k von keiner Pseudogeraden geschnitten wird, dann ist $\{i, j, k\}$ bereits das gesuchte Tripel, dessen Basis eine Kante ist.

Wenn es doch ein x gibt, so daß ℓ_x die Basis von $\{i, j, k\}$ schneidet, d.h. $i \prec x \prec k$ in α_j, dann muß $x < i$ oder $k < x$ gelten.

Nehmen wir an, es wäre nicht so, d.h. es gibt ein solches x mit $i < x < k$. Dann folgt weil $i \prec x \prec k$ in α_j, daß

(1) $\quad \alpha(i, j, x) = \alpha(j, x, k) = -$, wenn $i < x < j$

(2) $\quad \alpha(i, x, j) = \alpha(x, j, k) = -$, wenn $j < x < k$.

Weil $\beta(i,j,k) = +$ nach Voraussetzung, fordert die Monotonie von β auf dem Paket $\{i,j,k\} \cup \{x\}$, daß

(1) $\beta(x,j,k) = +$ oder $\beta(i,x,j) = +$, wenn $i < x < j$

(2) $\beta(j,x,k) = +$ oder $\beta(i,j,x) = +$, wenn $j < x < k$

Damit ist in jedem Fall $\{j,k\} \cup \{x\}$ oder $\{i,j\} \cup \{x\}$ ein Differenztripel, für dessen Breite $b \in \{k-x, j-i, k-j, x-i\}$ gilt: $b < k-i$. Das widerspricht unserer Wahl von $\{i,j,k\}$ als Differenztripel minimaler Breite.

Die Basis von $\{i,j,k\}$ kann also nur von Pseudogeraden ℓ_x mit $x < i$ oder ℓ_y mit $k < y$ geschnitten werden. Für jedes $x < i$ folgt daraus, daß $\alpha(x,j,k) = -$ und $\alpha(x,i,j) = +$, und wegen $\alpha \subset \beta$ damit auch $\beta(x,i,j) = +$ ist. Weil $\beta(i,j,k) = +$ erzwingt die Monotonie dann auch $\beta(x,j,k) = +$, d.h. $\{x,j,k\}$ ist ein Differenztripel.

Ganz analog folgt für jedes $y > k$, daß $\alpha(i,j,y) = -$ und $\alpha(j,k,y) = \beta(j,k,y) = +$ ist. Mit der Monotonie von β folgt, daß $\beta(i,j,y) = +$ und damit $\{i,j,y\}$ ein Differenztripel ist.

Liegt jetzt auf ℓ_j direkt rechts neben dem Schnittpunkt mit ℓ_i der Schnittpunkt mit einer Pseudogeraden ℓ_y mit $y > k$, dann ist die Basis von $\{i,j,y\}$ eine Kante in $\mathcal{A}$ und $\{i,j,y\}$ das gesuchte Differenztripel. Genauso ist $\{x,j,k\}$ ein Differenztripel, dessen Basis eine Kante ist, wenn auf ℓ_j direkt links neben dem Schnittpunkt mit ℓ_k ein Schnittpunkt mit einer Pseudogeraden ℓ_x mit $x < i$ liegt.

Trifft keiner der beiden obigen Fälle zu, dann gibt es $x < i$ und $y > k$, so daß auf ℓ_j der Schnittpunkt mit ℓ_x direkt links neben dem mit ℓ_y liegt, also die Basis von $\{x,j,y\}$ eine Kante ist. Weil $x < y$ folgt $\alpha(x,j,y) = -$. Betrachten wir das Paket $\{x,i,j,y\}$, dann haben wir bereits gesehen, daß $\beta(x,i,j) = +$ und $\beta(i,j,y) = +$ ist. Die Monotonie von β auf dem Paket $\{x,i,j,y\}$ erzwingt damit auch $\beta(x,j,y) = +$, d.h. $\{x,j,y\}$ ist ein Differenzdreieck. $\triangle$

Betrachten wir jetzt das Wiring–Diagramm $\mathcal{W}$ von $\mathcal{A}$. Jede Kante des Arrangements hat in $\mathcal{W}$ einen horizontalen Teil, nach dessen Höhe in $\mathcal{W}$ wir die Kanten, die Basis eines Differenztripels sind, ordnen können. Sei $\{i,j,k\}$ ein Differenztripel, dessen Basis eine bezüglich dieser Ordnung maximale Kante in $\mathcal{A}$ ist. Wir werden zeigen, daß $\{i,j,k\}$ in α flipbar ist, indem wir aus der gegenteiligen Annahme folgern, daß es im Widerspruch zur Maximalität ein Differenztripel gibt, dessen Basis eine Kante ist, die bezüglich dieser Ordnung größer ist.

Wir nehmen also an, $\{i,j,k\}$ ist nicht flipbar, d.h. es gibt eine Pseudogerade ℓ_x, die die von ℓ_i, ℓ_j und ℓ_k eingeschlossene Dreiecksregion D schneidet. Und zwar muß ℓ_x zuerst ℓ_i schneiden, um in D zu gelangen, und es dann über ℓ_k wieder verlassen, denn die Basis des Tripels ist nach Voraussetzung eine Kante auf ℓ_j. Es folgt, daß $i < x < k$. Ist $x < j$, dann muß ℓ_x vor ℓ_i erst ℓ_j schneiden, d.h $\alpha(i,x,j) = +$ und damit auch $\beta(i,x,j) = +$. In β_i ist also $j \prec x$. Weil in β_i auch $k \prec j$ folgt $k \prec x$ und damit $\beta(i,x,k) = +$. Da $\alpha(i,x,k) = -$ ist $\{i,x,k\}$ also ein Differenztripel. Analog gilt für $j < x$, daß $\alpha(j,x,k) = \beta(j,x,k) = +$ und $x \prec j \prec i$ auf β_k. Also ist auch hier $\{i,x,k\}$ ein Differerenztripel.

Es sei F die Teilfläche von D, die mit der Basiskante e_j von $\{i,j,k\}$ inzidiert. e_i und e_k seien die Kanten auf ℓ_i bzw. ℓ_k, die an F liegen, und $e_1, e_2, \dots, e_t$ für ein $t \geq 1$ die Kanten an F, im Uhrzeigersinn indiziert, die auf Pseudogeraden $\ell_{x_1}, \ell_{x_2}, \dots, \ell_{x_t}$, die D schneiden, liegen. In Abb 23 ist die Situation skizziert.

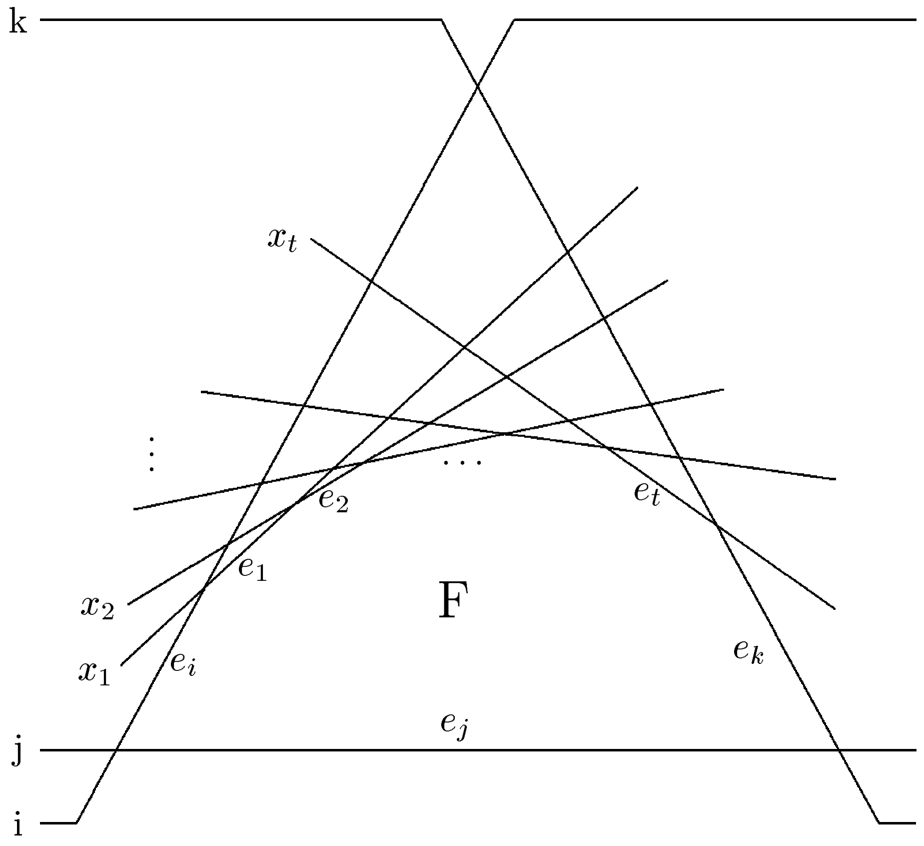

Abbildung 23. Die Fläche F über der Basiskante e_j

Alle diese Kanten $e_1, \dots, e_t$ liegen im Wiring-Diagramm oberhalb von e_j. Wenn wir zeigen können, daß eine dieser Kanten die Basis eines Differerenztripels bildet, dann haben wir einen Widerspruch zur Maximalität von e_j gefunden und gezeigt, daß $\{i,j,k\}$ in α flipbar sein muß.

Behauptung B. Es gibt ein $s \in \{1, \dots, t\}$, so daß $\{x_{s-1}, x_s, x_{s+1}\}$ ein Differenztripel ist.

Beweis. Der Schnittpunkt je zweier aufeinanderfolgender Pseudogeraden $\ell_{x_s}, \ell_{x_{s+1}}$ ist der Schnitt der beiden Kanten $e_s \cap e_{s+1}$, liegt also innerhalb von D. Es folgt, daß $x_s < x_{s+1}$. Setzen wir $x_0 = i$ und $x_{t+1} = k$, dann folgt: für alle $s = 1, \dots, t$ ist $\alpha(x_{s-1}, x_s, x_{s+1}) = -$. Um die Behauptung zu zeigen, genügt es also $\beta(x_{s-1}, x_s, x_{s+1}) = +$ für ein $s \in \{1, \dots, t\}$ nachzuweisen.

Ist $t = 1$, dann haben wir bereits gesehen, daß $\{x_0, x_1, x_2\} = \{i, x_1, k\}$ ein Differenztripel ist. Die Basis dieses Tripels ist die Kante e_1.

Ist $t > 1$ dann wissen wir bereits, daß $\{i, x_s, k\}$ und $\{i, x_{s+1}, k\}$ für $1 \leq s \leq t-1$ Differenztripel sind. Die Monotonie von β auf dem Paket $\{i, x_s, x_{s+1}, k\}$ fordert $\beta(i, x_s, x_{s+1}) = +$ oder $\beta(x_s, x_{s+1}, k) = +$.

Es sei $p_s = e_s \cap e_{s+1}$ für $s = 1, \ldots, t-1$, also der Schnittpunkt von ℓ_{x_s} und $\ell_{x_{s+1}}$. Wir wollen diese Schnittpunkte färben, und zwar rot, wenn $\beta(i, x_s, x_{s+1}) = +$ und blau, wenn nicht.

Ist p_1 rot, dann ist $\beta(i, x_1, x_2) = +$.

Ist p_{t-1} blau, dann ist $\beta(i, x_{t-1}, x_t) = -$. Also muß $\beta(x_{t-1}, x_t, k) = +$ gelten.

Trifft keiner der beiden Fälle zu, dann gibt es ein s, so daß p_{s-1} blau und p_s rot ist. Weil p_{s-1} blau ist, gilt nach Definition der Färbung: $\beta(i, x_{s-1}, x_s) = -$. Aus der Rotfärbung von p_s folgern wir $\beta(i, x_s, x_{s+1}) = +$. Die Monotonie von β auf dem Paket $\{i, x_{s-1}, x_s, x_{s+1}\}$ erzwingt, daß auch $\beta(x_{s-1}, x_s, x_{s+1}) = +$ ist. $\triangle$

Wie bereits bemerkt, ist der Beweis des Lemmas damit abgeschlossen. $\square$

Um den Beweis von Satz 2.10 zum Abschluß zu bringen, fehlen jetzt nur noch die beiden Beispiele, die zeigen, daß $S_3(6)$ kein Verband (Beispiel A) und $S_4(8)$ nicht per Inklusion geordnet (Beispiel B) ist. Dies sind bis auf die Schreibweise genau die Beispiele, mit denen Ziegler in [Zie93] denselben Sachverhalt für die höheren Bruhat Ordnungen zeigt.

Beispiel A

Seien $\alpha_1, \alpha_6 \in S_3(6)$ mit den folgenden Paketsignaturen. Die zonotopalen Kachelungen sind in Abbildung 24 zu sehen, wo wie üblich die Zonen am linken Rand von unten nach oben indiziert seien.

$$\begin{array}{lcccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \alpha_1 & - & + & + & + \\ \alpha_6 & - & - & + & + \\ & & \oplus & \oplus & \oplus \\ \gamma_1 & - & + & + & + \\ \gamma_6 & - & + & + & + \end{array} \qquad \begin{array}{lcccc} & 1 & 2 & 3 & 5 \\ \alpha_1 & - & - & - & + \\ \alpha_6 & - & - & - & + \\ & & & & \oplus \\ \gamma_1 & - & - & + & + \\ \gamma_6 & - & - & - & + \end{array} \qquad \begin{array}{lcccc} & 1 & 2 & 3 & 6 \\ \alpha_1 & - & - & - & + \\ \alpha_6 & - & - & - & + \\ & & * & * & \oplus \\ \gamma_1 & - & + & + & + \\ \gamma_6 & - & + & + & + \end{array} \qquad \begin{array}{lcccc} & 1 & 2 & 4 & 5 \\ \alpha_1 & - & - & - & + \\ \alpha_6 & - & - & - & + \\ & & & & \oplus \\ \gamma_1 & - & - & + & + \\ \gamma_6 & - & - & - & + \end{array} \qquad \begin{array}{lcccc} & 1 & 2 & 4 & 6 \\ \alpha_1 & - & - & - & + \\ \alpha_6 & - & - & - & + \\ & & * & * & \oplus \\ \gamma_1 & - & + & + & + \\ \gamma_6 & - & + & + & + \end{array}$$

$$\begin{array}{lcccc} & 1 & 2 & 5 & 6 \\ \alpha_1 & - & - & - & - \\ \alpha_6 & - & - & - & - \\ & & * & * & \\ \gamma_1 & - & + & + & + \\ \gamma_6 & + & + & + & - \end{array} \qquad \begin{array}{lcccc} & 1 & 3 & 4 & 5 \\ \alpha_1 & - & - & - & + \\ \alpha_6 & - & - & - & - \\ & & & & \oplus \\ \gamma_1 & - & - & - & + \\ \gamma_6 & - & - & - & + \end{array} \qquad \begin{array}{lcccc} & 1 & 3 & 4 & 6 \\ \alpha_1 & - & - & - & + \\ \alpha_6 & + & - & - & - \\ & \oplus & * & * & \oplus \\ \gamma_1 & + & + & + & + \\ \gamma_6 & + & + & + & + \end{array} \qquad \begin{array}{lcccc} & 1 & 3 & 5 & 6 \\ \alpha_1 & + & - & - & - \\ \alpha_6 & + & - & - & - \\ & \oplus & * & * & \\ \gamma_1 & + & + & + & - \\ \gamma_6 & + & + & + & - \end{array} \qquad \begin{array}{lcccc} & 1 & 4 & 5 & 6 \\ \alpha_1 & + & - & - & - \\ \alpha_6 & + & - & - & - \\ & \oplus & * & * & \\ \gamma_1 & + & + & + & - \\ \gamma_6 & + & + & + & - \end{array}$$

$$\begin{array}{lcccc} & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \alpha_1 & - & - & - & - \\ \alpha_6 & - & - & - & - \\ & & & & \\ \gamma_1 & - & - & - & - \\ \gamma_6 & - & - & - & - \end{array} \qquad \begin{array}{lcccc} & 2 & 3 & 4 & 6 \\ \alpha_1 & - & - & - & - \\ \alpha_6 & + & - & - & - \\ & \oplus & & & \\ \gamma_1 & + & - & - & - \\ \gamma_6 & + & - & - & - \end{array} \qquad \begin{array}{lcccc} & 2 & 3 & 5 & 6 \\ \alpha_1 & + & - & - & - \\ \alpha_6 & + & - & - & - \\ & \oplus & & & \\ \gamma_1 & + & - & - & - \\ \gamma_6 & + & + & - & - \end{array} \qquad \begin{array}{lcccc} & 2 & 4 & 5 & 6 \\ \alpha_1 & + & - & - & - \\ \alpha_6 & + & - & - & - \\ & \oplus & & & \\ \gamma_1 & + & - & - & - \\ \gamma_6 & + & + & - & - \end{array} \qquad \begin{array}{lcccc} & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \alpha_1 & + & + & - & - \\ \alpha_6 & + & + & + & - \\ & \oplus & \oplus & \oplus & \\ \gamma_1 & + & + & + & - \\ \gamma_6 & + & + & + & - \end{array}$$

Wir suchen nach dem minimalen $\gamma \in S_3(6)$ mit $\alpha_1 < \gamma$ und $\alpha_6 < \gamma$. Versuchen wir mit Hilfe der Paketsignaturen dieses Signotop zu konstruieren. Als ersten Schritt schreiben wir $\oplus$ an die Stellen, an denen γ den Wert $+$ haben muß, damit $\alpha_1 \subset \gamma$ und $\alpha_6 \subset \gamma$. Dann sehen wir, daß das ganze Paket $\{1, 3, 4, 6\}$ noch mit $+$ aufgefüllt werden muß, da sonst die

Monotonie verletzt wäre. Wenn $\{1,3,6\}$ und $\{1,4,6\}$ mit $+$ belegt werden, muß das auch mit $\{1,2,6\}$ und $\{1,5,6\}$ geschehen, wegen der Pakete $\{1,2,3,6\}$, $\{1,2,4,6\}$, $\{1,3,5,6\}$ und $\{1,4,5,6\}$. Diese Stellen sind mit $*$ gekennzeichnet.

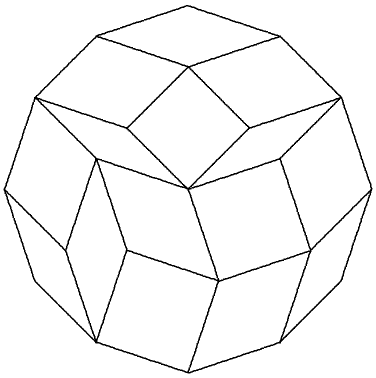

Abbildung 24. α_1 und α_6

Es bleibt das Paket $\{1,2,5,6\}$ übrig. Hier gibt es zwei Möglichkeiten, die Monotonie herzustellen, nämlich entweder $\{1,2,5\}$ oder $\{2,5,6\}$ mit $+$ zu belegen. Es ergeben sich die beiden Signotope γ_1 und γ_6 mit den zonotopalen Kachelungen in Abbildung 25. Nach unserer Konstruktion wissen wir, daß $\alpha_1 \vee \alpha_6$ nicht weniger $+$–Werte haben kann als γ_1 und γ_6. Andererseits ist an den Paketsignaturen leicht abzulesen, daß $\alpha_1 \subset \gamma_1$, $\alpha_1 \subset \gamma_6$, $\alpha_6 \subset \gamma_1$ und $\alpha_6 \subset \gamma_6$. Also existiert in $\mathrm{S}_3^{\subseteq}(6) = S_3(6)$ kein Join $\alpha_1 \vee \alpha_6$. $S_3(6)$ ist also kein Verband.

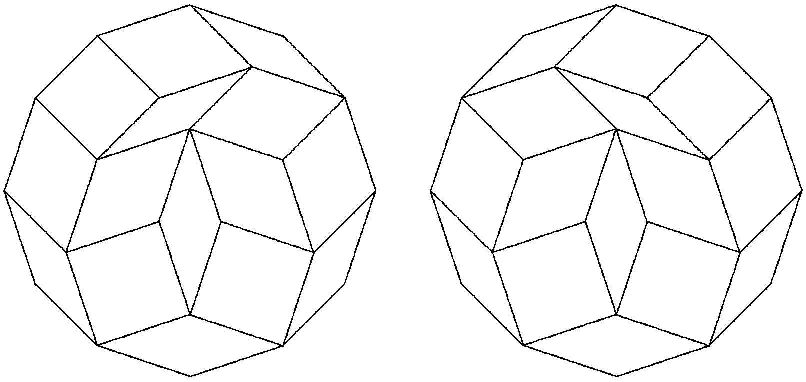

Abbildung 25. γ_1 und γ_6

Damit ist dieses Beispiel abgeschlossen und es bleibt noch zu zeigen, daß $S_4(8)$ nicht per Inklusion geordnet ist.

Beispiel B

Seien α und β die beiden Signotope aus $S_4(8)$, die mittels der folgenden Paketsignaturen gegeben sind. Ganz offensichtlich gilt: $\alpha \subset \beta$.

$$
\begin{array}{cccccc} & 1&2&3&4&5\\ \alpha&-&-&-&-&+\\ \beta&-&-&-&-&+ \end{array}\quad
\begin{array}{cccccc} & 1&2&3&4&6\\ \alpha&-&-&-&-&+\\ \beta&-&-&-&-&+ \end{array}\quad
\begin{array}{cccccc} & 1&2&3&4&7\\ \alpha&-&-&-&-&+\\ \beta&+&+&+&+&+ \end{array}\quad
\begin{array}{cccccc} & 1&2&3&4&8\\ \alpha&-&-&-&-&+\\ \beta&+&+&+&+&+ \end{array}\quad
\begin{array}{cccccc} & 1&2&3&5&6\\ \alpha&-&-&-&-&-\\ \beta&+&+&-&-&- \end{array}\quad
\begin{array}{cccccc} & 1&2&3&5&7\\ \alpha&-&-&-&-&-\\ \beta&+&+&+&+&- \end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccccc} & 1&2&3&5&8\\ \alpha&-&-&-&-&-\\ \beta&+&+&+&+&- \end{array}\quad
\begin{array}{cccccc} & 1&2&3&6&7\\ \alpha&-&-&-&-&-\\ \beta&+&+&+&+&- \end{array}\quad
\begin{array}{cccccc} & 1&2&3&6&8\\ \alpha&-&-&-&-&-\\ \beta&+&+&+&+&- \end{array}\quad
\begin{array}{cccccc} & 1&2&3&7&8\\ \alpha&-&-&-&-&-\\ \beta&+&+&+&+&+ \end{array}\quad
\begin{array}{cccccc} & 1&2&4&5&6\\ \alpha&-&-&-&-&-\\ \beta&+&+&-&-&- \end{array}\quad
\begin{array}{cccccc} & 1&2&4&5&7\\ \alpha&-&-&-&-&-\\ \beta&+&+&+&+&- \end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccccc} & 1&2&4&5&8\\ \alpha&-&-&-&-&-\\ \beta&+&+&+&+&- \end{array}\quad
\begin{array}{cccccc} & 1&2&4&6&7\\ \alpha&-&-&-&-&-\\ \beta&+&+&+&+&- \end{array}\quad
\begin{array}{cccccc} & 1&2&4&6&8\\ \alpha&-&-&-&-&-\\ \beta&+&+&+&+&- \end{array}\quad
\begin{array}{cccccc} & 1&2&4&7&8\\ \alpha&-&-&-&-&-\\ \beta&+&+&+&+&+ \end{array}\quad
\begin{array}{cccccc} & 1&2&5&6&7\\ \alpha&-&-&-&-&-\\ \beta&+&+&+&+&- \end{array}\quad
\begin{array}{cccccc} & 1&2&5&6&8\\ \alpha&-&-&-&-&-\\ \beta&+&+&+&+&- \end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccccc} & 1&2&5&7&8\\ \alpha&-&-&-&-&-\\ \beta&+&+&+&+&+ \end{array}\quad
\begin{array}{cccccc} & 1&2&6&7&8\\ \alpha&-&-&-&-&-\\ \beta&+&+&+&+&+ \end{array}\quad
\begin{array}{cccccc} & 1&3&4&5&6\\ \alpha&-&-&-&-&-\\ \beta&+&+&+&-&- \end{array}\quad
\begin{array}{cccccc} & 1&3&4&5&7\\ \alpha&-&-&-&-&-\\ \beta&+&+&+&+&- \end{array}\quad
\begin{array}{cccccc} & 1&3&4&5&8\\ \alpha&-&-&-&-&-\\ \beta&+&+&+&+&- \end{array}\quad
\begin{array}{cccccc} & 1&3&4&6&7\\ \alpha&-&-&-&-&-\\ \beta&+&+&+&+&- \end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccccc} & 1&3&4&6&8\\ \alpha&-&-&-&-&-\\ \beta&+&+&+&+&- \end{array}\quad
\begin{array}{cccccc} & 1&3&4&7&8\\ \alpha&-&-&-&-&-\\ \beta&-&+&+&+&+ \end{array}\quad
\begin{array}{cccccc} & 1&3&5&6&7\\ \alpha&-&-&-&-&-\\ \beta&-&+&+&+&+ \end{array}\quad
\begin{array}{cccccc} & 1&3&5&6&8\\ \alpha&-&-&-&-&-\\ \beta&-&+&+&+&+ \end{array}\quad
\begin{array}{cccccc} & 1&3&5&7&8\\ \alpha&-&-&-&-&-\\ \beta&-&+&+&+&+ \end{array}\quad
\begin{array}{cccccc} & 1&3&6&7&8\\ \alpha&-&-&-&-&-\\ \beta&-&+&+&+&+ \end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccccc} & 1&4&5&6&7\\ \alpha&-&-&-&-&-\\ \beta&-&+&+&+&+ \end{array}\quad
\begin{array}{cccccc} & 1&4&5&6&8\\ \alpha&-&-&-&-&-\\ \beta&-&+&+&+&+ \end{array}\quad
\begin{array}{cccccc} & 1&4&5&7&8\\ \alpha&-&-&-&-&-\\ \beta&-&+&+&+&+ \end{array}\quad
\begin{array}{cccccc} & 1&4&6&7&8\\ \alpha&-&-&-&-&-\\ \beta&-&+&+&+&+ \end{array}\quad
\begin{array}{cccccc} & 1&5&6&7&8\\ \alpha&+&-&-&-&-\\ \beta&+&+&+&+&+ \end{array}\quad
\begin{array}{cccccc} & 2&3&4&5&6\\ \alpha&-&-&-&-&-\\ \beta&+&+&+&-&- \end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccccc} & 2&3&4&5&7\\ \alpha&-&-&-&-&-\\ \beta&+&+&+&+&- \end{array}\quad
\begin{array}{cccccc} & 2&3&4&5&8\\ \alpha&-&-&-&-&-\\ \beta&+&+&+&+&- \end{array}\quad
\begin{array}{cccccc} & 2&3&4&6&7\\ \alpha&-&-&-&-&-\\ \beta&+&+&+&+&- \end{array}\quad
\begin{array}{cccccc} & 2&3&4&6&8\\ \alpha&-&-&-&-&-\\ \beta&+&+&+&+&- \end{array}\quad
\begin{array}{cccccc} & 2&3&4&7&8\\ \alpha&-&-&-&-&-\\ \beta&-&+&+&+&+ \end{array}\quad
\begin{array}{cccccc} & 2&3&5&6&7\\ \alpha&-&-&-&-&-\\ \beta&-&+&+&+&+ \end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccccc} & 2&3&5&6&8\\ \alpha&-&-&-&-&-\\ \beta&-&+&+&+&+ \end{array}\quad
\begin{array}{cccccc} & 2&3&5&7&8\\ \alpha&-&-&-&-&-\\ \beta&-&+&+&+&+ \end{array}\quad
\begin{array}{cccccc} & 2&3&6&7&8\\ \alpha&-&-&-&-&-\\ \beta&-&+&+&+&+ \end{array}\quad
\begin{array}{cccccc} & 2&4&5&6&7\\ \alpha&-&-&-&-&-\\ \beta&-&+&+&+&+ \end{array}\quad
\begin{array}{cccccc} & 2&4&5&6&8\\ \alpha&-&-&-&-&-\\ \beta&-&+&+&+&+ \end{array}\quad
\begin{array}{cccccc} & 2&4&5&7&8\\ \alpha&-&-&-&-&-\\ \beta&-&+&+&+&+ \end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccccc} & 2&4&6&7&8\\ \alpha&-&-&-&-&-\\ \beta&-&+&+&+&+ \end{array}\quad
\begin{array}{cccccc} & 2&5&6&7&8\\ \alpha&+&-&-&-&-\\ \beta&+&+&+&+&+ \end{array}\quad
\begin{array}{cccccc} & 3&4&5&6&7\\ \alpha&-&-&-&-&-\\ \beta&-&-&+&+&+ \end{array}\quad
\begin{array}{cccccc} & 3&4&5&6&8\\ \alpha&-&-&-&-&-\\ \beta&-&-&+&+&+ \end{array}\quad
\begin{array}{cccccc} & 3&4&5&7&8\\ \alpha&-&-&-&-&-\\ \beta&-&-&-&+&+ \end{array}\quad
\begin{array}{cccccc} & 3&4&6&7&8\\ \alpha&-&-&-&-&-\\ \beta&-&-&-&+&+ \end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccccc} & 3&5&6&7&8\\ \alpha&+&-&-&-&-\\ \beta&+&-&-&-&- \end{array}\quad
\begin{array}{cccccc} & 4&5&6&7&8\\ \alpha&+&-&-&-&-\\ \beta&+&-&-&-&- \end{array}
$$

Wenn auch $\alpha < \beta$ gilt, dann sind α und β Elemente einer maximalen Kette in $S_4(8)$. Diese Kette können wir auch darstellen durch die Reihenfolge, in der die Elemente von $\binom{[8]}{4}$ geflipt werden. Wenden wir Satz 2.8 an, dann können wir sagen, daß diese Reihenfolge eine lineare Ordnung auf $\binom{[8]}{4}$ ergibt, in der die Elemente jedes 4–Pakets entweder in lexikographischer oder in umgekehrt lexikographischer Ordnung vorkommen. Diese Ordnung ist eine topologische Sortierung des orientierten Gerüsts eines Signotops $\gamma \in S_5(8)$, dessen Werte für $P \in \binom{[8]}{5}$ sich so ergeben: $\gamma(P) = +$ genau dann, wenn die Elemente des 4–Pakets P in der Ordnung in umgekehrt lexikographischer Reihenfolge stehen, bildlich gesprochen, wenn die Elemente von P von „links nach rechts" geflipt werden auf dem Weg von α nach β.

Dabei werden durch α und β einige Werte von γ vorgeschrieben. An den Paketsignaturen von α und β können wir ablesen, daß $\gamma(1,2,3,4,7) = \gamma(2,3,4,7,8) = -$ gelten muß und genauso $\gamma(1,2,5,6,7) = \gamma(2,5,6,7,8) = +$ und $\gamma(1,2,3,6,7) = +$. Das ergibt die folgenden Signaturen von γ auf drei Paketen:

$$
\begin{array}{cccccc} 1&2&3&4&7&8\\ -&&&\ominus&&- \end{array}\qquad
\begin{array}{cccccc} 1&2&5&6&7&8\\ +&&\oplus&&&+ \end{array}\qquad
\begin{array}{cccccc} 1&2&3&6&7&8\\ &&\oplus&\ominus&&+ \end{array}
$$

Die Werte an den mit $\oplus$ und $\ominus$ bezeichneten Stellen folgen aus der Monotonie von γ auf den ersten beiden Paketen $\{1,2,3,4,7,8\}$ und $\{1,2,5,6,7,8\}$. Im dritten Paket $\{1,2,3,6,7,8\}$ verletzen diese Werte aber die Monotonie. Also ist γ kein Signotop und die Kette in $S_4(8)$ existiert nicht, d.h. $\alpha \not< \beta$. Also ist $S_4(8) \neq \mathrm{S}_4^{\subseteq}(8)$.

Und damit ist der Beweis von Satz 2.10 abgeschlossen. $\square$

12 Lokale Struktur

Nachdem sich der letzte Abschnitt vor allem mit der globalen Struktur von $S_r(n)$ beschäftigte, wollen wir jetzt „die Lupe zur Hand nehmen“ und sehen, was wir zur lokalen Struktur sagen können. Dabei werden wir hauptsächlich die Lage zweier Signotope in $S_r(n)$ zueinander beschreiben, die sich an genau zwei Stellen unterscheiden (Satz 2.18). In Kurzform besagt dieser Satz, daß zwei solche Signotope auch in $S_r(n)$ genau zwei Schritte voneinander entfernt sind. Eine Folgerung aus diesem Satz wird sein, daß in dem durch den Abstand 2 gegebenen (sehr engen) Rahmen $S_r(n)$ und $\mathrm{S}^{\subseteq}_r(n)$ lokal identisch sind, und zwar für alle $n \geq r \geq 1$. Doch zunächst benötigen wir ein wenig Vorarbeit.

Lemma 2.15. *Für alle $1 \leq i < j \leq n$ und $1 \leq r \leq n$ ist die Abbildung $\alpha : \binom{[n]}{r} \to \{-,+\}$ mit $\alpha(T) = + \iff T \subseteq [i,j]$ ein r-Signotop auf $[n]$.*

Beweis. Sei $P \in \binom{[n]}{r+1}$, dann unterscheiden wir drei Fälle.

1. Fall: $\big|P \cap [i,j]\,\big| < r$.

   Dann ist $P^{\lfloor k \rfloor} \not\subseteq [i,j]$ und damit $\alpha(P^{\lfloor k \rfloor}) = -$ für alle $1 \leq k \leq r+1$.

2. Fall: $\big|P \cap [i,j]\,\big| = r+1$.

   Dann ist $P^{\lfloor k \rfloor} \subseteq [i,j]$, also $\alpha(P^{\lfloor k \rfloor}) = +$ für alle $1 \leq k \leq r+1$.

3. Fall: $\big|P \cap [i,j]\,\big| = r$.

   Dann gibt es ein $p \in P$ so, daß $P \setminus [i,j] = \{p\}$. Da es in $[i,j]$ keine Lücke gibt, folgt $p < i$ oder $j < p$. Das bedeutet, daß $[i,j] = P^{\lfloor 1 \rfloor}$ oder $[i,j] = P^{\lfloor r+1 \rfloor}$ und $P^{\lfloor k \rfloor} \not\subseteq [i,j]$ für $k = 2, \dots, r+1$ oder $k = 1, 2, \dots, r$. Also ist entweder $\alpha(P^{\lfloor 1 \rfloor}) = +$ und $\alpha(P^{\lfloor k \rfloor}) = -$ für alle $k > 1$, oder $\alpha(P^{\lfloor r+1 \rfloor}) = +$ und $\alpha(P^{\lfloor k \rfloor}) = -$ für alle $k < r+1$.

In allen drei Fällen ist α monoton auf P. □

Folgerung. Wie wir gesehen haben, ist $P \cap [i,j] \in \big\{\emptyset, \{P^{\lfloor 1 \rfloor}\}, \{P^{\lfloor r+1 \rfloor}\}, P\big\}$. Sind $i_1, j_1, \dots, i_k, j_k \in [n]$ so, daß $\big|\,[i_s, j_s] \cap [i_t, j_t]\,\big| < r-1$ für alle $s < t$, und damit $\big|P \cap [i_s, j_s] \cap [i_t, j_t]\,\big| < r-1$ für jedes Paket P, dann ist auch die Abbildung α mit $\alpha(T) = + \iff T \subseteq [x_t, y_t]$ für ein $t \in \{1, 2, \dots, k\}$ ein r-Signotop auf $[n]$.

Für die weiteren Überlegungen wollen wir noch zwei Begriffe einführen. Seien $\alpha, \beta \in S_r(n)$, dann nennen wir die Menge $\mathrm{Sep}(\alpha, \beta) = \{T \in \binom{[n]}{r} \mid \alpha(T) \neq \beta(T)\}$ die *Separations-* oder *Differenzmenge* von α und β. Außerdem nennen wir T und $T' \in \binom{[n]}{r}$ *unabhängig*, wenn $\big|T \cap T'\big| < r-1$. Sind T und T' unabhängig, dann gibt es kein r–Paket, in dem beide enthalten sind, oder anders gesagt: $T \cup T'$ ist kein r–Paket.

Lemma 2.16. *Seien $\alpha, \beta \in S_r(n)$, dann gilt: Ist $T \in \mathrm{Sep}(\alpha, \beta)$ und sind T und T' unabhängig für jedes $T' \in \mathrm{Sep}(\alpha, \beta) \setminus \{T\}$, dann ist $T \in \mathrm{Mut}(\alpha)$ und $T \in \mathrm{Mut}(\beta)$.*

Beweis. Da T unabhängig von jedem anderen Element aus $\mathrm{Sep}(\alpha, \beta)$ ist, folgt für jedes Paket P mit $T = P^{\lfloor k \rfloor}$ für ein $k \in \{1, \dots, r+1\}$, daß $\alpha(P^{\lfloor i \rfloor}) = \beta(P^{\lfloor i \rfloor})$ für alle $1 \leq i < k$ und $k < i \leq r+1$.

Für $k = 1$ oder $k = r + 1$ ist damit $T = P^{\lfloor k \rfloor} \in \mathrm{Rand}_\alpha(P)$ und $T \in \mathrm{Rand}_\beta(P)$ klar.

Ist $2 \leq k \leq r$, dann fordert die Monotonie von α und β, daß $\alpha(P^{\lfloor k-1 \rfloor}) = \alpha(P^{\lfloor k \rfloor})$ oder $\alpha(P^{\lfloor k+1 \rfloor}) = \alpha(P^{\lfloor k \rfloor})$ und genauso $\beta(P^{\lfloor k-1 \rfloor}) = \beta(P^{\lfloor k \rfloor})$ oder $\beta(P^{\lfloor k+1 \rfloor}) = \beta(P^{\lfloor k \rfloor})$. Weil $\alpha(P^{\lfloor i \rfloor}) = \beta(P^{\lfloor i \rfloor})$ für alle $i \neq k$ und $\alpha(P^{\lfloor k \rfloor}) \neq \beta(P^{\lfloor k \rfloor})$, folgt $\alpha(P^{\lfloor k-1 \rfloor}) \neq \alpha(P^{\lfloor k+1 \rfloor})$ und $\beta(P^{\lfloor k-1 \rfloor}) \neq \beta(P^{\lfloor k+1 \rfloor})$. Damit ist auch in diesem Fall $T = P^{\lfloor k \rfloor} \in Rand_\alpha(P)$ und $T \in Rand_\beta(P)$. Da P beliebig gewählt war, gilt das für jedes Paket P mit $T \in P$. Genau dann ist T in beiden Signotopen flipbar. $\square$

Während das letzte Lemma die Flipbarkeit eines in der Separationsmenge zweier Signotope „isolierten" Elements gezeigt hat, beschäftigt sich das nächste Lemma in gewissem Sinn mit der umgekehrten Situation, nämlich daß alle Elemente der Separationsmenge auch Elemente eines Paketes sind.

Lemma 2.17. *Seien $\alpha, \beta \in S_r(n)$ und $P \in \binom{[n]}{r+1}$ mit $\emptyset \neq \mathrm{Sep}(\alpha, \beta) \subseteq P$, dann gilt: $\mathrm{Rand}_\alpha(P) \subseteq \mathrm{Mut}(\alpha)$ und $\mathrm{Rand}_\beta(P) \subseteq \mathrm{Mut}(\beta)$*

Beweis. Sei $1 \leq i \leq r + 1$ so, daß $P^{\lfloor i \rfloor} \in \mathrm{Sep}(\alpha, \beta)$ und $x \in [n] \setminus P$. Wir betrachten das Paket $Q = P^{\lfloor i \rfloor} \cup \{x\}$. Da α und β eingeschränkt auf Q sich nur an der Stelle $Q \setminus \{x\} = P^{\lfloor i \rfloor}$ unterscheiden, folgt mit den Argumenten aus dem Beweis des vorherigen Lemmas 2.16, daß $P^{\lfloor i \rfloor} \in \mathrm{Rand}_\alpha(Q)$ und $P^{\lfloor i \rfloor} \in \mathrm{Rand}_\beta(Q)$. Wählen wir i so, daß $P^{\lfloor i \rfloor} \in \mathrm{Rand}_\alpha(P)$, dann folgt $P^{\lfloor i \rfloor} \in \mathrm{Mut}(\alpha)$ und genauso folgt für $P^{\lfloor i \rfloor} \in \mathrm{Rand}_\beta(P)$ auch $P^{\lfloor i \rfloor} \in \mathrm{Mut}(\beta)$. $\square$

Mithilfe dieser Lemmata können wir jetzt die lokale Struktur von $S_r(n)$ zwischen zwei Signotopen α und β mit Abstand 2, d.h $\left|\mathrm{Sep}(\alpha, \beta)\right| = 2$, beschreiben.

Satz 2.18. *Sind $\alpha, \beta \in S_r(n)$ mit $\left|\mathrm{Sep}(\alpha, \beta)\right| = 2$, dann tritt genau einer der folgenden Fälle ein:*

(I) Es gibt $\gamma_1, \gamma_2 \in S_r(n)$, so daß $\alpha \lessdot \gamma_1 \lessdot \beta$ und $\alpha \lessdot \gamma_2 \lessdot \beta$

(II) Es gibt $\gamma \in S_r(n)$, so daß $\alpha \lessdot \gamma \lessdot \beta$

(III) Es gibt $\gamma_1, \gamma_2 \in S_r(n)$, so daß $\gamma_1 \lessdot \alpha \lessdot \gamma_2$ und $\gamma_1 \lessdot \beta \lessdot \gamma_2$

(IVa) Es gibt $\gamma \in S_r(n)$, so daß $\gamma \lessdot \alpha$ und $\gamma \lessdot \beta$

(IVb) Es gibt $\gamma \in S_r(n)$, so daß $\alpha \lessdot \gamma$ und $\beta \lessdot \gamma$

(Siehe auch Abbildung 26)

Beweis. Seien $T_1, T_2 \in \binom{[n]}{r}$, so daß $\mathrm{Sep}(\alpha, \beta) = \{T_1, T_2\}$.

Sind T_1 und T_2 unabhängig, dann ergibt die Anwendung von Lemma 2.16, daß α und β gegenüberliegende Ecken eines Vierecks im Hasse–Diagramm der Signotopordnung sind, wie in Abb. 26 (I) und 26 (III) dargestellt.

Ist dagegen $P = T_1 \cup T_2$ ein Paket, dann unterscheiden wir zwei Fälle:

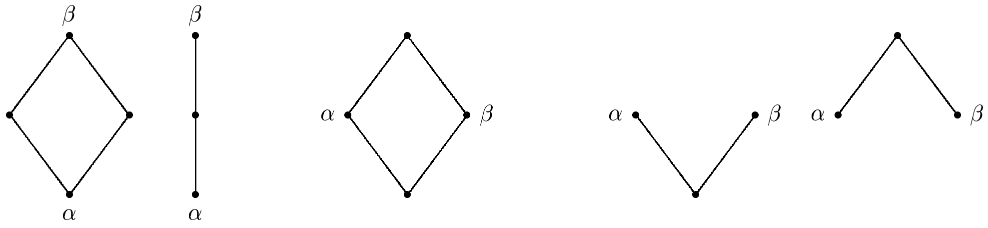

Abbildung 26. α und β mit $|\operatorname{Sep}(\alpha,\beta)| = 2$

1. Fall: $\alpha(T_1) = \alpha(T_2) \neq \beta(T_1) = \beta(T_2)$.

Dann sind T_1 und T_2 Nachbarn in P, d.h. es gibt ein k, $1 \leq k \leq r$, so, daß $\{P^{\lfloor k \rfloor}, P^{\lfloor k+1 \rfloor}\} = \{T_1, T_2\}$, denn für ein M, das in der lexikographischen Ordnung auf P zwischen T_1 und T_2 läge, erzwänge die Monotonie der beiden Signotope $\alpha(T_1) = \alpha(M) = \alpha(T_2)$ und $\beta(T_1) = \beta(M) = \beta(T_2)$, und damit $\alpha(M) \neq \beta(M)$, was der Voraussetzung $\operatorname{Sep}(\alpha,\beta) = \{T_1, T_2\}$ widerspräche. Weil $\alpha(P^{\lfloor k-1 \rfloor}) = \beta(P^{\lfloor k-1 \rfloor})$ und genauso $\alpha(P^{\lfloor k+1 \rfloor}) = \beta(P^{\lfloor k+1 \rfloor})$ erzwingt die Monotonie der beiden Signotope daß $\alpha(P^{\lfloor k-1 \rfloor}) \neq \alpha(P^{\lfloor k+1 \rfloor})$ und $\beta(P^{\lfloor k-1 \rfloor}) \neq \beta(P^{\lfloor k+1 \rfloor})$. Damit gilt für $\{i,j\} = \{1,2\}$: $\operatorname{Rand}_\alpha(P) \cap \{T_1, T_2\} = \{T_i\}$ und $\operatorname{Rand}_\beta(P) \cap \{T_1, T_2\} = \{T_j\}$. Mit Lemma 2.17 folgt, daß $\operatorname{Mut}(\alpha) \cap \{T_1, T_2\} = \{T_i\}$ und $\operatorname{Mut}(\beta) \cap \{T_1, T_2\} = \{T_j\}$. α und β sind also Anfangs- und Endpunkt eines Pfades der Länge 2 im Diagramm von $S_r(n)$, wie in Abb. 26 (II).

2. Fall: $\alpha(T_1) = \beta(T_1) \neq \beta(T_2) = \alpha(T_2)$.

Dann gilt $\{T_1, T_2\} = \{P^{\lfloor 1 \rfloor}, P^{\lfloor r+1 \rfloor}\}$. Gäbe es etwa ein $L \in P$ links von (also lexikographisch größer als) T_1 und T_2 und o.B.d.A. T_1 links von T_2, dann erzwänge die Monotonie der Signotope auf P, daß $\alpha(L) = \alpha(T_1) \neq \alpha(T_2)$ und $\beta(L) = \beta(T_1) \neq \beta(T_2)$ und damit $\alpha(L) \neq \beta(L)$, was wieder der Voraussetzung $\operatorname{Sep}(\alpha,\beta) = \{T_1, T_2\}$ widerspräche. Eine symmetrische Aussage gilt für ein R rechts von T_1 und T_2 in P. Damit ist in dem einen Signotop $\{P^{\lfloor 1 \rfloor}, P^{\lfloor 2 \rfloor}\}$ der Rand von P, im anderen ist es $\{P^{\lfloor r \rfloor}, P^{\lfloor r+1 \rfloor}\}$. Wieder mit Lemma 2.17 folgt, daß für genau eine Ersetzung von $i \neq j$ aus $\{1,2\}$ gilt: $T_i \in \operatorname{Mut}(\alpha)$ und $T_j \in \operatorname{Mut}(\beta)$. D.h. entweder haben α und β ein gemeinsames Cover, oder sie sind beide Cover eines Signotops (Abbildungen 26 (IVa) und (IVb)). □

Wie bereits erwähnt, erhalten wir als Folgerung aus Satz 2.18 die lokale Identität der Signotop- und der Inklusions–Ordnung „im Abstand 2".

Satz 2.19. *Für* $\alpha, \beta \in S_r(n)$ *mit* $\operatorname{Sep}(\alpha,\beta) = 2$ *gilt:* $\alpha \subset \beta \iff \alpha < \beta$. □

Betrachten wir jetzt noch einmal im Beweis zu Satz 2.18 den Fall, daß $T_1 \cup T_2$ ein Paket ist mit $\alpha(T_1) = \beta(T_2) = -$ und $\alpha(T_2) = \beta(T_1) = +$ (Abbildung 26 (IVa) und (IVb)). Setzen wir $T_1 \cup T_2 = P = \{p_1, p_2, \ldots, p_{r+1}\}$, $p_i < p_j$ für $i < j$ dann zeigt ein Blick auf die folgenden Paketsignaturen, daß wir in jedem der beiden Signotope auch das von T_1 bzw.

T_2 verschiedene Element $P^{\lfloor 2 \rfloor}$ bzw. $P^{\lfloor r \rfloor}$ flippen können.

$$\begin{array}{c|ccccc} & p_1 & p_2 & \dots & p_r & p_{r+1} \\ \alpha & - & - & \dots & - & + \\ \beta & + & - & \dots & - & - \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{c|ccccc} & p_1 & p_2 & \dots & p_r & p_{r+1} \\ \alpha & - & + & \dots & + & + \\ \beta & + & + & \dots & + & - \end{array}$$

Zusammen mit dem Ergebnis von Lemma 2.16, nämlich daß es in diesem Fall genügt, die Einschränkungen der Signotope auf P zu betrachten, können wir schrittweise fortfahren bis wir ein $2(r+1)$–Eck im Diagramm von $S_r(n)$ erhalten. Die Ecken sind alle Signotope, die auf P von der Monotonie erlaubte Werte haben und an allen anderen Stellen mit α bzw. β übereinstimmen.

Satz 2.20. *Zu jedem $P_k = [k, k+r]$ für $k \leq n-r$ gibt es eine zu $S_r(|P|) = S_r(r+1)$ isomorphe Teilstruktur in $S_r(n)$.*

Beweis. Wir müssen nur noch zeigen, daß wir zu jedem $P_k = [k, k+1]$ zwei r–Signotope α und β finden mit $\mathrm{Sep}(\alpha, \beta) \subseteq P_k$. Dazu setzen wir $\alpha \equiv -$ und $\beta(T) = + \iff T \subseteq P_k$. Dann ist α trivialerweise und β nach Lemma 2.15 ein r-Signotop mit $\mathrm{Sep}(\alpha, \beta) = P_k$. □

13 Zählen

Ein besonderes Augenmerk liegt in der Kombnatorik immer auch auf der Anzahl der Objekte mit bestimmten kombinatorischen Eigenschaften. Deshalb soll dieser Teil der Arbeit nicht ohne einige Ergebnisse zu der Frage, wieviele r–Signotope auf $[n]$ es gibt, beendet werden.

Leider ist keine allgemeine Formel für $|S_r(n)|$ bekannt. Für sehr kleine Werte gibt es triviale Formeln:

$|S_1(n)| = 2^n$, die Anzahl der Teilmengen von $[n]$.

$|S_2(n)| = n!$, die Anzahl der Permutationen von $[n]$.

$|S_n(n)| = 2$, die Anzahl der möglichen Orientierungen von $[n]$.

$|S_{n-1}(n)| = 2n$, die Anzahl der Ecken eines $2n$–Ecks.

Ziegler gibt in [Zie93] noch eine weitere Formel an, nämlich

$|S_{n-2}(n)| = 2^n + n2^{n-2} - 2n$.

Diese Formel geht auf die Bijektion zwischen $S_{n-2}(n)$ und Erweiterungen des zyklischen Geradenarrangements $X_C^{n,2}$ um eine Pseudogerade zurück, auf die wir erst im nächsten Teil eingehen werden.

In [Sta84] hat Stanley eine Formel angegeben für die Anzahl der maximalen Ketten in der schwachen Bruhat–Ordnung:

$$C(n) = \frac{\binom{n}{2}!}{\prod_{k=1}^{n-1} (2k-1)^{n-k}}$$

Da $S_3(n)$ Äquivalenzklassen solcher Ketten codiert, folgt natürlich $\left|S_3(n)\right| \leq C(n)$. Andere und genauere Schranken für $\left|S_3(n)\right|$ stammen von Knuth [Knu92], der für die Anzahl von Äquivalenzklassen von *reflection networks*, die im Wesentlichen den Wiring–Diagrammen entsprechen, zeigt, daß

$$2^{\frac{n^2}{6}-\frac{5n}{2}} \;\leq\; \left|S_3(n)\right| \leq 3^{\binom{n+1}{2}}$$

und Felsner [Fel97], der mittels einer kompakteren Codierung der lokalen Folgen und wahrscheinlichkeitstheoretischen Argumenten die bisher beste obere Schranke liefert:

$$\log_2(\left|S_3(n)\right|) \;\leq\; 0.6988n^2$$

Zum Schluß soll eine kleine Tabelle folgen mit bekannten Werten für $\left|S_r(n)\right|$. Die meisten Werte sind aus den drei hier zitierten Arbeiten zusammengestellt, einige davon auch mit einem kleinen selbstgeschriebenen Computerprogramm nachvollzogen. Einen Wert konnte ich mit diesem Programm der Liste hinzufügen, nämlich $\left|S_4(7)\right| = 7686$.

n / r	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
1	1024	512	256	128	64	32	16	8	4	2
2	3628800	362880	40320	5040	720	120	24	6	2	–
3	18410581880	112018190	1232944	24698	908	62	8	2	–	
4	?	?	?	7686	148	10	2	–		
5	?	?	?	338	12	2	–			
6	?	?	752	14	2	–				
7	?	1646	16	2	–					
8	3564	18	2	–						
9	20	2	–							
10	2	–								

Teil III

Höhere Dimensionen und Ausblick

14 Signotope und orientierte Matroide

Im ersten Teil dieser Arbeit haben wir gesehen, wie 3–Signotope markierte Pseudogeradenarrangements codieren. Jetzt wollen wir uns der geometrischen Interpretation von r–Signotopen für beliebiges $r \geq 3$ widmen.

Informell handelt es sich um bestimmte Pseudohyperebenenarrangements im $\mathbb{R}^{r-1}$ mit einer Projektion „im Unendlichen", die dem minimalen $(r-1)$–Signotop entspricht, was einfach bedeutet, daß wir einen Anfang für einen Sweep finden können. In [FW98] kann man einen direkten Weg, die Verbindung zwischen solchen dort C–Arrangements genannten Arrangements und Signotopen herzustellen, nachlesen. Wir werden hier einen anderen, mehr kombinatorischen Weg über orientierte Matroide einschlagen.

Eine *Pseudohyperebene* H im $\mathbb{R}^d$ ist ein homöomorphes Bild einer Hyperebene, so daß die beiden zusammenhängenden Komponenten von $\mathbb{R}^d \setminus H$ homöomorph zum d–Ball, also $\{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\| \leq 1\}$ sind. Eine Menge $\{H_1, \ldots, H_n\}$ von Pseudohyperebenen bildet ein *Pseudohyperebenenarrangement* im $\mathbb{R}^d$, wenn für jedes j die Menge $\{H_i \cap H_j \mid i \neq j\}$ ein Pseudohyperebenenarrangement auf H_j, interpretiert als $\mathbb{R}^{d-1}$, bildet.

Orientierte Matroide sind Erweiterungen gewöhnlicher Matroide, die als kombinatorisches Modell für eine Reihe verschiedener geometrischer Konfigurationen dienen. Wir werden hier nicht allzu tief in die Theorie eindringen und nur einige Begriffe und Fakten erläutern. Für die genauen Definitionen und Beweise, sowie überhaupt alles Wissenswerte über orientierte Matroide, sei auf [BLS$^+$93] und die darin enthaltene, ausführliche Literaturliste verwiesen, sowie auf die jeweils aktuelle Fassung dieser Literaturliste in [Zie96].

Von den vielen äquivalenten Axiomatisierungen orientierter Matroide werden uns vor allem zwei, als Menge von Cokreisen und als Chirotope, interessieren. Ein Chirotop ist eine Signierung der geordneten Basen eines gewöhnlichen Matroids auf $[n]$. Für unsere Zwecke genügt es, sich auf das *uniforme* Matroid $U_{n,d}$ vom Rang $d \geq 1$ zu beschränken. Die Basen dieses Matroids sind alle d–elementigen Teilmengen von $[n]$. Ein (uniformes) Chirotop vom Rang $d \geq 1$ auf $[n]$ ist eine Abbildung $\chi : [n]^d \to \{-1, +1\}$ mit den folgenden Eigenschaften:

(1) χ ist alternierend, d.h. $\chi(x_{\pi_1}, x_{\pi_2}, \ldots, x_{\pi_d}) = \operatorname{sgn}(\pi) \cdot \chi(x_1, \ldots, x_d)$ für jede Permutation π und alle $x_1, \ldots, x_d \in [n]$.

(2) Für jedes $A \in [n]^{d-2}$ und $a, b, c, d \in [n] \setminus A$ ist

$$\big\{\chi(A,a,b) \cdot \chi(A,c,d),\ -\chi(A,a,c) \cdot \chi(A,b,d),\ \chi(A,a,d) \cdot \chi(A,b,c)\big\} = \big\{-1,\ +1\big\}$$

Ist χ das Chirotop eines orientierten Matroids, dann ist $-\chi$ das Chirotop desselben orientierten Matroids.

Nach dem in der Theorie der orientierten Matroide zentralen *Satz von der topologischen Repräsentierbarkeit* von Folkman und Lawrence kann jedes orientierte Matroid vom Rang d auf $[n]$ als Arrangement von n orientierten $(d-2)$–dimensionalen *Pseudosphären* auf der $(d-1)$–dimensionalen Einheitssphäre $\mathbb{S}^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\| = 1\}$ repräsentiert werden. Dabei können wir uns unter einer Pseudosphäre eine eventuell topologisch verformte $(d-2)$–dimensionale Sphäre vorstellen, die $\mathbb{S}^{d-1}$ in zwei „Hemisphären" teilt, die beide homöomorph zum euklidischen Raum $\mathbb{R}^{d-1}$ sind. Eine Orientierung der Pseudosphäre S besteht in der Zuordnung von $+$ und $-$ zu je einer dieser beiden Seiten, die wir mit S^+ bzw. S^- bezeichnen. Außerdem fordern wir noch, daß jede Pseudosphäre S invariant ist unter der Abbildung $x \mapsto -x$ auf $\mathbb{S}^{d-1}$, daß also $S = -S$ gilt. Man kann das auch so ausdrücken, daß $-S^+ = S^-$ sein soll.

Die Lage der Punkte des induzierten Zellenklomplexes auf $\mathbb{S}^{d-1}$ bezüglich der Pseudoshpären des Arrangements kann kombinatorisch durch Vektoren $X \in \{-,0,+\}^n$ codiert werden, die die Menge der *Cokreise* des orientierten Matroids bilden. Auf eine Axiomatisierung eines orientierten Matroids als Menge von Cokreisen wollen wir hier verzichten, weil es für unsere Argumentation unnötig ist. Eine Eigenschaft von Cokreisen wird uns allerdings noch begegnen, nämlich daß zu jedem Cokreis X auch der Vektor $-X$ mit $-X_i = + \iff X_i = -$ und $-X_i = - \iff X_i = +$ für alle $i \in [n]$, ein Cokreis desselben orientierten Matroids ist. Ein uniformes orientiertes Matroid entspricht dabei einem einfachen Pseudospärenarrangement, d.h. es schneiden sich in jedem Punkt genau $d-1$ Pseudosphären und damit enthält der Träger eines Cokreises X, das ist die Teilmenge $T(X) \subseteq [n]$ mit $i \in T(X) \iff X_i \neq 0$, genau $n-d+1$ Elemente.

Zu einem orientierten Matroid $\mathcal{M}$ sind auch die *Deletion* $\mathcal{M} \setminus g$ und *Kontraktion* $\mathcal{M}/g$ eines Elements g definiert. Ist $\chi : [n]^d \to \{-1,+1\}$ das Chirotop von $\mathcal{M}$, dann ist das Chirotop der Deletion $\mathcal{M}\setminus g$ die induzierte Abbildung auf $([n]\setminus\{g\})^d$ und das Chirotop der Kontraktion $\mathcal{M}/g$ die induzierte Abbildung auf $([n]\setminus\{g\})^{d-1}$. Ein *Lifting* eines orientierten Matroids ist die Umkehrung der Kontraktion, d.h. das orientierte Matroid $\mathcal{M}$ ist ein Ein–Element–Lifting des orientierten Matroids $\mathcal{M}'$ genau dann wenn $\mathcal{M}' = \mathcal{M}/g$.

Ein weiterer Begriff, den wir benötigen, ist der des affinen orientierten Matroids. Sei $\mathcal{M}$ ein orientiertes Matroid auf $[n]$ und $g \in [n]$. Dann ist das Paar $(\mathcal{M}, g)$ ein *affines* orientiertes Matroid. In der geometrischen Repräsentation als Pseudosphärenarrangement $(S_i)_{i\in[n]}$ interpretieren wir $(\mathcal{M}, g)$ als das induzierte Pseudohyperebenenarrangement auf der, sagen wir, negativen Hemisphäre bzgl. der Pseudosphäre S_g. Die Punkte dieses Arrangements entsprechen genau den Cokreisen X von $\mathcal{M}$ mit g–ter Komponente $X_g = -$. Diejenigen Cokreise mit g–ter Komponente $X_g \neq 0$ sind die Cokreise von $\mathcal{M} \setminus g$.

Zyklische Hyperebenenarrangements

Sei $n \geq d \geq 1$. Ein *zyklisches* Hyperebenenarrangement $X_C^{n,d}$ ist ein Arrangement von n affinen Hyperebenen $\{H_1, \dots, H_n\}$ im $\mathbb{R}^d$, die gegeben sind durch

$$H_i = \left\{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d \mid x_1 + t_i x_2 + t_i^2 x_3 + \dots + t_i^{d-1} x_d - t_i^d = 0\right\}$$

mit beliebigen reellen Parametern $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$.

Dabei hängen die kombinatorischen Eigenschaften eines solchen Arrangements nicht von den Parametern t_i ab. Insbesondere ist das orientierte Matroid für jede Wahl der t_i dasselbe. Wir werden deshalb von *dem* zyklischen Arrangement $X_C^{n,d}$ sprechen und bequemlichkeitshalber $t_i = i$ für $i = 1, \dots, n$ setzen.

Für $I = \{i_1, i_2, \dots, i_{d+1}\}$ mit $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{d+1} \leq n$ gibt das Vorzeichen der

Determinante

$$\Delta(I) = \begin{vmatrix} 1 & i_1 & i_1^2 & \dots & i_1^{d-1} & -i_1^d \\ 1 & i_2 & i_2^2 & \dots & i_2^{d-1} & -i_2^d \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & i_{d+1} & i_{d+1}^2 & \dots & i_{d+1}^{d-1} & -i_{d+1}^d \end{vmatrix}$$

Aufschluß über die Orientierung des von den Hyperebenen $H_{i_1}, \dots, H_{i_{d+1}}$ begrenzten Simplex. Ohne das Minus–Zeichen in der letzten Spalte ist diese Determinante als Vandermonde–Determinante bekannt, für die gilt:

$$\begin{vmatrix} 1 & i_1 & i_1^2 & \dots & i_1^{d-1} & i_1^d \\ 1 & i_2 & i_2^2 & \dots & i_2^{d-1} & i_2^d \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & i_{d+1} & i_{d+1}^2 & \dots & i_{d+1}^{d-1} & i_{d+1}^d \end{vmatrix} = \prod_{j<k} (i_k - i_j)$$

Da jeder der Faktoren $i_k - i_j$ positiv ist, folgt:

$$\Delta(I) = -\prod_{j<k} (i_k - i_j) < 0$$

Die Zuordnung $\alpha(I) = \operatorname{sgn}(\Delta(I))$ für alle $I \in \binom{[n]}{d+1}$ ergibt somit $\alpha \equiv -$, das minimale $(d+1)$–Signotop auf $[n]$.

Da die Determinante bekanntermaßen eine alternierende Funktion im Sinne der Definition eines Chirotops ist, erhalten wir über die Zuordnung $\chi(I) = \operatorname{sgn}(\Delta(I))$ für alle $I \in [n]^{d+1}$ das Chirotop eines orientierten Matroids. Dabei müssen wir uns wieder den $\mathbb{R}^d$ als eine Hemisphäre von $\mathbb{S}^d$, die Hyperebene im Unendlichen als „Äquator“–Sphäre S_0 und die Hyperebenen $H_1, \dots, H_n$ zu $(d-1)$–dimensionalen Sphären $S_1, \dots, S_n$ ergänzt denken. Das in diesem Sinn dem zyklischen Hyperebenenarrangement $X_C^{n,d}$ entsprechende orientierte Matroid ist das sogenannte *alternierende* orientierte Matroid $C^{n,d+1}$, das eben dadurch charakterisiert ist, daß sein Chirotop auf den aufsteigend sortierten Elementen von $[n]$, d.h. auf $\binom{[n]}{d+1}$ konstant ist. (Die Bezeichnung „alternierend“ hier ist unabhängig von der Eigenschaft von Chirotopen, eine alternierende Funktion zu sein. Auch das Chirotop eines „nicht-alternierenden“ orientierten Matroids ist eine alternierende Funktion.)

Betrachten wir jetzt ein beliebiges $\alpha \in S_r(n)$ und erweitern es um das Element 0, so daß $\alpha(A \cup \{0\}) = -$ für alle $A \in \binom{[n]}{r-1}$. Wenn wir 0 wieder kontrahieren, erhalten wir das minimale $(r-1)$–Signotop $\alpha{\downarrow_0} \equiv -$, das wir problemlos alternierend auf $[n]^{r-1}$ zum Chirotop von $C^{n,r-1}$ erweitern können. In diesem Sinne sind r–Signotope auf $[n]$ uniforme Ein–Element–Liftings des alternierenden orientierten Matroids $C^{n,r-1}$.

Wir wollen uns das noch einmal in der Ebene verdeutlichen. Es sei $\mathcal{M}$ ein uniformes, orientiertes Matroid vom Rang 3 auf $[0,n]$. Das dazugehörige Pseudosphärenarrangement $\mathcal{S}$ ist ein Arrangement von *Pseudogroßkreisen* auf der Einheitskugel $\mathbb{S}^2$ im $\mathbb{R}^3$. Das affine orientierte Matroid $(\mathcal{M}, 0)$ codiert das induzierte Pseudogeradenarrangement auf der negativen Seite des Pseudogroßkreises S_0, d.h. S_0 übernimmt die Rolle der Geraden im Unendlichen. $X_C^{n,1}$ ist ein Arrangement von Punkten, die sortiert auf einer (Pseudo–)Geraden liegen.

$\mathcal{M}$ ist also ein Ein–Element–Lifting von $C^{n,2}$ genau dann, wenn S_0 in $\mathcal{S}$ von den anderen Pseudogroßkreisen in der zyklischen Reihenfolge $S_1, S_2, \ldots, S_n, S_1, \ldots, S_n$ geschnitten wird. Ist das der Fall und markieren wir eine der beiden Flächen, die an der negativen Seite an S_0 und an S_1 und S_n grenzen, dann haben wir unser vertrautes Bild eines markierten Pseudogeradenarrangements der Größe n. Wir können natürlich durch geeignete Umindizierung immer erreichen, daß die Pseudogeraden auf S_0 zyklisch angeordnet sind. In höheren Dimensionen ist das im Allgemeinen nicht der Fall.

Die duale Sicht

Wir können diesen Zusammenhang präziser fassen, indem wir die Dualität orientierter Matroide ausnutzen. Es gibt zu jedem orientierten Matroid $\mathcal{M}$ auf $[n]$ vom Rang d ein eindeutiges duales orientiertes Matroid $\mathcal{M}^*$ auf $[n]$. Der Rang von $\mathcal{M}^*$ ist $n-d$. In unserem Zusammenhang wichtig ist die Beziehung $\mathcal{M}^* \setminus g = (\mathcal{M}/g)^*$ und damit, daß das duale orientierte Matroid eines Ein–Element–Liftings von $\mathcal{M}$ eine Erweiterung von $\mathcal{M}^*$ um ein Element ist. Außerdem ist $C^{n,d^*} = C^{n,n-d}$. Wir betrachten jetzt also den Zusammenhang zwischen Signotopen und Ein–Element–Erweiterungen von $C^{n,n-r+1}$.

Eine Erweiterung eines orientierten Matroids $\mathcal{M}$ um ein Element läßt sich kombinatorisch sehr schön mittels einer Abbildung darstellen, die jedem Cokreis von $\mathcal{M}$ ein Zeichen aus $\{-, 0, +\}$ zuordnet, je nach der Lage der Punkte des ursprünglichen Pseudospärenarrangements bezüglich der neuen Pseudosphäre. Eine solche Abbildung heißt *Lokalisation.* Formal ist σ die Lokalisation einer Erweiterung des orientierten Matroids $\mathcal{M}$ um ein Element genau dann, wenn für jeden Cokreis X von $\mathcal{M}$ der Vektor $(X, \sigma(X))$ ein Cokreis dieser Erweiterung ist. Der folgende Satz von Las Vergnas (siehe [BLS$^+$93] Satz 7.1.8.) ist eine für uns sehr nützliche Charakterisierung von Lokalisationen.

Satz 3.1. *Sei $\mathcal{C}^*$ die Menge der Cokreise des orientierten Matroids $\mathcal{M}$. Dann ist die Abbildung $\sigma : \mathcal{C}^* \to \{-, 0, +\}$ die Lokalisation einer Erweiterung von $\mathcal{M}$ um ein Element genau dann, wenn für jede Kontraktion von $\mathcal{M}$ vom Rang 2 die induzierte Abbildung eine Lokalisation ist.*

Dabei reduziert sich die Abbildung für uniforme Erweiterungen, die wir hier ausschließlich betrachten, auf die Werte $-$ und $+$. Der Rang 2 ist sehr einfach zu behandeln. Ein Pseudosphärenarrangement vom Rang 2 ist ein Arrangement von 0–Sphären (Paaren von Punkten) auf der 1–Sphäre (einem Kreis), wobei je zwei 0–Sphären $\{a, a'\}$ und $\{b, b'\}$ auf dem Kreis in der Reihenfolge a, b, a', b' vorkommen. Die Lokalisation einer uniformen Ein-Element-Erweiterung muß die Punkte (resp. Cokreise) so signieren, daß die positiven und negativen Punkte je ein zusammenhängendes Teilstück mit jeweils derselben Anzahl von Elementen bilden. Das macht man sich am besten an einem Bild klar, wie in Abbildung 27, wo die Erweiterung eines Arrangements der Größe 4 um ein Element $\{x, x'\}$ und die dazugehörige Lokalisation dargestellt ist.

Betrachten wir $(C^{n+1,n-r+1}, n+1)$, das affine, alternierende orientierte Matroid auf $[n+1]$ vom Rang $n-r+1$. Es sei $\mathcal{C}^*$ die Menge der Cokreise von $C^{n+1,n-r+1}$, deren Träger wegen der Uniformität genau die $(r+1)$–elementigen Teilmengen von $[n+1]$ sind. Dann ist $\{Y \in \{-,+\}^n \mid (Y,+) \in \mathcal{C}^* \text{ oder } (Y,-) \in \mathcal{C}^*\}$ die Menge der Cokreise von $C^{n,n-r+1}$.

Zu $\alpha \in S_r(n)$ definieren wir eine Abb. σ_α von dieser Menge der Cokreise von $C^{n,n-r+1}$

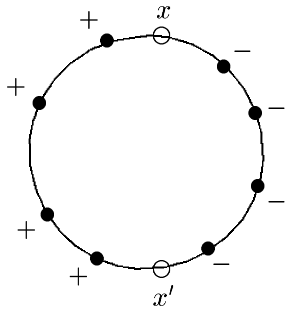

Abbildung 27. Die Lokalisation einer Erweiterung eines Arrangements auf $\mathbb{S}^1$

nach $\{-,+\}$ durch

$$\sigma_\alpha(Y) = \begin{cases} \alpha(T(Y)) & \text{falls } (Y,-) \in \mathcal{C}^* \\ -\alpha(T(Y)) & \text{falls } (Y,+) \in \mathcal{C}^* \end{cases}$$

Behauptung. σ_α ist die Lokalisation einer uniformen Ein-Element-Erweiterung von $C^{n,n-r+1}$.

Beweis. Nach der obigen Charakterisierung von Las Vergnas müssen wir nur die Kontraktionen vom Rang 2 betrachten. Um eine Kontraktion vom Rang 2 zu erhalten, müssen $\mathrm{rang}(C^{n,n-r+1}) - 2 = n - r - 1$ Elemente kontrahiert werden. Damit hat eine solche Kontraktion genau $r + 1$ Elemente. Da jede Kontraktion des alternierenden orientierten Matroids wieder alternierend ist, ist garantiert, daß im Pseudosphärenarrangement die Punkte in der zyklischen Reihenfolge $p_1, p_2, \ldots, p_{r+1}, p'_1, p'_2, \ldots, p'_{r+1}$ aufsteigend oder absteigend sortiert auf der 1-Sphäre liegen. Damit ist die Bedingung an die Signierung der Punkte äquivalent zur Paketmonotonie von α. △

Es ist klar, daß man genauso aus jeder Lokalisation ein eindeutiges Signotop konstruiert.

Fassen wir noch einmal zusammen, wobei wir den kleinen Trick mit dem affinen orientierten Matroid weglassen, dann sind r–Signotope in Bijektion mit uniformen Ein-Element-Erweiterungen des orientierten Matroids $C^{n,n-r+1}$. Zu jeder dieser Erweiterungen gibt es ein eindeutiges duales orientiertes Matroid, das ein Ein–Element–Lifting von $C^{n,r-1}$ ist.

Und damit haben wir als Ergebnis den Satz:

Satz 3.2. *Es gibt eine Bijektion zwischen r–Signotopen auf $[n]$ und den uniformen Ein–Element–Liftings des uniformen alternierenden orientierten Matroids $C^{n,r-1}$.* □

Geometrisch codiert also ein r–Signotop ein einfaches Pseudohyperebenenarrangement $\mathcal{A}$ im $\mathbb{R}^{r-1}$, das sich so um eine Hyperebene H erweitern läßt, daß

(*i*) alle Punkte von $\mathcal{A}$ in einem der durch H definierten Halbräume liegen, und

(*ii*) das Arrangement $\{H_i \cap H \mid H_i \in \mathcal{A}\}$, also der Schnitt der Pseudohyperebenen von $\mathcal{A}$ mit H, ein zyklisches Hyperebenenarrangement, bzw. ein dazu kombinatorisch äquivalentes Pseudohyperebenenarrangement im $\mathbb{R}^{r-2}$ ist.

Solche Arrangements wollen wir, wie schon gesagt, *C–Arrangements* nennen.

15 Reorientationen

Eine wichtige Folgerung aus der Codierbarkeit von C–Arrangements durch Signotope ist, daß solche Arrangements in jeder Dimension einen Sweep erlauben. Während im Allgemeinen nicht klar ist, ob überhaupt jedes Pseudohyperebenenarrangement eine simpliziale Zelle besitzt, können wir aus den Eigenschaften von Signotopen sogar folgern, daß jedes C–Arrangement durch eine Folge von simplizialen Flips, dem höherdimensionalen Analogon zu Dreiecksflips in Pseudogeradenarrangements, in jedes andere C–Arrangement transformiert werden kann. Diese Eigenschaft teilen C–Arrangements mit realisierbaren Arrangements. Es wäre sicher wünschenswert, die Klasse der sweepbaren Arrangements noch zu erweitern. Vorstellbar wäre ein Sweep, der nicht mit dem zyklischen, sondern einem beliebigen Arrangement beginnt.

Auf der kombinatorischen Seite entspricht dem eine Reorientierung $S_r^\alpha(n)$ von $S_r(n)$, so daß ein bestimmtes Signotop $\alpha \in S_r(n)$ das minimale Element in $S_r^\alpha(n)$ ist. Dazu definieren wir für $\alpha, \beta \in S_r(n)$ die *Reorientierung* von β bezüglich α als

$$\beta^\alpha(T) = \begin{cases} - & \text{, falls } \beta(T) = \alpha(T) \\ + & \text{, falls } \beta(T) \neq \alpha(T) \end{cases}$$

und $S_r^\alpha(n)$ als $\{\beta^\alpha \mid \beta \in S_r(n)\}$.

Damit hat das erwünschte minimale Element wieder die gewohnte Form $\alpha^\alpha \equiv -$. Die Ordnung auf $S_r^\alpha(n)$ ist die transitive Hülle der Relation $\lessdot$ wie bei gewöhnlichen Signotopen. Man kann diese Ordnung auch auf den Elementen von $S_r(n)$ ausdrücken als transitive Hülle der Relation $\lessdot_\alpha$, die gegeben ist durch $\beta \lessdot_\alpha \gamma \iff \beta^\alpha \lessdot \gamma^\alpha$.

Es ist klar, daß solche Reorientierungen von Signotopen im Allgemeinen die Paketmonotonie verletzen werden, d.h. keine Signotope mehr sind. Tatsächlich läßt sich leicht zeigen, daß sie eine weniger strenge Bedingung erfüllen, nämlich daß für jedes Paket P und für alle $1 \leq i < j < k < l \leq r+1$ gilt:

$$(*) \quad \gamma(P^{\lfloor i \rfloor})\gamma(P^{\lfloor j \rfloor})\gamma(P^{\lfloor k \rfloor})\gamma(P^{\lfloor l \rfloor}) \notin \{-+-+, +-+-\}$$

Anders ausgedrückt: Es gibt höchstens zwei Zeichenwechsel auf jedem Paket.

Allerdings ist nicht klar, ob diese Bedingung auch hinreichend dafür ist, daß man zu jeder Abbildung $\gamma : \binom{[n]}{r} \to \{-,+\}$, die sie erfüllt, zwei Signotope $\alpha, \beta \in S_r(n)$ findet, so daß $\gamma = \beta^\alpha$. Die Klärung dieser Frage und, bei negativer Antwort die Erarbeitung zusätzlicher Bedingungen, wäre sicher grundlegend für eine weitergehende Untersuchung von Reorientationen von Signotopen.

Aber auch so stellt sich bereits heraus, daß viele der schönen Eigenschaften von Signotopen verloren gehen. Das folgende Beispiel zeigt, daß für Reorientationen Satz 2.9 nicht gilt, der besagt, daß jedes Signotop in einer maximalen Kette enthalten ist.

Beispiel. Zwei Signotope $\alpha, \beta \in S_3(6)$, mit den Paketsignaturen

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \alpha & - & - & + & + \\ \beta & + & + & - & - \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & 1 & 2 & 3 & 5 \\ \alpha & - & - & - & + \\ \beta & + & + & - & - \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & 1 & 2 & 3 & 6 \\ \alpha & - & + & + & + \\ \beta & + & + & - & - \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & 1 & 2 & 4 & 5 \\ \alpha & - & - & - & + \\ \beta & + & + & - & - \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & 1 & 2 & 4 & 6 \\ \alpha & - & + & + & + \\ \beta & - & - & - & - \end{array}$$

$$
\begin{array}{ccccc}
 & 1 & 2 & 5 & 6 \\
\alpha & + & + & + & - \\
\beta & - & - & - & -
\end{array}
\quad
\begin{array}{ccccc}
 & 1 & 3 & 4 & 5 \\
\alpha & + & - & - & - \\
\beta & + & + & + & +
\end{array}
\quad
\begin{array}{ccccc}
 & 1 & 3 & 4 & 6 \\
\alpha & + & + & + & - \\
\beta & - & - & + & +
\end{array}
\quad
\begin{array}{ccccc}
 & 1 & 3 & 5 & 6 \\
\alpha & + & + & + & - \\
\beta & - & - & + & +
\end{array}
\quad
\begin{array}{ccccc}
 & 1 & 4 & 5 & 6 \\
\alpha & + & + & + & - \\
\beta & - & - & - & +
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccc}
 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
\alpha & + & - & - & - \\
\beta & + & + & + & +
\end{array}
\quad
\begin{array}{ccccc}
 & 2 & 3 & 4 & 6 \\
\alpha & + & - & - & - \\
\beta & - & - & + & +
\end{array}
\quad
\begin{array}{ccccc}
 & 2 & 3 & 5 & 6 \\
\alpha & + & + & - & - \\
\beta & - & - & + & +
\end{array}
\quad
\begin{array}{ccccc}
 & 2 & 4 & 5 & 6 \\
\alpha & + & + & - & - \\
\beta & - & - & - & +
\end{array}
\quad
\begin{array}{ccccc}
 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
\alpha & + & + & + & + \\
\beta & - & - & - & +
\end{array}
$$

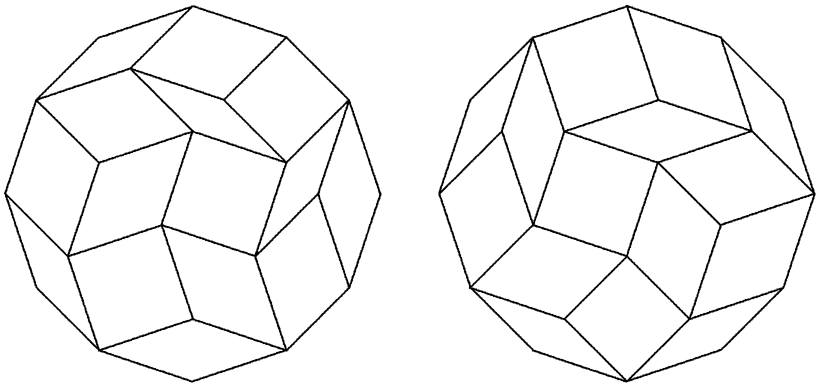

Abbildung 28. α und β als zonotopale Kachelungen

Diese beiden Signotope haben genau diesselben vier Mutationen, nämlich

$$\{1,2,5\}, \{1,3,6\}, \{2,4,6\} \text{ und } \{3,4,5\}$$

An diesen vier Stellen haben auch beide Signotope jeweils denselben Wert. An allen anderen Stellen gilt $\alpha(i,j,k) \neq \beta(i,j,k)$, d.h. $\beta^\alpha(i,j,k) = -$ genau dann, wenn $\{i,j,k\}$ eine Mutation ist. Daraus folgt, daß jeder mögliche Flip in α^α von β^α weg führt, d.h. die Anzahl der verschieden orientierten Tripel sich vergrößert. Damit gibt es in $S_3^\alpha(6)$ keinen monotonen Pfad von α^α nach $-\alpha^\alpha$, der β^α enthält. Wie wir gesehen haben, liegt in $S_r(n)$ jedes Element in einer solchen maximalen Kette. Insbesondere folgt auch, daß $S_3^\alpha(6)$ nicht mit der Inklusionsordnung auf den Inversionsmengen übereinstimmt, was damit genauso für jede Reorientation von $S_3(n)$ für alle $n \geq 6$ gilt.

Bemerkung. Etwas ganz anderes zeigt dieses Beispiel auch. Im Zusammenhang mit orientierten Matroiden gibt es die Frage nach sogenannten *reduzierten Systemen*, das sind minimale Teilmengen von $\binom{[n]}{r}$, so daß die Werte eines Chirotops auf diesen Teilmengen das Chirotop schon eindeutig bestimmen. Klar ist, daß jede Mutation in einem solchen reduzierten System enthalten sein muß. Unser Beispiel zeigt nun, daß das im Allgemeinen nicht genügt. Geometrisch ausgedrückt ist ein Pseudogeradenarrangement (für $r = 3$) nicht notwendigerweise durch die Angabe aller Dreiecke und ihrer Orientierung bestimmt.

16 Signotope mit Null

Die andere Einschränkung, die wir gemacht haben, war die auf einfache Arrangements. Auf der kombinatorischen Seite ist die naheliegende Art, „nicht einfache" Signotope zu definieren, diese nach dem Vorbild der Chirotope auf Abbildungen von $\binom{[n]}{r}$ nach $\{-,0,+\}$ zu erweitern. Dabei soll der Wert 0 für $T \in \binom{[n]}{r}$ bedeuten, daß sich alle r Pseudohyperebenen mit Index in T in einem Punkt schneiden. Wenn man sich verdeutlicht, was es für die Elemente eines r–Pakets, geometrisch also für das induzierte Teilarrangement von $r+1$ Pseudohyperebenen, bedeutet, daß sich in einem Punkt mehr als $r-1$ von ihnen schneiden können, sieht man schnell, wie man die Monotoniebedingung anpassen muß. Denn es gibt drei Möglichkeiten: Entweder das Teilarrangement ist einfach, d.h. in jedem Punkt schneiden sich genau $r-1$ Pseudohyperebenen, oder es schneiden sich r Pseudohyperebenen in einem Punkt und die letzte schneidet die r ersten Pseudohyperebenen in „einfacher“ Weise, oder alle $r+1$ Pseudohyperebenen schneiden sich in einem Punkt, d.h. das Teilarrangement ist trivial.

Kombinatorisch ergeben sich die folgenden Bedingungen:

Definition. Zu einer Abbildung $\alpha : \binom{[n]}{r} \to \{-,0,+\}$ sei $N(\alpha) = \{T \in \binom{[n]}{r} \mid \alpha(T) = 0\}$ die *Nullmenge* von α. Eine solche Abbildung α heißt *r–Signotop mit Null* auf $[n]$, wenn für jedes r–Paket P und für alle $1 \leq i < j < k \leq r+1$ die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind.

(*i*) $\quad \big|N(\alpha) \cap P\big| \in \{0, 1, r+1\}$

(*ii*) $\quad \alpha(P^{\lfloor i \rfloor})\alpha(P^{\lfloor j \rfloor})\alpha(P^{\lfloor k \rfloor}) \notin \{-+-, +-+, -0-, +0+\}$

Die Menge der r–Signotope mit Null auf $[n]$ bezeichnen wir mit $S_r^0(n)$. Dabei ist zu beachten, daß, während $S_r(n)$ mit einer Ordnung versehen ist, $S_r^0(n)$ (vorläufig) nur eine Menge ist.

Bemerkung. Daß wir oben bereits von Arrangements und Pseudohyperebenen gesprochen haben, rechtfertigt sich rückwirkend dadurch, daß auch diese erweiterten Monotoniebedingungen äquivalent dazu sind, daß ein Signotop mit Null die Lokalisation einer (diesmal nicht unbedingt uniformen) Ein–Element–Erweiterung des orientierten Matroids $C^{n,n-r+1}$ ist. Die Charakterisierung von Lokalisationen von Las Vergnas in Satz 3.1 umfaßt auch nicht uniforme Erweiterungen. Und auch in diesem Fall sind die Bedingungen für eine Lokalisation im Rang 2 äquivalent zur Definition der Paketmonotonie für Signotope mit Null. Für die Einzelheiten verweise ich nochmal auf Satz 7.1.8. in [BLS$^+$93]. Das bedeutet, wir können mit Signotopen mit Null C–Arrangements, die nicht einfach sind, beschreiben.

Genauso wie gewöhnliche Signotope eigentlich nur eine andere Schreibweise für (Äquivalenzklassen von) Permutationen, also linearen Ordnungen von $\binom{[n]}{r-1}$ sind, beschreiben Signotope mit Null (Äquivalenzklassen von) geordneten Partitionen $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ von $\binom{[n]}{r-1}$. Solche geordnete Partitionen kann man auch als Folge der Antiketten einer *schwachen Ordnung* bzw. *weak order* von $\binom{[n]}{r-1}$ interpretieren.

In Abbildung 29 sind alle Signotope aus $S_3^0(4)$ als zonotopale Kachelungen dargestellt. Daß dies möglich ist, also daß 3–Signotope mit Null Codierungen von zonotopalen Kachelungen sind, folgt aus Satz 1.12, wo wir die Äquivalenz zweidimensionaler Kachelungen mit Pseudogeradenarrangements bzw. zulässigen Folgen von Permutationen gezeigt haben, ohne von der Eigenschaft „Einfachheit“ Gebrauch zu machen.

Die minimalen Operationen, um aus einem Signotop mit Null ein anderes zu erhalten, sind natürlich nicht mehr die Flips gewöhnlicher Signotope. Ein Flip etwa von $-$ nach $+$ wird jetzt vielmehr in zwei Schritte, einen von $-$ nach 0 und einen von 0 nach $+$, aufgeteilt.

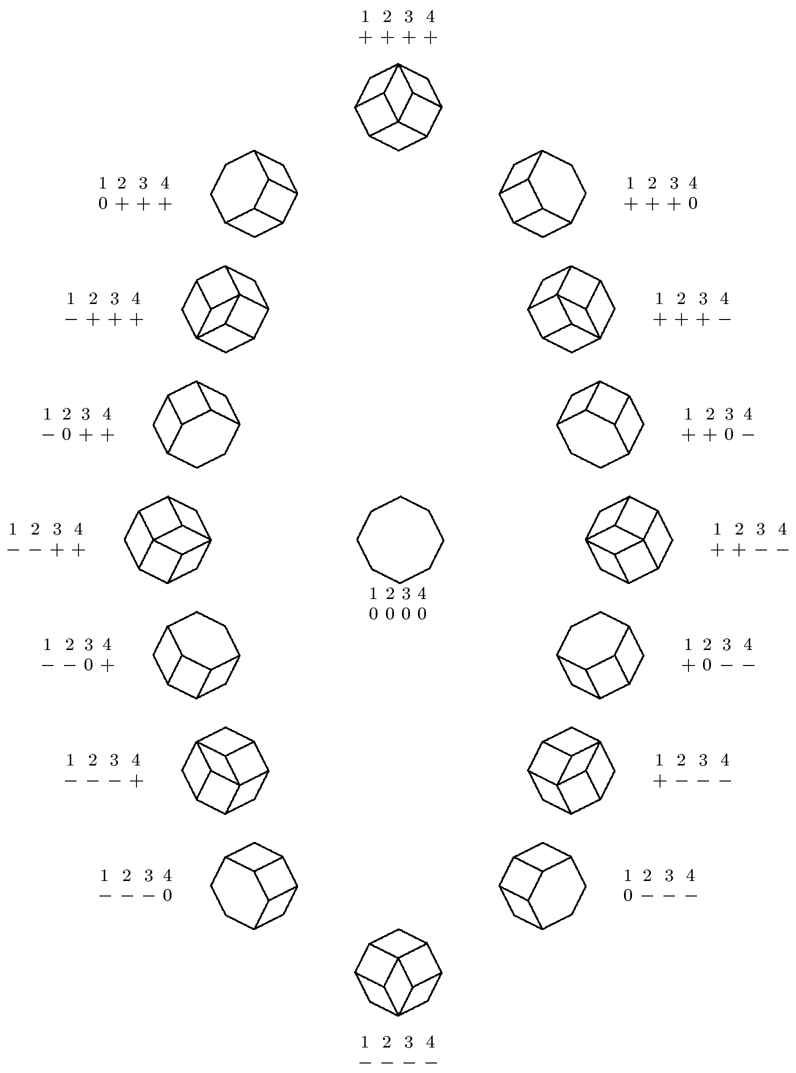

Abbildung 29. Die Elemente von $S_3^0(4)$ als zonotopale Kachelungen

Allerdings bestehen wegen Bedingung (i) die *Perturbationen*, wie wir diese Operationen in Analogie zur Theorie der orientierten Matroide nennen wollen, nicht immer nur aus der Änderung eines Wertes. Grundsätzlich kann man zwei Typen unterscheiden, nämlich

(1) Perturbationen die nur ein Zeichen ändern, also ein $-$ oder $+$ zu einer 0 oder umgekehrt machen, und

(2) solche, bei denen gleichzeitig mehrere Zeichen geändert werden.

Geometrisch können wir beide Typen als lokale Deformationen einer Pseudohyperebene H interpretieren, die auf einen bestehenden Schnittpunkt P des Arrangements bzw. davon weggeschoben wird, ohne dabei einen anderen Punkt des Arrangements zu berühren. Der Unterschied der beiden Typen besteht in der Anzahl der anderen Pseudohyperebenen, die sich im Punkt P schneiden.

Bei dem Versuch, eine Ordnung mittels dieser Perturbationen zu definieren, die auf der Ordnung $- < 0 < +$ der Zeichen basiert, also die „natürliche“ Erweiterung der Ordnung $S_r(n)$ wäre, stößt man auf eine unschöne Tatsache: Bei den Perturbationen vom Typ (2) ist nicht immer klar, wie die Ordnung aussehen soll. Ist z.B. (siehe Abbildung 29)

$$\alpha = \begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ + & - & - & - \end{smallmatrix} \quad \text{kleiner oder größer als} \quad \beta = \begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\ ?$$

Einerseits hat α ein $+$ mehr, andererseits gelangt man von β mit weniger, nämlich zwei Schritten zum maximalen Signotop. In diesem einfachen Fall, wenn $n = r + 1$ ist, könnte man sich noch damit behelfen, das triviale Signotop $\beta \equiv 0$ auszuschließen. Aber schon bei $n = r + 2$ tritt das Problem wieder auf, wenn wir etwa α und β zu α' und $\beta' \in S_3^0(5)$ erweitern, indem wir $\alpha'(i, j, 5) = \beta'(i, j, 5) = -$ für alle $i < j < 5$ setzen.

Eine andere, naheliegende Möglichkeit, Signotope mit Null mit dem Graphen von $S_r(n)$ in Verbindung zu bringen, ergibt sich folgendermaßen: Hat $\alpha \in S_r^0(n)$ an genau einer Stelle den Wert 0, dann gibt es genau zwei Signotope α^- und α^+, die sich von α nur an dieser Stelle unterscheiden und dort den Wert $-$ bzw. $+$ haben. Damit ist auch klar, daß $\alpha^- \lessdot \alpha^+$ in $S_r(n)$. Wir können also α mit der Kante zwischen α^- und α^+ im Hasse–Diagramm von $S_r(n)$ identifizieren. Signotope mit mehr als einer Nullstelle würden dann höherdimensionalen Teilgraphen zugeordnet. Diesen Ansatz werden wir im nächsten Abschnitt weiter verfolgen.

17 Polytope

Dazu wollen wir zunächst eine andere Ordnung der Zeichen zugrundelegen, und zwar soll $- < 0$ und $+ < 0$ sein. Die beiden Zeichen $-$ und $+$ sollen unvergleichbar sein. Auf dieser Basis erhält jede Perturbation zwischen zwei Signotopen mit Null eine Richtung. Die transitive Hülle der dadurch induzierten Ordnung wollen wir von jetzt an mit $S_r^0(n)$ bezeichnen. Für $S_3^0(4)$ ergibt sich das Hasse–Diagramm in Abbildung 30. Dies ist ganz offensichtlich der Seitenverband eines Achtecks, wenn man ein minimales Element ergänzt.

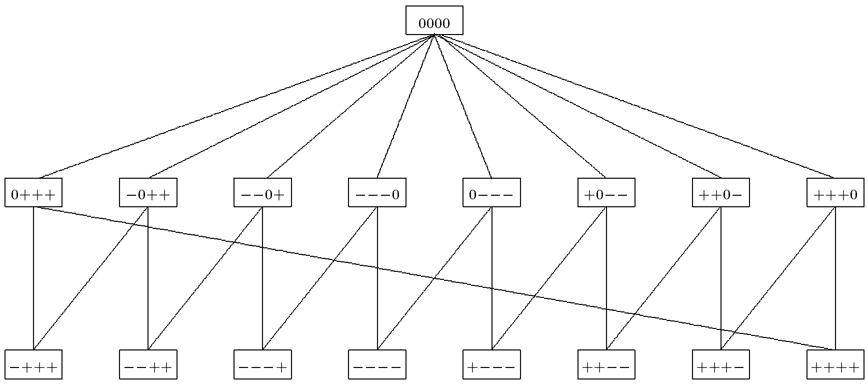

Abbildung 30. Der Graph von $S_3^0(4)$

Wir können sogar noch mehr sagen.

Lemma 3.3. *Für alle $r \geq 1$ ist die eben definierte Ordnung $S_r^0(r+1)$ der Seitenverband eines $2(r+1)$–Ecks ohne das minimale Element.*

Beweis. Wir wissen bereits, daß die Elemente von $S_r(r+1)$ die Ecken eines $2(r+1)$–Ecks bilden. Die Kanten dieses $2(r+1)$–Ecks entsprechen den Mutationen, also Signotopen mit genau einer Null. Da $[r+1]$ ein r–Paket ist, gibt es dann nur noch das Signotop, das auf ganz $[r+1]$ den Wert Null hat und das ganze $2(r+1)$–Eck beschreibt. □

Erinnern wir uns jetzt, daß $S_2(n)$ die schwache Bruhat Ordnung auf Permutationen von $[n]$ beschreibt. Es ist bekannt (siehe z.B. [Zie94]), daß man Permutationen von $[n]$ mit den Ecken eines konvexen Polytops im $\mathbb{R}^n$, des sogenannten *Permutoeders* Π_n identifizieren kann. Abbildung 31 zeigt Π_4. Das Permutoeder Π_n ist definiert als die konvexe Hülle der $n!$ Punkte im $\mathbb{R}^n$, deren Koordinaten Permutationen des Vektors $(1, 2, \ldots, n)$ sind. Das Permutoeder ist ein $(n-1)$–dimensionales Zonotop, dessen zugrundeliegende Vektoren paarweise linear unabhängig sind. Kombinatorisch kann man die d–dimensionalen Seiten des Permutoeders für $d \geq 0$ mit geordneten Partitionen $(A_1, A_2, \ldots, A_{n-d})$ von $[n]$ mit $A_i \neq \emptyset$ für $1 \leq i \leq n-d$ beschreiben. Der Seitenverband des Permutoeders entspricht der Ordnung dieser Partitionen in der Richtung größerer Vergröberung. Dabei muß wieder ein minimales Element, das der leeren Seite des Polytops entspricht, hinzugefügt werden. Die Partitionen von $[n]$ in nichtleere Teilmengen wiederum werden codiert von den Elementen von $S_2^0(n)$ (wobei wir Permutationen als Partition in einelementige Teilmengen verstehen). Damit haben wir das folgende Lemma:

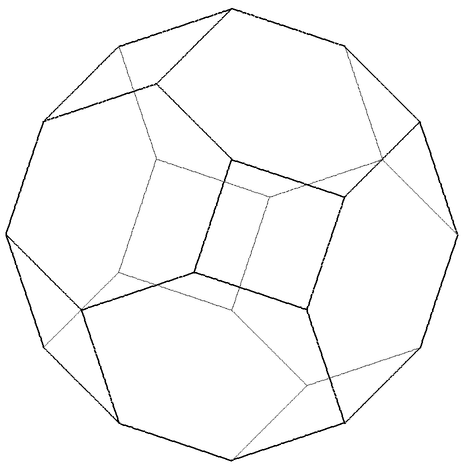

Abbildung 31. Das Permutoder Π_4

Lemma 3.4. *Für alle $n \geq 2$ ist die eben definierte Ordnung auf $S_2^0(n)$ der Seitenverband des Permutoeders Π_n ohne das minimale Element.* □

Die interessante Frage ist nun, ob sich die letzten beiden Lemmata verallgemeinern lassen, d.h. ob es für alle $n \geq r \geq 1$ ein konvexes Polytop gibt, dessen Seiten durch r–Signotope mit Null auf $[n]$ beschrieben werden. Es stellt sich leider heraus, daß dies neben den bereits genannten und den beiden trivialen Fällen $r = 1$ und $r = n$ nur noch im Fall $n = 5$ und $r = 3$ zutrifft. Dazu werden wir im folgenden zeigen, daß weder $S_3^0(6)$ noch $S_4^0(6)$ Seitenverband eines Polytops sein kann, indem wir in beiden Fällen verschieden lange, monotone Pfade vom minimalen zum maximalen Element konstruieren. Danach werden wir noch an dem uns schon aus Abbildung 21 bekannten Bild des Graphen von $S_3(5)$ durch einen geeigneten Schnitt zeigen, daß dieser Graph polytopal ist. Um zu zeigen, daß $S_3(5)$ polytopal ist, werden wir danach aus dem Hasse–Diagramm von $S_3(5)$ ein Polytop konstruieren. Diese Fragen sind auch Gegenstand der Arbeit [FZ98], auf die wir am Ende des Abschnitts noch eingehen werden.

Betrachten wir jetzt zunächst noch einmal das Signotop $\alpha \in S_3(6)$ im Beispiel A des vorhergehenden Abschnitts (das linke aus Abbildung 28), mit der Paketsignatur:

1 2 3 4	1 2 3 5	1 2 3 6	1 2 4 5	1 2 4 6
− − + +	− − − +	− + + +	− − − +	− + + +
1 2 5 6	1 3 4 5	1 3 4 6	1 3 5 6	1 4 5 6
+ + + −	+ − − −	+ + + −	+ + + −	+ + + −
2 3 4 5	2 3 4 6	2 3 5 6	2 4 5 6	3 4 5 6
+ − − −	+ − − −	+ + − −	+ + − −	+ + + +

Die Mutationen von α sind $\{1,2,5\}$, $\{1,3,6\}$, $\{2,4,6\}$ und $\{3,4,5\}$. Diese Mutationen sind paarweise unabhängig, d.h. in keinem Paket ist mehr als eine von ihnen enthalten. Es folgt, daß jede Kombination von Werten aus $\{-,+\}$ an diesen vier Stellen ein gültiges Signotop ergibt. Als von diesen 16 Signotopen induzierten Teilgraph des Hasse–Diagramms von $S_3(6)$ erhalten wir den Graph in Abbildung 32, wobei die Knoten jeweils mit den Werten der vier Tripel in lexikographischer Reihenfolge beschriftet sind.

Indizieren wir diese Signotope mit der Zahl, deren Binärdarstellung die jeweilige Belegungung von $\{1,2,5\}$, $\{1,3,6\}$, $\{2,4,6\}$ und $\{3,4,5\}$ in lexikographischer Reihenfolge codiert (z.B. ist $5 = 0101_2$ und damit $\alpha_5(1,2,5)\alpha_5(1,3,6)\alpha_5(2,4,6)\alpha_5(3,4,5) = -+-+$), dann sehen wir, daß dieser Teilgraph isomorph zum Skelett eines 4–dimensionalen Hyperwürfels ist, wie in Abbildung 33 dargestellt. Die Kanten sind dabei immer zum höheren Index hin orientiert. Bemerkenswert ist, daß genau zwei der Signotope, nämlich α_5, das auch unser ursprüngliches α war, und α_{10}, in $S_3(6)$ keine weiteren Nachbarn haben.

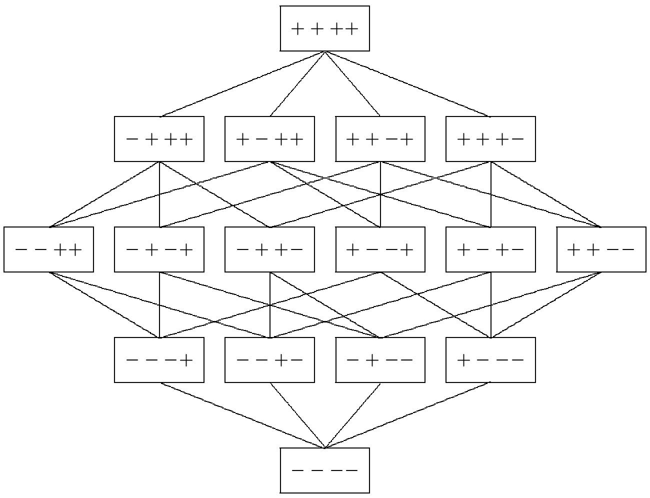

Abbildung 32. Ein Teilgraph von $S_3(6)\ldots$

Weiter folgt mit der Unabhängigkeit der Mutationen, daß wir ein gültiges Signotop mit Null erhalten, wenn wir diese vier Mutationen Null setzen.

$$\begin{array}{ccccc}
\begin{matrix}1&2&3&4\\-&-&+&+\end{matrix} & \begin{matrix}1&2&3&5\\-&-&0&+\end{matrix} & \begin{matrix}1&2&3&6\\-&0&+&+\end{matrix} & \begin{matrix}1&2&4&5\\-&-&0&+\end{matrix} & \begin{matrix}1&2&4&6\\0&+&+&+\end{matrix} \\[2ex]
\begin{matrix}1&2&5&6\\+&+&+&0\end{matrix} & \begin{matrix}1&3&4&5\\0&-&-&-\end{matrix} & \begin{matrix}1&3&4&6\\+&+&0&-\end{matrix} & \begin{matrix}1&3&5&6\\+&+&0&-\end{matrix} & \begin{matrix}1&4&5&6\\+&+&+&-\end{matrix} \\[2ex]
\begin{matrix}2&3&4&5\\0&-&-&-\end{matrix} & \begin{matrix}2&3&4&6\\+&0&-&-\end{matrix} & \begin{matrix}2&3&5&6\\+&+&-&-\end{matrix} & \begin{matrix}2&4&5&6\\+&+&0&-\end{matrix} & \begin{matrix}3&4&5&6\\+&+&+&0\end{matrix}
\end{array}$$

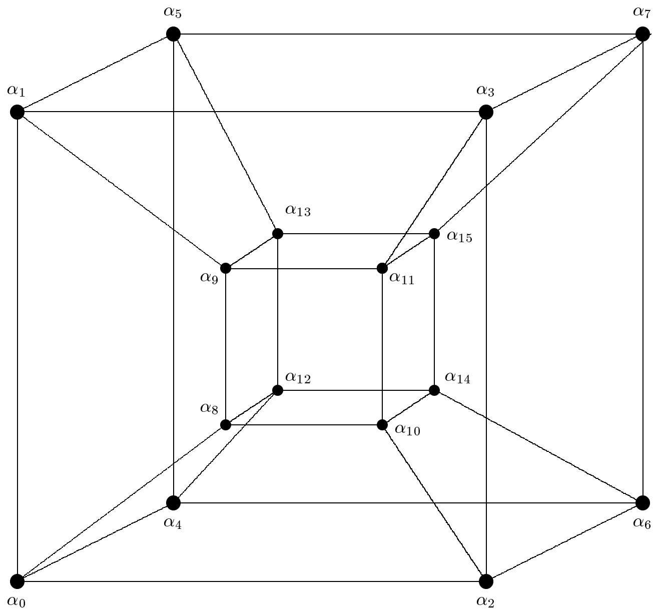

Abbildung 33. … der ein Hyperwürfel ist.

Sowohl an der Paketsignatur dieses Signotops mit Null, das wir γ nennen wollen, als auch an der zonotopalen Kachelung in Abbildung 34 läßt sich leicht ablesen, daß jede Perturbation, die die Anzahl der Nullen in γ erhöht, alle Werte auf Null setzen muß. Das heißt, wenn wir annehmen, daß unsere Ordnung auf $S_3^0(6)$ der Seitenverband eines Polytops ist, dann beschreibt γ eine Facette dieses Polytops. Da γ dann den obigen Hyperwürfel beschreibt, wissen wir, daß dieses Polytop eine 4–dimensionale Facette haben muß.

Jedes Signotop α_i, das eine Ecke des Hyperwürfels bildet, kann mit vier Perturbationen zu γ geändert werden, indem wir einfach in beliebiger Reihenfolge die obigen vier Tripel 0 setzen. Wegen der Unabhängigkeit der Tripel wird dabei die Anzahl der Nullen jedesmal nur um 1 erhöht. Wir erhalten damit in $S_3^0(6)$ einen monotonen Pfad von α_i über γ zum maximalen Signotop, der die Länge 5 hat.

Andrerseits zeigt das folgende Beispiel (Abbildung 35), einen kanonischen monotonen Pfad der Länge 4 in $S_3^0(6)$ von $\beta \equiv -$ zum maximalen Element von $S_3^0(6)$. Dazu setzt man einfach der Reihe nach $\{1, 2, k\}$ für $k = 3, 4, 5, 6$ auf Null, was etwa im Geradenarrangement dem sukzessiven Schieben der Geraden mit den Indizes $3, 4, 5$ und 6 auf den Schnittpunkt

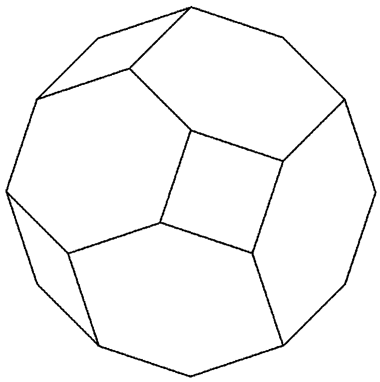

Abbildung 34. Zonotopale Kachelung von γ

der Geraden Nummer 1 und 2 entspricht. Es ist klar, daß man nach diesen 4 Schritten das triviale Arrangement erreicht hat.

Damit folgt aber, daß ein Polytop, dessen Seitenverband $S_3^0(6)$ (ergänzt um ein zusaätzliches minimales Element) wäre, die Dimension 4 hätte. Und damit haben wir einen Widerspruch, denn ein Polytop kann nicht gleichzeitig zwei verschiedenene Dimensionen haben. Oder präzise ausgedrückt, eine Ordnung, die zwei monotone Ketten verschiedener Länge vom minimalen zum maximalen Element hat, kann nicht der Seitenverband eines Polytops sein.

Lemma 3.5. *$S_3^0(6)$, ergänzt um ein minimales Element, ist nicht Seitenverband eines Polytops.* $\square$

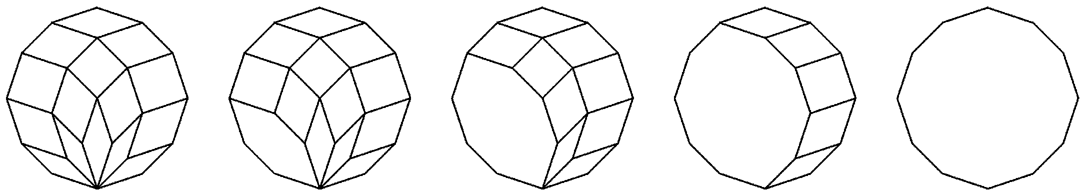

Abbildung 35. Ein monotoner Pfad der Länge 4 in $S_3^0(6)$

Völlig analog konstruieren wir ein Gegenbeispiel für $S_4^0(6)$. Es sei $\gamma \in S_4^0(6)$ mit der folgenden Paketsignatur:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ - & - & 0 & + & + \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 6 \\ - & 0 & + & + & + \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 5 & 6 \\ 0 & + & + & + & + \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 6 \\ + & + & + & + & 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ + & + & + & 0 & - \end{matrix} \quad \begin{matrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ + & + & 0 & - & - \end{matrix}$$

Die Elemente der Nullmenge $\{1,2,4,5\}$, $\{1,3,4,6\}$, $\{2,3,5,6\}$ sind wieder unabhängig im Sinn des letzten Beispiels. Also ist wieder jede Kombination aus $\{-,+,0\}$ für die Belegung möglich. Das sind 8 gültige gewöhnliche Signotope, die einen dreidimensionalen Würfel innerhalb $S_4(6)$ bilden, bzw. ein monotoner Pfad der Länge 4 in $S_4^0(6)$ von einem Signotop aus $S_4(6)$ zum maximalen Element von $S_4^0(6)$. Auf dieselbe kanonische Weise wie im vorigen Beispiel konstruieren wir auch den Pfad der Länge 3. Ausgehend von $\beta \equiv -$ perturbieren wir nacheinander $\{1,2,3,4\}$, $\{1,2,3,5\}$ und $\{1,2,3,6\}$ zu 0, wobei im zweiten und dritten Schritt jeweils noch weitere Nullen gemäß Bedingung (i) für Signotope mit Null hinzuzufügen sind. Zum Beispiel müssen, wenn $\{1,2,3,4\}$ bereits den Wert 0 hat und $\{1,2,3,5\}$ neu dazukommt, auch alle anderen Elemente des Pakets $\{1,2,3,4,5\}$ Null gesetzt werden. Die Paketsignaturen der Signotope dieses Pfades sehen so aus:

1 2 3 4 5	1 2 3 4 6	1 2 3 5 6	1 2 4 5 6	1 3 4 5 6	2 3 4 5 6
− − − − −	− − − − −	− − − − −	− − − − −	− − − − −	− − − − −
− − − − 0	− − − − 0	− − − − −	− − − − −	− − − − −	− − − − −
0 0 0 0 0	− − − − 0	− − − − 0	− − − − 0	− − − − 0	− − − − 0
0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0

Insgesamt erhalten wir wieder das Ergebnis, daß es in $S_4^0(6)$ zwei Ketten verschiedener Länge vom minimalen zum maximalen Element gibt.

Lemma 3.6. *$S_4^0(6)$, ergänzt um ein minimales Element, ist nicht Seitenverband eines Polytops.* □

Diese beiden Beispiele haben eine einfache Eigenschaft gemeinsam, nämlich die Existenz von $T_1, \dots, T_{n-r+1} \in \binom{[n]}{r}$, die paarweise unabhängig sind, d.h. für die gilt:

$(*) \quad \left|T_i \cup T_j\right| > r+1$ für alle $i \neq j \in \{1, \dots, n-r+1\}$

Damit konnten wir 2^{n-r+1} Signotope konstruieren, die einen $(n-r+1)$–dimensionalen Hyperwürfel in $S_r(n)$ bildeten. Andrerseits hatten wir die kanonische Form, eine Kette der Länge $n-r+1$ in $S_r^0(n)$ zu finden, die leicht auf alle n und r verallgemeinert werden kann. Ob es $T_1, \dots, T_{n-r+1} \in \binom{[n]}{r}$ gibt, die $(*)$ erfüllen, hängt allein von n und r ab. Da jedes der T_i in genau $n-r$ Paketen enthalten ist, muß es insbesondere mindestens $(n-r+1)(n-r)$ Pakete geben. Es muß also $\binom{n}{r+1} \geq (n-r+1)(n-r)$ gelten. Allerdings ist diese Bedingung nicht hinreichend dafür, daß wir ein Gegenbeispiel konstruieren können, denn sie ist auch für $r=2$ und alle $n \geq 6$ erfüllt. Was wir allerdings sagen können, ist, daß wir für $n=5$ und $r=3$ auf diese Art kein Gegenbeispiel erhalten, denn $\binom{5}{4} < (5-2)(5-3)$.

Und tatsächlich können wir uns durch „scharfes Hinsehen“ plausibel machen, daß das Hasse–Diagramm von $S_3(5)$ das Skelett eines 3–dimensionalen Polytops ist. In Abbildung 36 ist $S_3(5)$ noch einmal dargestellt. Dort haben wir jeden Knoten mit dem Wert des jeweiligen Signotops an der Stelle $\{2,3,4\}$ markiert. Wenn wir jetzt alle Knoten, die mit $-$ markiert sind, löschen, bleibt der Teilgraph in Abbildung 37 übrig, nach Löschen aller mit $+$ markierten Knoten der in Abbildung 38.

In beiden Bildern haben wir die Kanten, die die beiden Teilgraphen in $S_3(5)$ verbinden, als Kanten, die ins Leere zeigen, stehen gelassen. Diese Kanten entprechen genau den Flips an der Stelle $\{2,3,4\}$. Wir können das auch so ausdrücken, daß diese Kanten einen Schnitt des Graphen bilden. Ganz offensichtlich sind diese beiden Teilgraphen planar. Wenn wir sie etwas „ordentlicher“ zeichnen, dann sehen sie wie in den Abbildungen 39 und 40 aus. Dort haben wir die Knoten, die Signotopen entsprechen, in denen $\{2,3,4\}$ flipbar ist, als Punkte $a, \dots, j$ gekennzeichnet. Je zwei Knoten aus den beiden Abbildungen, die mit demselben Buchstaben gekennzeichnet sind, müssen noch durch eine Kante verbunden werden. Wie man sieht sind gleichnamige Knoten auch auf gleicher Höhe. Man muß sich jetzt nur noch Abbildung 39 von außen auf die Vorderseite und Abbildung 40 von innen

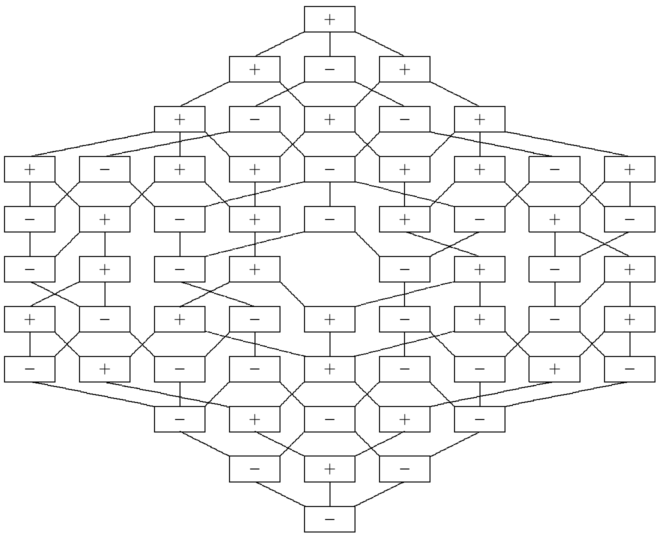

Abbildung 36. $S_3(5)$ mit den Werten an der Stelle $\{2,3,4\}$

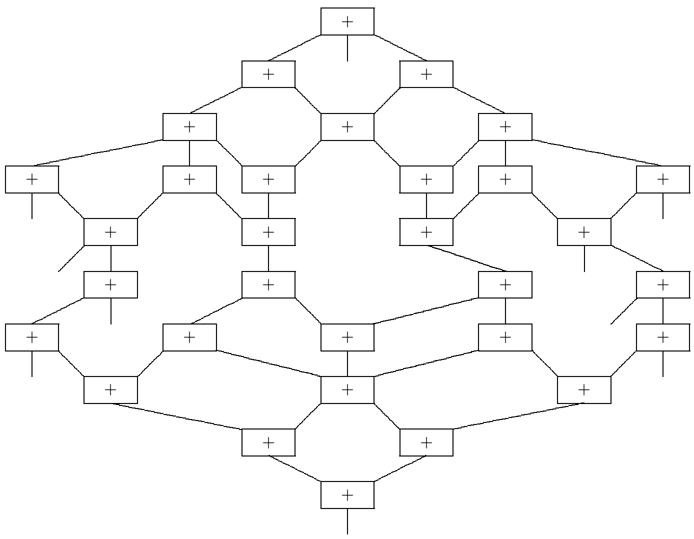

Abbildung 37. Teilgraph von $S_3(5)$ mit $+$ an der Stelle $\{2,3,4\}$

auf die Rückseite einer Kugel gezeichnet denken und diese restlichen Kanten ergänzen, dann sieht man schon das Polytop vor sich, dessen Skelett der Graph von $S_3(5)$ ist und das in Abbildung 41 dargestellt ist.

Die Ergebnisse dieses Abschnitts wollen wir noch einmal in einem Satz zusammenfassen.

Satz 3.7. *Der Graph von $S_r(n)$ ist polytopal für $r \leq 2$ und $n - r \leq 1$ und für $n = 5$ und $r = 3$, nicht aber für $n = 6$ und $r \in \{3,4\}$.*

□

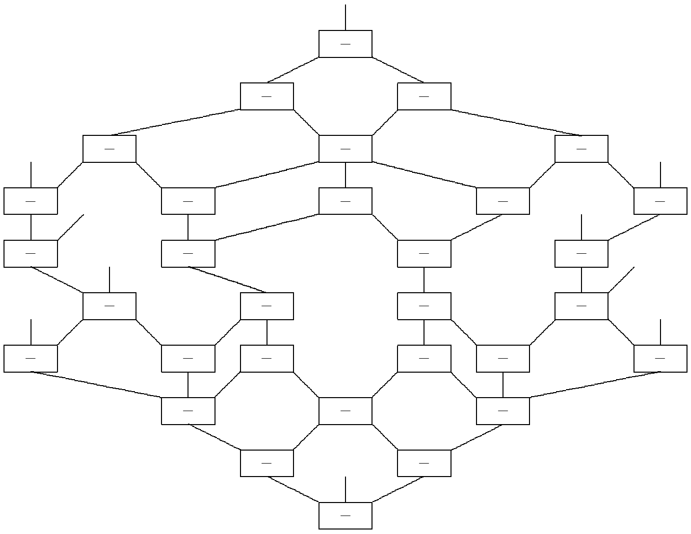

Abbildung 38. Teilgraph von $S_3(5)$ mit - an der Stelle $\{2, 3, 4\}$

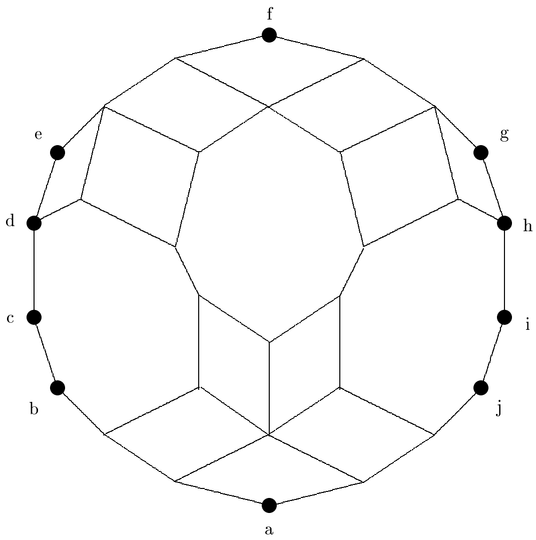

Abbildung 39. Die „Vorderseite“ …

Eine andere Behandlung der Zusammenhänge zwischen Polytopen und den Signotopordnungen bzw. den höheren Bruhat Ordnungen wird zur Zeit von Felsner und Ziegler [FZ98] ausgearbeitet. Sie betrachten Projektionen π des n–dimensionalen Hyperwürfels C_n auf ein k–dimensionales Zonotop $Z = Z(V)$ mit n Zonen, dessen zugrundeliegende Vektorkonfiguration V im $\mathbb{R}^k$ zyklisch ist, d.h. das alternierende orientierte Matroid $C^{n,k}$ hat, mit $\pi(C_n) = Z$. Das Faserpolytop dieser Projektion ist ein $(n-k)$–dimensionales Zonotop $\widehat{Z}$. Die generierende Vektorkonfiguration von $\widehat{Z}$ ist das *Adjoint* der zu V dualen Konfiguration V^* im $\mathbb{R}^{n-k}$. Das Hauptergebnis in [FZ98] ist, daß der Skelettgraph von $\widehat{Z}$ ein Teilgraph des Graphen von $B(n, k)$ ist, und daß die beiden Graphen genau dann gleich sind, wenn

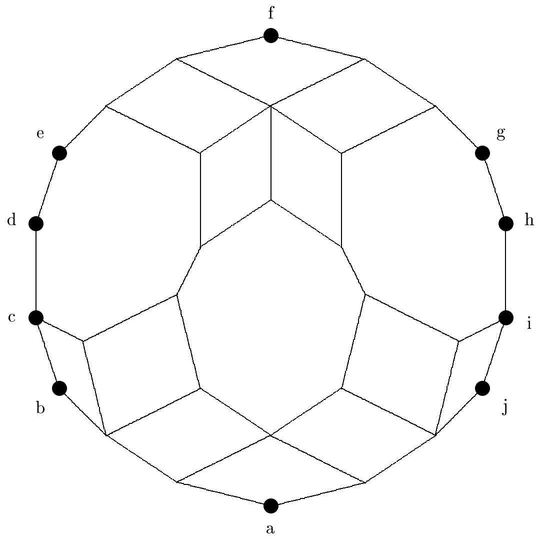

Abbildung 40. … und die „Rückseite“ des Polytops

das orientierte Matroid dieses Adjoints *eindeutig* ist. Weiter zeigen Felsner und Ziegler, daß diese Eindeutigkeit für $n - k \leq 2$, $k \leq 1$ und für $n = 5$ und $k = 2$ gegeben ist, aber für keine weiteren Werte. Mit $S_r(n) = B(n, r-1)$ ergibt das die folgende Verschärfung unseres Satzes 3.7:

Satz 3.8. *Der Graph von $S_r(n)$ ist polytopal für $r \leq 2$ und $n - r \leq 1$ und für $n = 5$ und $r = 3$, aber für keine weiteren Werte von n und r.*

□

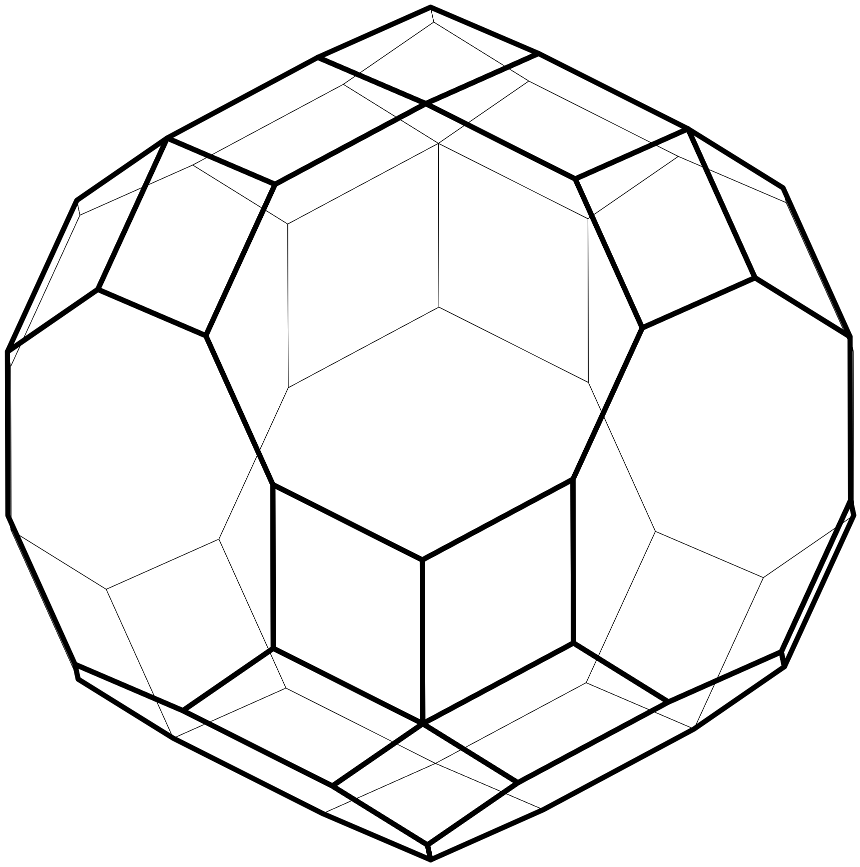

Abbildung 41. $S_3(5)$ als Polytop

Literaturverzeichnis

[BLS+93] A. Björner, M. Las Vergnas, B. Sturmfels, N. White, and G. Ziegler. *Oriented Matroids*. Cambridge University Press, 1993.

[Buc43] R.C. Buck. Partitions of space. *Amer. Math. Monthly*, 50:541–544, 1943.

[Cor83] R. Cordovil. Oriented matroids of rank three and arrangements of pseudolines. *Ann. Discrete Math.*, 17:219–223, 1983.

[dS93] I.P.F. da Silva. On fillings of $2n$-gons with rhombi. *Discrete Math.*, 111:137–144, 1993.

[Ede87] H. Edelsbrunner. *Algorithms in Combinatorial Geometry*, volume 10 of *EATCS Monographs on Theoretical Computer Science*. Springer-Verlag, 1987.

[EG87] P. Edelman and C. Greene. Balanced tableaux. *Advances in Math.*, 63:42–99, 1987.

[EG89] H. Edelsbrunner and L. J. Guibas. Topologically sweeping an arrangement. *J. Comput. Syst. Sci.*, 38:165–194, 1989. Corrigendum in 42 (1991), 249–251.

[Eln97] S. Elnitsky. Rhombic tilings of polygons and classes of reduced words in coxeter groups. *J. Combin. Theory Ser. A*, 77:193–221, 1997.

[Fel97] S. Felsner. On the number of arrangements of pseudolines. *Discrete Comput. Geom.*, 18:257–267, 1997.

[FK97] S. Felsner and K. Kriegel. Triangles in euclidean arrangements. Technical Report B 97-9, Preprintreihe des Fachbereichs 14, FU-Berlin, Serie B, 1997.

[FW98] S. Felsner and H. Weil. Sweeps, arrangements and signotopes. Technical Report B 98-06, Preprintreihe des Fachbereichs 14, FU-Berlin, Serie B, 1998.

[FZ98] S. Felsner and G. Ziegler. Zonotopes associated with higher bruhat orders. in preparation, 1998.

[GP84] J. E. Goodman and R. Pollack. Semispaces of configurations, cell complexes of arrangements. *J. Combin. Theory Ser. A*, 37:257–293, 1984.

[GP85] J.E. Goodman and R. Pollack. Polynomial realization of pseudoline arrangements. *Comm. Pure Applied Math.*, 38:725–732, 1985.

[GP93] J. E. Goodman and R. Pollack. Allowable sequences and order types in discrete and computational geometry. In J. Pach, editor, *New Trends in Discrete and Computational Geometry*, volume 10 of *Algorithms and Combinatorics*, pages 103–134. Springer-Verlag, 1993.

[Grü72] B. Grünbaum. *Arrangements and Spreads.* Regional Conf. Ser. Math. Amer. Math. Soc., 1972.

[GW93] B. Gärtner and E. Welzl. Vapnik-Chervonenkis dimension and (pseudo)-hyperplane arrangements. Technical Report B 93-07, Preprintreihe des Fachbereichs 14, FU-Berlin, Serie B, 1993.

[Knu92] D. E. Knuth. *Axioms and Hulls*, volume 606 of *Lecture Notes in Computer Science*. Springer-Verlag, 1992.

[Lev26] F. Levi. Die Teilung der projektiven Ebene durch Gerade oder Pseudogerade. In *Berichte über die Verhandlungen der sächsischen Akademie der Wissenschaften, Leipzig, Mathematisch-physikalische Klasse 78*, pages 256–267, 1926.

[MS89] Y.I. Manin and V.V. Schechtman. Arrangements of hyperplanes, higher braid groups and higher Bruhat orders. In J. Coates et al., editor, *Algebraic Number Theory – in honour of K. Iwasawa*, volume 17 of *Advanced Studies in Pure Mathematics*, pages 289–308. Kinokuniya Company/Academic Press, 1989.

[Ram97] J. Rambau. Triangulations of cyclic polytopes and higher Bruhat orders. *Mathematika*, 44:162–194, 1997.

[RGZ94] J. Richter-Gebert and G.M. Ziegler. Zonotopal tilings and the Bohne-Dress theorem. In H. Barcelo, editor, *Jerusalem combinatorics '93*, volume 178 of *Contemp. Math.*, pages 211–232. Amer. Math. Soc., 1994.

[Rin56] G. Ringel. Teilungen der Ebenen durch Geraden oder topologische Geraden. *Math. Z.*, 64:79–102, 1956.

[She21] G.C. Shephard. Combinatorial properties of associated zonotopes. *Canadian J. Math.*, 26:1974, 302–321.

[Sta84] R. Stanley. On the number of reduced decompositions of elements of Coxeter groups. *Europ. J. Combinatorics*, 5:359–372, 1984.

[Str77] T.O. Strommer. Triangles in arrangements of lines. *J. Comb. Theory (A)*, 23:314–320, 1977.

[VK91] V.A. Voevodskij and M.M. Kapranov. Free n-category generated by a cube, oriented matroids, and higher Bruhat orders. *Funct. Anal. Appl.*, 2:50–52, 1991.

[YO69] Y. Yanagimoto and M. Okamoto. Partial orderings of permutations and monotonicity of a rank correlation statistic. *Ann. Inst. Stat. Math.*, 21:489–506, 1969.

[Zie93] G.M. Ziegler. Higher Bruhat orders and cyclic hyperplane arrangements. *Topology*, 32:259–279, 1993.

[Zie94] G.M. Ziegler. *Lectures on Polytopes*, volume 152 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, 1994.

[Zie96] G.M. Ziegler. Oriented matroids today. *The Electronic Journal of Combinatorics*, 3, 1996. Die jeweils aktuelle Version ist zu finden unter `http://www.math.tu-berlin.de/~ziegler`.