Komplementärpaare linearer Erweiterungen von Ordnungen

Carsten Ihlemann

11. Juni 1999

Zusammenfassung

Der Abstand zwischen zwei linearen Erweiterungen einer (Halb-)Ordnung ist die Anzahl der Paare von Elementen, die in den beiden Erweiterungen unterschiedlich geordnet sind. Ein Paar L, M von linearen Erweiterungen einer Ordnung heißt *diametral*, falls ihr Abstand maximal für alle Paare von linearen Erweiterungen ist. Ein diametrales Paar erzeugt ein maximales Intervall im linearen Erweiterungsgraphen. Die *komplementäre lineare Erweiterung* L^* von L entsteht, indem man beim Algorithmus zur Erzeugung von linearen Erweiterungen die umgekehrte Reihenfolge von L als Prioritätsliste nimmt. Die so entstehende Erweiterung ist super-greedy. Ein *Komplementärpaar* einer Ordnung ist ein Paar L, M von linearen Erweiterungen, so daß $L^* = M$ und $M^* = L$ gilt. Komplementärpaare erzeugen ein lokal maximales Intervall im Erweiterungsgraphen. Iterationen der Komplementabbildung beginnend mit einer beliebigen linearen Erweiterung L führen schließlich zu einem Komplementärpaar. Ist h die Höhe der Ordnung, dann ist spätestens L^{*2h-2}, L^{*2h-1} ein Komplementärpaar. Diese Obergrenze der Konvergenzdauer ist optimal. Im zweiten Teil der Arbeit werden Ordnungen untersucht, bei denen die Konvergenzdauer unabhängig von der Höhe ist.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung ... 1
1 Grundlagen und Notation ... 3
1.1 Lineare Erweiterungen und Dimension einer Ordnung ... 4
1.2 Standardbeispiele und kritische Paare ... 5
2 Der lineare Erweiterungsgraph einer Ordnung ... 6
3 Algorithmen für lineare Erweiterungen ... 9
4 Komplementärpaare linearer Erweiterungen ... 13
5 Ordnungen mit langer Konvergenzdauer ... 19
6 Bäume ... 23
7 Seriell-parallele Ordnungen ... 25
8 Grids ... 31

Einleitung

In dieser Arbeit werden endliche geordnete Mengen oder kurz Ordnungen betrachtet. Eine lineare Erweiterung L einer Ordnung $\mathbf{P} = (X, <_P)$ ist eine totale (lineare) Ordnung derselben Grundmenge, die die Ordnung von $\mathbf{P}$ erhält.

Eine Menge linearer Erweiterungen der Ordnung $\mathbf{P}$ heißt Realisator von $\mathbf{P}$, falls ihr Schnitt gleich $\mathbf{P}$ ist. Die Dimension von $\mathbf{P}$ ist das Minimum der Mächtigkeiten der Realisatoren.

Der Abstand zweier linearer Erweiterungen L, M von $\mathbf{P}$ ist die Anzahl der Paare von Elementen x, y für die $x <_L y$ & $y <_M x$ oder $x <_M y$ & $y <_L x$ gilt. Ist der Abstand der linearen Erweiterungen L, M von $\mathbf{P}$ maximal über allen Paaren von linearen Erweiterungen von $\mathbf{P}$, dann heißt das Paar L, M diametral für $\mathbf{P}$. Ein diametrales Paar minimiert für die zweidimensionalen Erweiterungen von $\mathbf{P}$ die Anzahl der zusätzlichen Vergleichbarkeiten gegenüber $\mathbf{P}$ und wird daher auch minimum zweidimensionale Erweiterung von $\mathbf{P}$ genannt. Der lineare Erweiterungsgraph einer Ordnung $\mathbf{P}$ hat als Knoten die linearen Erweiterungen von $\mathbf{P}$. Zwei Knoten sind durch eine Kante verbunden, falls sie sich nur durch eine adjazente Transposition unterscheiden.

Eine lineare Erweiterung L von $\mathbf{P}$ entsteht indem man das erste Element x_1 von L aus den minimalen Elementen von $\mathbf{P}$ und das Element x_{i+1} aus den minimalen Elementen von $\mathbf{P} - \{x_1, \dots, x_i\}$ wählt. Basierend auf dem 'greedy'-Algorithmus läßt sich die Auswahlmenge für das nächste Element von L einschränken. Am wichtigsten in diesem Zusammenhang sind dabei die 'super-greedy' Erweiterungen. Sie stellen im Grunde eine depth-first Traversierung der Ordnung da. Nimmt man bei der Auswahlfunktion stets das in L größte wählbare Element, dann entsteht das Komplement L^* von L. L^* ist super-greedy.

Ein Komplementärpaar L, M ist ein Paar mit $L^* = M$ und $M^* = L$. Ein diametrales Paar einer zweidimensionalen Ordnung ist auch ein Komplementärpaar. Ein Intervall $[M, N]$ im linearen Erweiterungsgraphen ist die Menge der linearen Erweiterungen, die auf einem kürzesten Pfad zwischen M und N liegen. Ist L, M ein diametrales Paar, dann ist $[L, M]$ maximal bzgl. der Inklusion. Ein Intervall $[M, N]$ heißt lokal extremal, wenn es keine Erweiterungen M' und N', die von M bzw. N Abstand kleiner gleich 1 haben, so daß $[M, N]$ echt in $[M', N']$ enthalten ist. Ist M, N ein Komplementärpaar, dann ist $[M, N]$ lokal extremal.

Die Iteration von $'*'$ liefert ein Komplementärpaar. Ist L eine lineare Erweiterung einer Ordnung der Höhe h, dann ist L^{*2h-2}, L^{*2h-1} ein Komplementärpaar. Ist j minimal für L, so daß L^{*j}, L^{*j-1} ein Komplementärpaar ist, dann heißt j Konvergenzgeschwindigkeit von L. Es stellt sich heraus, daß $2h - 2$ eine optimale obere Schranke der Konvergenzdauer ist.

Im zweiten Teil der Arbeit werden dann Ordnungen untersucht, für die die Konvergenzgeschwindigkeit einer linearen Erweiterung durch eine Konstante beschränkt ist. Eine lineare Erweiterung eines Baumes hat Konvergenzgeschwindigkeit maximal 1. Ein Komplementärpaar eines Baumes T ist auch ein diametrales Paar für T. Für seriell-parallele Ordnungen gilt dies nicht: Ein Komplementärpaar ist in der Regel nicht diametral. Genau wie Bäume haben seriell-parallel Ordnungen Dimension 2 und Konvergenzgeschwindigkeit maximal 1. Eine lineare Erweiterung L eines Grids hat Konvergenzgeschwindigkeit maximal 2. Ist L eine lineare Erweiterung eines Grids, dann ist L^* eine lexikographische Ordnung, d.h. sie sortiert komponentenweise nach einer Reihenfolge π der Komponenten. Nimmt man die lexikographische Ordnung M mit der umgekehrten Reihenfolge der Komponenten, dann sind diese beiden lexikographischen Ordnungen ein Komplementärpaar von G. Umgekehrt hat jedes Komplementärpaar eines Grids diese Form. Ein Komplementärpaar eines Grids G der Dimension ≤ 4 ist auch ein diametrales Paar von G.

1 Grundlagen und Notation

Eine *geordnete Menge* **P** ist eine Menge X zusammen mit einer zweistelligen irreflexiven und transitiven Relation $<_P$ (oder falls eine Verwechslung nicht auftreten kann kurz $<$). Alternativ, kann man die reflexive,transitive und antisymmetrische Relation $\leq_P = <_P \cup \{(x,x) : x \in X\}$ nehmen.

Die Menge der grösseren (kleineren) Element von $x \in X$ wird mit $x^{\uparrow}$ ($x^{\downarrow}$) bezeichnet. Weiterhin sei $x^{\uparrow}_{+} := \{y \in X : x \leq y\}$ und $x^{\downarrow}_{+} := \{y \in X : y \leq x\}$. Für eine Menge $A \subseteq X$ sei $A^{\uparrow} := \{x \in X : \exists a \in A\, (a <_P x)\} - A$.

Zwei verschiedene Elemente $x, y \in X$ heißen *vergleichbar* (in Zeichen $x \perp y$) falls $x < y$ oder $y < x$ gilt, falls weder $x < y$ noch $y < x$ gilt, heißen sie *unvergleichbar* (in Zeichen $x \| y$). Für Teilmengen $A, B \subseteq X$ sei $A \| B :\Leftrightarrow a \| b$ für alle $(a,b) \in A \times B$ und $A \perp B :\Leftrightarrow a \perp b$ für alle $(a,b) \in A \times B$. Die Anzahl der unvergleichbaren Paare einer geordneten Menge **P** wird mit $inc(\mathbf{P})$ bezeichnet, die Anzahl der vergleichbaren Paare mit $comp(\mathbf{P})$.

Wir sagen x *bedeckt* y oder x ist ein unmittelbarer Nachfolger von y (Schreibweise $x \succ y$), falls $x > y$ ist und kein z existiert, so daß $x > z > y$ gilt. Das *Hasse-Diagramm* einer geordneten Menge $\mathbf{P} = (X, <_P)$ ist ein Graph dessen Knotenmenge gleich X ist und dessen Kanten die Bedeckungsrelationen sind. Falls $x <_P y$ gilt, wird y mit einer höheren vertikalen Koordinate als x gezeichnet und falls $y \succ x$ gilt, werden x und y durch eine Kante verbunden.

Eine *Teilordnung* $\mathbf{Q} = (Q, <_Q)$ von $\mathbf{P} = (X, <_P)$ ist eine Menge $Q \subseteq X$ zusammen mit einer Relation $<_Q \subseteq <_P$. Gilt darüber hinaus für alle $x, y \in Q$: $x <_Q y$ gdw: $x <_P y$, dann heißt **Q** *induzierte Teilordnung* von **P**. Die von $Y \subseteq X$ induzierte Teilordnung $\mathbf{Y} = (Y, <_P \upharpoonright (Y \times Y))$ wird mit $\mathbf{P}(Y)$ bezeichnet.

Eine *Kette* in einer geordneten Menge $\mathbf{P} = (X, <_P)$ ist eine Teilmenge von X, in der die Elemente paarweise vergleichbar sind. Eine *Antikette* ist eine Teilmenge von X, in der die Elemente paarweise unvergleichbar sind. Für $Q \subseteq X$ heißt $x \in Q$ *minimales (maximales)* Element von Q, falls es kein Element $z \in Q$ gibt, so daß $z < x$ ($x < z$) gilt. Die minimalen (maximalen) Elemente einer Teilmenge Q von X werden mit $Min(Q)$ ($Max(Q)$) bezeichnet. Die *Höhe* einer geordneten Menge **P** ist die Mächtigkeit einer maximalen Kette in **P** und wird mit $h(\mathbf{P})$ notiert.

Eine geordnete Menge $\mathbf{P} = (X, <_P)$ ist zusammenhängend, falls es für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$ eine endliche Folge $x = x_0, x_1, \ldots, x_n = y$ von Punkten aus X gibt, so daß $\{x_i : 0 \leq i \leq n\}$ eine Kette in **P** ist. Eine Teilordnung $(Y, <_P \upharpoonright Y)$ heißt *Komponente* von **P**, falls $(Y, <_P \upharpoonright Y)$ eine maximale zusammenhängende Teilordnung von **P** ist.

Beispiel 1.1. Der *boolesche Verband* B_n hat als Grundmenge $\wp(\{0, \ldots, n-1\})$ mit der Inklusion als Ordnung, d.h. $i < k :\Leftrightarrow i \subset k$. In B_3 beispielsweise gilt $\{2\} \prec \{1,2\}$, $\{2\} \| \{0,1\}$.

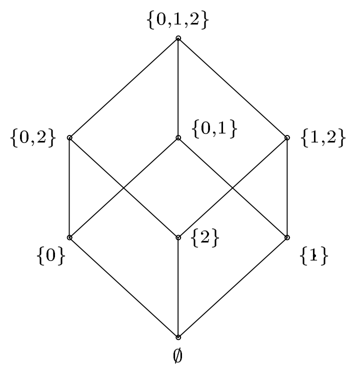


Abbildung 1: Das Hasse-Diagramm von B_3

1.1 Lineare Erweiterungen und Dimension einer Ordnung

Sei $\mathbf{P} = (X, <_P)$ eine geordnete Menge. Eine *Erweiterung* $\mathbf{Q} = (X, <_Q)$ von $\mathbf{P}$ (in Zeichen $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{Q}$) ist eine geordnete Menge mit derselben Grundmenge wie $\mathbf{P}$, so daß $\mathbf{P}$ Teilordnung von $\mathbf{Q}$ ist.

Eine geordnete Menge, in der alle Elemente paarweise vergleichbar sind, heißt *lineare Ordnung*. Eine lineare Ordnung L heißt *lineare Erweiterung* von $\mathbf{P}$, falls sie eine Erweiterung von $\mathbf{P}$ ist. Eine lineare Ordnung L mit $x_1 <_L x_2 \ldots <_L x_n$ kann als Tupel aufgefaßt werden und wird kurz mit $L = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$ notiert. Die Menge der linearen Erweiterungen einer geordneten Menge $\mathbf{P}$ wird mit $\mathcal{E}(\mathbf{P})$ bezeichnet.

Für eine Familie $\{L_1, \ldots, L_n\} \subseteq \mathcal{E}(\mathbf{P})$ sei $\mathbf{P}_{\{L_1,\ldots,L_n\}} := L_1 \cap L_2 \cap \ldots \cap L_n$. Offensichtlich gilt $\mathbf{P}_{\{L_1,\ldots,L_n\}} \supseteq \mathbf{P}$.

Sei $\mathbf{P} = (X, <_P)$ eine geordnete Menge, L eine lineare Erweiterung von $\mathbf{P}$ und $Y \subseteq X$. Zur Vereinfachung der Notation, wird die von L induzierte lineare Erweiterung von $\mathbf{P}(Y)$ mit $L \restriction Y$ bezeichnet. Wir sagen, daß Y *als Block* in L auftaucht, falls für alle $y_1, y_2 \in Y$ gilt, daß es kein $x \in X - Y$ gibt, so daß $y_1 <_L x <_L y_2$ oder $y_2 <_L x <_L y_1$ gilt.

Eine Familie $\{L_1, \ldots, L_k\}$ von linearen Erweiterungen einer geordnete Menge $\mathbf{P}$ heißt *Realisator* von $\mathbf{P}$, falls $x <_P y$ genau dann gilt, wenn $x <_{L_i} y,\ \textit{für}\ 1 \leq i \leq k$ gilt, d.h.

$$<_P \;=\; \bigcap_{1 \leq i \leq k} <_{L_i} .$$

Die *Dimension* einer geordnete Menge $\mathbf{P}$ (in Zeichen $dim(\mathbf{P})$) ist die kleinste natürliche Zahl t für die es einen Realisator mit t linearen Erweiterungen gibt.

Bemerkung 1.2. Für jede geordnete Menge gibt es einen Realisator, da gilt $\cap\mathcal{E}(\mathbf{P}) = \mathbf{P}$. Die Dimension einer geordneten Menge ist daher wohldefiniert.

Die Dimension von **P** ist nach Definition genau dann eins, wenn **P** eine Kette und somit selbst eine lineare Ordnung ist.

1.2 Standardbeispiele und kritische Paare

Ein wichtiges Beispiel einer geordneten Menge sind die sogenannten Standardbeispiele. Sie sind das kanonische Beispiel einer geordneten Menge der Dimension n, für jedes $n \in \mathbb{N}$. Enthält eine geordnete Menge ein n-dimesionale Standardbeispiel als Teilordnung, dann ist seine Dimension zumindest n.

Definition 1.3. Für $n \geq 3$ sei S_n die geordnete Menge mit der Grundmenge $X = \{1, 2, \dots, n\} \cup \{1', 2', \dots, n'\}$ wobei $Min(S_n) = \{1, 2, \dots, n\}$,
$Max(S_n) = \{1', 2', \dots, n'\}$ und $k <_{S_n} l' :\Leftrightarrow k \neq l$.
S_n heißt das *Standardbeispiel* einer n-dimensionalen geordneten Menge.

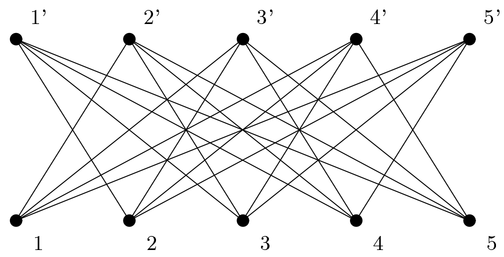


Abbildung 2: Das Diagramm von S_5

Der folgende Satz zeigt die Berechtigung dieser Namensgebung.

Satz 1.4. *Sei $n \geq 3$ und S_n das Standardbeispiel. Dann gilt $dim(S_n) = n$.*

Beweis. Für $i = 1, \dots, n$ definiere $L_i :=$
$[1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n, i', i, 1', 2', \dots, (i-1)', (i+1)', \dots, n']$. Dann ist $\mathcal{R} = \{L_1, \dots, L_n\}$ ein Realisator von S_n, also $dim(S_n) \leq n$. Es bleibt zu zeigen, daß $dim(S_n) \geq n$ ist. Dazu sei $\mathcal{R}' = \{M_1, \dots, M_t\}$ ein Realisator von S_n. Betrachte die Funktion $f : \{1, \dots, n\} \longrightarrow \{1, \dots, t\}$ mit $i' <_{M_{f(i)}} i$. Dies ist möglich, da $i \|_{S_n} i'$ und $\mathcal{R}'$ Realisator von S_n ist. Die so definierte Funktion ist injektiv. Angenommen, f sei nicht injektiv. Dann gibt es Elemente i_1, i_2 mit $1 \leq i_1 < i_2 \leq n$ und $f(i_1) = f(i_2) =: j$. Dann gilt nach Definition $i_1' <_{M_j} i_1$ und $i_2' <_{M_j} i_2$. Weil M_j Erweiterung von S_n ist, gilt aber andererseits $i_2 <_{M_j} i_1'$ und $i_1 <_{M_j} i_2'$. Dann gilt in $M_j : i_2 < i_1' < i_1 < i_2' < i_2$. Dies ist offensichtlich Unsinn. Also ist f injektiv und $t \geq n = dim(S_n)$. $\square$

Definition 1.5. Sei $\mathbf{P} = (X, <_P)$ eine geordnete Menge und (x,y) ein unvergleichbares Paar in $\mathbf{P}$. (x,y) heißt *kritisches Paar* in $\mathbf{P}$, falls für alle $z, w \in X - \{x,y\}$ gilt:

1) $z <_P x \;\Rightarrow z <_P y$ und

2) $w >_P y \;\Rightarrow w >_P x$.

Kritische Paare (x,y) sind also sozusagen quasi-transitiv. Wir bezeichnen die Menge der kritischen Paare von $\mathbf{P}$ mit $crit(\mathbf{P})$. Ist $\mathbf{Q}$ eine Erweiterung von $\mathbf{P}$, (x,y) ein kritisches Paar und es gilt $y <_{\mathbf{Q}} x$, dann sagen wir, daß $\mathbf{Q}$ das kritische Paar (x,y) *umdreht.*

Satz 1.6. *Sei $\mathbf{P} = (X, <_P)$ eine geordnete Menge, die zumindest ein unvergleichbares Paar hat, also keine Kette ist. Dann existiert ein kritisches Paar in $\mathbf{P}$.*

Beweis. Sei $x \| y$ in $\mathbf{P}$. Insbesondere ist dann die Menge $\{z : z \leq x,\ z \| y\}$ nicht leer. Sei x' ein minimales Element dieser Menge. Außerdem wähle man ein y' maximal aus $\{z : z \geq y,\ z \| x\}$. Dann ist (x', y') ein kritisches Paar. Sei nämlich $a < x'$. Dann folgt $a \perp y$ und a kann nach Wahl von x' nicht größer als y sein, da sonst $x \geq x' > a > y$ gelte. Die Behandlung der Bedingung $b > y'$ ist analog. □

Der Vollständigkeit halber, sei noch folgender Satz zitiert.

Satz 1.7. *Sei $\mathbf{P} = (X, <_P)$ eine geordnete Menge und $\mathcal{R}$ eine Familie von linearen Erweiterungen von $\mathbf{P}$. $\mathcal{R}$ ist genau dann Realisator von $\mathbf{P}$, wenn es für jedes kritische Paar (x,y) in $\mathbf{P}$ ein $L \in \mathcal{R}$ gibt, welches (x,y) umdreht.*

Das folgende Lemma wird später von Bedeutung sein.

Lemma 1.8. *Sei L eine lineare Erweiterung von S_n. Dann dreht L höchstens ein kritisches Paar um.*

Beweis. Die einzigen kritischen Paare von S_n sind (i, i') *für* $1 \leq i \leq n$. Sei $i' < i$ in L. Dann müssen sämtliche minimalen Elemente von S_n vor i' in L auftauchen. Da außerdem $i <_{S_n} k'$ gilt, folgt $k <_L i' <_L i <_L k'$ *für* $k \neq i$ □

2 Der lineare Erweiterungsgraph einer Ordnung

Mit den linearen Erweiterungen einer geordnete Menge $\mathbf{P}$ läßt sich auf einfache Weise ein Graph assoziieren. Die Knoten seien die linearen Erweiterungen von $\mathbf{P}$. Zwei lineare Erweiterungen werden genau dann durch eine Kante verbunden, wenn sie Abstand 1 haben. Auf diese Weise erhält man den sogenannten *linearen Erweiterungsgraphen* von $\mathbf{P}$. Dieser Graph hat die Eigenschaft, daß die Länge eines kürzesten Pfades zwischen zwei Punkten L und M gleich der Anzahl der Paare von Elementen ist, die in $L \cap M$ unvergleichbar sind.

Definition 2.1. Sei $\mathbf{P} = (X, <_P)$ eine geordnete Menge und L_1, L_2 lineare Erweiterungen von $\mathbf{P}$. Der Abstand zwischen L_1, L_2 (in Zeichen $dist(L_1, L_2)$) ist die Anzahl der Paare in unterschiedlicher Reihenfolge in L_1 und L_2, d.h.

$$dist(L_1, L_2) = |\{(x, y) : x <_{L_1} y \ \& \ y <_{L_2} x\}|.$$

L_1, L_2 heißen *diametral* für $\mathbf{P}$, falls ihr Abstand maximal ist. Ihr Abstand wird dann *linearer Erweiterungsdurchmesser* von $\mathbf{P}$ (in Zeichen $led(\mathbf{P})$) genannt.

Bemerkung 2.2. Für $\mathbf{Q} \supseteq \mathbf{P}$ gilt $\mathcal{E}(\mathbf{Q}) \subseteq \mathcal{E}(\mathbf{P})$ und somit auch $led(\mathbf{Q}) \leq led(\mathbf{P})$.

Der lineare Erweiterungsgraph $G(\mathbf{P})$ einer geordneten Menge $\mathbf{P}$ hat als Knotenmenge $\mathcal{E}(\mathbf{P})$. $L, M \in \mathcal{E}(\mathbf{P})$ werden genau dann durch eine Kante verbunden, falls sie sich nur durch eine adjazente Transposition unterscheiden, d.h. wenn ihr Abstand gleich eins ist.

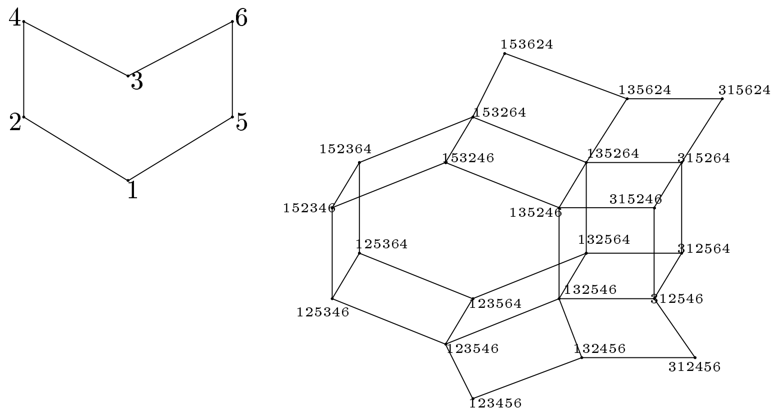


Abbildung 3: Der chevron und sein linearer Erweiterungsgraph
Der chevron hat einen linearen Erweiterungsdurchmesser von 6

Lemma 2.3. *Sei $\mathbf{P} = (X, <_P)$ eine geordnete Menge. Für den linearen Erweiterungsgraph $G(\mathbf{P})$ und $L, M \in G(\mathbf{P})$ gilt*

1) $dist(L, M)$ ist gleich der Länge eines kürzesten Pfades in $G(\mathbf{P})$ zwischen L und M.

2) Der Durchmesser des Graphen $G(\mathbf{P})$ ist gleich $led(\mathbf{P})$.

3) Der Graph $G(\mathbf{P})$ ist zusammenhängend.

Beweis. 1) Durch Induktion über $n = dist(L, M)$. Der Induktionsanfang ist trivial. Für den Induktionsschritt sei $dist(L, M) = n$. $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ seien die unvergleichbaren Paare in $L \cap M$, wobei $x_i <_L y_i$, $y_i <_M x_i$ *für* $i = 1, \dots, n$. Falls es ein i gibt mit $x_i \prec_L y_i$ entstehe L' aus L durch Vertauschung von x_i und y_i. Dann ist L durch eine Kante mit L' verbunden und es gilt $dist(M, L')$

= n - 1. Nach der IH folgt die Behauptung. Andernfalls wähle ein (x_i, y_i) wobei x_i maximal in L ist, so daß $x_i \|_{L\cap M} y_i$. Sei z der rechte Nachbar von x_i in L. Nach Wahl von z folgt, daß $z <_M y_i$. Für L', das aus L durch die Vertauschung von z und x_i hervorgehe, gilt dann ebenfalls $dist(M, L')$ = n - 1, und es folgt die Behauptung. 2) und 3) folgen aus 1). □

Definition 2.4. Sei $\mathbf{Q}$ eine zweidimensionale Erweiterung von $\mathbf{P}$. $\mathbf{Q}$ heißt *minimum zweidimensionale Erweiterung* von $\mathbf{P}$, falls $\mathbf{Q}$ eine minimale Anzahl von vergleichbaren Paaren hat, die unvergleichbar in $\mathbf{P}$ sind. Oder äquivalent dazu, eine minimum zweidimensionale Erweiterung maximiert $inc(\mathbf{P}_{\{L_1,L_2\}})$ über $L_1, L_2 \in \mathcal{E}(\mathbf{P})$.

Das folgende Lemma dient der Übersicht.

Lemma 2.5. *Sei* $\mathbf{P} = (X, <_P)$ *eine geordnete Menge und* $L_1, L_2 \in \mathcal{E}(\mathbf{P})$. *Dann gilt:*

1) *Wenn* L_1, L_2 *ein diametrales Paar für* $\mathbf{P}$ *ist, dann ist es auch diametral für* $\mathbf{P}_{\{L_1,L_2\}}$, *also ist* $led(\mathbf{P}) = led(\mathbf{P}_{\{L_1,L_2\}})$.

2) L_1, L_2 *ist genau dann diametral für* $\mathbf{P}$, *wenn* $L_1 \cap L_2$ *minimum zweidimensionale Erweiterung von* $\mathbf{P}$ *ist.*

3) *Sei* $\mathbf{Q}$ *minimum zweidimensionale Erweiterung von* $\mathbf{P}$. *Dann gilt* $led(\mathbf{P}) = inc(\mathbf{Q})$.

4) *Ist* $\mathbf{P}$ *zweidimensional, dann sind die Realisatoren der Größe zwei genau die diametralen Paare von* $\mathbf{P}$.

Beweis. 1) Nach Definition, da $\mathcal{E}(\mathbf{P}_{\{L_1,L_2\}}) \subseteq \mathcal{E}(\mathbf{P})$.
2) Da für M_1, M_2 aus $\mathcal{E}(\mathbf{P})$ $inc(\mathbf{P}_{\{M_1,M_2\}}) = dist(M_1, M_2)$ gilt.
3) und 4) sind einfache Folgerungen. □

Satz 2.6. *Sei* $\mathbf{P} = (X, <_P)$ *eine geordnete Menge. Dann gilt* $led(\mathbf{P}) \leq inc(\mathbf{P})$. *Gleichheit gilt genau dann, wenn* $dim(\mathbf{P}) \leq 2$ *ist.*

Beweis. Sei L_1, L_2 diametral für $\mathbf{P}$. Dann gilt nach Lemma 2.5 $inc(\mathbf{P}_{\{L_1,L_2\}}) = dist(L_1, L_2) = led(\mathbf{P}) = led(\mathbf{P}_{\{L_1,L_2\}})$. Da $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{P}_{\{L_1,L_2\}}$ ist, gilt außerdem $inc(\mathbf{P}) \geq inc(\mathbf{P}_{\{L_1,L_2\}})$ und es folgt die erste Behauptung.
Der Fall $dim(\mathbf{P}) = 2$ für die zweite Behauptung wurde bereits gezeigt. Wenn $dim(\mathbf{P}) = 1$ ist, dann ist $\mathbf{P}$ linear geordnet und es gilt $led(\mathbf{P}) = 0 = inc(\mathbf{P})$.
Für die Gegenrichtung sei $led(\mathbf{P}) = inc(\mathbf{P})$ und L_1, L_2 ein diametrales Paar. Dann gilt $inc(L_1, L_2) = inc(\mathbf{P})$. Daraus folgt $\mathbf{P} = L_1 \cap L_2$. □

Der lineare Erweiterungsdurchmesser geordneter Mengen, deren Dimension größer als zwei ist, ist in der Regel schwer zu bestimmen. In einem späteren Abschnitt werden Paare von linearen Erweiterungen vorgestellt, die intuitiv sehr weit voneinander entfernt sind. Wenn auch keineswegs notwendigerweise diametral. Doch zunächst läßt sich feststellen, daß die Standardbeispiele sich sehr günstig verhalten.

Satz 2.7. *Sei $\mathbf{S_n}$ das n-dimensionale Standardbeispiel. Dann gilt:*

$$led(\mathbf{S_n}) = n^2 - (n-2) = inc(\mathbf{S_n}) - (n-2).$$

Beweis. Seien L_1, L_2 lineare Erweiterungen von $\mathbf{S_n}$. Nach Lemma 1.8 hat $\mathbf{S_n}_{\{L_1,L_2\}}$ höchstens zwei unvergleichbare Paare der Form $i' \| j$. Weiterhin gibt es höchstens $n(n-1)$ unvergleichbaren Paare der Form $k \| l$ bzw. $k' \| l'$. Nach Lemma 2.5 folgt dann $led(\mathbf{S_n}_{\{L_1,L_2\}}) = dist(L_1, L_2) = inc(\mathbf{S_n}_{\{L_1,L_2\}}) \leq 2 + n(n-1)$ und somit $led(\mathbf{S_n}) \leq 2 + n(n-1)$. Diese obere Schranke kann tatsächlich erreicht werden. Zum Beispiel durch $L_1 := [1, 2, \ldots, (n-1), n', (n-1)'(n-2)', \ldots, 1']$ und $L_2 := [n, (n-1), \ldots, 2, 1', 1, 2', \ldots, n']$. Wie leicht nachzuprüfen ist gilt $dist(L_1, L_2) = n^2 - n + 2$. Also ist L_1, L_2 ein diametrales Paar, da ihr Abstand maximal ist und es folgt die Behauptung. □

3 Algorithmen für lineare Erweiterungen

Eine lineare Erweiterung L einer geordneten Menge $\mathbf{P}$ muß die Ordnung von $\mathbf{P}$ erhalten, d.h. $x <_P y \;\Rightarrow\; x <_L y$. Offensichtlich muß das erste Element von L ein minimales Element von $\mathbf{P}$ sein. Das läßt sich verallgemeinern. Ist $(x_1, \ldots, x_i)$ Anfangsstück von L, dann muß das nächste Element x_{i+1} von L minimal in $\mathbf{P} - \{x_1, \ldots, x_i\}$ sein. Lineare Erweiterungen sind hereditär, d.h. $L \in \mathcal{E}(\mathbf{P}) \Rightarrow L \restriction \mathbf{Y} \in \mathcal{E}(\mathbf{Y})$ für jede Teilordnung $\mathbf{Y}$ von $\mathbf{P}$. Schreibt man bei einer geordneten Menge $\mathbf{P} = (X, <_P)$ kurz $\mathbf{P} - x$ für $(X - \{x\}, <_P \restriction (X - \{x\})^2)$ und für das Anhängen eines Elementes x an eine Liste L kurz $L^\frown x$, dann können lineare Erweiterungen einer geordneten Menge $\mathbf{P}$ der Mächtigkeit n als Ausgabe des folgenden Algorithmus betrachtet werden.

ALGORITHMUS FÜR LINEARE ERWEITERUNG
set $L := \emptyset,\ \mathbf{P_0} := \mathbf{P},\ M_0 := Min(\mathbf{P_0})$
for i := 0 to n-1 do
    choose $x_{i+1} \in M_i$
    set $\mathbf{P_{i+1}} := \mathbf{P_i} - \{x_{i+1}\},\ M_{i+1} := Min(\mathbf{P_{i+1}}),\ L := L^\frown x_{i+1}$
output L

Jede lineare Erweiterung entsteht auf diese Weise - durch eine bestimmte Auswahlfunktion: choose $x_{i+1} \in M_i$. Im folgenden werden bestimmte einfache Einschränkungen der Auswahlfunktion betrachtet, die entstehen wenn man zusätzliche Eigenschaften fordert, die die Auswahlmenge erfüllen muß. Wenn diese Eigenschaft "$M_i \cap E \neq \emptyset$" nicht erfüllt ist, wird aus der ursprünglichen Menge M_i gewählt. Die grundlegende Variante dafür ist der sogenannte GREEDY-Algorithmus, dessen zugrundeliegende Intuition als 'gehe das Diagramm so schnell wie möglich hoch' formuliert werden kann.

GREEDY ALGORITHMUS
set $L := \emptyset,\ \mathbf{P_0} := \mathbf{P},\ M_0 := Min(\mathbf{P_0}),\ E_0 := M_0$
for i := 0 to n-1 do
    choose $x_{i+1} \in E_i$
    set $\mathbf{P_{i+1}} := \mathbf{P_i} - \{x_{i+1}\},\ M_{i+1} := Min(\mathbf{P_{i+1}})$
    if $M_{i+1} \cap x_{i+1}^{\uparrow} \neq \emptyset$
        then set $E_{i+1} := M_{i+1} \cap x_{i+1}^{\uparrow}$
        else set $E_{i+1} := M_{i+1}$
    set $L := L^\frown x_{i+1}$
output L

Greedy lineare Erweiterungen traversieren zunächst einen Zweig im Diagramm. Danach allerdings können sie wieder weit nach unten 'springen'. Um dies zu vermeiden, läßt sich der Algorithmus zu 'super-greedy' erweitern. Dieser Algorithmus bleibt in seiner Traversierung so weit oben im Diagramm wie möglich. Hat die Ordnung ein kleinstes Element, dann ist der super-greedy Algorithmus eine depth-first Suche. Andernfalls ist er eine depth-first Suche, falls man ein kleinstes Element einfügt, d.h. für $\mathbf{P}' := (X \cup \{0\},\ <_P \cup \{(0,x) : x \in X\}\,)$. Die Menge der super-greedy linearen Erweiterungen von $\mathbf{P}$ wird mit $SG(\mathbf{P})$ bezeichnet.

SUPER - GREEDY ALGORITHMUS
set $L := \emptyset,\ \mathbf{P_0} := \mathbf{P},\ M_0 := Min(\mathbf{P_0}),\ E_0 := M_0$
for i := 0 to n-1 do
    choose $x_{i+1} \in E_i$
    set $\mathbf{P_{i+1}} := \mathbf{P_i} - \{x_{i+1}\},\ M_{i+1} := Min(\mathbf{P_{i+1}})$,
        $I(i+1) := \{j : 1 \leq j \leq i+1,\ \ \exists x \in M_{i+1} : x_j <_P x\}$,
    if $I(i+1) = \emptyset$
        then set $E_{i+1} := M_{i+1}$
        else set $J(i+1) := max(I(i+1)),\ E_{i+1} := M_{i+1} \cap x_{J(i+1)}^{\uparrow}$
    set $L := L^\frown x_{i+1}$
output L

Das nächste Element x_i wird bei einem super-greedy Algorithmus also aus den unmittelbaren Nachfolgern eines bereits gewählten Elements ausgewählt, wenn immer das möglich ist. Ist dies für mehrere $x_j,\ 1 \leq j < i$ möglich, nimmt man j maximal mit dieser Eigenschaft. Stellt man sich eine super-greedy lineare Erweiterung L als Traversierung des Diagramms vor, so 'springt' L nur so weit zurück nach unten wie nötig. Ist zum Beispiel die geordnete Menge $\mathbf{P}$ nicht zusammenhängend, wird eine super-greedy Erweiterung die Komponenten nacheinander abarbeiten. Hat sie erst einmal eine Komponente begonnen zu traversieren, wird sie sie erst zu Ende traversieren, bevor ein Element aus einer anderen Komponente genommen wird. Diese Beobachtung wird der Heraushebung halber als folgendes Lemma formuliert.

Lemma 3.1. *Sei* $\mathbf{P} = (X, <_P)$ *eine geordnete Menge und* $L = [x_1, \dots, x_n]$ *eine super-greedy lineare Erweiterung von* $\mathbf{P}$. *Seien* $a, e \in X$ *und sei* $A := Min(a^{\downarrow} - \{x_1, \dots, x_i\})$ *nicht leer,* $e \notin A \cup A^{\uparrow}$. *Falls in* L $A < e$ *gilt, dann ist* $a <_L e$.

Beweis. Angenommen, $e <_L a$. Sei x_j dasjenige Element von A, das in L zuletzt auftaucht. Da $e \notin A \cup A^{\uparrow}$ gilt, können wir ein minimales k wählen, mit $k > j$ und $x_k \notin A \cup A^{\uparrow}$. Nach Annahme ist a zum Zeitpunkt k noch nicht gewählt. Sei $b \in Min(a^{\downarrow}_{+} - \{x_1, \dots, x_{k-1}\}) \subseteq Min(\mathbf{P} - \{x_1, \dots, x_{k-1}\})$. Da $b \leq a$ ist und $j \leq k-1$ gilt, existiert ein $k > r > i$, so daß $b \in Min(\mathbf{P} - \{x_1, \dots, x_{k-1}\}) \cap x_r^{\uparrow}$ ist. Insbesondere ist x_k nicht minimal in $\mathbf{P}$, d.h. $x_k \in Min(\mathbf{P} - \{x_1, \dots, x_{k-1}\}) \cap x_l^{\uparrow}$ mit $l < k$. Weil $x_k \notin A \cup A^{\uparrow}$ gilt, ist $l < j$. Ist $|A| = 1$, dann ist $b \in Min(\mathbf{P} - \{x_1, \dots, x_{k-1}\}) \cap x_j^{\uparrow}$ und ein solches Element hätte an Stelle von x_k gewählt werden müssen. Ist $|A| = n + 1$, dann sei x_p dasjenige Element aus A, das in L als zweites vorkommt und man betrachte $\tilde{A} := Min(a^{\downarrow} - \{x_1, \dots, x_{p-1}\})$. Die Behauptung folgt induktiv. □

Lemma 3.2. *Sei* $\mathbf{P} = (X, <_P)$ *eine geordnete Menge mit Dimension größer als eins und* L *eine super-greedy lineare Erweiterung von* $\mathbf{P}$. *Dann dreht* L *ein kritisches Paar von* $\mathbf{P}$ *um.*

Beweis. oBdA habe $\mathbf{P}$ mehr als ein minimales Element. Andernfalls betrachte $\mathbf{P} - \{0\}$. Sei x_i dasjenige minimale Element welches zuletzt in $L = [x_1, \dots, x_n]$ vorkommt. Da L super-greedy ist, wurden die zu x_i unvergleichbaren Elemente zum Zeitpunkt i bereits ausgewählt, d.h. es gilt $x_i^{\uparrow} = \mathbf{P} - \{x_1, \dots, x_i\}$. Da x_i minimal ist, gilt weiterhin $x_{i-1}^{\uparrow} \subseteq \mathbf{P} - \{x_1, \dots, x_i\}$ und $\emptyset = x_i^{\downarrow} \subseteq x_{i-1}^{\downarrow}$. Also ist (x_i, x_{i-1}) ein kritisches Paar, das von L umgedreht wurde. □

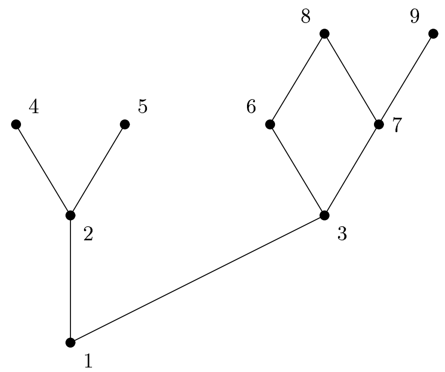
Super-greedy lineare Erweiterungen entstehen durch 'backtracking'. Wir wählen x_{i+1} aus $Min(\mathbf{P} - \{x_1, \dots, x_i\}) \cap x_j^{\uparrow}$, wobei j maximal ist, so daß diese Menge nicht leer ist. Dieser Ansatz läßt sich weiterführen. Dazu ordnen wir einem Element y aus $M_i = Min(\mathbf{P} - \{x_1, \dots, x_i\})$ seinen charakteristischen Vektor $c_y \in \{0,1\}^i$ zu, d.h. $c_y(j) = \begin{cases} 1 & \text{falls } y \in x_j^{\uparrow} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$. Die umgekehrte antilexikographische Ordnung L_i induziert so eine (Halb-)Ordnung auf M_i. Ist z.B. $i = 3$ dann sei für $y, y' \in M_3$

$$\begin{aligned} y < y' :\Leftrightarrow\ & c_y <_{L_3} c_{y'} \\ \Leftrightarrow\ & c_y(3) < c_{y'}(3) \\ & \vee [c_y(3) = c_{y'}(3) \wedge c_y(2) < c_{y'}(2)] \\ & \vee [c_y(3) = c_{y'}(3) \wedge c_y(2) = c_{y'}(2) \wedge c_y(1) < c_{y'}(1)]. \end{aligned}$$

(Eine detaillierte Behandlung lexikographischer Ordnungen findet sich in Abschnitt 8.) Notieren wir die maximalen Elemente dieser induzierten Ordnung von M_i mit $Max(M_i)$, dann läßt sich das erweiterte 'backtracking' durch folgenden 'mega-greedy' Algorithmus beschreiben.

MEGA - GREEDY ALGORITHMUS
set $L := \emptyset,\ \mathbf{P_0} := \mathbf{P},\ M_0 := Min(\mathbf{P_0}),\ E_0 := M_0$
for i := 0 to n-1 do
  choose $x_{i+1} \in E_i$
  set $\mathbf{P_{i+1}} := \mathbf{P_i} - \{x_{i+1}\},\ M_{i+1} := Min(\mathbf{P_{i+1}}),\ E_{i+1} := Max(M_{i+1})$
  set $L := L^\frown x_{i+1}$
output L

Beispiel 3.3. In dieser Ordnung ist $K = [1,2,4,3,6,5,7,8,9]$ greedy aber nicht super-greedy. Wohingegen $L = [1,3,6,7,9,8,2,4,5]$ super-greedy aber nicht mega-greedy ist.



Da die vorgestellten Algorithmen aufeinander aufbauen, ist offensichtlich jede mega-greedy lineare Erweiterung auch super-greedy und jede super-greedy lineare Erweiterung insbesondere auch greedy.

Selbst der mega-greedy Algorithmus legt die Auswahl des neuen Elements nicht eindeutig fest. Im folgenden Kapitel wird eine andere Variante des linearen Erweiterungsalgorithmus vorgestellt, der die Auswahl durch eine Präferenzliste festlegt.

4 Komplementärpaare linearer Erweiterungen

Das Finden von diametralen Paaren für eine geordnete Menge $\mathbf{P}$ kann recht schwierig werden. Einfacher wird es, wenn man von einer linearen Erweiterung L_1 von $\mathbf{P}$ ausgeht und eine lineare Erweiterung L_2 konstruieren möchte, die von der gegebenen möglichst große Distanz hat.

Es ist naheliegend, dies so zu versuchen, indem man als Präferenz von Elementen für die Auswahlfunktion die von L_1 induzierte Reihenfolge umdreht. Wie wir noch sehen werden, ist diese Methode ausreichend um ein lokales Maximum zu erreichen. Entsteht L_2 auf diese Weise aus L_1, dann heißt L_2 *komplementäre lineare Erweiterung von* L_1 und wird mit L_1^* bezeichnet. So haben wir eine Abbildung $^* : \mathcal{E}(\mathbf{P}) \longrightarrow \mathcal{E}(\mathbf{P})$ definiert. Die k-te Iteration für L wird mit L^{*k} bezeichnet, und wir setzen $L^{*0} := L$.

KOMPLEMENTÄRE LINEARE ERWEITERUNG
input($L = [x_1, \dots, x_n]$)
set $L^* := \emptyset$, $\mathbf{P_0} := \mathbf{P}$, $M_0 := Min(\mathbf{P_0})$,
    $J(0) := max\{j : x_j \in M_0\}$, $E_0 := \{x_{J(0)}\}$
for i := 0 to n-1 do
    choose $x'_{i+1} \in E_i$
    set $\mathbf{P_{i+1}} := \mathbf{P_i} - \{x'_{i+1}\}$, $M_{i+1} := Min(\mathbf{P_{i+1}})$
        $I(i+1) := \{j : 1 \le j \le n,\ \ x_j \in M_{i+1}\}$,
        $J(i+1) := max(I(i+1))$, $E_{i+1} := \{x_{J(i+1)}\}$
        $L^* := L^* {}^\frown x'_{i+1}$
output L^*

Bemerkung 4.1. Diese Form der Implementierung wurde gewählt um innerhalb des generellen Schemas zu bleiben. Die Implementierung läßt sich einfacher mit Hilfe eines stacks lösen. Im ersten Schritt werden dann die minimale Elemente von $\mathbf{P}$ in der Reihenfolge, die L induziert, auf den stack geschoben. Die for-Schleife sieht dann folgendermaßen aus. '*set* $x_{i+1} := pop(S)$ und schiebe die neuen minimalen Elemente $M_{i+1} - M_i$ in der von L induzierten Reihenfolge auf den Stapel'.

Beispiel 4.2. Für die geordnete Menge im Beispiel 3.3 war $K = 124365789$ eine lineare Erweiterung. Dann ist $K^* = 137968254$.

Satz 4.3. *Sei* $\mathbf{P} = (X, <_P)$ *eine geordnete Menge und* $L = [x_1, \dots, x_n]$ *eine lineare Erweiterung von* $\mathbf{P}$*. Dann ist* $L^* := [y_1, \dots, y_n]$ *super-greedy.*

Beweis. Angenommen, L^* ist nicht super-greedy. Dann gibt es einen Zeitpunkt t, d.h. einen Wert der for-Schleife, bei dem die super-greedy Bedingung verletzt wird. Mit den obigen Bezeichnungen kann dies nur dann der Fall sein, wenn $I(t) \neq \emptyset$ aber $y_{t+1} \notin y^{\uparrow}_{J(t)}$. Sei $y' \in y^{\uparrow}_{J(t)} \cap M_t$. Zum Zeitpunkt t sind sowohl y_{t+1}

als auch y' wählbar, da beide in M_t liegen. Aus der Voraussetzung $y_{t+1} <_{L^*} y'$ folgt daher $y' <_L y_{t+1}$.
Andererseits war (nach Wahl von $J(t)$) y_{t+1} zum Zeitpunkt $J(t)-1$, als $y_{J(t)}$ gewählt wurde, ebenfalls vefügbar, da $y_{t+1} \in M_t$ ist. Aber nach Voraussetzung ist $y_{t+1} \notin y^{\uparrow}_{J(t)}$. Daher folgt $y_{t+1} <_L y_{J(t)}$. Insgesamt ergibt sich dann $y' <_L y_{t+1} <_L y_{J(t)} <_P y'$. Widerspruch. □

Bemerkung 4.4. Nicht alle super-greedy Erweiterungen sind auch komplementäre lineare Erweiterungen. Die lineare Erweiterung 152346 des chevrons aus Abbildung 3 ist super-greedy aber nicht komplementär. Angenommen, 152346 $= L^*$. Dann müßte $3 < 1$, $2 < 5$ und $6 < 4$ in L gelten. Daraus folgt $L = 312456$, ihr Komplement wär aber dann 152364.

Bemerkung 4.5. L^* muß nicht mega-greedy sein. Im Beispiel 3.3 war
$L = [1, 3, 6, 7, 9, 8, 2, 4, 5]$ nicht mega-greedy. Es gilt aber $L = M^*$,
für $M = [1, 2, 5, 4, 3, 7, 6, 8, 9]$.

Definition 4.6. Sei $\mathbf{P} = (X, <_P)$ eine geordnete Menge und L, M lineare Erweiterungen von $\mathbf{P}$. L, M heißt *Komplementärpaar von* $\mathbf{P}$, falls $L = M^*$ und $M = L^*$ gilt.

Beispiel 4.7. Für das Beispiel 4.2 von eben rechnen wir die Iterationen aus. Es ergibt sich $K^{*2} = [1, 2, 4, 5, 3, 6, 7, 8, 9]$ und $K^{*3} = [1, 3, 7, 9, 6, 8, 2, 5, 4] = K^*$. Also ist K^*, K^{*2} ein Komplementärpaar von $\mathbf{P}$.

Bei zweidimensionale Ordnungen sind die diametralen Paare auch komplementär.

Satz 4.8. *Sei* $\mathbf{P} = (X, <_P)$ *eine geordnete Menge und* L_1, L_2 *ein Realisator für* $\mathbf{P}$. *Dann ist* L_1, L_2 *ein Komplementärpaar für* $\mathbf{P}$.

Beweis. Sei $L_1{}^* = [x_1, \ldots, x_n]$ und $L_2 = [y_1, \ldots, y_n]$. Wir zeigen durch Induktion über die Länge der Anfangssegmente, daß $L_1^* = L_2$ Die andere Bedingung ist dann analog. Die minimalen Elemente von $\mathbf{P}$ sind in L_1^* in umgekehrter Reihenfolge zu L_1. Da L_1, L_2 Realisator ist, ist die von L_2 induzierte Ordnung auf den minimalen Elementen die umgekehrte Reihenfolge der minimale Elemente in L_1. Insbesondere gilt $x_1 = y_1$. Sei nun $(x_1, \ldots, x_i) = (y_1, \ldots, y_i)$. Dann sind sowohl x_{i+1} als auch y_{i+1} aus $Min(\mathbf{P} - \{x_1, \ldots, x_i\})$ und x_{i+1} ist dasjenige Element dieser Menge, das in L_1 als letztes auftritt. Angenommen, $x_{i+1} \neq y_{i+1}$. Da L_1, L_2 Realisator ist, folgt $x_{i+1} <_{L_2} y_{i+1}$. Widerspruch zu $x_{i+1} \notin (y_1, \ldots, y_i)$. □

Bemerkung 4.9. Die Umkehrung gilt nicht. Ein Komplementärpaar einer zweidimensionalen Ordnung muß nicht Realisator sein, wie das Beispiel in Abbildung 4 zeigt.

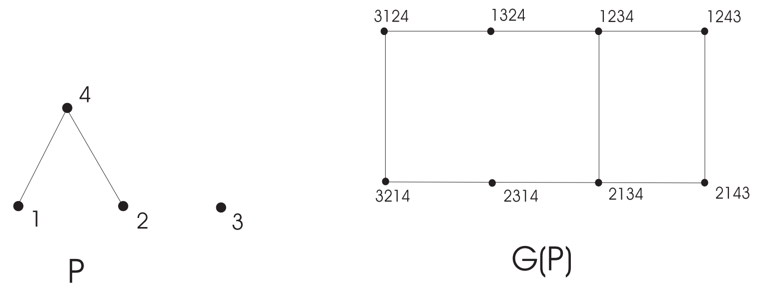


Abbildung 4: 1324, 2314 ist ein Komplementärpaar
der zweidimensionalen Ordnung P aber kein diametrales

Die Mengen der linearen Erweiterungen, die auf einem kürzesten Pfad zwischen M und N in $G(\mathbf{P})$ liegen sei mit $[M, N]$ bezeichnet. Oder äquivalent dazu ist das Intervall $[M, N]$ die Menge der linearen Erweiterungen von $\mathbf{P}_{\{M,N\}}$.
Ein Komplementärpaar M, N ist dann in dem Sinne lokal extremal, daß es im Graphen $G(\mathbf{P})$ keinen Nachbarn für M und keinen Nachbarn für N gibt, mit denen man das Intervall $[M, N]$ echt vergrößern könnte.

Definition 4.10. Sei $\mathbf{P} = (X, <_P)$ eine geordnete Menge und $M, N \in \mathcal{E}(\mathbf{P})$. Dann heißt $[M, N]$

- *extremal*, falls es keine linearen Erweiterungen M', N' gibt, derart daß $[M, N]$ eine echte Teilmenge von $[M', N']$ ist.
- *lokal extremal*, falls es keine linearen Erweiterungen M', N' mit $dist(M, M') \leq 1$, $dist(N, N') \leq 1$ gibt, so daß $[M, N]$ echt in $[M', N']$ enthalten ist.

Bemerkung 4.11. Diametrale Paare sind extremal. Denn aus $[M, N] \subseteq [M', N']$ folgt $dist(M', N') \geq dist(M, N)$.

Satz 4.12. *Sei* $\mathbf{P} = (X, <_P)$ *eine geordnete Menge und* L, M *ein Komplementärpaar von* $\mathbf{P}$. *Dann ist* $[L, M]$ *lokal extremal in* $G(\mathbf{P})$.

Beweis. Angenommen, daß L einen Nachbarn L' in $G(\mathbf{P})$ hat, so daß $[L, M] \subset [L', M]$. Sei (x, y) dasjenige Paar, durch das sich L und L' unterscheiden, wobei $x <_L y$, $y <'_L x$. Insbesondere war für L, zur Zeit als x gewählt wurde, auch y verfügbar. Da $L = M^*$ ist, folgt $y <_M x$. Also liegt L' näher an M als L, d.h. auf einem kürzesten Pfad. Widerspruch. Die anderen Fälle sind analog. □

Bemerkung 4.13. Ein Komplementärpaar muß nicht extremal sein, wie man am Beispiel der Ordnung P von Abbildung 4 sieht.

Die Existenz von Komplementärpaaren für beliebige Ordnungen ist nicht von vornherein klar. Wie bei dem einfachen Beispiel 4.7 von eben, ist anzunehmen, daß nach einer gewissen Anzahl von Iterationen von '*' auf einer linearen Erweiterung $L \in \mathcal{E}(\mathbf{P})$, eine Erweiterung M entsteht, so daß $M^{**} = M$ ist. Ist $j \geq 0$ minimal mit $L^{*j} = L^{*j+2}$, dann heißt j *Konvergenzgeschwindigkeit von L auf* $\mathbf{P}$. Für eine Ordnung $\mathbf{P}$ sei die *Kovergenzdauer* das Maximum der Konvergenzgeschwindigkeiten über den $L \in \mathcal{E}(\mathbf{P})$. Felsner und Reuter haben in [FR97, S. 14] bewiesen, daß für jede Ordnung die Konvergenzdauer kleiner $2h$ ist. Insbesondere besitzt jede Ordnung ein Komplementärpaar. Um zu dieser Aussage zu gelangen, bedarf es noch ein wenig der Vorbereitung.

Definition 4.14. Sei $\mathbf{P} = (X, <_P)$ eine geordnete Menge und $I \subseteq X$. I heißt *(Ordnungs-) Ideal* von $\mathbf{P}$, falls $\mathbf{P}(I)$ bzgl. $'\leq_P'$ abgeschlossen ist. D.h. für jedes Element x aus I mit $y \leq_P x$ folgt $y \in I$.

Lemma 4.15. *Sei $\mathbf{P} = (X, <_P)$ eine geordnete Menge und L eine super-greedy lineare Erweiterung von $\mathbf{P}$. Sei I ein Ideal von $\mathbf{P}$. Dann ist $L{\upharpoonright}I$ ebenfalls super-greedy.*

Beweis. Sei $L = [x_1, \ldots, x_n]$ und $L \upharpoonright I = [x_{f(1)}, \ldots, x_{f(m)}] = [y_1, \ldots, y_m]$. Betrachte y_{i+1}. Da L super-greedy ist, ist $x_{f(i+1)}$ aus $Min(\mathbf{P} - x_1 - \ldots - x_{f(i+1)-1}) \cap x_j^{\uparrow}$, wobei j der größte Index ist, so daß diese Menge nicht leer ist. Sei $y_k = x_j$. Angenommen, y_{i+1} verletze die super-greedy Bedingung. Das heißt, es existiert ein $r > k$, derart daß $A := Min(\mathbf{P}(I) - y_1 - \ldots - y_i) \cap \{y \in I : y_r < y\}$ nicht leer ist, aber $y_{i+1} \notin A$. Ein Element $a \in I$ das minimal in $\mathbf{P}(I) - y_1 - \ldots - y_i$ ist, ist insbesondere auch minimal in $\mathbf{P} - x_1 - \ldots - x_{f(i)}$. Daraus folgt $Min(\mathbf{P} - x_1 - \ldots - x_{f(i+1)-1}) \cap x_{f(r)}^{\uparrow} \neq \emptyset$ und $f(r) > j$. Widerspruch. □

Lemma 4.16. *Sei $\mathbf{P} = (X, <_P)$ eine geordnete Menge, L eine lineare Erweiterung von $\mathbf{P}$ und sei I Ideal von $\mathbf{P}$. Dann gilt $(L{\upharpoonright}I)^* = L^* {\upharpoonright} I$.*

Beweis. Durch Induktion über |X|. Sei x dasjenige minimale Element von $\mathbf{P}$, welches in L als letztes vorkommt. Dann beginnt L^* mit x. Wir betrachten $\mathbf{P} - x$. Setze $M := L{\upharpoonright}(\mathbf{P} - x)$. Dann ist $L^* = xM^*$.
1. Fall: $x \notin I$. Dann gilt $L{\upharpoonright}I = M{\upharpoonright}I$ und damit

$$L^*{\upharpoonright}I = M^*{\upharpoonright}I \underset{IH}{=} (M{\upharpoonright}I)^* = (L{\upharpoonright}I)^*.$$

2. Fall: $x \in I$. Da I Ideal ist, gilt $Min(\mathbf{P}(I)) \subseteq Min(\mathbf{P})$. Nach Wahl von x folgt daraus, daß x erstes Element von $(L \upharpoonright I)^*$ ist. Dann gilt

$$L^*{\upharpoonright}I = xM^*{\upharpoonright}(I - x) \underset{IH}{=} x(M{\upharpoonright}(I - x))^* = x(L{\upharpoonright}(I - x))^* = (L{\upharpoonright}I)^*$$

. □

Lemma 4.17. *Sei* $\mathbf{P} = (X, <_P)$ *eine geordnete Menge der Höhe h. Dann existiert eine Antikettenzerlegung* $X = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_h$ *von* $\mathbf{P}$ *mit* $A_1 = Min(\mathbf{P})$ *und* $A_{i+1} = Min(\mathbf{P} - A_1 - A_2 - \ldots - A_i)$. *Diese Zerlegung heißt* kanonische Antikettenzerlegung *von* $\mathbf{P}$. *Die Vereinigung* $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_i$, $i \leq h$ *wird mit* $A_{\leq i}$ *bezeichnet.*

Beweis. Seien die A_i konstruiert wie oben. So erhalten wir eine Partition $A_1, \ldots, A_m$ von X. Nach Konstruktion sind die A_i disjunkte Antiketten. Es ist zu zeigen, daß $m = h$ ist. $m \geq h$ ist trivial. Für die andere Richtung sei $x_m \in A_m$. Wir konstruieren eine Folge $(x_1, \ldots, x_m)$ mit $x_i \in A_i$ und $x_i < x_{i+1}$. Dies ist möglich, denn gäbe es zu einem $x_{i+1} \in A_{i+1}$ kein $x_i \in A_i$ mit $x_i < x_{i+1}$, dann gelte $x_{i+1} \in A_i$. Es folgt $m \leq h$ und damit die Behauptung. $\square$

Die $A_{\leq i}$ sind offensichtlich Ideale. Für $A_{\leq i}$ schreiben wir auch $A_{<j}$ mit $j = i + 1$.

Satz 4.18 (Felsner, Reuter). *Sei* $\mathbf{P} = (X, <_P)$ *eine geordnete Menge der Höhe h und L eine lineare Erweiterung von* $\mathbf{P}$. *Dann ist* $L^{*2h-1} = L^{*2h+1}$, *d.h.* L^{*2h-1}, L^{*2h} *ist ein Komplementärpaar von* $\mathbf{P}$.

Diese Obergrenze der Konvergenzgeschwindigkeit läßt sich mit Hilfe des folgenden Lemmas um eins nach unten drücken.

Lemma 4.19. *Sei* $\mathbf{P} = (X, <_P)$ *eine geordnete Menge der Höhe h und L eine lineare Erweiterung von* $\mathbf{P}$. *Falls* $L^{*j} \restriction A_{<h} = L^{*j+2} \restriction A_{<h}$ *und* $L^{*j+1} \restriction A_{<h} = L^{*j+3} \restriction A_{<h}$ *ist, dann ist* $L^{*j+2} = L^{*j+4}$.

Beweis. Sei $L^{*k} = [x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k]$. Angenommen, $L^{*j+2} \neq L^{*j+4}$. Dann sei m maximal, derart daß $(x_1^{j+2}, x_2^{j+2}, \ldots, x_m^{j+2}) = (x_1^{j+4}, x_2^{j+4}, \ldots, x_m^{j+4})$. Sei $x = x_{m+1}^{j+2}$ und $y = x_{m+1}^{j+4}$. Außerdem sei $A := \{p \in X : p <_P x\}, B := \{p \in X : p <_P y\}$ und $C := A \cap B$. Offensichtlich ist $A \cup B \subseteq A_{<h}$. Wir betrachten im folgendem, welches Element dieser Mengen in den jeweiligen Erweiterungen als letztes auftritt. Dazu definieren wir eine Funktion $f(D, i)$, mit $D \subseteq A \cup B$ und $j \leq i \leq j + 4$. Schreiben wir im folgendem $a <_i b$ für $a <_{L^{*i}} b$, dann ist $f(D, i)$ dasjenige Element $a \in D$, so daß für jedes Element $b \in D$ $b \leq_i a$ gilt. Nach Annahme wäre in L^{*j+2} und in L^{*j+4} auch y bzw. x wählbar gewesen. Daraus folgt erstens, daß $f(A \cup B, j + 2) = f(A \cup B, j + 4) \in C$ ist und zweitens, daß $x <_{j+3} y$ und $y <_{j+1} x$ gelten muß.

BEHAUPTUNG. $f(A \cup B, j + 3) \in B - A$.

Beweis der Behauptung. Betrachte $f(B, j + 3) := b$. Sei $b = x_l^{j+3}$. Dann ist $y \in M := Min(\mathbf{P} - \{x_1^{j+3}, x_2^{j+3}, \ldots, x_l^{j+3}\}) \cap (x_l^{j+3})^{\uparrow}$.

Angenommen, $b \in C$. Dann muß es ein $a \in M \cap x_+^{\downarrow}$ geben. Andernfalls, sei $\tilde{a} <_P x$, $\tilde{a} \notin b_+^{\uparrow} \cup \{x_1^{j+3}, \ldots, x_{l-1}^{j+3}\}$. Aus Lemma 3.1 folgt dann, wegen $y^{\downarrow} - \{x_1^{j+3}, \ldots, x_{l-1}^{j+3}\} = \{b\}$, $y <_{j+3} \tilde{a}$ und damit $y <_{j+3} x$. Widerspruch. Sei also $a \in M \cap x_+^{\downarrow}$. Aus $a <_{j+3} y$ folgt $y <_{j+2} a$ und damit $y <_{j+2} x$. Widerspruch.

Also ist $b = f(B, j+3) \in B - A$. Dann ist $b \| x$ und $y \in M$. Falls $b <_{j+3} x$ gelte, würde aufgrund der super-greedy Eigenschaft von L^{*j+3} $y <_{j+3} x$ folgen. Insgesamt ergibt sich dann in $L^{*j+3} : A < x < b < y$. $\boxtimes$

Nach Voraussetzung ist dann auch $b = f(A \cup B, j+1) \in B - A$. Sei nun $d := f(A, j+1) <_{j+1} b$. Analog zu eben muß dann $d \in C$ gelten und aus $y <_{j+1} x$ folgt, daß es ein $b' <_P y$ geben muß mit $d \prec_P b'$ und $b' <_{j+1} x$. Wie eben muß dann $x <_j b'$ gelten. Das ist ein Widerspruch zu $C \ni f(A \cup B, j+2) = f(A \cup B, j)$. $\square$

Satz 4.20. *Sei* $\mathbf{P} = (X, <_P)$ *eine geordnete Menge der Höhe* h *und* L *eine lineare Erweiterung von* $\mathbf{P}$. *Dann ist* $L^{*2h-2} = L^{*2h}$.

Beweis. Im Fall $h = 1$ ist nichts zu zeigen. Wir zeigen induktiv, daß $L^{*2k-2} \restriction A_{\leq k} = L^{*2k} \restriction A_{\leq k}$ und $L^{*2k-1} \restriction A_{\leq k} = L^{*2k+1} \restriction A_{\leq k}$ für alle k mit $2 \leq k \leq h$ gilt. Weil $A_{\leq k}$ ein Ideal von $\mathbf{P}$ ist, genügt es nach Lemma 4.16 zu zeigen, daß $(L \restriction A_{\leq k})^{*2k-2} = (L \restriction A_{\leq k})^{*2k}$ und $(L \restriction A_{\leq k})^{*2k-1} = (L \restriction A_{\leq k})^{*2k+1}$ gilt.

Betrachte $A_{\leq 2}$. Es ist klar, daß $L^{*j} \restriction A_1 = L^{*j+2} \restriction A_1$ für $j \geq 1$ gilt. Angenommen, $L^{*2} \restriction A_{\leq 2} \neq L^{*4} \restriction A_{\leq 2}$. Mit der Notation von eben, sei dann $x <_2 y$ und $y <_4 x$. (In diesem Fall muß $x, y \in A_2$ gelten.) Dann ist $y <_1 x$ und $x <_3 y$. Wäre $f(B, 3) \in C$, dann würde $y <_3 x$ folgen. Also ist $b := f(B, 3) \in B - A$. Dann gilt $x <_3 b$ und damit $b = f(A \cup B, 3) = f(A \cup B, 1)$. Daraus folgt $x <_1 y$. Widerspruch. Also ist $L^{*2} \restriction A_{\leq 2} = L^{*4} \restriction A_{\leq 2}$. Aus Lemma 4.19 folgt mit $M := L \restriction A_{\leq 2}$ und $j = 1$ dann $L^{*3} \restriction A_{\leq 2} = L^{*5} \restriction A_{\leq 2}$.

Für den Induktionsschritt $(k - 1 \to k)$ sei $M := L \restriction A_{\leq k}$. Für $j := 2k - 4$ gilt dann, weil $A_{\leq k-1}$ Ideal ist, $M^{*j} \restriction A_{\leq k-1} = L^{*j} \restriction A_{\leq k-1} = M^{*j+2} \restriction A_{\leq k-1}$ und ebenso $M^{*j+1} \restriction A_{\leq k-1} = M^{*j+3} \restriction A_{\leq k-1}$. Nach Lemma 4.19 folgt dann $M^{*j+2} = M^{*j+4}$. Erneute Anwendung des Lemmas für $j' := j+1$ liefert $M^{*j+3} = M^{*j+5}$ und damit die Behauptung. $\square$

5 Ordnungen mit langer Konvergenzdauer

Diese Verbesserung der Obergrenze der Konvergenzgeschwindigkeit um eins erscheint nicht sonderlich spektakulär. Zumal es bereits einige Übung erfordert überhaupt Ordnungen und Erweiterungen zu finden - selbst wenn man sich bei der Höhe als recht großzügig erweist - deren Konvergenzgeschwindigkeit größer als sechs ist. Daher ist die Vermutung nicht abwegig, daß h bereits eine Obergrenze der Konvergenzgeschwindigkeit ist. Es stellt sich aber heraus, daß $2h-2$ als Obergrenze optimal ist.

Definition 5.1 (Zauderer). $\mathbf{Z}_i$ sei die Höhe zwei Ordnung mit den minimalen Elementen $\{a_i, b_i\}$ und den maximalen Elementen $\{c_i, d_i, e_i\}$. Die Relationen sind $b_i < e_i, b_i < d_i, b_i < c_i$ und $a_i < c_i$.

- $\mathbf{Z}_1$ ist ein Zauderer der Höhe 2. Die Standarderweiterung von $\mathbf{Z}_1$ ist $L = b_1 a_1 c_1 d_1 e_1$.
- Sei $\mathbf{Z}$ ein Zauderer der Höhe h mit Standarderweiterung L.
  - Ist h gerade, dann habe $\mathbf{Z}'$ die zusätzlichen Elemente $b_{\frac{h}{2}+1}$ und $a_{\frac{h}{2}+1}$ und die zusätzlichen Bedeckungsrelationen $e_{\frac{h}{2}} \prec b_{\frac{h}{2}+1}, d_{\frac{h}{2}} \prec b_{\frac{h}{2}+1}, d_{\frac{h}{2}} \prec a_{\frac{h}{2}+1}, c_{\frac{h}{2}} \prec a_{\frac{h}{2}+1}$ und $a_{\frac{h}{2}} \prec b_{\frac{h}{2}+1}$. Dann ist $\mathbf{Z}'$ ein Zauderer der Höhe $h+1$. Die Standarderweiterung von $\mathbf{Z}'$ sei $L^\frown b_{\frac{h}{2}+1} a_{\frac{h}{2}+1}$.
  - Ist h ungerade, dann habe $\mathbf{Z}'$ die zusätzlichen Elemente $e_{\lceil \frac{h}{2} \rceil}, d_{\lceil \frac{h}{2} \rceil}$ und $c_{\lceil \frac{h}{2} \rceil}$ und die zusätzlichen Bedeckungsrelationen $b_{\lceil \frac{h}{2} \rceil} \prec e_{\lceil \frac{h}{2} \rceil}$, $b_{\lceil \frac{h}{2} \rceil} \prec d_{\lceil \frac{h}{2} \rceil}$, $b_{\lceil \frac{h}{2} \rceil} \prec c_{\lceil \frac{h}{2} \rceil}$, $a_{\lceil \frac{h}{2} \rceil} \prec c_{\lceil \frac{h}{2} \rceil}$ und $c_{\lfloor \frac{h}{2} \rfloor} \prec e_{\lceil \frac{h}{2} \rceil}$ sowie $c_{\lfloor \frac{h}{2} \rfloor} \prec d_{\lceil \frac{h}{2} \rceil}$. Dann ist $\mathbf{Z}'$ ein Zauderer der Höhe $h+1$. Die Standarderweiterung von $\mathbf{Z}'$ sei $L^\frown c_{\lceil \frac{h}{2} \rceil} d_{\lceil \frac{h}{2} \rceil} e_{\lceil \frac{h}{2} \rceil}$.

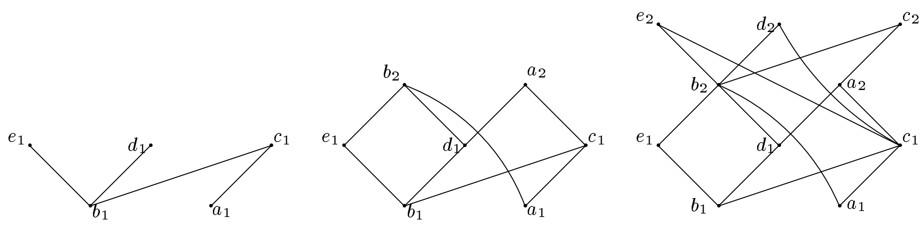


Abbildung 5: Zauderer der Höhe 2,3 und 4

Diese Zauderer sind bereits Beispiele dafür, daß es Ordnungen der Höhen 2,3 bzw. 4 gibt, die Konvergenzgeschwindigkeit $2h-2$ haben.

L^{*j}	$h=2$	$h=3$	$h=4$
$j=0$	$bacde$	$bacdeb_2a_2$	$bacdeb_2a_2c_2d_2e_2$
1	$abedc$	$abedb_2ca_2$	$abedb_2ce_2d_2a_2c_2$
2	$bdeac$	$bdeaca_2b_2$	$bdeaca_2b_2c_2d_2e_2$
3	$abced$	$abcedb_2a_2$	$abcedb_2e_2d_2a_2c_2$
4	$bdeac$	$bdeab_2ca_2$	$bdeab_2ca_2c_2d_2e_2$
5		$abceda_2b_2$	$abceda_2b_2e_2d_2c_2$
6		$bdeab_2ca_2$	$bdeab_2cd_2e_2a_2c_2$
7			$abceda_2b_2c_2e_2d_2$
8			$bdeab_2cd_2e_2a_2c_2$

Lemma 5.2. *Sei* $\mathbf{Z}$ *ein Zauderer der Höhe* $h>1$ *und* L *die Standarderweiterung von* $\mathbf{Z}$*. Dann ist* $L^{*k} \neq L^{*k+2}$ *für* $k<2h-2$.

Beweis. Für $h \leq 3$ wurde die Aussage bereits gezeigt. Sei also $h>3$. Falls h ungerade ist, treten im Zauderer noch die beiden maximalen Elemente $\hat{a} := a_{\lceil \frac{h}{2} \rceil}$ und $\hat{b} := b_{\lceil \frac{h}{2} \rceil}$ auf. Sie werden im folgenden mitangegeben. Sie können im Fall, daß h gerade ist, einfach ausgelassen werden. Sei also
$L = b_1a_1c_1d_1e_1\ b_2a_2c_2d_2e_2\ b_3a_3c_3d_3e_3 \ldots \hat{b}\hat{a}$. Wir rechnen die ersten Iterationen von '*' auf L aus. Es ergibt sich folgendes.

$$
\begin{array}{ll}
L^{*} & : a_1b_1e_1d_1b_2c_1\ e_2d_2a_2b_3c_2\ e_3d_3a_3b_4c_3 \quad \ldots\ldots \quad e_{\lfloor \frac{h}{2} \rfloor}d_{\lfloor \frac{h}{2} \rfloor}a_{\lfloor \frac{h}{2} \rfloor}\hat{b}c_{\lfloor \frac{h}{2} \rfloor}\hat{a} \\
L^{*2} & : b_1d_1e_1a_1c_1a_2b_2\ c_2d_2a_3e_2b_3\ c_3d_3a_4e_3b_4 \quad \ldots\ldots \quad c_{\lfloor \frac{h}{2} \rfloor}d_{\lfloor \frac{h}{2} \rfloor}\hat{a}e_{\lfloor \frac{h}{2} \rfloor}\hat{b} \\
L^{*3} & : a_1b_1c_1e_1d_1b_2\ e_2d_2a_2b_3c_2\ e_3d_3a_3b_4c_3 \quad \ldots\ldots \quad e_{\lfloor \frac{h}{2} \rfloor}d_{\lfloor \frac{h}{2} \rfloor}a_{\lfloor \frac{h}{2} \rfloor}\hat{b}c_{\lfloor \frac{h}{2} \rfloor}\hat{a} \\
L^{*4} & : b_1d_1e_1a_1b_2c_1a_2\ c_2d_2a_3e_2b_3\ c_3d_3a_4e_3b_4 \quad \ldots\ldots \quad c_{\lfloor \frac{h}{2} \rfloor}d_{\lfloor \frac{h}{2} \rfloor}\hat{a}e_{\lfloor \frac{h}{2} \rfloor}\hat{b}
\end{array}
$$

Die folgende Behauptung zeigt, daß jedes der $\mathbf{Z}_i,\ 1<i<\lfloor \frac{h}{2} \rfloor$ benötigt, bis er nicht mehr umgeordnet wird, d.h es ergibt sich eine maximale Konvergenzdauer.

Behauptung. Für $j=1,2,3,\ldots,\lfloor \frac{h}{2} \rfloor - 1$ ist

$$
\begin{aligned}
L^{*4j-1} = {} & a_1b_1c_1e_1d_1\ a_2b_2c_2e_2d_2\ \ldots a_jb_jc_je_jd_j \\
& b_{j+1}e_{j+1}d_{j+1}a_{j+1} \\
& b_{j+2}c_{j+1}e_{j+2}d_{j+2}a_{j+2} \quad b_{j+3}c_{j+2}e_{j+3}d_{j+3}a_{j+3} \ldots\ \hat{b}c_{\lfloor \frac{h}{2} \rfloor}\hat{a}
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
L^{*4j} = {} & b_1d_1e_1a_1\ b_2c_1d_2e_2a_2\ b_3c_2d_3e_3a_3 \ldots\ b_jc_{j-1}d_je_ja_j \\
& b_{j+1}c_ja_{j+1} \\
& c_{j+1}d_{j+1}a_{j+2}e_{j+1}b_{j+2} \\
& c_{j+2}d_{j+2}a_{j+3}e_{j+2}b_{j+3} \ldots\ c_{\lfloor \frac{h}{2} \rfloor}d_{\lfloor \frac{h}{2} \rfloor}\hat{a}e_{\lfloor \frac{h}{2} \rfloor}\hat{b}.
\end{aligned}
$$

Beweis der Behauptung. Der Induktionsanfang wurde bereits gezeigt. Für den Induktionsschritt sei L^{*4j-1} und L^{*4j} wie oben. Man beachte, daß L^{*4j-1} und L^{*4j+1} auf $A_{\leq 2j}$ und L^{*4j}, L^{*4j+2} auf $A_{\leq 2j+1}$ übereinstimmen. Wir rechnen die nächsten Iterationen aus.

$$\begin{aligned}
L^{*4j+1} &= \ldots a_j b_j c_j e_j d_j \quad a_{j+1} b_{j+1} e_{j+1} d_{j+1} \\
&\qquad b_{j+2} c_{j+1} e_{j+2} d_{j+2} a_{j+2} \quad b_{j+3} c_{j+2} e_{j+3} d_{j+3} a_{j+3} \ldots \\
&\qquad\quad \hat{b} c_{\lfloor \frac{h}{2} \rfloor} \hat{a} \\
L^{*4j+2} &= \ldots b_j c_{j-1} d_j e_j a_j \quad b_{j+1} c_j d_{j+1} e_{j+1} a_{j+1} \\
&\qquad c_{j+1} a_{j+2} b_{j+2} \\
&\qquad\quad c_{j+2} d_{j+2} a_{j+3} e_{j+2} b_{j+3} \quad c_{j+3} d_{j+3} a_{j+4} e_{j+3} b_{j+4} \ldots \\
&\qquad\qquad c_{\lfloor \frac{h}{2} \rfloor} d_{\lfloor \frac{h}{2} \rfloor} \hat{a} e_{\lfloor \frac{h}{2} \rfloor} \hat{b} \\
L^{*4j+3} &= \ldots a_j b_j c_j e_j d_j \quad a_{j+1} b_{j+1} c_{j+1} e_{j+1} d_{j+1} \\
&\qquad b_{j+2} e_{j+2} d_{j+2} a_{j+2} \\
&\qquad\quad b_{j+2} c_{j+1} e_{j+2} d_{j+2} a_{j+2} \quad b_{j+3} c_{j+2} e_{j+3} d_{j+3} a_{j+3} \ldots \\
&\qquad\qquad \hat{b} c_{\lfloor \frac{h}{2} \rfloor} \hat{a} \\
L^{*4j+4} &= \ldots b_j c_{j-1} d_j e_j a_j \quad b_{j+1} c_j d_{j+1} e_{j+1} a_{j+1} \\
&\qquad b_{j+2} c_{j+1} a_{j+2} \\
&\qquad\quad c_{j+2} d_{j+2} a_{j+3} e_{j+2} b_{j+3} \quad c_{j+3} d_{j+3} a_{j+4} e_{j+3} b_{j+4} \ldots \\
&\qquad\qquad c_{\lfloor \frac{h}{2} \rfloor} d_{\lfloor \frac{h}{2} \rfloor} \hat{a} e_{\lfloor \frac{h}{2} \rfloor} \hat{b}
\end{aligned}$$

⊠

Sei $j = \lfloor \frac{h}{2} \rfloor - 1$. Ist nun h gerade, dann ist $4\lfloor \frac{h}{2} \rfloor - 5 = 2h - 5$ und es folgt:

$$\begin{aligned}
L^{*2h-5} &= \ldots\ldots a_j b_j c_j e_j d_j \quad b_{j+1} e_{j+1} d_{j+1} a_{j+1} c_{j+1} \\
L^{*2h-4} &= \ldots b_j c_{j-1} d_j e_j a_j \quad b_{j+1} c_j a_{j+1} c_{j+1} d_{j+1} e_{j+1} \\
L^{*2h-3} &= \ldots\ldots a_j b_j c_j e_j d_j \quad a_{j+1} b_{j+1} e_{j+1} d_{j+1} c_{j+1} \\
L^{*2h-2} &= \ldots b_j c_{j-1} d_j e_j a_j \quad b_{j+1} c_j d_{j+1} e_{j+1} a_{j+1} c_{j+1} \\
L^{*2h-1} &= \ldots\ldots a_j b_j c_j e_j d_j \quad a_{j+1} b_{j+1} c_{j+1} e_{j+1} d_{j+1}.
\end{aligned}$$

Ist h dagegen ungerade, dann ist $4\lfloor \frac{h}{2} \rfloor - 5 = 2h - 7$ und es ergibt sich:

$$\begin{array}{lclcl}
L^{*2h-7} &=& \ldots a_j b_j c_j e_j d_j & b_{j+1} e_{j+1} d_{j+1} a_{j+1} & \hat{b} c_{j+1} \hat{a} \\
L^{*2h-6} &=& \ldots b_j c_{j-1} d_j e_j a_j & b_{j+1} c_j a_{j+1} & c_{j+1} d_{j+1} \hat{a} e_{j+1} \hat{b} \\
L^{*2h-5} &=& \ldots a_j b_j c_j e_j d_j & a_{j+1} b_{j+1} e_{j+1} d_{j+1} & \hat{b} c_{j+1} \hat{a} \\
L^{*2h-4} &=& \ldots b_j c_{j-1} d_j e_j a_j & b_{j+1} c_j d_{j+1} e_{j+1} a_{j+1} & c_{j+1} \hat{a} \hat{b} \\
L^{*2h-3} &=& \ldots a_j b_j c_j e_j d_j & a_{j+1} b_{j+1} c_{j+1} e_{j+1} d_{j+1} & \hat{b} \hat{a} \\
L^{*2h-2} &=& \ldots b_j c_{j-1} d_j e_j a_j & b_{j+1} c_j d_{j+1} e_{j+1} a_{j+1} & \hat{b} c_{j+1} \hat{a} \\
L^{*2h-1} &=& \ldots a_j b_j c_j e_j d_j & a_{j+1} b_{j+1} c_{j+1} e_{j+1} d_{j+1} & \hat{a} \hat{b}.
\end{array}$$

□

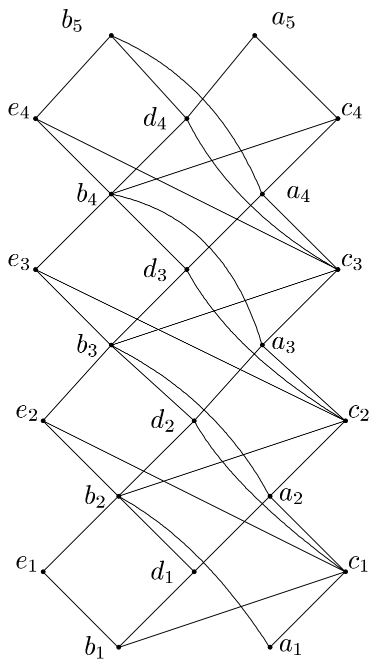


Abbildung 6: Ein Zauderer der Höhe 9
Unten die Konvergenzentwicklung der Standarderweiterung

0	$\mathbf{b_1}a_1c_1d_1e_1$	$b_2a_2c_2d_2e_2$	$b_3a_3c_3d_3e_3$	$b_4a_4c_4d_4e_4$	b_5a_5
2	$\mathbf{b_1d_1e_1a_1}c_1$	$a_2b_2c_2d_2a_3$	$e_2b_3c_3d_3a_4$	$e_3b_4c_4d_4a_5$	e_4b_5
4	$\mathbf{b_1d_1e_1a_1b_2}$	$\mathbf{c_1}a_2c_2d_2a_3$	$e_2b_3c_3d_3a_4$	$e_3b_4c_4d_4a_5$	e_4b_5
6	$\mathbf{b_1d_1e_1a_1b_2}$	$\mathbf{c_1d_2e_2a_2}c_2$	$a_3b_3c_3d_3a_4$	$e_3b_4c_4d_4a_5$	e_4b_5
8	$\mathbf{b_1d_1e_1a_1b_2}$	$\mathbf{c_1d_2e_2a_2b_3}$	$\mathbf{c_2}a_3c_3d_3a_4$	$e_3b_4c_4d_4a_5$	e_4b_5
10	$\mathbf{b_1d_1e_1a_1b_2}$	$\mathbf{c_1d_2e_2a_2b_3}$	$\mathbf{c_2d_3e_3a_3}c_3$	$a_4b_4c_4d_4a_5$	e_4b_5
12	$\mathbf{b_1d_1e_1a_1b_2}$	$\mathbf{c_1d_2e_2a_2b_3}$	$\mathbf{c_2d_3e_3a_3b_4}$	$\mathbf{c_3}a_4c_4d_4a_5$	e_4b_5
14	$\mathbf{b_1d_1e_1a_1b_2}$	$\mathbf{c_1d_2e_2a_2b_3}$	$\mathbf{c_2d_3e_3a_3b_4}$	$\mathbf{c_3d_4e_4a_4}c_4$	a_5b_5
16	$\mathbf{b_1d_1e_1a_1b_2}$	$\mathbf{c_1d_2e_2a_2b_3}$	$\mathbf{c_2d_3e_3a_3b_4}$	$\mathbf{c_3d_4e_4a_4b_5}$	$\mathbf{c_4a_5}$
18	$\mathbf{b_1d_1e_1a_1b_2}$	$\mathbf{c_1d_2e_2a_2b_3}$	$\mathbf{c_2d_3e_3a_3b_4}$	$\mathbf{c_3d_4e_4a_4b_5}$	$\mathbf{c_4a_5}$

1	$\mathbf{a_1b_1}e_1d_1b_2$	$c_1e_2d_2a_2b_3$	$c_2e_3d_3a_3b_4$	$c_3e_4d_4a_4b_5$	c_4a_5
3	$\mathbf{a_1b_1c_1e_1d_1}$	$b_2e_2d_2a_2b_3$	$c_2e_3d_3a_3b_4$	$c_3e_4d_4a_4b_5$	c_4a_5
5	$\mathbf{a_1b_1c_1e_1d_1}$	$\mathbf{a_2b_2}e_2d_2b_3$	$c_2e_3d_3a_3b_4$	$c_3e_4d_4a_4b_5$	c_4a_5
7	$\mathbf{a_1b_1c_1e_1d_1}$	$\mathbf{a_2b_2c_2e_2d_2}$	$b_3e_3d_3a_3b_4$	$c_3e_4d_4a_4b_5$	c_4a_5
9	$\mathbf{a_1b_1c_1e_1d_1}$	$\mathbf{a_2b_2c_2e_2d_2}$	$\mathbf{a_3b_3}e_3d_3b_4$	$c_3e_4d_4a_4b_5$	c_4a_5
11	$\mathbf{a_1b_1c_1e_1d_1}$	$\mathbf{a_2b_2c_2e_2d_2}$	$\mathbf{a_3b_3c_3e_3d_3}$	$b_4e_4d_4a_4b_5$	c_4a_5
13	$\mathbf{a_1b_1c_1e_1d_1}$	$\mathbf{a_2b_2c_2e_2d_2}$	$\mathbf{a_3b_3c_3e_3d_3}$	$\mathbf{a_4b_4}e_4d_4b_5$	c_4a_5
15	$\mathbf{a_1b_1c_1e_1d_1}$	$\mathbf{a_2b_2c_2e_2d_2}$	$\mathbf{a_3b_3c_3e_3d_3}$	$\mathbf{a_4b_4c_4e_4d_4}$	b_5a_5
17	$\mathbf{a_1b_1c_1e_1d_1}$	$\mathbf{a_2b_2c_2e_2d_2}$	$\mathbf{a_3b_3c_3e_3d_3}$	$\mathbf{a_4b_4c_4e_4d_4}$	$\mathbf{a_5b_5}$

Im verbleibenden Teil der Arbeit werden spezielle Klassen von Ordnungen untersucht. Diese Klassen von Ordnungen haben die Eigenschaft, daß die Konvergenzdauer eine Konstante, also unabhängig von der Höhe einer Ordnung dieses Typs ist.

6 Bäume

(Aufwärts) gerichtete Bäume sind Ordnungen, die ein kleinstes Element haben und für die gilt, daß $x^{\downarrow}$ für jedes Element x eine Kette ist. Bäume sind einfach-strukturierte Ordnungen. Sie zeichnen sich dadurch aus, daß jedes Element (bis auf die Wurzel) genau einen unmittelbaren Vorgänger hat. Dies führt dazu, daß super-greedy lineare Erweiterungen allein durch die Ordnung der kanonischen Antiketten determinert sind. Dadurch ist die Konvergenzdauer klein und unabhängig von der Höhe. Darüberhinaus ist ein komplementäres Paar eines Baumes auch ein diametrales.

Definition 6.1 (Rekursive Definition von Bäumen).

1) Jede einelementige Ordnung ist ein Baum.

2) Seien $T_1 = (X_1, <_1), \dots, T_k = (X_k, <_k)$ Bäume mit paarweise disjunkten Grundmengen, $x \notin \bigcup_{1 \le i \le k} X_i =: Y$.

   Dann ist $\left(\{x\} \cup Y,\ \{(x, b) : b \in Y\} \cup \bigcup_{1 \le i \le k} <_i \right)$ ein Baum.

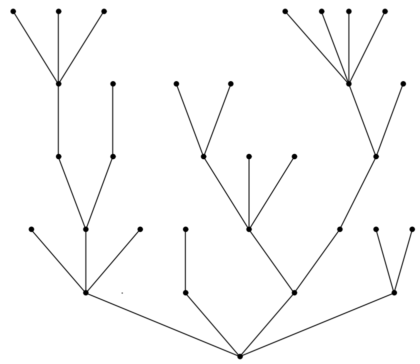


Abbildung 7: Ein Baum

Bemerkung 6.2. Betrachten wir die kanonische Antikettenzerlegung eines Baumes. Da bei einem Baum $x^{\downarrow}$ stets eine Kette ist, hat ein Element aus A_i jeweils genau einen Vorgänger in A_j für $1 \leq j < i$. Zu jedem Knoten in einem Baum gibt es genau einen Pfad, der diesen Knoten mit der Wurzel verbindet. Zwei Knoten in einem Baum sind durch genau einen Pfad verbunden.

Lemma 6.3. *Sei* $\mathbf{P} = (X, <_P)$ *ein Baum der Höhe* h*. Seien* L *und* M *super-greedy lineare Erweiterungen von* $\mathbf{P}$*, die auf den kanonischen Antiketten übereinstimmen, d.h. es gelte* $L\restriction A_i = M\restriction A_i$ *für* $1 \leq i \leq h$*. Dann ist* $L = M$*.*

Beweis. Sei $L = (x_1, \ldots, x_n)$ und $M = (y_1, \ldots, y_n)$. Angenommen, $L \neq M$. Dann können wir ein maximales m wählen mit $(x_1, \ldots, x_m) = (y_1, \ldots, y_m)$. Sei $x := x_{m+1}$ und sei $y := y_{m+1}$. Dann gilt $x <_L y$, $y <_M x$ und $x \| y$. Weil L und M super-greedy sind, gibt es ein maximales l, derart daß $x, y \in Min(\mathbf{P} - x_1 - \ldots - x_m) \cap x_l^{\uparrow}$ gilt. Sei $x_l \in A_i$. Dann folgt $x, y \in A_{i+1}$ Widerspruch. □

Schreiben wir L^r für die umgekehrte Reihenfolge einer linearen Erweiterung L, dann ergibt sich folgendes Lemma.

Lemma 6.4. *Sei* $\mathbf{P} = (X, <_P)$ *ein Baum der Höhe* h *und* L *eine super-greedy lineare Erweiterung von* $\mathbf{P}$*. Sei* $A_1, \ldots, A_h$ *die kanonische Antikettenzerlegung von* $\mathbf{P}$*. Dann gilt* $L^*\restriction A_i = (L\restriction A_i)^r$ *für* $1 \leq i \leq h$*.*

Beweis. Für Bäume der Höhe 1 ist nichts zu zeigen. Für den Induktionsschritt sei $\mathbf{P}$ ein Baum der Höhe i+1 und $L \in \mathcal{E}(\mathbf{P})$ super-greedy. $K := L\restriction A_{\leq i}$ ist dann super-greedy für $\mathbf{P}\restriction A_{\leq i}$. Man beachte, daß $A_{\leq i}$ Ideal von $\mathbf{P}$ ist, daher gilt nach Lemma 4.16 für $j \leq i$

$$L^*\restriction A_j = (L\restriction A_{\leq i})^*\restriction A_j = K^*\restriction A_j \underset{IH}{=} (K\restriction A_j)^r = (L\restriction A_j)^r.$$

Wir partitionieren A_{i+1} in Blöcke $A_{i+1}^1, \ldots, A_{i+1}^k$, derart daß Elemente aus einem Block A_{i+1}^j denselben Vorgänger a_j haben. Weiterhin sei $a_j <_L a_{j+1}$, d.h. es ist

$$L \ = [\ldots, a_1, L\restriction A_{i+1}^1, \ldots, a_2, L\restriction A_{i+1}^2, \ldots, a_k, L\restriction A_{i+1}^k, \ldots]$$

und

$$L^* = [\ldots, a_k, (L\restriction A_{i+1}^k)^r, \ldots, a_{k-1}, (L\restriction A_{i+1}^{k-1})^r, \ldots, a_1, (L\restriction A_{i+1}^1)^r, \ldots].$$

Es folgt die Behauptung. □

Korollar 6.5. *Sei* $\mathbf{P} = (X, <_P)$ *ein Baum und sei* $\mathcal{E}(\mathbf{P})^* := \{L^* : L \in \mathcal{E}(\mathbf{P})\}$ *dann ist* $\mathcal{E}(\mathbf{P})^* = SG(\mathbf{P})$*, d.h. die Komplemente linearer Erweiterungen sind genau die super-greedy linearen Erweiterungen eines Baumes.*

Da L^* nach Satz 4.3 stets super-greedy ist, haben wir den folgenden Satz bewiesen.

Satz 6.6. *Sei* $\mathbf{P} = (X, <_P)$ *ein Baum und* L *eine lineare Erweiterung von* $\mathbf{P}$*. Dann ist* $L^* = L^{*3}$*, d.h.* L^*, L^{*2} *ist ein Komplementärpaar für* $\mathbf{P}$*. In anderen Worten: die Konvergenzdauer von Bäumen ist 1.*

Satz 6.7. *Sei* $\mathbf{P} = (X, <_P)$ *ein Baum und L, M ein Komplementärpaar für* $\mathbf{P}$*. Dann ist {L, M} ein Realisator für* $\mathbf{P}$ *und damit insbesondere auch diametral.*

Beweis. Sei $x \|_P y$. Sei $x \in A_i, y \in A_j$ mit $i \leq j$ und $y_i \in y_+^{\downarrow} \cap A_i$. Da die Ordnung der Antiketten nach Lemma 6.4 in L, M umgekehrt ist, gilt, daß x und y_i unvergleichbar in $L \cap M$ sind. Weil sowohl L als auch M super-greedy sind, wird bei beiden Erweiterungen der Teilbaum, der y_i als Wurzel hat, unmittelbar und als Block nach y_i traversiert. Daraus folgt, daß x und y in $L \cap M$ ebenfalls unvergleichbar sind. □

7 Seriell-parallele Ordnungen

Seriell-parallele Ordnungen können als Verallgemeinerung von Bäumen aufgefaßt werden. Sie entstehen rekursiv aus zwei Operationen und können durch einen Zerlegungsbaum eindeutig dargestellt werden. Diese Eigenschaft reicht - wie wir sehen werden - aus dafür, daß sich seriell-parallele Ordnungen ähnlich günstig wie Bäume verhalten.

Die beiden Operationen, aus denen seriell-parallele Ordnungen entstehen, sind disjunkte Vereinigung (parallele Zusammensetzung) einerseits und serielle Zusammensetzung andererseits.

Definition 7.1. Seien $\mathbf{P} = (X, <_P)$ und $\mathbf{Q} = (Y, <_Q)$ zwei Ordnungen mit disjunkten Grundmengen.

1) Die *parallele Komposition* $\mathbf{P} + \mathbf{Q}$ von $\mathbf{P}$ und $\mathbf{Q}$ ist $(X \cup Y, <_P \cup <_Q)$.
2) Die *serielle Komposition* $\mathbf{P} * \mathbf{Q}$ von $\mathbf{P}$ und $\mathbf{Q}$ ist $(X \cup Y, <_P \cup <_Q \cup (X \times Y))$.
3) Die Menge der *seriell-parallelen Ordnungen* ist die kleinste Menge, die alle einelementigen Ordnungen enthält und die abgeschlossen ist bzgl. paralleler und serieller Komposition.

Betrachtet man das Hasse-Diagramm, so bedeutet die parallele Komposition das Nebeneinanderzeichnen der Mengen und die serielle Komposition ein 'Übereinandersetzen'. Aufgrund der Definition können wir eine seriell-parallele Ordnung - im folgenden kurz *sp-Ordnung* genannt - durch einen *binären Zerlegungsbaum* darstellen. In diesem Baum sind die Blätter Elemente und die inneren Knoten entweder mit 'S' oder mit 'P' bezeichnet. Als Konvention seien die linken Kinder eines 'S'-Knotens die kleineren. Dieser Zerlegungsbaum kann auch als parsing-Baum des arithmetischen Ausdrucks mit den Operationen '+' und

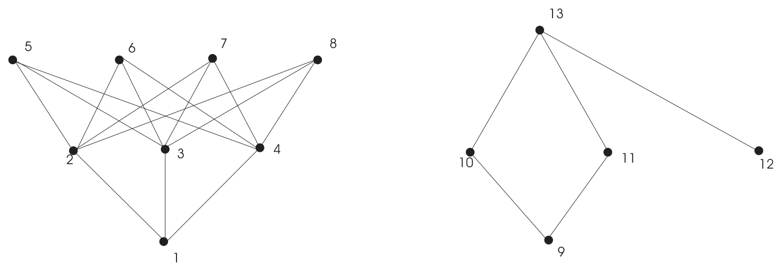


Abbildung 8: Eine seriell-parallele Ordnung

'$*$' aufgefaßt werden. Jede Traversierung eines Zerlegungsbaumes, mit der Einschränkung, daß ein Teilbaum, der als Wurzel einen S-Knotens hat, nur nach der Traversierung des links befindlichen Teilbaums mit derselben Wurzel besucht werden darf, induziert durch die Reihenfolge, in der die Blätter traversiert werden, eine lineare Erweiterung der entsprechenden Ordnung. Wir werden im folgenden etwas lax auch sagen, daß eine lineare Erweiterung einen Zerlegungsbaum traversiert.

Aus der rekursiven Definition von Bäumen folgt unmittelbar, daß eine sp-Ordnung genau dann ein Baum ist, wenn die S-Knoten in jedem binären Zerlegungsbaum als linkes Kind ein Blatt haben und die Wurzel ein S-Knoten ist.

Eine eindeutige Darstellung erhält man, indem man Folgen derselben Operation auf Teilordnungen, die durch die andere Operation entstehen, als Söhne des entsprechenden Knotens auffaßt. D.h. steht im arithmetischen Ausdruck $(P_1 + P_2 + \ldots + P_k)$, wobei P_i aus der seriellen Komposition zweier Ordnungen entstanden oder ein Element ist, dann werden die Ordnungen P_i als Söhne eines P-Knotens aufgefaßt - kommt analog der Ausdruck $(P_1 * P_2 * \ldots * P_k)$ vor, wobei P_i durch parallele Komposition zweier Ordnungen entstanden oder ein Element ist, dann werden sie als Söhne eines S-Knotens aufgefaßt (gelesen von links nach rechts). Das heißt wir führen am binären Zerlegungsbaum eine Kantenzusammenziehung von Kanten durch, die zwei P- oder zwei S-Knoten verbinden. Die so erhaltene Darstellung ist bis auf die Anordnung der Söhne von P-Knoten eindeutig und heißt *kanonischer Zerlegungsbaum.*

Bemerkung 7.2. Ob zwei Elemente einer sp-Ordnung vergleichbar sind, läßt sich am Zerlegungsbaum ablesen. Sei T ein (binärer oder kanonischer) Zerlegungsbaum dieser Ordnung. Schreiben wir $x \wedge_T y$ für den am weitesten von der Wurzel entfernten gemeinsamen Vorgänger von x und y in T, dann ergibt sich folgende Beobachtung. $x \perp y$ $(x \| y)$ genau dann, wenn $x \wedge y$ ein S-Knoten (ein P-Knoten) ist.

Als erste Frucht der rekursiven Definition der sp-Ordnungen bzw. der Assoziation dieser Ordnungen mit Bäumen, ergibt sich, daß die Dimension der sp-Ordnungen nicht höher werden kann als die von Bäumen.

Definition 7.3. Sei **P** eine sp-Ordnung und T ein (kanonischer oder binärer) Zerlegungsbaum von **P**. Dann sei $L(T)$ diejenige lineare Erweiterung von **P**, die

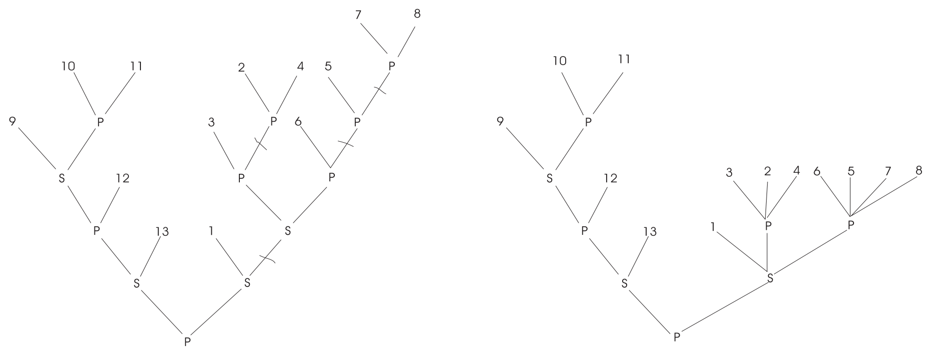


Abbildung 9: Der binäre und der kanonische Zerlegungsbaum der Ordnung aus Abbildung 8

durch eine depth-first Traversierung von T, die stets die Söhne von Knoten von links nach rechts besucht, induziert wird.
Andererseits, sei $L'(T)$ durch die depth-first Traversierung, die Söhne von P-Knoten von rechts nach links (Söhne von S-Knoten von links nach rechts) aufsucht, induziert.

Beispiel 7.4. Für die Zerlegungsbäume in Abbildung 9 ist
$L = [9, 10, 11, 12, 13, 1, 3, 2, 4, 6, 5, 7, 8]$ und
$L' = [1, 4, 2, 3, 8, 7, 5, 6, 12, 9, 11, 10, 13]$.

Lemma 7.5. *Sei* $\mathbf{P}$ *eine sp-Ordnung und sei* T *ein Zerlegungsbaum von* $\mathbf{P}$*. Dann gilt*

1) $L(T)$ *ist super-greedy*

2) $L(T)^* = L'(T)$

3) $\{L(T), L'(T)\}$ *ist Realisator von* $\mathbf{P}$ *und damit insbesondere auch diametral und ein Komplementärpaar für* $\mathbf{P}$.

Beweis. 3) Seien x, y in $\mathbf{P}$ unvergleichbar. Nach Bemerkung 7.2 ist das äquivalent dazu, daß $x \wedge y$ ein P-Knoten ist. Nach Definition ist das äquivalent dazu, daß x und y in $L(T) \cap L'(T)$ unvergleichbar sind.
2) und 1) Sätze 4.8 und 4.3. □

Für lineare Erweiterungen L, die sich als depth-first Traversierung, mit 'links-nach-rechts'-Priorität, eines kanonischen Zerlegungsbaumes T auffaßen lassen, haben wir damit eine ausgesprochen schnelle Konvergenz bewiesen. Nämlich $L^{*2} = L$. Solche linearen Erweiterungen nennen wir *T-darstellbar*. Allerdings lassen sich beileibe nicht alle super-greedy linearen Erweiterungen auf diese Weise darstellen. Das folgende Lemma gibt eine Charakterisierung, vermittels einer verbotenen Substruktur.

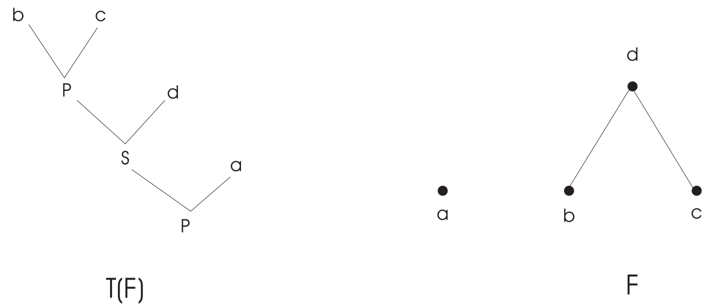


Abbildung 10: Die sp-Ordnung F und ihr kanonischer Zerlegungsbaum
Für L=[b,a,c,d] ist L, L^* kein Realisator

Lemma 7.6. *Sei* $\mathbf{P} = (X, <_P)$ *eine sp-Ordnung und* L *eine super-greedy lineare Erweiterung von* $\mathbf{P}$. *Sei* F *die sp-Ordnung*
$F = (\{a, b, c, d\}, \{(b < d), (c < d)\}$. *Falls* L *durch keinen Zerlegungsbaum* T *darstellbar ist, dann enthält* $\mathbf{P}$ F *als induzierte Teilordnung. Hat umgekehrt eine sp-Ordnung* F *als induzierte Teilordnung, dann gibt es eine super-greedy lineare Erweiterung, die durch den Zerlegungsbaum nicht darstellbar ist.*

Beweis. Die Rückrichtung ist klar. Sei also $L \in SG(\mathbf{P})$ nicht T-darstellbar. Dann gibt es Elemente b und c, die einen gemeinsamen Vater in T haben und ein drittes Element a mit einem anderen Vater näher zur Wurzel, so daß $b <_L a <_L c$. Weil L super-greedy ist, ist dann $b \wedge c$ ein P-Knoten und der Vater von $b \wedge c$ ist ein S-Knoten, der $b \wedge c$ in dem Teilbaum enthält, dessen Wurzel das am weitesten links stehendende Kind dieses S-Knotens ist. $b \wedge a = c \wedge a$ muß wiederum ein P-Knoten sein. Also enthält T T(F) als Teilbaum und damit **P** F als Teilordnung. □

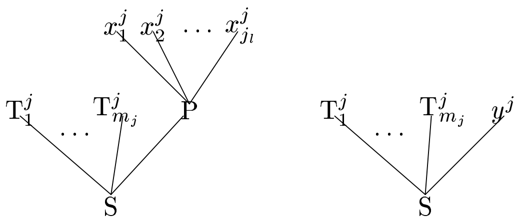
Betrachten wir im kanonischen Zerlegungsbaum die Teilbäume, die denselben S-Knoten als unmittelbaren Vorgänger ihrer Wurzeln haben, so folgt offensichtlich, daß eine lineare Erweiterung, bevor sie einen Teilbaum besuchen darf, zuerst den links benachbarten Teilbaum (falls ein solcher existiert) vollständig traversiert haben muß. Ist L super-greedy, dann muß sogar ein Teilbaum (vollständig) traversiert werden, sobald L den links benachbarten Teilbaum fertig traversiert hat. Zur besseren Übersicht formulieren wir diese Beobachtung als Lemma.

Lemma 7.7. *Sei* $\mathbf{P}$ *eine sp-Ordnung und* L *eine super-greedy lineare Erweiterung von* $\mathbf{P}$. *Sei* T *ein kanonischer Zerlegungsbaum von* $\mathbf{P}$. *Ein S-Knoten in* T *habe Kinder in der Reihenfolge* $t_1, \ldots, t_n$. *Sei* T_i *für* $1 \leq i \leq n$ *der Teilbaum von* T, *der* t_i *als Wurzel hat. Dann tritt* T_j, $2 \leq j \leq n$ *als Block in L auf. Sei* x *das in L zuletzt auftretende Element aus* T_1, *dann tritt* $\{x\} \cup T_2 \cup \ldots \cup T_j$, $2 \leq j \leq n$ *als Block in L auf, d.h. es gilt* $L = [\ldots, x, L \restriction T_2, L \restriction T_3, \ldots, L \restriction T_n, \ldots]$.

Wir haben bereits gesehen, wie man ein Komplementärpaar für seriell-parallele Ordnungen findet. Bleibt die Frage der Geschwindigkeit der Konvergenz zu klären. Es stellt sich heraus, daß die Konvergenzgeschwindigkeit wie bei Bäumen von der Höhe der Ordnung unabhängig ist.

Satz 7.8. *Sei* $\mathbf{P} = (X, <_P)$ *eine sp-Ordnung und* L *eine super-greedy lineare Erweiterung von* $\mathbf{P}$*. Dann ist* $L = L^{*2}$*. Insbesondere gilt für eine beliebige lineare Erweiterung* M *von* $\mathbf{P}$ *:* $M^* = M^{*3}$*.*

Beweis. Das Lemma liefert die entscheidene Idee. Die Höhe einer sp-Ordnung kann nur durch eine zusätzliche S-Operation erhöht werden. Eine super-greedy Erweiterung ist aber festgelegt, wann sie die Elemente aus A_{h+1} einsortiert. Das heißt, stimmen zwei super-greedy Erweiterungen bis zur Höhe h und auf A_{h+1} überein, dann sind sie gleich. Wir zeigen dies durch Induktion über die Höhe von $\mathbf{P}$. Der Induktionsanfang ist klar. Für den Induktionsschritt sei die Höhe von $\mathbf{P}$ gleich i+1 und es gelte die Aussage für alle sp-Ordnungen der Höhe $\leq i$. Wiederum zerlegen wir A_{h+1} in Blöcke $A^1_{i+1}, A^2_{i+1}, \dots, A^n_{i+1}$, derart daß Elemente aus einem Block dieselben Vorgänger haben. Ist ein A^j_{i+1} ein Singleton $\{y^j\}$, dann ist y^j der am weitesten rechts befindlich Sohn eines S-Knotens im kanonischen Zerlegungsbaum. Ist $A^j_{i+1} = \{x^j_1, x^j_2, \dots, x^j_{j_l}\}$, dann haben die x^j_p als gemeinsamen Vater einen P-Knoten, der wiederum der am weitesten rechts befindliche Sohn eines S-Knotens ist.



Sei M super-greedy und $\tilde{x}^j_M$ letztes Element von $T^j_{m_j}$ in M. Da die A^j_{i+1} dieselben Vorgänger haben, kommen sie als Block unmittelbar nach $\tilde{x}^j_M$ vor, ihre Reihenfolge wird bei jeder Iteration von $'*'$ umgedreht. Aus der Induktionshypothese folgt, daß $\tilde{x}^j_L = \tilde{x}^j_{L^{*2}}$ ist und daß sie an derselben Stellen in L bzw. L^{*2} auftauchen. Insgesamt ergibt sich dann für alle A^j_{h+1}, $1 \leq j \leq n$:

$$\begin{array}{lll} L & : & \dots \tilde{x}^j_L, L{\restriction}A^j_{i+1}, \dots \dots \\ L^* & : & \dots \dots \tilde{x}^j_{L^*}, (L{\restriction}A^j_{i+1})^r, \dots \\ L^{*2} & : & \dots \tilde{x}^j_L, L{\restriction}A^j_{i+1} \dots \dots\ . \end{array}$$

Es folgt $L = L^{*2}$. □

Da sp-Ordnungen zweidimensional sind, gilt genau wie bei Bäumen, daß der lineare Erweiterungsdurchmesser gleich der Anzahl der unvergleichbaren Paare dieser Ordnung ist. Für serielle und parallele Komposition gilt $inc(P + Q) = inc(P) + inc(Q) + |P||Q|$ bzw. $inc(P * Q) = inc(P) + inc(Q)$. Für Elemente x_i, $1 \leq i \leq n$ gilt $inc(x_1 + \ldots + x_n) = (n-1) + (n-2) + \ldots + 1$ und $inc(x_1 * \ldots * x_n) = 0$. Für das Beispiel aus Abbildung 8 ergibt sich:

$$\begin{aligned} led(\mathbf{P}) &= inc(\, 1 * (2+3+4) * (5+6+7+8) + (12 + 9 * (10+11)) * 13\,) \\ &= inc((2+3+4) * (5+6+7+8)) + inc(12 + 9 * (10+11)) + 40 \\ &= inc(2+3+4) + inc(5+6+7+8) + inc(9 * (10+11)) + 43 \\ &= 3 + 6 + inc(10+11) + 43 \\ &= 53. \end{aligned}$$

8 Grids

Grids sind Verallgemeinerungen von booleschen Verbänden. Ein boolescher Verband B_k kann als ein k-dimensionaler Würfel der Kantenlänge 1 aufgefaßt werden. Grids sind k-dimensionale Quader. Komplementärpaare für Grids werden durch lexikographische Ordnungen charakterisiert. Es stellt sich heraus, daß Grids Konvergenzdauer 2 haben. Lineare Erweiterungen konvergieren in drei Schritten zu einer lexikographischen Ordnung. Der Schlüssel dazu ist, daß komplementäre lineare Erweiterungen allein durch die Reihenfolge der Einheitsvektoren bestimmt sind. Für Grids der Dimension ≤ 4 ist ein Komplementärpaar auch ein diametrales Paar.

Die Idee, daß lexikographische Ordnungen diametrale Paare für boolesche Verbände sind, stammt von Felsner und Reuter [FR97, chap. 4]. Dort wird die Vermutung geäußert, daß die Aussage auch für boolesche Verbände der Dimension größer als vier gilt.

Definition 8.1. Sei $k \geq 2$. Ein *k-dimensionaler Grid* $\mathbf{G_{n_1,n_2,\ldots,n_k}}$ ist eine Ordnung mit der Grundmenge $\{\overrightarrow{x} = (x_1, \ldots, x_k) : 0 \leq x_i \leq n_i\}$. Elemente werden komponentenweise verglichen, das heißt, $\overrightarrow{x} <_G \overrightarrow{y}$ genau dann, wenn $\overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{y}$ und $x_i \leq y_i$ für alle $1 \leq i \leq k$. Zur Vereinfachung der Schreibweise sei die i-te Komponente eines Elements $\overrightarrow{x}$ mit $(x)_i$ oder, falls eine Verwechslung nicht auftreten kann, kurz mit x_i bezeichnet.

Diagramme von Grids werden in der Regel so gezeichnet, so daß ein größeres Element größere oder gleich große Koordinaten hat als das kleinere.

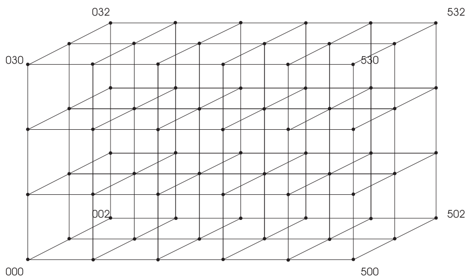


Abbildung 11: Ein dreidimensionaler Grid

Lemma 8.2. *Sei* $\mathbf{G} = \mathbf{G_{n_1,\ldots,n_k}}$ *ein k-dimensionaler Grid. Dann ist*

$$inc(\mathbf{G_{n_1,\ldots,n_k}}) = \frac{1}{2}\prod_{i=1}^{k}(n_i+1)\left[\prod_{i=1}^{k}(n_i+1) - 2\prod_{i=1}^{k}(\frac{n_i}{2}+1) + 1\right].$$

Beweis. Die Anzahl der in $\mathbf{G}$ vergleichbaren Paare ist gleich $\sum_{x \in G} |x^{\downarrow}|$ und es gilt $|x^{\downarrow}| = \prod_{i=1}^{k}(x_i + 1) - 1$. Das heißt,

$$\begin{aligned}
comp(\mathbf{G}) &= \left(\sum_{x_1=0}^{n_1} \sum_{x_2=0}^{n_2} \cdots \sum_{x_k=0}^{n_k} \prod_{i=1}^{k}(x_i + 1) \right) - \prod_{i=1}^{k}(n_i + 1) \\
&= \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{2}(n_i + 1)(n_i + 2) \; - \; \prod_{i=1}^{k}(n_i + 1) \\
&= \prod_{i=1}^{k}(n_i + 1) \left[\frac{1}{2^k} \prod_{i=1}^{k}(n_i + 2) - 1 \right].
\end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
inc(\mathbf{G}) &= \binom{|\mathbf{G}|}{2} - comp(\mathbf{G}) \\
&= \frac{1}{2} \prod_{i=1}^{k}(n_i + 1) \left[\prod_{i=1}^{k}(n_i + 1) \; - \; \frac{1}{2^{k-1}} \prod_{i=1}^{k}(n_i + 2) \; + \; 1 \right].
\end{aligned}$$

□

Es ist naheliegend lineare Erweiterungen von Grids komponentenweise zu definieren. Das einfachste Beispiel ist die *lexikographische Ordnung*. Sie ordnet 'alphabetisch', d.h. 'ordne nach der ersten Komponente, sind sie gleich dann ordne nach der zweiten Komponente, ist die auch gleich, dann ordne nach der dritten etc.'

Definition 8.3. Sei Y eine Teilmenge von $\mathbb{N}^k$ und $a, b \in Y$ und $\pi = (i_1, \ldots, i_k)$ eine Permutation auf $\{1, \ldots, k\}$. Für die lineare Ordnung L^π von Y gelte

$$a <_{L^\pi} b :\Leftrightarrow \bigvee_{0 \le l < k} \left[\bigwedge_{k-l < j \le k} (a_{i_j} = b_{i_j}) \wedge a_{i_{k-l}} < b_{i_{k-l}} \right],$$

dann heißt L^π $\pi - lexikographische\ Ordnung\ von\ Y$. Ist $\mathbf{G_{n_1, \ldots, n_k}} = (X, <_G)$ ein k-dimensionaler Grid, dann ist eine π-lexikographische Ordnung von X eine lineare Erweiterung von $\mathbf{G_{n_1, \ldots, n_k}}$ und heißt *π-lexikographische Ordnung von* $\mathbf{G_{n_1, \ldots, n_k}}$.

Falls $\pi = id$ ist, erhalten wir die gewohnte lexikographische Ordnung. L^{id^r} wird manchmal als umgekehrte antilexikographische Ordnung bezeichnet, so in [FR97]. Schreiben wir den i-ten Einheitsvektor als e^i, dann gilt in L^π:
$000 \prec e^{\pi_1} < e^{\pi_2} < \ldots < e^{\pi_k}$.

Beispiel 8.4. Sei $\mathbf{G_{2,2,2}}$ ein 3-dimensionaler Grid dann ist

$$\begin{aligned}
L^{(1,2,3)} &= [\quad 000, 100, 200, 010, 110, 210, 020, 120, 220,\\
&\qquad 001, 101, 201, 011, 111, 211, 021, 121, 221,\\
&\qquad 002, 102, 202, 012, 112, 212, 022, 122, 222 \quad] \text{ und}\\
L^{(3,2,1)} &= [\quad 000, 001, 002, 010, 011, 012, 020, 021, 022,\\
&\qquad 100, 101, 102, 110, 111, 112, 120, 121, 122,\\
&\qquad 200, 201, 202, 210, 211, 212, 220, 221, 222 \quad].
\end{aligned}$$

Aus der Monotonie der Dimension folgt, daß ein Grid $\mathbf{G_{n_1,\ldots,n_k}}$ zumindest Dimension k hat, weil er S_k als Teilordnung enthält. Mit Hilfe der lexikographischen Ordnungen läßt sich ein Realisator der Größe k explizit angeben. Das folgende Lemma formuliert diese Beobachtung.

Lemma 8.5. *Sei* $\mathbf{G} = \mathbf{G_{n_1,\ldots,n_k}}$ *ein k-dimensionaler Grid und für* $1 \leq i \leq k$ *sei* π^i *eine Permutationen von* $\{1, \ldots, k\}$ *mit* $\pi^i(k) = i$*. Dann ist* $\{L^{\pi^i} : 1 \leq i \leq k\}$ *Realisator von* $\mathbf{G}$*.*

Beweis. Seien x und y zwei in $\mathbf{G}$ unvergleichbare Elemente. Nach Definition gibt es dann ein i und ein j mit $y_i < x_i$ und $x_j < y_j$. In L^{π^i} gilt dann $y < x$ und in L^{π^j} gilt $x < y$. □

Lexikographische Ordnungen sind hereditär, d.h. ist $Y \subseteq \mathbb{N}^k, X \subseteq Y$, $\pi \in \mathbf{S}(k)$ und L^π π-lexikographische Ordnung von Y, dann ist $L^\pi \restriction X$ π-lexikographische Ordnung von X.

Lemma 8.6. *Sei* $\mathbf{G} = \mathbf{G_{n_1,\ldots,n_k}}$ *ein k-dimensionaler Grid und* π *eine Permutation auf* $\{1, \ldots, k\}$*. Dann ist*

$$\delta(n_1, \ldots, n_k) := dist(L^\pi, L^{\pi^r}) = \frac{1}{4}\prod_{i=1}^{k}(n_i+1)\left[\prod_{i=1}^{k}(n_i+1) - \left(\sum_{i=1}^{k} n_i\right) - 1\right].$$

Beweis. Beweis durch Induktion über k. o.B.d.A. sei $\pi = id$. Für einen k-dimensionalen Grid $\mathbf{G}$ sei $L_k := L^{id_k}$, $M_k := L^{id_k^r}$ und $P_k = L_k \cap M_k$.
k =2: Es ist

$$\begin{aligned}
inc(P_2) &= |\{(a,b) : a <_{L_k} b, b <_{M_k} a\}|\\
&= |\{(a,b) : a_2 < b_2, b_1 < a_1\}|\\
&= \sum_{x=0}^{n_1}\sum_{y=0}^{n_2} x(n_2 - y)\\
&= \frac{1}{4}\, n_1 n_2 (n_1+1)(n_2+1).
\end{aligned}$$

$k > 2$. Betrachte die Menge der unvergleichbaren Paare, wo ein Element in der n_1 Schicht ist, das andere aber nicht: $A_{n_1} := \{(a,b) : b_1 = n_1, a_1 < n_1, b \| a \; in \; L_{k+1} \cap M_{k+1}\}$.

$$\begin{aligned} A_{n_1} =& \{(a,b) : b_1 = n_1, a_1 < n_1, b <_{L_{k+1}} a, a <_{M_{k+1}} b\} \\ =& \{(a,b) : b_1 = n_1, a_1 < n_1, b <_{L_{k+1}} a\} \\ =& \bigcup_{i=0}^{n_1-1} \{(a',b') : a'_1 = i, b'_1 = n_1, b' <_{L_{k+1}} a'\}. \end{aligned}$$

Für einen vektor y sei $y[\frac{k}{y_i}]$ derjenige vektor, dessen i-te Komponente gleich k ist und dessen anderen Komponenten gleich der entsprechenden Komponente in y sind. Man beachte, daß in L_{k+1} nach Definition $x < y$ mit $x_1 = n_1$ äquivalent ist zu $x < y[\frac{n_1}{y_1}]$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} |A_{n_1}| =& \sum_{i=0}^{n_1-1} \left|\{(a',b') : a'_1 = n_1, b'_1 = n_1, b' <_{L_{k+1}} a'\}\right| \\ =& n_1 \binom{|\{x \in \mathbf{G} : x_1 = n_1\}|}{2} \\ =& n_1 \binom{\prod_{i=2}^{k}(n_i+1)}{2} \\ =& \frac{1}{2}\, n_1 \prod_{i=2}^{k}(n_i+1)(\prod_{i=2}^{k}(n_i+1) - 1). \end{aligned}$$

Wir berechnen die Zahl $i(n_1)$ der Unvergleichbarkeiten von $L_{k+1} \cap M_{k+1}$ durch Induktion über n_1. Für den Induktionsschritt ergibt sich $i(n_1) = i(n_1 - 1) + \delta(n_2, \ldots, n_k) + |A_{n_1}|$ und $i(1) = 2\delta(n_2, \ldots, n_k) + |A_1|$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} inc(L_k \cap M_k) =& i(n_1) \\ =& \delta(n_2, \ldots, n_k) + \sum_{j=1}^{n_1}(\delta(n_2, \ldots, n_k) + |A_j|) \\ =& (n_1+1)\delta(n_2, \ldots, n_k) + \frac{1}{4}\, n_1(n_1+1)\prod_{i=2}^{k}(n_i+1)(\prod_{i=2}^{k}(n_i+1) - 1) \\ =& \frac{1}{4}\prod_{i=1}^{k}(n_i+1)\left[\prod_{i=2}^{k}(n_i+1) - \sum_{i=1}^{k} n_i \; - 1 + n_1 \prod_{i=2}^{k}(n_i+1)\right] \\ =& \delta(n_1, n_2, \ldots, n_k). \end{aligned}$$

$\square$

Zur Vereinfachung der Schreibweise sei im folgenden für einen Grid $\mathbf{G_{n_1,\ldots,n_k}}$ die Menge $\{x \in \mathbf{G} : x_i = j\}$ mit $[x_i = j]$ bezeichnet. Die Menge $\{x \in \mathbf{G} : x_{i_1} = x_{i_2} = \ldots = x_{i_k} = j\}$ sei mit $[x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k} = j]$ bezeichnet.

Lemma 8.7. *Sei* $\mathbf{G} = \mathbf{G_{n_1,\dots,n_k}}$ *ein k-dimensionaler Grid und L eine super-greedy lineare Erweiterung von* $\mathbf{G}$. *Sei* e^j *derjenige Einheitsvektor, der in L zuletzt vorkommt. Dann kommt* $\{\overrightarrow{0}\} \cup [x_j = 0]$ *in L als Block vor.*

Beweis. o.B.d.A. gelte in $L: 0 \prec e^1 < e^2 < \dots < e^k$. Sei L $= [y_1, \dots, y_m]$. Sei $x + e^i$ dasjenige Element mit $(x + e^i)_i = x_i + 1$ und $(x + e^i)_j = x_j$ $für\ j \neq i$. Angenommen, es gelte $e^k = y_{i+1}$ aber $y_i \neq (n_1, n_2, \dots, n_{k-1}, 0)$. Dann existiert ein m $(1 \leq m < k)$, derart daß $y_i + e^m$ noch nicht gewählt wurde. Wähle ein Element $a + e^m$ $(a \leq_G y_i)$ aus $Min(\mathbf{G} - y_1 - \dots - y_i)$. Dies ist möglich, da $(y_i + e^m)^{\downarrow}_{+} - (y_i)^{\downarrow}_{+} = \{a \in \mathbf{G} : a_j \leq (y_i)_j, j \neq m, a_m = (y_i)_m + 1\} = (y_i + e^m)^{\downarrow}_{+} \cap [x_m = (y_i)_m + 1]$ ist. Weil a bereits gewählt worden ist, müßte $a + e^m \in Min(\mathbf{G} - y_1 - \dots - y_i) \cap a^{\uparrow}$ vor e^k gewählt werden. Widerspruch. $\square$

Korollar 8.8. *Sei* $\mathbf{G} = \mathbf{G_{n_1,\dots,n_k}}$ *ein k-dimensionaler Grid und L eine super-greedy lineare Erweiterung von* $\mathbf{G}$. *Sei* π *eine Permutation auf* $\{1, \dots, k\}$, *so daß* $e^{\pi(1)} <_L e^{\pi(2)} <_L \dots <_L e^{\pi(k)}$ *gilt. Dann kommt* $X_i := [x_{\pi(i)}, x_{\pi(i+1)}, \dots$ $\dots, x_{\pi(k)} = 0]$ *für* $2 \leq i \leq k$ *in L als Block vor und es gilt* $X_i <_L X_{i+1}$. *Das heißt, L hat die Form*

$$L = [0, L\restriction[x_{\pi(2)}, x_{\pi(3)}, \dots, x_{\pi(k)} = 0], L\restriction[x_{\pi(3)}, x_{\pi(4)}, \dots, x_{\pi(k)} = 0], \dots$$
$$\dots, L\restriction[x_{\pi(k)} = 0], e^{\pi(k)}, \dots].$$

Beweis. Da $[x_{\pi(k)} = 0]$ Ideal von $\mathbf{G}$ ist, folgt die Behauptung induktiv aus Lemma 4.15. $\square$

Eine super-greedy lineare Erweiterung eines k-dimensionalen Grids mit der Standardordnung der Einheitsvektoren traversiert also zuerst die x_1-Achse, dann die x_1x_2-Ebene, dann den dreidimensionalen $x_1x_2x_3$-Teilgrid usw.

Satz 8.9. *Sei* $\mathbf{G} = \mathbf{G_{n_1,\dots,n_k}}$ *ein k-dimensionaler Grid und L eine super-greedy lineare Erweiterung von* $\mathbf{G}$ *mit Ordnung der Einheitsvektoren* $e^{\pi(1)} <_L e^{\pi(2)} <_L \dots <_L e^{\pi(k)}$. *Dann ist* $L^* = L^{\pi^r}$.

Beweis. Sei o.B.d.A. $\pi = id_k$. Es ist klar, daß die Reihenfolge der Einheitsvektoren in L^* umgekehrt ist. Es ist zu zeigen daß $[x_1 = i]$, $0 \leq i \leq n_1$ in L^* als Block vorkommt und daß $[x_{j+1} = k]$ in $L^*\restriction[x_j = i]$ als Block vorkommt, für alle i, j mit $1 \leq j \leq k - 1$, $0 \leq i \leq n_j$.

Betrachten wir zunächst $[x_1 = i]$. Nach Voraussetzung gilt in L^*: $e^l < e^1$ für $l > 1$. Da $[x_1 = 0] - \{0\} = \{e^2, e^3, \dots, e^k\}^{\uparrow}_{+}$ ist, gilt nach Lemma 3.1: $[x_1 = 0] <_{L^*} e^1$. Nach Korollar gilt in $L: ((i + 1), 0, \dots, 0) < (i, 0, \dots, 0) + e^l$ für alle $l > 1$. Da $(i, 0, \dots, 0)$ als einzige unmittelbaren Nachfolger die $(i, 0, \dots, 0) + e^j$ hat, gilt in L^*: $((i + 1), 0, \dots, 0) > (i, 0, \dots, 0) + e^l$, für alle $1 < l \leq k$. Sind daher die $x \in X$ mit $x_1 < i$ bereits gewählt folgt dann wiederum aus Lemma 3.1, daß L^* die Form $L^* = [L^*\restriction[x_1 = 0], L^*\restriction[x_1 = 1], \dots, L^*\restriction[x_1 = n_1]]$ hat.

Betrachten wir nun $L^* \upharpoonright [x_1 = i_1, x_2 = i_2, \ldots, x_j = i_j]$. Die unmittelbaren Nachfolger in $[x_1 = i_1, x_2 = i_2, \ldots, x_j = i_j]$ von $(i_1, i_2, \ldots, i_j, 0, \ldots, 0)$ sind die $(i_1, i_2, \ldots, i_j, 0, \ldots, 0) + e^l$ $(l > j)$. Nach Korollar gilt $(i_1, i_2, \ldots, i_j, 0, \ldots, 0) + e^l >_{L^*} (i_1, i_2, \ldots, i_j, 0, \ldots, 0) + e^{l+1}$, für $j < l < k$. Analog folgt aus Lemma 3.1 die Behauptung. □

Die Konvergenzgeschwindigkeit einer linearen Erweiterung eines Grids ist also unabhängig von der Dimension und der Höhe. Insgesamt haben wir folgenden Satz bewiesen.

Satz 8.10 (Komplementärpaare von Grids). *Sei* $\mathbf{G} = \mathbf{G_{n_1,\ldots,n_k}}$ *ein* k*-dimensionaler Grid und* L *eine lineare Erweiterung von* $\mathbf{G}$*. Dann ist* $L^{*2} = L^{*4}$*, d.h.* L^{*2}, L^{*3} *ist ein Komplementärpaar für* $\mathbf{G}$*. Desweiteren hat jedes Komplementärpaar von* $\mathbf{G}$ *die Form* L^π, L^{π^r}*,* $\pi \in S(k)$*.* $\mathbf{G}$ *hat also genau* $\frac{1}{2}k!$ *Komplementärpaare.*

Satz 8.11. *Sei* $\mathbf{G} = \mathbf{G_{n_1,\ldots,n_k}}$ *ein* k*-dimensionaler Grid,* $k \leq 4$*. Dann ist ein Komplementärpaar für* $\mathbf{G}$ *auch ein diametrales Paar von* $\mathbf{G}$*.*

Beweis. Betrachte L^{id}, L^{id^r}. Für $k = 2$ gilt $dist(L^{1,2}, L^{2,1}) = \frac{1}{4}n_1 n_2(n_1+1)(n_2+1) = inc(\mathbf{G_{n_1,n_2}})$. Für $k = 3$ betrachte die induzierten Teilordnungen $X^{p_1,p_2,p_3}_{a_1,a_2,a_3}$, $1 \leq i \leq 3$, $0 \leq p_i \leq n_i - 1$, $0 \leq a_i \leq n_i - p_i - 1$ von $\mathbf{G_{n_1,n_2,n_3}}$ mit den minimalen Elementen $\{s^i : 1 \leq i \leq 3,\ s^i_i = a_i + p_i + 1,\ s^i_j = a_j\ \mathit{für}\ j \neq i\}$ und den maximalen Elementen $\{t^i : 1 \leq i \leq 3,\ t^i_i = a_i,\ t^i_j = a_j + p_j + 1\ \mathit{für}\ j \neq i\}$. Jedes $X^{p_1,p_2,p_3}_{a_1,a_2,a_3}$ ist ein 3-Standardbeispiel und die $X^{p_1,p_2,p_3}_{a_1,a_2,a_3}$ haben kein kritisches Paar gemein. Aus Lemma 1.8 folgt, daß jede zweidimensionale Erweiterung von $\mathbf{G_{n_1,n_2,n_3}}$ daher zumindest $\frac{1}{8}n_1(n_1+1)n_2(n_2+1)n_3(n_3+1)$ zusätzliche Vergleichbarkeiten haben muß. Weil $dist(L^{1,2,3}, L^{3,2,1}) = \frac{1}{8}n_1(n_1+1)n_2(n_2+1)n_3(n_3+1)$ ist, ist $L^{1,2,3} \cap L^{3,2,1}$ eine minimum zweidimensional Erweiterung von $\mathbf{G_{n_1,n_2,n_3}}$.

Für $k = 4$ betrachte analog die induzierten Teilordnungen $X^{p_1,p_2,p_3,p_4}_{a_1,a_2,a_3,a_4}$ von $\mathbf{G_{n_1,n_2,n_3,n_4}}$ $(1 \leq i \leq 4,\ 0 \leq p_i \leq n_i - 1,\ 0 \leq a_i \leq n_i - p_i - 1)$ mit den minimalen Elementen $\{s^i : 1 \leq i \leq 4,\ (s^i)_i = a_i + p_i + 1,\ (s^i)_j = a_j\ \mathit{für}\ j \neq i\}$ und den maximalen Elementen $\{t^i : 1 \leq i \leq 3,\ (t^i)_i = a_i,\ (t^i)_j = a_j + p_j + 1\ \mathit{für}\ j \neq i\}$. Sind S und T zwei verschiedene 4-Standardbeispiele, dann haben sie keine kritischen Paare gemein. Andernfalls, sei $S = X^{p_1,p_2,p_3,p_4}_{a_1,a_2,a_3,a_4}$, $T = X^{q_1,q_2,q_3,q_4}_{b_1,b_2,b_3,b_4}$, $S \neq T$ und sei $(s^i, t^i) \in crit(S)$, $(u^j, v^j) \in crit(T)$ mit $(s^i, t^i) = (u^j, v^j)$. Falls $i = j$ ist, folgt offensichtlich $S = T$. Ist $i \neq j$, dann folgt $a_i = b_i + q_i + 1$ und $a_i + p_i + 1 = b_i$. Widerspruch.

Ist eine Komponente beliebig aber fest, dann können wir analog zu oben 3-Standardbeispiele $X^{\{q_l : l \neq i\}}_{\{b_l : l \neq i\}}(i, j_i)$ $1 \leq i \leq 4$, $0 \leq j_i \leq n_i$ definieren mit maximalen Elementen $\{t^j : j \neq i, (t^j)_i = j_i, (t^j)_j = b_j, (t^j)_k = b_k + q_k + 1\ \mathit{für}\ k \notin \{i,j\}\}$ und minimalen Elementen $\{s^j : j \neq i, (s^j)_i = j_i, (s^j)_j = b_j + q_j + 1, (s^j)_k = b_k\ \mathit{für}\ k \notin \{i,j\}\ \}$. Siehe dazu Abbildung 12. Wie im dreidimensionalen Falle gilt, daß für $S = X^{\{q_l : l \neq i\}}_{\{b_l : l \neq i\}}(i, j_i)$ und $T = X^{\{q_l : l \neq i\}}_{\{b_l : l \neq i\}}(i, j_i)$ mit $S \neq T$ gilt

$crit(S) \cap crit(T) = \emptyset$. Diese 3-Standardbeispiele haben auch keine kritischen Paare mit den $X^{p_1,p_2,p_3,p_4}_{a_1,a_2,a_3,a_4}$ gemein, was leicht einzusehen ist, wenn man für ein kritisches Paar (s,t) die 'Kontrollsumme' $cs((s,t)) := |\{i : t_i > s_i\}| - |\{i : s_i > t_i\}|$ betrachtet.

Eine zweidimensionale Erweiterung $P := L \cap M$ von $\mathbf{G_{n_1,n_2,n_3,n_4}}$ dreht höchstens zwei kritische Paare in jedem der 4-Standardbeispiele $X^{p_1,p_2,p_3,p_4}_{a_1,a_2,a_3,a_4}$ um. In P gibt es also mindestens zwei zusätzliche Vergleichbarkeiten $s^u < t^u$, $s^v < t^v$ für jedes $S = X^{p_1,p_2,p_3,p_4}_{a_1,a_2,a_3,a_4}$. Betrachten wir den Grid $\tilde{\mathbf{G}} = \tilde{\mathbf{G}}_{\mathbf{n_1,n_2,n_3,n_4}}$, der entsteht, wenn wir für jedes der induzierten 4-Standardbeispiele S die beiden neuen Relationen hinzufügen, dann ergibt sich ein weiteres 3-Standardbeispiel als induzierte Teilordnung von $\tilde{\mathbf{G}}_{\mathbf{n_1,n_2,n_3,n_4}}$. Sind nämlich (s^u,t^u) und (s^v,t^v) die beiden neuen Relationen in $\tilde{\mathbf{G}}\restriction S$ und $p,r \notin \{u,v\}$ dann sei $\tilde{Q}(S,P) = \tilde{Q}(S)$ das 3-Standardbeispiel mit den maximalen Elementen $\{t^p,t^r\} \cup \{\tilde{t} : \tilde{t}_r = a_r + p_r + 1,\, \tilde{t}_p = a_p + p_p + 1, \tilde{t}_j = a_j,\, j \notin \{r,p\}\}$ und den minimalen Elementen $\{s^p,s^r\} \cup \{\tilde{s} : \tilde{s}_r = a_r\, \tilde{s}_p = a_p, \tilde{s}_j = a_j + p_j + 1,\, j \notin \{r,p\}\}$.

Offensichtlich sind die $X^{p_1,p_2,p_3,p_4}_{a_1,a_2,a_3,a_4}$ und die $X^{\{q_l:l\neq i\}}_{\{b_l:l\neq i\}}(i,j_i)$ auch induzierte Teilordnungen von $\tilde{\mathbf{G}}$. Weil die Anzahl der induzierten 4-Standardbeispiele gleich $\frac{1}{16}\prod_{i=1}^{4} n_i(n_i+1)$ und die Anzahl der $X^{\{q_l:l\neq i\}}_{\{b_l:l\neq i\}}(i,j_i)$ gleich $\frac{1}{8}\prod_{i=1}^{4}(n_i+1)(n_1n_2n_3 + n_2n_3n_4 + n_1n_3n_4 + n_1n_2n_4)$ ist, folgt mit Lemmata 8.2 und 8.6

$$\begin{aligned}
comp(P) - comp(\mathbf{G}) &\geq \frac{3}{16}\prod_{i=1}^{4} n_i(n_i+1) + \frac{1}{8}\prod_{i=1}^{4}(n_i+1) \\
&\quad \cdot (n_1n_2n_3 + n_2n_3n_4 + n_1n_3n_4 + n_1n_2n_4) \\
&= \frac{1}{4}\prod_{i=1}^{4}(n_i+1) \cdot (\frac{3}{4}n_1n_2n_3n_4 + \frac{1}{2}n_1n_2n_3 \\
&\quad + \frac{1}{2}n_2n_3n_4 + \frac{1}{2}n_1n_3n_4 + \frac{1}{2}n_1n_2n_4) \\
&= \frac{1}{4}\prod_{i=1}^{4}(n_i+1)\,(\prod_{i=1}^{4}(n_i+1) - \frac{1}{4}\prod_{i=1}^{4}(n_i+2) + \sum_{i=1}^{4} n_i + 3) \\
&= inc(\mathbf{G_{n_1,n_2,n_3,n_4}}) - \delta(n_1,n_2,n_3,n_4).
\end{aligned}$$

Also ist L^{id}, L^{id^r} eine minimum zweidimensionale Erweiterung von $\mathbf{G_{n_1,n_2,n_3,n_4}}$ und damit ein diametrales Paar. $\square$

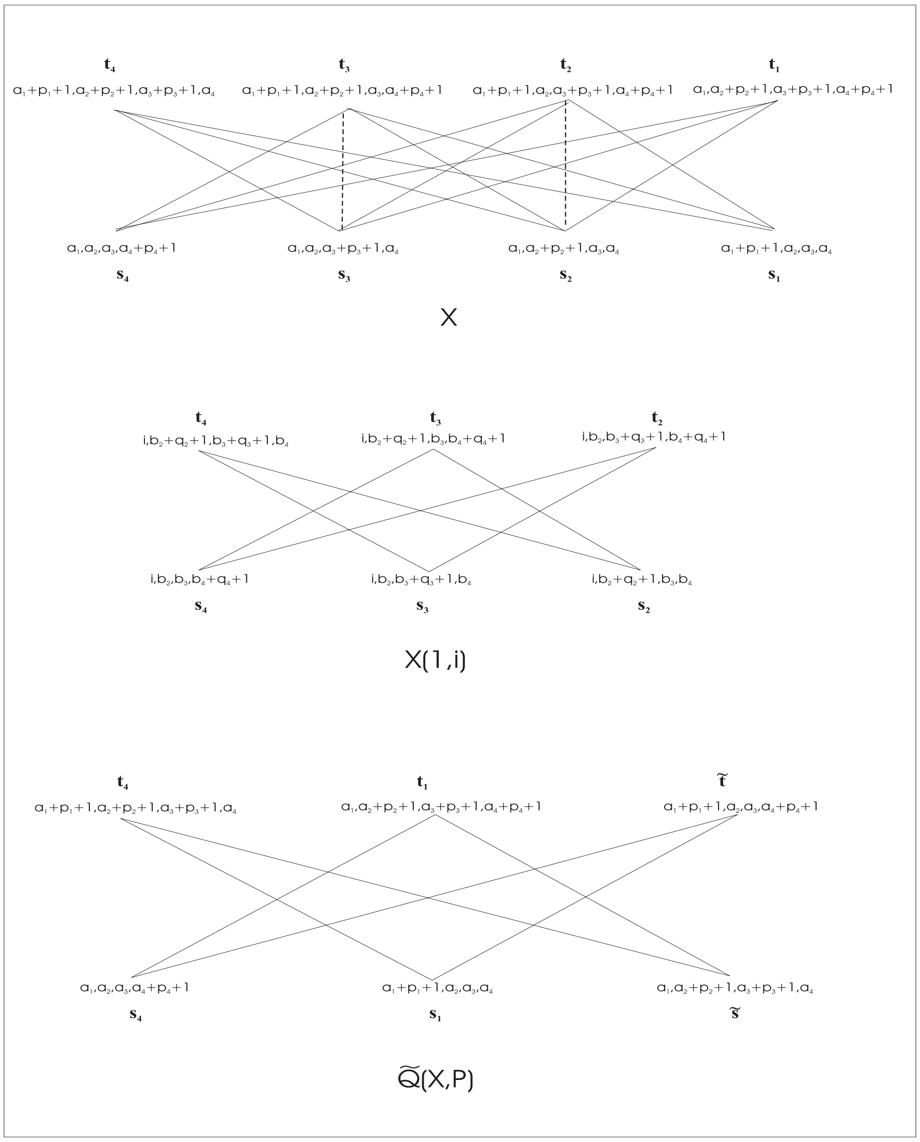


Abbildung 12:
Einbettung von Standardbeispielen in einen vierdimensionalen Grid $\mathbf{G}$.
Die zusätzlichen Vergleichbarkeiten von $\tilde{\mathbf{G}}$ sind unterbrochen gezeichnet.

Es ist nicht ohne Weiteres möglich diesen Ansatz, d.h. Einbettung von Standardbeispielen, auf Grids der Dimension größer 4 zu übertragen. In [FR97] findet man die Vermutung ausgesprochen, daß $L^{id_n}, L^{id_n^r}$ ein diametrales Paar für den booleschen Verband B_n ist. Dies würde aus der Vermutung folgen, daß bei einem diametralen Paar L, M einer Ordnung $\mathbf{P}$, L oder M ein kritisches Paar umdreht. Man darf diese Vermutung dahingehend verallgemeinern, daß für jeden k-dimensionalen Grid und jede Permutation $\pi \in S(k)$, L^{π}, L^{π^r} ein diametrales Paar ist.

Literatur

[KT89] H. Kierstaed and W.T. Trotter. *Super-greedy linear extensions of ordered sets*. Annals of the NY Acad. Sci., 555:262-271, 1989.

[Tro92] W.T. Trotter. *Combinatorics and Partially Ordered Sets: Dimension Theory*. Johns Hopkins Press, 1992.

[Reu96] K. Reuter. *Linear extensions of a poset as abstract convex sets*. Vorabdruck, 1996.

[FR97] S. Felsner und K. Reuter. *The Linear-Extension-Diameter of a Poset*. Reports from the Institute for Computer Science; Freie Universität Berlin. B 97-06, 1997.

[Sta86] R. Stanley. *Enumerative Combinatorics*, chapter 3. Volume 1, The Wadsworth & Brooks/Cole Mathematics Series; Monterey, California, 1986.

[Moe89] R.H. Möhring. *Computationally Tractable Classes of Ordered Sets*, in I. Rival(Hrsg.), Algorithms and Orders; Reidel, Dordrecht, 1989.