
Kontaktdarstellungen planarer Graphen

mit Fünfecken

MASTERARBEIT FÜR DIE PRÜFUNG ZUM MASTER OF SCIENCE
IM STUDIENGANG MATHEMATIK
AN DER TECHNISCHEN UNIVERSITÄT BERLIN
BERLIN, 4. DEZEMBER 2017

VON

NADINE RAASCH

BETREUT DURCH PROF. DR. STEFAN FELSNER

Eidesstattliche Erklärung zur Masterarbeit

Hiermit erkläre ich, Nadine Raasch, an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und eigenhändig sowie ohne unerlaubte fremde Hilfe und ausschließlich unter Verwendung der aufgeführten Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe.

Berlin, den 4. Dezember 2017

Zusammenfassung

In dieser Masterarbeit geht es um Kontaktdarstellungen planar eingebetteter Graphen durch regelmäßige Fünfecke. Dabei wollen wir untersuchen, wann eine solche Darstellung existiert und wie man diese konstruieren kann. Auf Grundlage dieses Wissens wurde ein Programm zur Konstruktion von Fünfeckskontaktdarstellungen implementiert und auf Praktikabilität getestet.

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
2	Grundlagen	3
2.1	Graphen, Wege und Kreise	3
2.2	Ebene Graphen	4
2.3	Matchings	4
2.4	α -Orientierungen	6
2.5	Schnyder Woods	6
3	Fünfeckskontaktdarstellungen	9
3.1	Existenz	10
3.2	Fünf Farben Wald	11
3.2.1	Existenz eines Fünf Farben Waldes	12
3.2.2	Zusammenhang mit Fünfeckskontaktdarstellungen	13
3.2.3	Zusammenhang mit α -Orientierungen	14
3.2.4	Die Verbandsstruktur von Fünf Farben Wäldern	24
4	Konstruktion einer Fünfeckskontaktdarstellung	27
4.1	Das Gleichungssystem	28
4.1.1	Lösbarkeit	30
4.2	Die Methode	37
4.3	Das Programm	40
	Literatur	48

KAPITEL 1

Einführung

Graphen werden häufig durch Zeichnungen in der Ebene repräsentiert, wobei Knoten durch Punkte und die Kanten durch Linien dargestellt werden. Die Kontaktdarstellung eines Graphen bietet eine alternative, geometrische Darstellung dazu. Dabei definieren wir die Kontaktdarstellung eines ebenen Graphen G als ein System von Objekten mit den folgenden zwei Eigenschaften:

1. Jeder Knoten von G wird durch ein Objekt repräsentiert.
2. Wenn zwei Knoten im Graphen adjazent sind, so berühren sich die entsprechenden Objekte in exakt einem Punkt.

Entsprechend sind zwei Objekte disjunkt, wenn die dazugehörigen Knoten im Graphen nicht adjazent sind, das heißt wenn sie keine gemeinsame Kante haben. Die Darstellung von Graphen mit Hilfe von Kontakten unterschiedlicher geometrischer Objekte wurde im Kontext der Graphentheorie sowie der Visualisierung von Graphen bereits gründlich untersucht. Eines der bekanntesten Resultate ist das *Circle Packing Theorem* [10], welches besagt, dass ein Graph genau dann planar ist, wenn er sich als Kreiskontaktdarstellung realisieren lässt. Allerdings wurde das Ergebnis für lange Zeit vergessen und erst Ende des 20. Jahrhunderts wiederentdeckt. Seither wurde mehr über die Darstellung als Kontaktgraph von Dreiecken [13], Rechtecken [4] sowie Quadraten [9], Einheitskreisen und weiteren geometrischen Objekten untersucht. In [17] wurde begonnen die Darstellung durch Fünfecke zu untersuchen. Diese Überlegungen wurden von Felsner, Schrezenmaier and Steiner [7] weitergeführt und ausgebaut. In der folgenden Arbeit werden wir uns oft auf diese Ausarbeitung beziehen, da die Konstruktionen sowie Beweisideen hauptsächlich von dort stammen, auch wenn dies fortlaufend nicht immer explizit angegeben sein sollte. Wir werden den Hauptteil der in [7] geführten Beweise noch einmal nachvollziehen. Diese bilden die Grundlage für das theoretische Verständnis sowie für den praktischen Teil der Arbeit.

Wir wollen uns in dieser Arbeit also mit Kontaktdarstellungen beschäftigen, bei denen die Knoten durch Fünfecke repräsentiert werden. Dazu werden wir in Kapitel 2 grundlegende Definitionen einführen um eine graphentheoretische Voraussetzung zu schaffen, wobei wir auch einige allgemeine Hilfssätze beweisen werden, die an gegebener Stelle in der Arbeit benötigt werden. Des Weiteren werden wir in diesem Kapitel die aus der Dreieckskontaktdarstellung (vgl. z.B. [4]) bekannte Struktur der Schnyder Woods einfüh-

ren und einige essenzielle Eigenschaften dieser angeben. In Kapitel 3 beschäftigen wir uns mit Fünfeckskontaktdarstellungen. Dazu werden wir uns im Abschnitt 3.1 zunächst von der Existenz einer solchen Kontaktdarstellung vergewissern um diese danach im Abschnitt 3.2 auf die Struktur der Fünf Farben Wälder zu beziehen. Dabei werden wir sehen, dass Fünf Farben Wälder in einem engen Zusammenhang mit den aus den Dreieckskontaktdarstellung bekannten Schnyder Woods sowie den aus der Viereckskontaktdarstellung bekannten Transversalen Strukturen stehen. Nach einer Definition des Fünf Farben Waldes und einem Existenzbeweis (Abschnitt 3.2.1) werden wir in Abschnitt 3.2.2 den Zusammenhang mit Fünfeckskontaktdarstellungen erörtern. Im Anschluss daran werden wir im Abschnitt 3.2.3 feststellen, dass Fünf Farben Wälder in Bijektion mit einer bestimmten Orientierung stehen, was uns folglich einen distributiven Verband auf der Menge der Fünf Farben Wälder eines gegebenen Graphen gibt. Diese Verbandsstruktur spielt eine Rolle in dem Algorithmus, welchen wir in Abschnitt 4.2 vorstellen werden, um eine Kontaktdarstellung zu konstruieren. Dieser beruht auf der Grundlage eines vom Fünf Farben Wald abhängigen Gleichungssystems, welches wir im Abschnitt 4.1 vorstellen und uns im Anschluss von dessen Lösbarkeit überzeugen. In Abschnitt 4.3 wird das Programm vorgestellt und ein Praktikabilitätstest durchgeführt.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei all denjenigen bedanken, die mich während der Anfertigung dieser Masterarbeit unterstützt und motiviert haben. Insbesondere gebührt mein Dank Prof. Dr. Stefan Felsner und Hendrik Schrezenmaier für die gute Betreuung.

KAPITEL 2

Grundlagen

2.1 Graphen, Wege und Kreise

In dieser Arbeit werden wir uns hauptsächlich mit einfachen Graphen, heißt ungerichteten Graphen ohne Mehrfachkanten und ohne Schleifen, beschäftigen.

Ein (einfacher) Graph G ist also ein geordnetes Paar (V, E) , in dem $V(G) := V$ eine endlichen Menge von Knoten und $E(G) := E \subseteq \binom{V}{2}$ eine endliche Menge von ungerichteten Kanten ist. Ein Element $v \in V$ heißt *Knoten* des Graphen, ein Element $e \in E$ *Kante*. Typischerweise benutzt man die Variablen n und m , sodass $|V| = n$ und $|E| = m$. Zwei Kanten $e_1, e_2 \in E$ heißen *inzident*, wenn sie einen gemeinsamen Knoten haben. Zwei Knoten $v, w \in V$ heißen *adjazent*, wenn sie durch eine Kante verbunden sind. Zwei zueinander adjazente Knoten heißen Nachbarn. Die Menge $N_G(v) := \{w \in V \mid \{v, w\} \in E\}$ definiert die *Nachbarschaftsmenge* von v in G und $\deg_G(v) := |N(v)|$ den Grad von v in G . Ist aus dem Kontext klar, von welchem Graphen gesprochen wird, schreiben wir einfach $N(v)$ bzw. $\deg(v)$.

Wir werden später auch mit gerichteten Kanten $e = (v, w)$ arbeiten. Das heißt jede Kante hat einen ausgezeichneten Start- sowie Endknoten. Die Kante ist von v nach w gerichtet. Da der zugrundeliegende (ungerichtete) Graph stets gleich bleibt und sich lediglich die Orientierung auf ihm ändert, bezeichnen wir eine Kante vereinfacht mit $e = vw$, wenn ersichtlich ist, ob wir von einer (un)gerichteten Kante reden. Alle definierten Begriffe verwenden wir für den gerichteten sowie ungerichteten Fall.

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Ein Weg in G ist eine kanten-disjunkte Folge von Knoten $v_1, \dots, v_k \in V$, sodass $v_i v_{i+1} \in E$ für $i = 1, \dots, k-1$. Ein Pfad $P = (v_1, \dots, v_k)$ in G ist ein knoten-disjunkter Weg, das heißt es gilt $v_i \neq v_j$ für alle $i \neq j$. Ein Zykel in G ist ein Weg $v_1, \dots, v_k \in V$ für den $v_1 = v_k$ gilt. Ein Kreis in G ist ein Pfad $v_1, \dots, v_k \in V$ für den $v_1 = v_k$ gilt. Wenn wir von der Länge eines Weges, Pfades, Kreises oder Zyklus reden, meinen wir stets die Anzahl der Kanten auf diesem. So hat beispielsweise ein Pfad $P = (v_1, \dots, v_k)$ die Länge $(k-1)$. Wenn wir uns im gerichteten Fall befinden, können wir zusätzlich eine Umkehrung der Kantenorientierung definieren. Sei dafür $e = (v, w)$ eine gerichtete Kante, dann definieren wir durch $e^{-1} := (w, v)$ eine Umorientierung dieser. Wir können das auf äquivalente Weise auch für Wege, Pfade, Kreise oder Zykel tun, indem wir beispielsweise für einen Pfad $P = (v_1, \dots, v_k)$ seine Umkehrung $P^{-1} := (v_k, \dots, v_1)$ definieren.

2.2 Ebene Graphen

Ein Graph $G = (V, E)$ heißt *planar*, wenn eine kreuzungsfreie Zeichnung von G in der Ebene existiert. G heißt *maximal planar*, wenn er planar ist und keine Kante hinzugefügt werden kann, ohne dass dadurch die Planarität verloren geht. Ein planarer Graph zusammen mit einer festen planaren Einbettung in die Ebene heißt *ebener Graph*. Ein solcher Graph besitzt Flächen. Wir werden die unbegrenzte Fläche als *äußere Fläche* oder *Außenfläche* und die begrenzten als *innere Flächen* bezeichnen. Ist G zusammenhängend und planar gezeichnet, so gilt die Euler Formel:

$$|V| - |E| + |F| = 2,$$

wobei F die Menge der Flächen von G ist, die äußere Fläche mit einbezogen.

Der *Dualgraph* $G^* = (V^*, E^*)$ eines ebenen Graphen $G = (V, E)$, ist der Graph mit:

- V^* = Menge der Flächen von G .
- E^* = Menge der dualen Kanten. Seien dafür f_1, f_2 die Flächen auf den beiden Seiten einer Kante e , dann definieren wir $e^* := f_1 f_2$ und $E^* = \{e^* : e \in E\}$.

Ein Dualgraph ist also immer zusammenhängend. Sei T ein Spannbaum von G , das heißt ein Teilgraph von G , der ein Baum ist und alle Knoten von G enthält. Dann bilden die Kanten aus G^* , die den Kanten $E \setminus T$ aus G entsprechen, einen Spannbaum T^* von G^* .

Ein Graph heißt *trianguliert* (chordal), wenn er keinen induzierten Kreis der Länge größer gleich vier hat. Eine *Triangulierung* ist ein ebener Graph, dessen innere Flächen ausschließlich Dreiecke sind. Wir nennen eine Triangulierung, die genau k Knoten an der Außenfläche besitzt, eine *k-Triangulierung*. Mit der Eulerschen Formel folgt, dass jede *k-Triangulierung* mit n Knoten genau $(3n - k - 3)$ Kanten und $(2n - k - 2)$ innere Flächen besitzt.

2.3 Matchings

Ein *Matching* eines ungerichteten Graphen ist eine Teilmenge von Kanten, sodass keine zwei Kanten aus dieser einen Endpunkt gemeinsam haben:

Sei $G = (V, E)$. Ein *Matching* ist eine Teilmenge $M \subseteq E$, sodass $e_1 \cap e_2 = \emptyset$ für alle $e_1, e_2 \in M$ mit $e_1 \neq e_2$ gilt. Ein *perfektes Matching* ist ein Matching, für das zusätzlich gilt, dass jeder Knoten v von G inzident zu einer Matchingkante $e \in M$ ist, also wenn gilt

$$|M| = |V|/2.$$

Ein (ungerichteter) Graph $G = (V, E)$ heißt *bipartiter Graph*, wenn man V in disjunkte Mengen U und W zerlegen kann, sodass alle Kanten zwischen U und W verlaufen.

In einem bipartiten Graphen H mit den Knotenklassen $V = v_1, \dots, v_k$ und $W = w_1, \dots, w_k$ induziert jedes perfekte Matching M eine Permutation $\sigma \in S_k$ durch

$$\sigma(i) = j : \Leftrightarrow \{v_i, w_j\} \in M.$$

Wir definieren das *Signum* $\text{sgn}(M)$ eines perfekten Matchings M als das Signum der zugehörigen Permutation. Die Permutation ist von der Nummerierung der Knoten in V und W abhängig. Wenn wir im Folgenden das Signum verschiedener perfekter Matchings eines Graphen miteinander vergleichen, werden wir eine feste Nummerierung beibehalten, womit dieser Fakt für uns unerheblich ist.

Lemma 2.1. Es sei $\hat{H}$ ein bipartiter ebener Graph, dessen innere Flächen f alle durch Kreise der Länge $\ell_f \equiv 2 \pmod{4}$ begrenzt sind. Dann gilt für alle Kreise der Länge ℓ mit k inneren Knoten aus $\hat{H}$:

$$\ell + 2k \equiv 2 \pmod{4}.$$

Beweis. Wir zeigen dies per Induktion über die Anzahl der vom Kreis umschlossenen Flächen. Ein Kreis mit einer einzigen inneren Fläche hat die Länge $\ell = 4n + 2$ für ein $n \in \mathbb{N}$ sowie $k = 0$ innere Knoten. Damit ist $\ell + 2k = 4n + 2 \equiv 2 \pmod{4}$ und die Behauptung ist erfüllt.

Sei nun C ein Kreis mit mehr als einer inneren Fläche. Sei f eine davon, die inzidente Kanten auf C hat. Wir definieren den Pfad $P_{out} := (v_0, \dots, v_{m_1})$, der sich aus eben diesen, auf dem Rand von C liegenden Kanten, zusammensetzt und den Pfad $P_{in} := (w_0, \dots, w_{m_2})$, aus inzidenten Kanten aus dem Inneren von C . Damit ist die Außenfläche von f gegeben durch $P_{in} \cup P_{out} = (v_0, \dots, v_{m_1} = w_0, \dots, w_{m_2} = v_0)$, wobei $m_1 + m_2 = 4n + 2$ für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt. Sei C' der Kreis mit Länge ℓ' und k' inneren Knoten, der aus C entsteht, indem P_{out} durch P_{in} ersetzt wird. Nach Induktionsvoraussetzung gilt dann $\ell' + 2k' \equiv 2 \pmod{4}$. Insgesamt folgt also

$$\ell + 2k = (\ell' + (m_1 - m_2)) + 2(k' + (m_2 - 1)) = \ell' + 2k' + 4n \equiv 2 \pmod{4}.$$

□

Jeder Kreis der Länge ℓ eines bipartiten Graphen, der der Bedingung von $\hat{H}$ aus dem obigen Lemma genügt, enthält also immer eine gerade Anzahl von Knoten im Inneren, falls $\ell \equiv 2 \pmod{4}$, bzw. eine ungerade Anzahl, falls $\ell \equiv 0 \pmod{4}$. Andere Kreislängen sind nicht möglich, da der betrachtete Graph bipartit ist.

Lemma 2.2. Seien M, M' zwei perfekte Matchings von $\hat{H}$. Dann gilt:

$$\text{sgn}(M) = \text{sgn}(M').$$

Beweis. Sei $D := (M \cup M') \setminus (M \cap M')$ die symmetrische Differenz von M und M' . Jeder Knoten in dem von D induzierten Graphen hat Grad 0 oder Grad 2. Somit ist D eine disjunkte Vereinigung von Kreisen $C_1, \dots, C_m$. Da M und M' perfekte Matchings sind, enthält jeder dieser Kreise C_i eine gerade Anzahl innerer Knoten. Mit Lemma 2.1 folgt, dass jeder Kreis C_i die Länge $4n_i + 2$ für ein $n_i \in \mathbb{N}$ hat. Die Kreise sind M - sowie M' -alternierend. Sie enthalten also jeweils abwechselnd eine Matching Kante aus M und M' . Auf den Knoten von C_i unterscheiden sich die zu M bzw. M' gehörende Permutation σ bzw. σ' daher um eine zyklische Permutation τ_i der Länge $2n_i + 1$. Jedes τ_i lässt sich

in eine gerade Anzahl ($2n_i$) Transpositionen zerlegen. Somit gilt $\text{sgn}(\tau_i) = (-1)^{2n_i} = 1$. Zusammen mit $\sigma' = \sigma \circ \tau_1 \circ \dots \circ \tau_m$ folgt dann

$$\begin{aligned}\text{sgn}(\sigma') &= \text{sgn}(\sigma) \cdot \text{sgn}(\tau_1) \cdots \text{sgn}(\tau_m) \\ &= \text{sgn}(\sigma) \cdot (-1)^{2n_1} \cdots (-1)^{2n_m} = \text{sgn}(\sigma).\end{aligned}$$

□

2.4 α -Orientierungen

Eine α -Orientierung eines Graphen ist eine Orientierung, bei der jeder Knoten eine durch α vorgegebene Anzahl ausgehender Kanten hat:

Sei $G = (V, E)$ und $\alpha : V(H) \rightarrow \mathbb{N}$ eine Abbildung. Eine Orientierung X von Kanten aus G heißt α -Orientierung, wenn für alle Knoten $v \in V$ gilt:

$$\text{outdeg}_X(v) = \alpha(v).$$

Durch Umorientierung aller Kanten eines gerichteten Kreises C in einer α -Orientierung erhält man wieder eine α -Orientierung. Diese Eigenschaft werden wir uns später zunutze machen.

2.5 Schnyder Woods

An dieser Stelle wollen wir die von Schnyder [14] eingeführte Struktur der Schnyder Woods vorstellen.

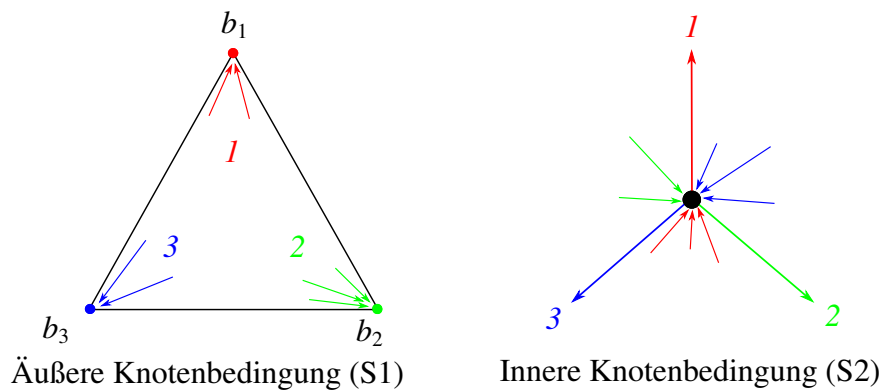


Abbildung 2.1: Die lokalen Bedingungen eines Schnyder Woods.

Ein *Schnyder Wood* einer Triangulierung T mit Außenfläche b_1, b_2, b_3 (im Uhrzeigersinn) ist eine Orientierung und Färbung der inneren Kanten von T in den Farben 1, 2, 3 (hier Rot, Grün, Blau) mit den folgenden Eigenschaften (vgl. Abb. 2.1):

- (S1) Alle zu b_i inzidenten Kanten sind zu b_i gerichtet und in der Farbe i gefärbt.
- (S2) Jeder innere Knoten v hat genau eine ausgehende Kante der Farbe 1, genau eine ausgehende Kante der Farbe 2 sowie genau eine ausgehende Kante der Farbe 3, die im Uhrzeigersinn angeordnet sind. Die eingehenden Kanten im Intervall zwischen zwei ausgehenden Kanten sind jeweils mit der dritten Farbe gefärbt.

Satz 2.3 ([14]). Sei T eine 3-Triangulierung. Dann existiert ein Schnyder Wood auf T .

Satz 2.4 ([8]). 3-Orientierungen einer planaren Triangulierung stehen in Bijektion zu Schnyder Woods.

Eine 3-Orientierung ist dabei eine Orientierung der inneren Kanten einer planaren Triangulierung, bei der für jeden inneren Knoten v gilt: $\text{outdeg}(v) = 3$.

KAPITEL 3

Fünfeckskontaktdarstellungen

Ein *Fünfeckskontaktsystem* $\mathcal{S}$ ist ein endliches System von konvexen Fünfecken in der Ebene, sodass sich zwei Fünfecke in höchstens einem Punkt berühren. Wir nennen $\mathcal{S}$ eine *reguläre* oder *regelmäßige Fünfeckskontaktdarstellung*, wenn alle Fünfecke aus $\mathcal{S}$ regelmäßig sind und die jeweiligen Unterseiten der Fünfecke horizontal liegen. Unter dieser Voraussetzung sind je zwei Fünfecke von $\mathcal{S}$ zueinander homothetisch, da die Grundseiten der regelmäßigen Fünfecke parallel zueinander sind und somit durch monotone Transformationen ineinander überführt werden können.

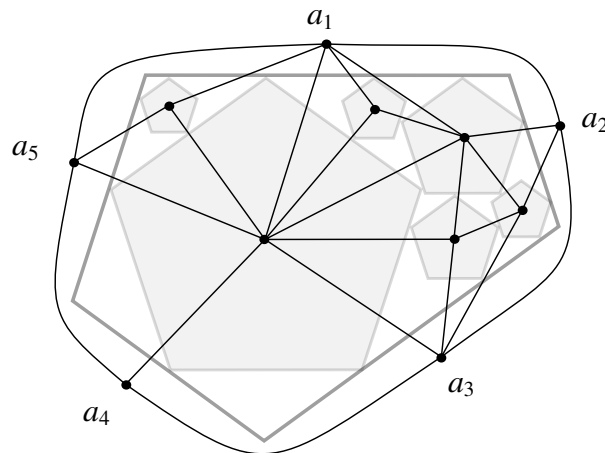


Abbildung 3.1: Eine regelmäßigen Fünfeckskontaktdarstellung des Graphen.

Der *Kontaktgraph* $G^*(\mathcal{S})$ des Kontaktsystems $\mathcal{S}$ ist der Graph, der für jedes Fünfeck einen Knoten und für jeden Kontakt zweier Fünfecke in $\mathcal{S}$ eine Kante hat. Dabei erbt $G^*(\mathcal{S})$ eine kreuzungsfreie Einbettung in die Ebene von $\mathcal{S}$. Für einen gegebenen ebenen Graphen G und ein Fünfeckskontaktsystem $\mathcal{S}$, für die $G^*(\mathcal{S}) = G$ gilt, sagen wir, dass $\mathcal{S}$ eine Fünfeckskontaktdarstellung von G ist. Ein Kontaktsystem heißt *entartet*, wenn es Objekte enthält, die auf einen einzigen Punkt zusammengezogen werden. Anders als bei der Kontaktdarstellung mit Drei- sowie Vierecken werden wir im nächsten Abschnitt feststellen, dass es bei der Darstellung mit Fünfecken aus geometrischen Gründen nicht zu einer Entartung kommen kann.

Im Folgenden werden wir uns ausschließlich mit 5-triangulierten, einfachen Graphen beschäftigen, in denen die zur äußeren Fläche gehörenden Knoten $a_1, \dots, a_5$ im Uhrzeigersinn angeordnet sind. Dabei sollen die einzigen Kanten zwischen je zwei äußeren Knoten genau diese sein, die das Außengebiet formen.

Unser Ziel ist es, eine reguläre Fünfeckskontaktdarstellung von G zu finden, mit der zusätzlichen Eigenschaft, dass $a_1, \dots, a_5$ durch Liniensegmente $s_1, \dots, s_5$ dargestellt werden. Diese sollen zusammen ein Fünfeck formen, deren innere Winkel alle gleich $(3/5)\pi$ sind. Das zum Knoten a_1 gehörende Segment s_1 ist immer horizontal und oben. Die weiteren Segmente sind analog zu den Knoten im Uhrzeigersinn angeordnet. Dieses umgedrehte Rahmenfünfeck ist im Allgemeinen nicht regelmäßig.

3.1 Existenz

In diesem Abschnitt wollen wir uns zuallererst von der Existenz regulärer Fünfeckskontaktdarstellungen überzeugen. In [7] und [17] wurde diese Aussage schon auf äquivalente Weise bewiesen. Der Vollständigkeit halber wollen wir die Existenzaussage aber auch in dieser Arbeit noch einmal zeigen. Dazu werden wir uns im Wesentlichen auf den folgenden allgemeinen Satz aus [15] beziehen.

Satz 3.1 (Convex Packing Theorem). Sei T eine (innere) Triangulierung mit Außenfläche a, b, c und sei C eine einfache geschlossene Kurve in der Ebene, welche in die Bögen P_a, P_b, P_c unterteilt ist. Für jeden inneren Knoten $v \in V \setminus \{a, b, c\}$ (wobei V die Knotenmenge von T ist) sei P_v eine konvexe mehripunktige Menge in der Ebene. Dann existiert eine möglicherweise entartete Kontaktdarstellung von T , sodass jeder äußere Knoten w durch P_w und jeder innere Knoten v durch einen einzelnen Punkt oder eine homothetische Kopie seines (Prototypen) P_v repräsentiert wird.

Die grundlegende Idee des Existenzbeweises ist es, unseren Graphen umzuformen und dann die Prototypen so zu definieren, dass wir das Convex Packing Theorem anwenden können. Damit folgt die Existenz einer möglicherweise entarteten Kontaktdarstellung. In einem letzten Schritt vergewissern wir uns dann noch, dass diese nicht entartet sein kann. Kommen wir nun zu der Hauptaussage dieses Abschnittes. Der folgende Beweis stammt aus [7].

Satz 3.2. Sei G eine 5-Triangulierung mit Außenfläche $a_1, \dots, a_5$. Dann existiert eine regelmäßige Fünfeckskontaktdarstellung von G .

Beweis. Durch Hinzufügen der Kanten $\{a_1, a_3\}$ und $\{a_1, a_4\}$ an die Außenfläche von G erhalten wir eine Triangulierung $\tilde{G}$ mit Außenfläche a_1, a_3, a_4 . Wir definieren uns die Bögen $P_{a_1}, P_{a_3}, P_{a_4}$ (aus dem obigen Satz) als Dehnungen der oberen, unteren rechten und unteren linken Seite eines auf dem Kopf stehenden regelmäßigen Fünfecks A mit horizontaler oberen Seite, sodass die Vereinigung $P_{a_1} \cup P_{a_3} \cup P_{a_4}$ ein Dreieck und folglich eine geschlossene Kurve ergibt. Als nächstes definieren wir uns die Prototypen P_{a_2} und P_{a_5} als parallele Strecken der rechten oberen und linken oberen Seite unseres Fünfecks A (vgl.

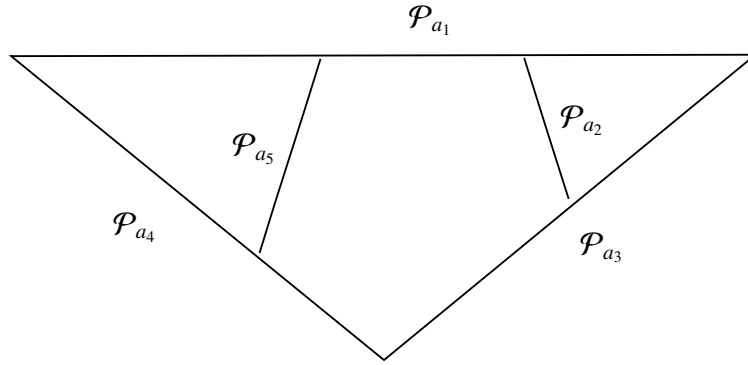

 Abbildung 3.2: Prototypen der Außenknoten von G .

Abb. 3.2). In einem letzten Schritt sei für jeden inneren Knoten v die konvexe Menge P_v ein regelmäßiges Fünfeck mit horizontaler unteren Seite.

Mit dieser Ausgangslage können wir das *Convex Packing Theorem* anwenden. Damit erhalten wir die Existenz einer Kontaktdarstellung des erweiterten Graphen $\tilde{G}$, wobei a_1, a_3, a_4 durch $P_{a_1}, P_{a_3}, P_{a_4}$ und alle anderen Knoten v durch eine homothetische Kopie von P_v oder durch einen einzelnen Punkt repräsentiert werden. Wie oben angesprochen, wollen wir Letzteres nun ausschließen. Nehmen wir dafür also an, dass wir eine entartete Kontaktdarstellung von $\tilde{G}$ erhalten. Sei H eine maximale Zusammenhangskomponente des durch die Knoten induzierten Subgraphen von $\tilde{G}$, deren Fünfecke auf einen Punkt degeneriert sind. Da zumindest die zum äußeren Dreieck gehörenden Strecken nicht entartet sind, muss H durch einen Kreis C beschränkt sein, der aus Knoten besteht, deren zugehörige Prototypen nicht entartet sind. Da in einer Kontaktdarstellung alle Knoten aus H auf einen Punkt zusammengezogen werden, müssen sich alle Knoten aus C in genau diesem treffen. Aus geometrischen Gründen können sich jedoch maximal zwei Fünfecke in genau einem Punkt treffen. Also muss C ein Kreis aus zwei Kanten sein, was im Widerspruch zur Trianguliertheit eines einfachen Graphen (ohne Mehrfachkanten) steht.

□

3.2 Fünf Farben Wald

Wie schon in der Einleitung angedeutet, ist eins unserer wichtigsten Hilfsmittel für den Umgang mit regelmäßigen Fünfeckskontaktdarstellungen eine Färbung sowie Orientierung der Kanten aus G , die wir im Folgenden als Fünf Farben Wald definieren wollen.

Dazu sei der zugrundeliegende Graph G wieder eine 5-Triangulierung, wobei die Außenfläche $a_1, \dots, a_5$ aus im Uhrzeigersinn angeordneten Knoten besteht. Wenn wir im Folgenden über die Farben $1, \dots, 5$ sprechen, werden wir diese immer *modulo 5* betrachten, womit zum Beispiel -1 und 4 die gleiche Farbe bestimmt.

Definition 1. Ein *Fünf Farben Wald* von G ist eine Orientierung und Färbung der inneren Kanten von G in den Farben $1, \dots, 5$ (hier Rot, Grün, Blau, Orange, Lila) mit den

folgenden Eigenschaften (vgl. Abb. 3.3):

- (F1) Alle zu a_i inzidenten Kanten sind zu a_i gerichtet und in der Farbe i gefärbt.
- (F2) Für jeden inneren Knoten v bilden die eingehenden Kanten fünf (evtl. leere) Blöcke B_i , $i = 1, \dots, 5$ von Kanten der Farbe i , wobei $B_1, \dots, B_5$ im Uhrzeigersinn angeordnet sind. Darüber hinaus hat v höchstens eine ausgehende Kante der Farbe i . Solch eine liegt zwischen den Blöcken B_{i+2} und B_{i-2} .
- (F3) Für jeden inneren Knoten und für $i = 1, \dots, 5$ ist der Block B_i nicht leer oder eine der ausgehenden Kanten der Farben $i - 2$ und $i + 2$ existiert.

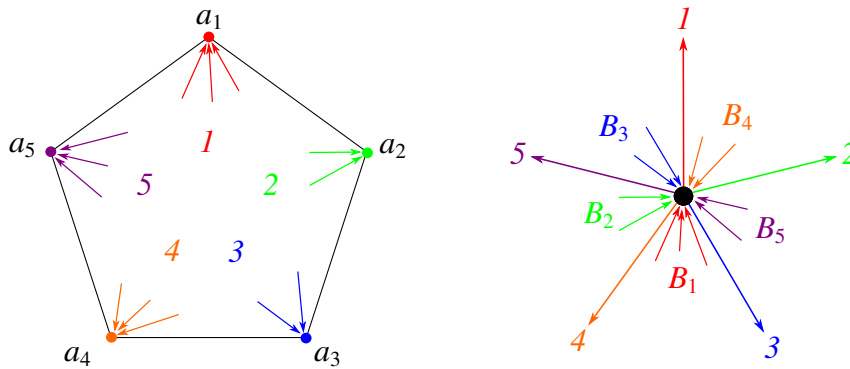


Abbildung 3.3: Die lokalen Bedingungen eines Fünf Farben Waldes.

3.2.1 Existenz eines Fünf Farben Waldes

Wie für die in Kapitel 2 vorgestellten Schnyder Woods wollen wir nun eine zu Satz 2.3 analoge Existenzaussage treffen und somit zeigen, dass die Menge der Fünf Farben Wälder auf einem von uns betrachteten Graphen nicht leer ist.

Satz 3.3. Sei G eine 5-Triangulierung mit Außenfläche $a_1, \dots, a_5$. Dann existiert ein Fünf Farben Wald auf G .

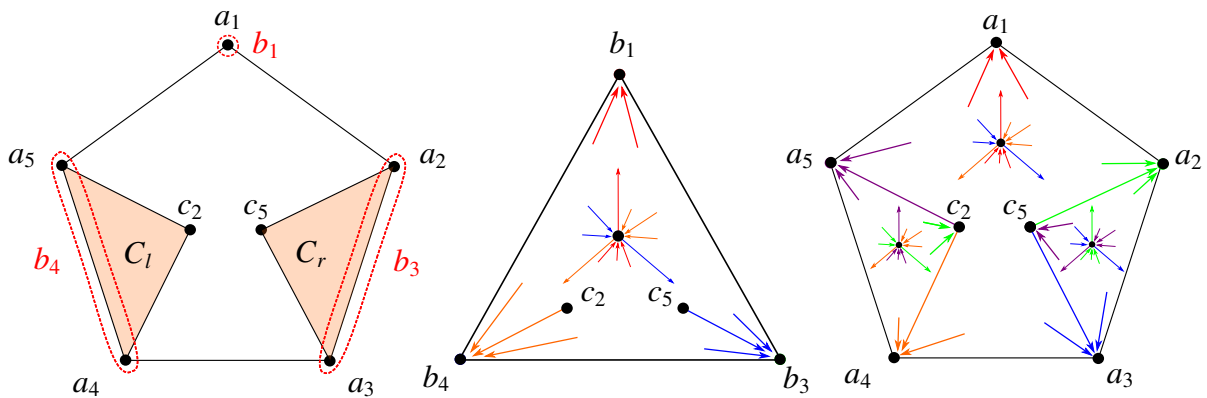


Abbildung 3.4: Konstruktion eines Fünf Farben Waldes.

Beweis. Wir kontrahieren die Kante a_2a_3 zu einem Knoten b_3 sowie die Kante a_4a_5 zu einem Knoten b_4 . Dabei sei zu beachten, dass die maximalen Dreiecke $D_r := c_5a_2a_3$ und $D_l := c_2a_4a_5$, welche inzident zu a_2a_3 bzw. a_4a_5 sind, mit gesamten Inneren, auf eine einzelne Kante (c_5b_3 bzw. c_2b_3) kontrahiert werden. Wir definieren a_1 als b_1 und erhalten so eine 3-Triangulierung T mit Außenfläche b_1, b_3, b_4 . Nun wenden wir Satz 2.3 an, der besagt, dass ein Schnyder Wood auf T existiert. Dabei verwenden wir statt den Farben 1, 2, 3 die Farben 1, 3, 4.

Nun setzen wir Farben sowie Orientierungen aller inneren Kanten von G , die weder im Inneren von D_r oder D_l liegen noch inzident zu den äußeren Knoten a_2 oder a_5 sind, analog zu der Färbung und Orientierung aus T . Alle Kanten, die nicht im Inneren der maximalen Dreiecke D_r und D_l liegen und inzident zu a_2 sind, orientieren in Richtung a_2 und färben sie in der Farbe 2. Analoges machen wir für alle Kanten, die die eben genannte Bedingung erfüllen und inzident zu a_5 sind, mit der Farbe 5.

In einem letzten Schritt färben und orientieren wir nun noch die Kanten aus dem Inneren von D_r bzw. D_l . Dies realisieren wir mit demselben Vorgehen wie beim Grunddreieck. Wir konstruieren also einen Schnyder Wood mit den Farben 5, 2, 3 auf D_r (wobei in c_5 die Kanten mit Farbe 5 eingehen, in a_2 die mit Farbe 2 und in a_3 die mit Farbe 3). Selbiges machen wir auf D_l mit den Farben 2, 4, 5.

Es kann leicht überprüft werden, dass diese Färbung und Orientierung der Kanten aus G den Eigenschaften eines Fünf Farben Waldes genügt. (F1) folgt dabei direkt aus der Konstruktion (da stets alle zu äußeren Knoten inzidenten Kanten zu diesen orientiert sowie in der nötigen Farbe gefärbt wurden). (F2) und (F3) sind durch die geerbten Eigenschaften des Schnyder Woods erfüllt.

□

3.2.2 Zusammenhang mit Fünfeckskontaktdarstellungen

Der Zusammenhang zwischen einem Fünf Farben Wald und einer zugrundeliegenden Kontaktdarstellung mit Fünfecken wird mithilfe des folgenden Satzes deutlich.

Satz 3.4. Jede Fünfeckskontaktdarstellung induziert einen Fünf Farben Wald auf dem dazugehörigen Kontaktgraphen.

Beweis. Sei S eine nicht entartete, regelmäßige Fünfeckskontaktdarstellung des Graphen $G = G^*(S)$. Wir färben die Seiten jedes inneren Fünfecks beginnend mit der horizontalen unteren Seite im Uhrzeigersinn, in den Farben 1 bis 5. Berühren sich zwei Fünfecke in S , impliziert dies die Existenz einer (inneren) Kante aus G . Dementsprechend erhalten wir für je zwei sich berührende Fünfecke A und B aus S eine Kante $e \in G$, welche zwischen dem zu A und B gehörenden Knoten aus G liegt. Da S nicht entartet ist, sind an einer Berührung immer eine Ecke des einen und eine Seite des anderen Fünfecks beteiligt. Wir orientieren e in Richtung des Fünfecks, bei dem der Kontaktpunkt auf einer Seite liegt und färben die Kante in der Farbe dieser (vgl. Abb. 3.5). Zum Schluss färben und orientieren wir noch für $i = 1, \dots, 5$ alle zu einem äußeren Knoten a_i inzidenten Kanten in Richtung a_i in der Farbe i .

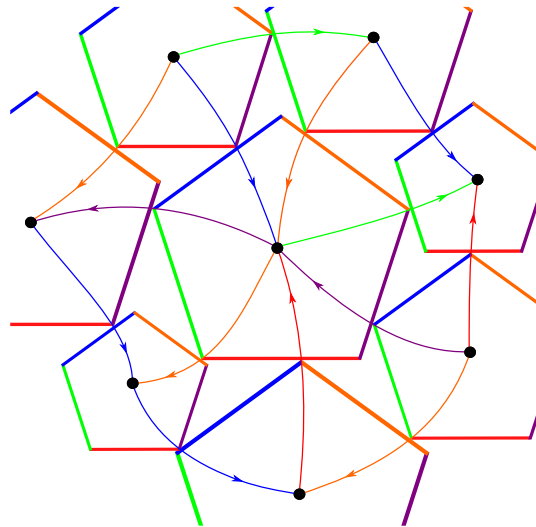


Abbildung 3.5: Die lokale Konstruktion des induzierten Fünf Farben Waldes.

Wollen wir uns nun vergewissern, dass diese Konstruktion alle Bedingungen eines Fünf-farbenwaldes erfüllt:

(F1): Folgt direkt aus der Konstruktion.

(F2): Da jede ausgehende Kante eines inneren Knoten v eine Ecke des dazugehörigen Fünfecks voraussetzt, folgt, dass jedes v maximal fünf ausgehende Kanten haben kann. Jede eingehende Kante von v setzt wiederum eine Berührung eines anderen Fünfecks (genauer gesagt einer Ecke dessen) an einer der fünf Seiten des zu v gehörigen Fünfecks voraus. Die Kante wird in der Farbe dieser Seite gefärbt und liegt folglich auch im richtigen Intervall.

(F3): Diese Eigenschaft prüfen wir im Fall $i = 1$. Die anderen Fälle folgen analog. Wir wollen also zeigen, dass der Block B_1 nicht leer ist oder eine der ausgehenden Kanten der Farbe 4 und 3 existiert. Sei dafür v ein innerer Knoten von G und A das entsprechende Fünfeck von $\mathcal{S}$. Da G trianguliert ist, müssen sich die Fünfecke, die zwei aufeinanderfolgenden Nachbarn von v entsprechen, berühren. Dementsprechend muss ein Fünfeck B dieser Fünfecke die Fläche unter der horizontalen Seite von A schneiden. Diese ist nur möglich, wenn der Kontakt von A und B einer in v eingehenden Kante entspricht (die obere Ecke von B berührt die untere Seite von A), die notwendigerweise von der Farbe 1 ist oder der Kontakt einer von v ausgehenden Kante von der Farbe 3 (die rechte untere Ecke von A berührt die Seite links oben von B) oder 4 (die linke untere Ecke von A berührt die Seite rechts oben von B) entspricht.

□

3.2.3 Zusammenhang mit α -Orientierungen

In [8] wurde gezeigt, dass 3-Orientierungen einer planaren Triangulierung in Bijektion mit Schnyder Woods stehen. Ein analoges Resultat für Fünf Farben Wälder wollen wir in diesem Abschnitt ausarbeiten. Anders als bei einem gegebenen Schnyder Wood (vgl. Satz 2.4), der uns durch Vernachlässigen der Färbung, durch die Eigenschaft (S2) direkt

eine 3-Orientierung der inneren Knoten liefert, wissen wir durch (F2) nur, dass jeder innere Knoten unseres Graphen maximal 5 ausgehende Kanten besitzt. Die Idee ist nun, Kanten hinzuzufügen, sodass jeder innere Knoten auf diesem erweiterten Graphen genau 5 ausgehende Kanten besitzt.

Wie wir im vorherigen Abschnitt festgestellt haben, spiegelt jede ausgehende Kante eines inneren Knotens aus G eine der fünf Ecken des dazugehörigen Fünfecks in der Kontaktdarstellung wieder. Das folgende Lemma entspricht der Tatsache, dass in einer regelmäßigen Fünfeckskontaktdarstellung der Bereich zwischen drei Fünfecken, welcher einer inneren Fläche von G entspricht, ein Viereck mit genau einer konkaven Ecke ist. Wie sich herausstellt entspricht diese konkave Ecke der zum dazugehörigen Fünfeck in dieser Ecke fehlenden Kante.

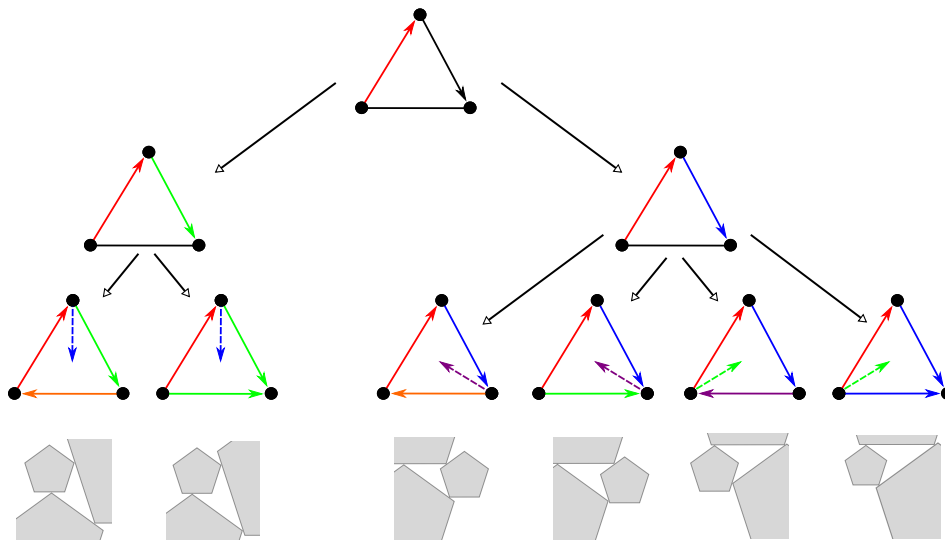


Abbildung 3.6: Die Fallunterscheidung von Lemma 3.5 und die jeweiligen hypothetischen Kontaktdarstellung der drei zur Fläche gehörenden Fünfecke.

Wir werden im Weiteren eine innere Fläche f , die zu maximal einem äußeren Knoten inzident ist, eine *echte innere Fläche* nennen.

Lemma 3.5. Sei G eine 5-Triangulierung mit gegebenen Fünf Farben Wald sowie f eine echte innere Fläche. Dann fehlt in genau einem der drei Innenwinkel von f eine in zyklischer Ordnung des jeweiligen Knotens ausgehende Kante.

Beweis. Der Beweis setzt sich im Wesentlichen durch eine Fallunterscheidung zusammen. Da jede innere Fläche von G von drei Kanten umschlossen wird, muss ein orientierter Pfad der Länge ≥ 2 existieren. Wir nehmen nun an, dass dieser Pfad im Uhrzeigersinn verläuft und mit einer Kante der Farbe 1 (Rot) startet. Alle anderen Fälle ergeben sich aus Symmetrie. Durch (F3) wissen wir, dass auf eine in den Knoten eingehende Kante der Farbe 1 nur eine ausgehende Kante der Farbe 2 (Grün) oder 3 (Blau) folgen kann (wenn eine solche existiert). Abbildung 3.6 zeigt alle möglichen Fälle für die Orientierung und Färbung der dritten Kante und überprüft die Aussage für alle diese Fälle. $\square$

3. FÜNFECKSKONTAKTDARSTELLUNGEN

Auf Grundlage dieses Lemmas wollen wir nun eine Erweiterung unseres Graphen G definieren, die uns garantiert, dass jeder innere Knoten aus G genau 5 ausgehende Kanten besitzt.

Definition 2. Der *Stackgraph* G^* von G ist eine Erweiterung von G , die für jede echte innere Fläche einen weiteren Knoten besitzt. Dieser neue Knoten ist mit jedem der drei Knoten der jeweiligen Fläche verbunden. Wir nennen diese Knoten *Stack Knoten* und die ursprünglichen Knoten aus G *normale Knoten*.

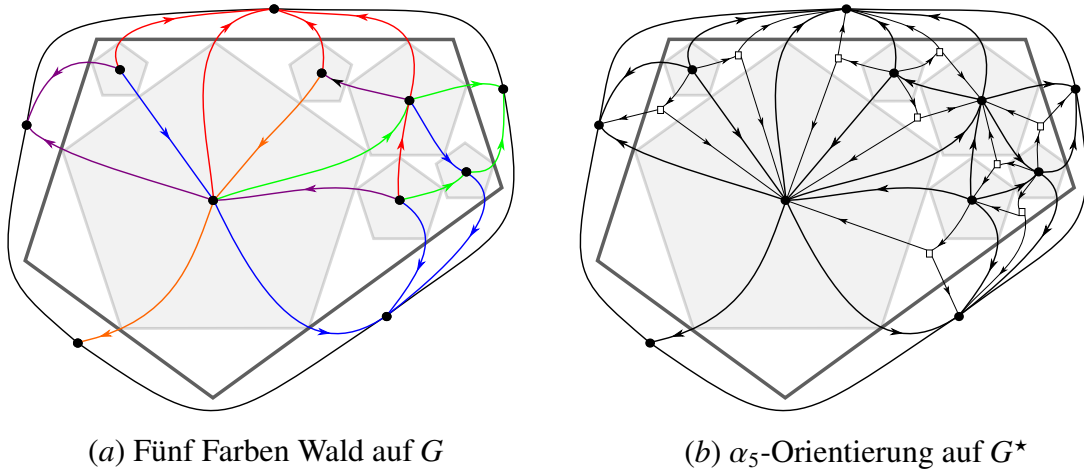


Abbildung 3.7: (a) Der von der Fünfeckskontaktdarstellung induzierte Fünf Farben Wald (b) Die dazugehörige α_5 -Orientierung auf der Stack Erweiterung G^* . Aus Gründen der besseren Anschaulichkeit wurde in der Grafik keine geradlinige Einbettung genutzt.

Wir definieren die Abbildung $\alpha_5 : V(G^*) \rightarrow \mathbb{N}$ durch

$$\alpha_5(v) = \begin{cases} 2 & , \text{ wenn } v \text{ ein Stack Knoten ist,} \\ 5 & , \text{ wenn } v \text{ ein normaler Knoten ist,} \\ 0 & , \text{ wenn } v \text{ ein äußerer Knoten ist.} \end{cases}$$

Ein Fünf Farben Wald F auf G induziert eine α_5 -Orientierung auf der Stack Erweiterung G^* . Das erhalten wir, indem wir für Kanten aus G die Orientierungen aus F beibehalten und für jeden Stack Knoten die aus Lemma 3.5 fehlende Kante als die eindeutige eingehende Kante sowie die zu den beiden anderen Knoten der Fläche inzidenten Kanten als die beiden ausgehenden Kanten des Stack Knotens definieren.

Bevor wir zeigen wollen, dass die Fünf Farben Wälder einer 5-Triangulierung G in Bijektion zu α -Orientierungen des Stackgraphen G^* stehen, werden wir einige allgemeine Feststellungen über Kreise in G^* machen. Anschließend werden wir Pfade $\mathcal{P}(e)$ definieren, die mit einer inneren Kante e beginnen und an einem der äußeren Knoten enden. Diese erlauben uns die Farbe von e zu definieren. Halten wir aber zuerst die Aussagen über Kreise fest.

Lemma 3.6. Sei C ein einfacher Kreis in G^* mit Länge ℓ , wobei alle Knoten von C normale Knoten sind. Dann zeigen genau $2\ell - 5$ Kanten von C in das Innere von C .

Wir wollen den Beweis aus [7] hier noch einmal nachvollziehen.

Beweis. Wir betrachten zuerst einen Kreis C der Länge ℓ in G . Sei k die Anzahl der (normalen) Knoten im Inneren von C . Da G eine Triangulierung ist, existieren genau $2k + \ell - 2$ innere Flächen und $3k + \ell - 3$ Kanten im Inneren von C . Nun betrachten wir G als Kreis in G^* . Damit ist die Anzahl der Kanten im Inneren von C gleich:

$$3(2k + \ell - 2) + (3k + \ell - 3) = 9k + 4\ell - 9.$$

Der erste Term ergibt sich daraus, dass pro innerer Fläche von C , also $(2k + \ell - 2)$ mal, ein Stack Knoten in G^* dazugekommen ist und somit drei weitere Kanten. Addiert mit den Kanten des Inneren aus G , also den zu normalen Knoten gehörenden, erhalten wir die Anzahl der Kanten bezüglich G^* .

Die Anzahl der Kanten, die von einem Knoten aus dem Inneren von C starten, berechnet sich durch fünf ausgehende Kanten jedes inneren, normalen Knotens, addiert mit den für jeden Stack Knoten (also den in jeder inneren Fläche liegenden Knoten) zwei ausgehenden Kanten:

$$2(2k + \ell - 2) + 5k = 9k + 2\ell - 4.$$

Subtrahieren wir nun die ausgehenden Kanten der inneren Knoten von C von der Gesamtanzahl der Kanten des Kreises in G^* , erhalten wir die Anzahl der Kanten, die von einem Knoten von C ins Innere des Kreises zeigen:

$$(9k + 4\ell - 9) - (9k + 2\ell - 4) = 2\ell - 5.$$

□

Lemma 3.7. Die Orientierung $T := T_i + T_{i-1} + T_{i+1} + T_{i-2}^{-1} + T_{i+2}^{-1}$ von G ist azyklisch (zykelfrei).

Der folgender Beweis stammt aus [7].

Beweis. Angenommen, C ist ein einfach gerichteter Kreis der Länge ℓ in T . Wegen Symmetrie reicht es, den Fall zu betrachten, dass C im Uhrzeigersinn orientiert und $i = 1$ ist. Wir definieren eine Hilfsfunktion π für die fünf Farben:

$$\pi(1) := 1, \pi(2) := 0, \pi(3) := 2, \pi(4) := 1, \pi(5) := 2.$$

Sei e eine Kante der Farbe c , die bezüglich T in v endet sowie e' eine Kante der Farbe c' , die bezüglich T in v startet. Man kann sich überlegen, dass es genau $\pi(c') + (2 - \pi(c))$ Kanten in der α_5 -Orientierung von G^* gibt, die von v ausgehen und im Winkel zwischen e und e' liegen.

Seien nun $e_1, \dots, e_\ell$ die Kanten des Kreises C und sei c_i die Farbe von Kante e_i . Dann ist die Anzahl der Kanten, die von C in das Innere zeigen (in der α_5 -Orientierung von G^*):

$$\sum_{i=1}^{\ell-1} (\pi(c_{i+1}) - \pi(c_i) + 2) + (\pi(c_1) - \pi(c_\ell) + 2) = \sum_{i=1}^{\ell} 2 = 2\ell,$$

was im Widerspruch zu Lemma 3.6 steht.

□

Als erste Anwendung der vorausgehenden Lemmata wollen wir drei Eigenschaften von gerichteten Kreisen in G zusammenfassen. Diese werden im weiteren Verlauf dieser Arbeit zwar keine zentrale Rolle spielen, bieten jedoch ein Pendant zu einer gleichwertigen Aussage über gerichtete Kreise einer 3-Triangulierung mit zugehörigen Schnyder Wood aus [13].

Satz 3.8. Sei C ein gerichteter Kreis in G . Dann gilt:

- (i) C benutzt mindestens drei verschiedene Farben.
- (ii) Wenn C genau drei verschiedene Farben benutzt, sind diese nicht in der aufeinanderfolgenden zyklischen Reihenfolge.
- (iii) C hat zwei aufeinanderfolgende Kanten, deren Farben höchstens Abstand eins haben (in zyklischer Reihenfolge).

Beweis. Die Eigenschaften (i) und (ii) folgen direkt aus Lemma 3.7.

Für Eigenschaft (iii) nehmen wir an, dass ein Kreis C existiert, sodass der Abstand der Farben von je zwei aufeinanderfolgenden Kanten genau zwei ist. Können wir diese Existenz widerlegen, folgt die Aussage direkt. Sei C im Uhrzeigersinn orientiert und weiter seien $e = uv$ und $e' = vw$ zwei aufeinanderfolgende Kanten aus C in den Farben i und $(i + 1)$. Mit der Eigenschaft (F2) aus der Definition eines Fünf Farben Waldes folgt, dass keine Kante vom Knoten v in das Innere von C zeigen kann. Wenn die Kante e' die Farbe $(i - 2)$ hat, folgt mit (F2) wiederum, dass genau vier Kanten in das Innere von C zeigen. Zusammengefasst ist also die Anzahl der Kanten, die in das Innere des Kreises zeigen, gerade. Das steht jedoch im Widerspruch zu Lemma 3.6. Somit kann ein Kreis mit diesen Eigenschaften nicht existieren. Der Fall, dass die Kanten aus C gegen den Uhrzeigersinn gerichtet sind, ergibt sich aus der Symmetrie. $\square$

Kommen wir nun zu den oben angesprochenen Pfaden, die eine zentrale Rolle im Beweis der Hauptaussage dieses Abschnitts spielen werden. Wir werden $\mathcal{P}(e)$ zuerst allgemein als Menge von Wegen definieren. In einem späteren Lemma werden wir jedoch sehen, dass es sich dabei in der Tat um eine Menge von Pfaden handelt. Die Idee zur Konstruktion der Pfade ist es, mit einer inneren Kante e zu starten und dann immer mit der entgegengesetzten, ausgehenden Kante dieser fortzufahren. Sobald wir in einen Stack Knoten kommen, müssen wir jedoch anders vorgehen. Die Pfade sind nicht eindeutig. Wir werden aber feststellen, dass alle Pfade, die mit der gleichen Kante e beginnen, am selben äußeren Knoten enden.

Sei $e = uv$ eine innere Kante, wobei u ein normaler Knoten ist. Wir definieren rekursiv die Menge $\mathcal{P}(e)$ von Wegen, die mit derselben Kante e starten, durch eine Fallunterscheidung des Endknotens v dieser Kante:

1. v ist ein äußerer Knoten ($v \in \{a_1, \dots, a_5\}$):
Die Menge $\mathcal{P}(e)$ enthält nur einen Pfad, bestehend aus der Kante e .
2. v ist ein normaler, innerer Knoten ($v \in G \setminus \{a_1, \dots, a_5\}$):
Sei e' die gegenüberliegende, ausgehende Kante von e (das heißt die dritte ausgehende Kante mit bzw. gegen den Uhrzeigersinn von e). Dann definieren wir die

Menge $\mathcal{P}(e) := \{e + P : P \in \mathcal{P}(e')\}$.

3. v ist ein Stack Knoten ($v \in G^* \setminus G$):

Seien $e'_1 = vv'_1$ und $e'_2 = vv'_2$ die links bzw. rechts ausgehenden Kanten von v . Weiter seien e''_1 die zweite ausgehende Kante von v'_1 nach e'_1 gegen Uhrzeigersinn und e''_2 die zweite ausgehende Kante von v'_2 nach e'_2 im Uhrzeigersinn (vgl. Abb. 3.8 Links). Die Kante e''_i ist wohldefiniert, wenn v'_i kein äußerer Knoten ist. Da v'_1 und v'_2 nicht gleichzeitig äußere Knoten sein können (u, v'_1, v'_2 bilden eine innere Fläche, die keine echte innere Fläche ist, wenn beide v'_i äußere Knoten sind). Wenn e''_1 und e''_2 wohldefiniert sind, definiere $\mathcal{P}(e) := \{e + e''_1 + P : P \in \mathcal{P}(e'_1)\} \cup \{e + e''_2 + P : P \in \mathcal{P}(e'_2)\}$. Wenn nur eine Kante e''_i wohldefiniert ist, definiere $\mathcal{P}(e) := \{e + e''_i + P : P \in \mathcal{P}(e'_i)\}$.

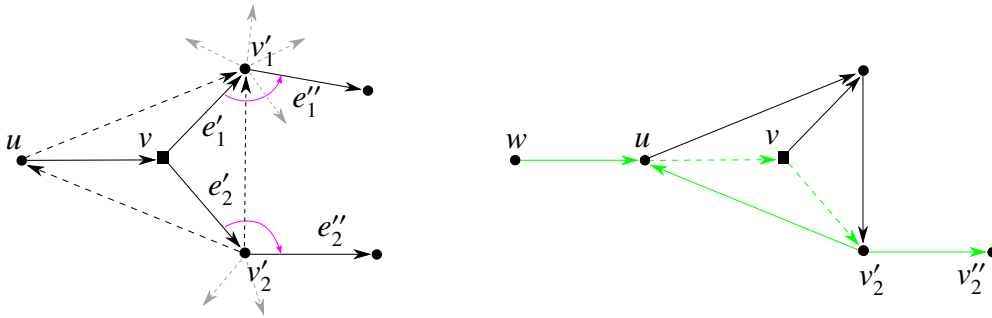


Abbildung 3.8: *Links*: Eine beispielhafte Situation (Fall 3) bei der Konstruktion der Pfade $\mathcal{P}(e)$, *Rechts*: Die Stack Kanten uv und vv'_2 des Pfades $P = (w, u, v, v'_2, v''_2)$ werden im Abkürzungspfad $P' = (w, u, v'_2, v''_2)$ durch die Kante uv'_2 ersetzt. Diese ist in der α_5 -Orientierung v'_2u gerichtet.

Wenn die Wege endlich sind, dann enden sie nach Konstruktion in einem äußeren Knoten. Um dies zu zeigen, müssen wir nachweisen, dass die Wege keine Kreise enthalten. Dazu werden wir uns ansehen, wie viele Kanten rechts bzw. links von einem Pfad abgehen. Wenn wir das wissen, können wir Lemma 3.6 anwenden und den Verdacht, dass Kreise enthalten sind zu einem Widerspruch führen. Da wir in 3.6 allerdings aus normalen Knoten bestehende Kreise betrachten, definieren wir zuerst einmal eine *Abkürzung*, die Stack Knoten umgeht.

Definition 3. Sei P ein endlicher Teilweg eines Weges aus $\mathcal{P}(e)$, wobei e eine normale Kante ist. Das heißt e startet und endet mit einem normalen, inneren Knoten. Dann erhalten wir eine *Abkürzung* P' von P , indem wir jedes aufeinanderfolgende Paar uv, vw von Kanten aus P , durch die Kante uw ersetzen, wenn v ein Stack Knoten ist. Wir nennen die Kante uw eine *Abkürzungs-Kante*.

Bei der obigen Definition sei zu beachten, dass die Abkürzungs-Kante uw nicht notwendigerweise wie in der α_5 -Orientierung gerichtet sein muss, vgl. Abb. 3.8 *Rechts*. Im folgenden Lemma wollen wir nun untersuchen, wie viele Kanten rechts bzw. links von einer Abkürzung abgehen.

Lemma 3.9. Sei P' eine Abkürzung von P der Länge ℓ , die weder mit einer Abkürzungs-Kante startet noch mit einer solchen endet. Dann ist die Anzahl der Kanten, die vom

Inneren von P' nach rechts (links) abgehen gleich $2(\ell - 1)$.

An dieser Stelle wollen wir kurz das Vorgehen erläutern. Den vollständigen Beweis findet man in [7]. Dieser wird mit Induktion über die Länge ℓ von P' geführt. Dafür sei $P' = (v_0, e_1, v_1, \dots, v_{l-1}, e_l, v_l)$. Die Aussage folgt direkt, wenn die Kante e_{l-1} keine Abkürzungs-Kante ist. P' endet mit einer normalen Kante, von dem zwischen zwei aufeinander folgenden normalen Kanten liegenden Knoten gehen stets zwei Kanten zu beiden Seiten ab. Im Falle, dass e_{l-1} eine Abkürzungs-Kante ist, nimmt man die dazugehörigen Original-Kanten aus P und definiert sich einen neuen Teilweg Q' von P' , der von v_0 bis zum Knoten v_{l-2} geht, erweitert um die Kante aus P , die von v_{l-2} zu dem Stack Knoten geht. Dann ziehen wir die rechts-ausgehenden Kanten von Q' am Knoten v_{l-1} sowie v_{l-2} von denen aus P' ab. Durch summieren von rechts abgehenden Kanten von Q' mit den eben genannten Differenzen, erhält man die Anzahl der rechts abgehenden Kanten von P' . Das Verfahren läuft durch Symmetrie analog für die links abgehenden Kanten. $\square$

Lemma 3.10. (i) Die Wege $P \in \mathcal{P}(e)$ sind Pfade.

- (ii) Seien $P_1, P_2 \in \mathcal{P}(e)$ zwei Pfade, die mit derselben Kante e beginnen. Dann enden P_1 und P_2 im selben Außenknoten.
- (iii) Sei v ein normaler Knoten und seien $e_1 = vv_1, e_2 = vv_2$ zwei verschiedene ausgehende Kanten aus v , d.h. $v_1 \neq v_2$. Dann kreuzen sich P_1 und P_2 nicht und sie enden in verschiedenen Außenknoten.

Beweis. (i): Angenommen, C ist ein einfacher Kreis der Länge ℓ , der in einem Teilweg der Abkürzung von P auftritt. Dann folgt aus Lemma 3.9, dass mindestens $2(\ell - 1)$ Kanten in das Innere von C zeigen. Dies steht jedoch im Widerspruch zu Lemma 3.6, welches besagt, dass nur $2\ell - 5$ Kanten in das Innere zeigen.

(ii): Seien $P_1, P_2 \in \mathcal{P}(e)$. Sollten sich die Pfade nicht trennen, enden sie in demselben Außenknoten. Nehmen wir also an die Pfade P_1 und P_2 stimmen bis zu dem Knoten v^* überein, wonach P_1 nach links und P_2 nach rechts abgeht. Dann muss v^* ein Stack Knoten sein, da die Pfade für normale Knoten nach Konstruktion eine eindeutige ausgehende Kante haben. Sei v der Vorgänger von v^* in P_1 und P_2 . Wir wollen zeigen, dass die beiden Pfade eine gemeinsame Nachfolgerkante ww' haben, wenn sie nach dem Trennen wieder in einem Knoten w zusammenkommen, der kein Außenknoten ist. In einem letzten Schnitt schließen wir dann noch aus, dass die Pfade in unterschiedlichen Außenknoten enden können.

(1) Angenommen die Pfade treffen an einem normalen Knoten w wieder aufeinander. Dann seien Q_1 und Q_2 Teilpfade von P_1 und P_2 , die im Knoten v starten und in w enden, erweitert um eine Vorgängerkante $v'v$. Diese ist im Fall, dass die Startkante der beiden Pfade von der Form $e = vv^*$ ist, eine künstlich erzeugte Kante. Andernfalls entspricht sie der direkten Vorgängerkante von v auf den beiden Pfaden. Diese (künstlich erzeugte) Kante dient der Sicherstellung, dass die Anzahl der rechts abgehenden Kanten des Pfades Q_1 gleich der Anzahl der links abgehenden Kanten des Pfades Q_2 am Knoten v sind. Nach Konstruktion ist diese genau zwei. Des Weiteren ergänzen wir die beiden Teilpfade um die jeweiligen Nachfolger Kante ww_1 aus P_1 sowie ww_2 aus P_2 . Dabei können wir

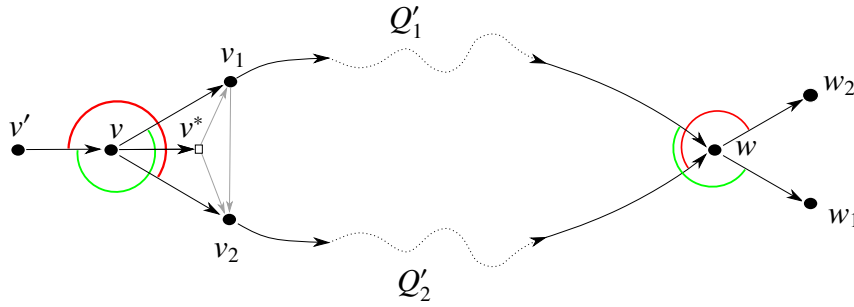


Abbildung 3.9: Beispielhafte Situation: Fall (ii)(1). Im grünen Bereich werden rechts ausgehende Kanten von Q'_1 gezählt, im roten Bereich links ausgehende Kanten von Q'_2 .

annehmen, dass es sich bei w_1 und w_2 um normale Knoten handelt. Andernfalls nutzen wir wieder eine künstlich erzeugte Kante.

Für $i = 1, 2$ seien Q'_i die Abkürzungspfade von Q_i . Da die Pfade unter anderem den Knoten v^* umgehen, stellen wir zuallererst fest, dass die Anzahl der rechts abgehenden Kanten des Pfades Q'_1 summiert mit der Anzahl der links abgehenden Kanten des Pfades Q'_2 am Knoten v gleich sechs ist. Dies gilt, da jede ausgehende Kante von v eine rechts abgehende Kante bzgl. Q'_1 und eine links abgehende Kante bzgl. Q'_2 ist, die ausgehende Stackkante vv^* ist beides und somit wird somit doppelt gezählt (vgl. Abb. 3.9). Sei ℓ_i die Länge von Q'_i . Durch Lemma 3.9 wissen wir, dass genau $2(\ell_1 - 1)$ Kanten von Q'_1 nach rechts zeigen und genau $2(\ell_2 - 1)$ von Q'_2 nach links zeigen. Sei C der Kreis, der durch Zusammenführen von Q'_1 und Q'_2 zwischen den Knoten v und w erhalten wird. Dann ist die Länge von C gleich $\ell_1 + \ell_2 - 4$ (da die jeweiligen Vor- bzw. Nachgängeranten nicht in C enthalten sind). Mit Lemma 3.6 folgt, dass genau $2(\ell_1 + \ell_2 - 4) - 5$ Kanten in das Innere von C zeigen. Dabei wird die Summe der rechts abgehenden Kanten von Q'_1 und der links abgehenden Kanten von Q'_2 für die Kanten, die in das Innere von C zeigen, an allen Knoten, bis auf v und w , richtig gezählt. Mit der obigen Feststellung, dass diese Summe am Knoten v gleich sechs ist, wissen wir also schon einmal, dass wir an diesem Knoten genau fünf Kanten zu viel zählen. Daher ist die Anzahl der Kanten, die wir im Knoten w zu viel zählen gleich

$$(2(\ell_1 - 1) + 2(\ell_2 - 1)) - (2(\ell_1 + \ell_2 - 4) - 5) - 5 = 4.$$

Somit wird jede Kante, abgesehen von einer einzigen, zu viel gezählt. Damit dies der Fall ist, müssen die Kanten ww_1 und ww_2 identisch sein.

(2) Angenommen, die Pfade enden in zwei verschiedenen Außenknoten a_i, a_j . Seien Q_1 und Q_2 (wie oben) Teilpfade von P_1 und P_2 , die im Knoten v starten und in diesem Fall in a_i bzw. a_j enden, erweitert um eine Vorgängerante $v'v$. Diese ist evtl. wieder künstlich erzeugt, wie in (1). Für $i = 1, 2$ seien Q'_i die Abkürzungspfade von Q_i . Weiter seien $\ell_i + 1$ die Längen der Pfade. Wir definieren einen neuen Pfad P_3 zwischen a_i und a_j , der zwischen äußeren und (inneren) normalen Knoten alterniert, wobei die Länge des Pfades $\ell_3 \geq 2$ ist, da $a_i \neq a_j$. P_3 enthält also $\ell_3/2$ normale sowie $\ell_3/2 + 1$ äußere Knoten. Sei C der Kreis, der in der Vereinigung von Q'_1, Q'_2 und P_3 liegt. Weiterhin kann P_3 maximal eine gemeinsame Kante mit jedem Q'_i haben. Sei $\xi \in \{0, 1, 2\}$ also die Anzahl gemeinsamer Kanten von P_3 mit $Q'_1 \cup Q'_2$. Dann ist die Länge des Kreises gleich $\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 - 2\xi$, da der Kreis Q'_i jeweils ohne die Vorgängerante $v'v$ enthält und eine gemeinsame Kante

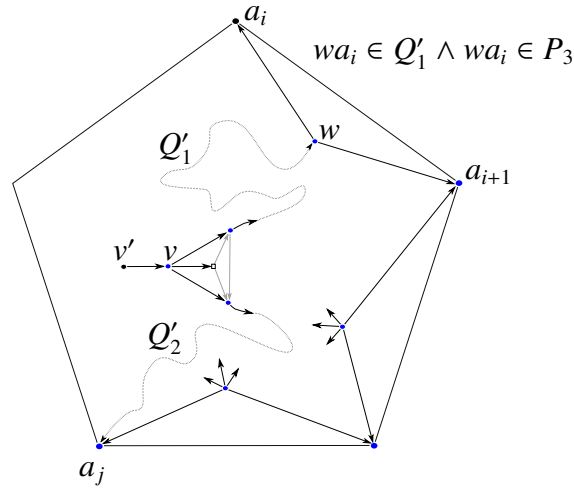


Abbildung 3.10: Beispielhafte Situation: Fall (ii)(2) für $\xi = 1$. Die blau gefärbten Knoten liegen auf C .

von Q'_i und P_3 ebenfalls nicht auf C liegt, aber (doppelt) gezählt wird. Wenn $\xi = 0$ ist, erhalten wir die Anzahl der Kanten, die in das Innere von C zeigen durch die Summe der rechts abgehenden Kanten von Q'_1 und den links abgehenden Kanten von Q'_2 , von der wir noch fünf Kanten, wie in (1) für das zu viel Zählen am Knoten v abziehen sowie für jeden inneren Knoten von P_3 jeweils drei Kanten addieren müssen. Wenn Q'_1 die letzte Kante mit P_3 teilt, dann müssen wir den Beitrag des ersten normalen Knotens w von P_3 ignorieren. Weiterhin müssen wir für die Kante wa_{i+1} , die in diesem Fall auf C liegt, aber gleichzeitig als rechte Kante von Q'_1 gezählt wird, eine Kante subtrahieren. Für eine gemeinsame Kante von Q'_2 und P_3 verhält es sich analog (vgl. Abb. 3.10). Somit erhalten wir die Anzahl der Kanten, die in das Innere von C zeigen durch:

$$2\ell_1 + 2\ell_2 - 5 - \xi + 3(\ell_3/2 - \xi) = 2(\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 - 2\xi) - 5 - \ell_3/2.$$

Da $\ell_3 \geq 2$ gilt, ist dies weniger als $2(\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 - 2\xi) - 5$, was, wie wir durch Lemma 3.6 wissen, die genaue Anzahl der Kanten ist, die in das Innere von C zeigen.

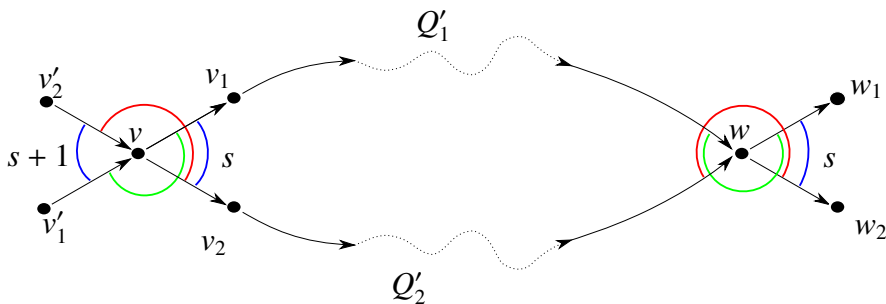


Abbildung 3.11: Beispielhafte Situation: Fall (iii). Ausgehende Kanten im grünen (roten) Bereich sind wie oben die rechts (links) ausgehenden Kanten von Q'_1 (Q'_2). Im blauen Bereich liegen s bzw. $s + 1$ Kanten.

(iii): Angenommen P_1 und P_2 haben einen gemeinsamen Knoten, der nicht v entspricht. Wenn dies nicht der Fall ist, gilt die Aussage. Sei also w der erste gemeinsame Knoten der

beiden Pfade (nach dem Knoten v). Seien für $i = 1, 2$ Q_i die Teilpfade von P_i , die im Knoten v starten und in w enden, erweitert um eine jeweilige Vorgängerkante $v'_i v$ (wie in (ii) evtl. künstlich hinzugefügt) von v sowie die jeweilige Nachfolgekante ww_i von w . Wobei wir wieder annehmen können, dass es sich bei den jeweiligen Kanten um normale Kanten handelt. Weiter seien Q'_i die dazugehörigen Abkürzungspfade, mit jeweiliger Länge ℓ_i . Sei C der Kreis, der durch vereinen von Q'_1 und Q'_2 zwischen den Knoten v und w entsteht. Dann ergibt sich die Länge von C aus $\ell_1 + \ell_2 - 4$. Sei $s \in \{0, 1\}$ die Anzahl der ausgehenden Kanten zwischen vv_1 und vv_2 . Das heißt die ausgehenden Kanten, die von v in das Innere von C zeigen. Da wir durch die Vorgängerkanten $v'_i v$ sichergestellt haben, dass die Anzahl der von Q_i rechts bzw. links abgehende Kanten am Knoten v gleich zwei ist, wobei die s Kanten zwischen vv_i in beiden Fällen (und somit doppelt) gezählt werden, ergibt sich die Anzahl der ausgehenden Kanten zwischen $v'_2 v$ und $v'_1 v$ durch $5 - 4 + s = s + 1$. Wenn wir nun also die Anzahl der Kanten, die von Q'_1 nach rechts zeigen mit denen, die von Q'_2 nach links zeigen addieren, zählen wir $5 - (s + 1)$ Kanten am Knoten v zu viel (vgl. Abb. 3.11). Mit Lemma 3.6 müssen genau $2(\ell_1 + \ell_2 - 4) - 5$ Kanten in das Innere von C zeigen. Daher gilt, dass wir am Knoten w genau

$$(2(\ell_1 - 1) + 2(\ell_2 - 1)) - (5 - (s + 1)) - (2(\ell_1 + \ell_2 - 4) - 5) = 5 + s$$

Kanten zu viel zählen. Um dieses Resultat zu erhalten, müssen alle Kanten in der Vereinigung der rechts von Q'_1 sowie der links von Q'_2 abgehenden Kanten liegen. Somit können sich die Pfade nicht kreuzen, das heißt die Kante ww_1 muss auf der linken Seite von Q'_2 liegen. Wären beide Vorgängerkanten von w normale Kanten, müssten sich die Pfade nach Konstruktion jedoch im Knoten w kreuzen. Somit muss mindestens eine der beiden (auf Q'_1 oder Q'_2 liegende) Vorgängerkanten von w eine Abkürzungskante sein. Dies impliziert jedoch, dass w kein Außenknoten sein kann, da eine solche Kante niemals Vorgänger eines äußeren Knotens ist. Weiterhin existieren genau s ausgehende Kanten zwischen ww_1 und ww_2 . Somit können wir das Argument für die neuen Teilpfade von P_1 und P_2 , die im Knoten w starten, induktiv wiederholen. $\square$

Kommen wir nun zur Hauptaussage dieses Abschnitts.

Satz 3.11. α_5 -Orientierungen stehen in Bijektion mit Fünf Farben Wäldern.

Der folgende Beweis stammt aus [7].

Beweis. Sei $\mathcal{F}$ die Menge der Fünf Farben Wälder von G und $\mathcal{A}$ die Menge von α_5 -Orientierungen auf G^* . Seien weiter $\chi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{A}$ die kanonische Abbildung von der Menge der Fünf Farben Wälder in die der α_5 -Orientierungen und $\psi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{F}$ die Zuordnung, welche die Orientierung der Kanten behält und jede Kante e in der zu dem äußeren Knoten gehörende Farbe färbt, in der $\mathcal{P}(e)$ endet.

Als erstes wollen wir zeigen, dass $\psi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{F}$ wohldefiniert ist.

Mit Lemma 3.10 (i) und (ii) folgt, dass ψ eine wohldefinierte Färbung von Kanten aus G ist. Es verbleibt jedoch zu zeigen, dass diese Färbung auch den Eigenschaften eines Fünf Farben Waldes genügt.

(F1): Folgt direkt aus der Konstruktion der Pfade.

(F2): Da sich die Pfade von zwei unterschiedlich ausgehenden Kanten eines inneren Knotens nicht kreuzen und sie in verschiedenen Außenknoten enden (vgl. Lemma 3.10 (iii)), muss die Färbung der ausgehenden Kanten eines inneren Knotens mit der Reihenfolge der Farben der äußeren Ecken übereinstimmen. Da wir bei den Pfaden mit einer inneren Kante starten und dann immer mit der entgegengesetzten ausgehenden Kante fortfahren, ist auch klar, dass die eingehenden Kanten einer Farbe entgegengesetzt der ausgehenden Kante der gleichen Farbe sind.

(F3): Angenommen es existiert ein innerer Knoten, der keine ausgehenden Kanten der Farben $i - 2$ und $i + 2$ in G hat. Diese Kanten entsprechen demzufolge den eindeutigen Kanten aus Lemma 3.5, das heißt denen, die in einen Stack Knoten zeigen. In dem Intervall zwischen den beiden Kanten muss mindestens eine normale Kante aus G liegen, da die beiden echten inneren Flächen (in denen der jeweilige Stack Knoten liegt) mindestens durch eine normale Kante getrennt sein müssen. Wegen (F2) kann diese nur eine eingehende Kante der Farbe i sein.

Als nächstes zeigen wir die Injektivität von $\psi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{F}$.

Wie bereits weiter oben angesprochen, können wir die Kanten von G^* aus dem Fünf Farben Wald auf G wiederherstellen. Lemma 3.5 impliziert, dass die Orientierung der Stack Kanten durch den Fünf Farben Wald vorgegeben ist. Für die normalen Kanten übernehmen wir die Orientierungen vom Fünf Farben Wald.

Es fehlt noch die Injektivität von $\chi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{A}$ zu zeigen.

Wir zeigen also, dass wir die Färbung der Kanten eines Fünf Farben Waldes mithilfe der Orientierung der Kanten aus einer α_5 -Orientierung wiederherstellen können. Wegen (F1) kennen wir die Farben aller zu den äußeren Knoten inzidenten Kanten. Kennen wir jedoch die Farbe einer Kante eines inneren Knotens, folgt aus (F2) und der Struktur der α_5 -Orientierung das Wissen über die Färbung aller Kanten dieses Knotens. Da der zugrunde liegende Graph stets zusammenhängend ist, folgt die Aussage.

Da $\mathcal{A}$ und $\mathcal{F}$ endliche Mengen sind und die Komposition $\chi \circ \psi$ die identische Abbildung auf $\mathcal{A}$ ergibt, erhalten wir aus der Injektivität der beiden Funktionen, dass sie gegenseitige Umkehrfunktionen definieren.

□

3.2.4 Die Verbandsstruktur von Fünf Farben Wäldern

In [3] wurde gezeigt, dass die Menge aller α -Orientierungen eines planaren Graphen einen distributiven Verband bilden. Nachdem wir im letzten Abschnitt gezeigt haben, dass α_5 -Orientierungen und Fünf Farben Wälder äquivalent sind, wollen wir, wie schon in [2] für 3-Orientierungen bzw. Schnyder Woods erörtert, zeigen, dass auch die Menge aller α_5 -Orientierungen einen distributiven Verband auf G^* bilden. Vorab werden wir zwei Definitionen anführen, die wir im Anschluss brauchen, um diese Verbandsstruktur auf unserem Graphen zu definieren.

Definition 4. Sei C ein Kreis in G , X eine Orientierung von G . Dann heißt ein Pfad P *Sehnenpfad* (auch *chordaler Pfad*) von C , wenn er gerichtet ist, aus Kanten aus dem Inneren von C besteht und sein erster und letzter Knoten (diese können übereinstimmen) auf C liegen.

Definition 5. Wir nennen einen einfachen Kreis C *essenziell*, wenn es eine α -Orientierung X gibt, sodass C ein gerichteter Kreis in X ist und keinen Sehnenpfad in X besitzt.

Satz 3.12 ([3]). Sei $G = (V, E)$ ein planarer Graph und $\alpha : V \rightarrow \mathbb{N}$ eine Abbildung. Auf der Menge der α -Orientierungen von G induziert die Umkehrung (Reorientierung) essenzieller Kreise einen distributiven Verband. Insbesondere *überdeckt* eine α -Orientierung X eine α -Orientierung Y genau dann, wenn X durch Reorientierung eines gegen den Uhrzeigersinn gerichteten essenziellen Kreises aus Y , von Y erhalten werden kann.

Die Verbandsstruktur impliziert somit, dass je zwei α -Orientierungen ineinander überführt werden können. Diese Überführungen realisieren wir wie im obigen Satz beschrieben durch Reorientierung essenzieller Kreise (*Kreisflips*). Dabei nennen wir eine Reorientierung gegen den Uhrzeigersinn einen *Flip*, eine Reorientierung mit dem Uhrzeigersinn einen *Flop*. Wir wollen diese Erkenntnisse nun auf die Menge der Fünf Farben Wälder bzw. die der α_5 -Orientierungen anwenden.

Satz 3.13. Die Menge aller α_5 -Orientierungen auf G^* bilden einen distributiven Verband. Die Flip-Operation in diesem Verband ist die Reorientierung eines gegen den Uhrzeigersinn gerichteten Flächenkreises.

An einer (echten) inneren Fläche von G^* sind genau ein Stack Knoten sowie zwei normale Knoten enthalten. Um zu zeigen, dass es sich um einen Flächenkreis handelt, müssen wir also zum einen zeigen, dass keine Kanten in das Innere des Kreises zeigen, zum anderen müssen wir zeigen, dass der Kreis mindestens einen Stack Knoten enthält sowie, dass es sich tatsächlich um eine Fläche von G^* handelt. Dies wollen wir im Folgenden überprüfen, vgl. [7].

Beweis. Sei X eine α_5 -Orientierung und C ein essenzieller Kreis in G^* , der gegen den Uhrzeigersinn gerichtet ist.

Zuerst zeigen wir, dass keine Kante in das Innere von C zeigt. Dazu nehmen wir an, dass eine Kante $e = vw$ existiert, die dies tut und unterscheiden zwei Fälle:

1. v ist ein normaler Knoten:

Sei $P \in \mathcal{P}(e)$ ein in X gerichteter Pfad, der mit der Kante e startet und in einem äußeren Knoten von G^* endet. Dann muss P den Kreis C an mindestens einer Stelle kreuzen. Der Teilpfad, der mit v beginnt und an der ersten Stelle, an dem das der Fall ist (P kreuzt C) endet ist dann ein Sehnenpfad. Das steht im Widerspruch mit der Annahme, dass C ein essenzieller Kreis ist.

2. v ist ein Stack Knoten:

Dann muss w ein normaler Knoten sein. Wir wählen eine ausgehende Kante e' von w und betrachten analog zum 1. Fall einen Pfad $P \in \mathcal{P}(e')$. Auch dieser muss C

3. FÜNFECKSKONTAKTDARSTELLUNGEN

an mindestens einer Stelle kreuzen. So erhalten wir wieder einen Teilpfad. Dieser zusammen mit der Kante e ergibt abermals einen Sehnepfad.

Nun wollen wir zeigen, dass C mindestens einen Stack Knoten enthalten muss.

Nehmen wir also an, dass C nur aus normalen Knoten besteht. Dann folgt mit Lemma 3.6, dass genau $2|C| - 5 \neq 0$ Kanten von C in das Innere von C zeigen, was im Widerspruch zu dem eben Gezeigten steht.

Eine letzte Überlegung beendet den Beweis. Sei v ein Stack Knoten auf C . Wir definieren w_1 als den Vorgänger von v auf C und w_2 als den Nachfolger, bezüglich der Orientierung X . Dann wissen wir, da keine Kante in das Innere von C zeigt, dass die dritte Kante von v eine ausgehende, insbesondere eine vom Kreis nach außen zeigende Kante sein muss. Angenommen C ist kein Flächenkreis. Dann ist die Kante w_1w_2 (die aufgrund der Triangulierung existieren muss) immer eine innere Sehne von C . Mit einer gegebenen Orientierung (wobei die Richtung egal ist), ist diese somit ein Sehnepfad, also kann C nicht essentiell sein. $\square$

Bevor wir uns gleich einem Algorithmus zur Berechnung einer gleichmäßigen Fünfeckskontaktdarstellung widmen werden, schauen wir uns einmal an, was ein Flip (Flop) für einen Effekt auf die Kontaktdarstellung sowie auf den zugrundeliegenden Fünf Farben Wald hat.

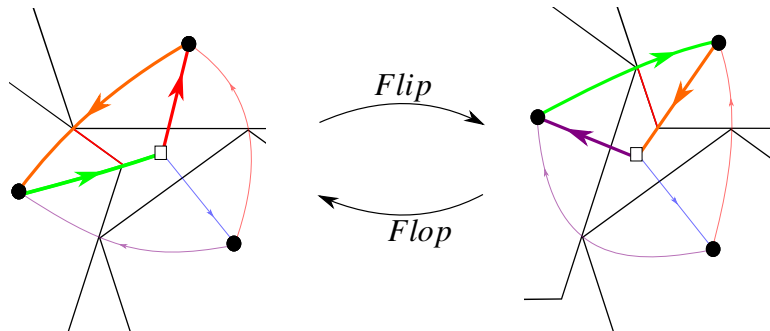


Abbildung 3.12: Reorientierung eines Flächenkreises

KAPITEL 4

Konstruktion einer Fünfeckskontaktdarstellung

An dieser Stelle wollen wir kurz auf den Ansatz der Konstruktion einer regelmäßigen Fünfeckskontaktdarstellung eingehen. Den Grundstein dafür bildet ein Gleichungssystem, welches abhängig vom zugrundeliegenden Fünf Farben Walde F ist. Um dieses Gleichungssystem zu erhalten, setzen wir für jedes Fünfeck, welches einem inneren Knoten v aus G entspricht, eine Variable x_v . Diese Variable repräsentiert die Seitenlänge des Fünfecks. Wir brauchen also für jeden Knoten genau fünf Gleichungen, für jede Seite eine. Dabei setzt sich eine Seitenlänge aus der Summe der angrenzenden Flächen $f_1, \dots, f_k$ zusammen. Genauer gesagt aus der Summe, der zu den jeweiligen Flächen gehörenden, angrenzenden Segmente. Dies ist in Abbildung 4.1 veranschaulicht. Weiter werden wir für alle inneren Flächen von G Variablen setzen und die dazugehörigen Gleichungen sowie eine zusätzliche Gleichung, die das Rahmenfünfeck definieren wird, aufstellen. Im nächsten Abschnitt werden wir das Gleichungssystem formal definieren. Bevor wir dies tun, wollen wir noch die Idee des weiteren Vorgehens erörtern.

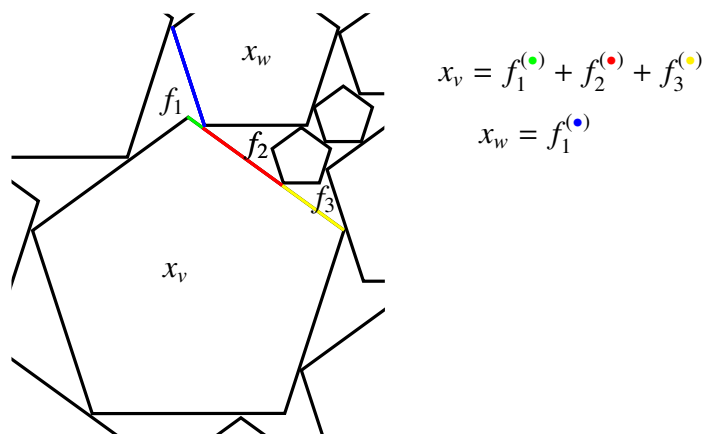


Abbildung 4.1: Zwei Gleichungen des Gleichungssystems der dazugehörigen Fünfeckskontaktdarstellung. Die Farben heben lediglich das jeweilige, betrachtete Segment der Fläche hervor.

Wenn das aufgestellte Gleichungssystem eine Lösung hat und diese positiv ist, können wir daraus eine regelmäßige Fünfeckskontaktdarstellung konstruieren, da wir die Seitenlängen aller Fünfecke sowie der jeweiligen Segmente der Flächen zwischen den Fünfecken kennen. Wie wir später sehen, werden ist das Gleichungssystem immer eindeutig

lösbar, jedoch ist die Lösung im Allgemeinen nicht positiv. Ob das System eine positive Lösung besitzt ist abhängig vom gewählten Fünf Farben Wald bzw. der dazugehörigen α_5 -Orientierung. Im Abschnitt 4.2 werden wir eine Methode vorstellen, die uns die Möglichkeit gibt von einem zugrundeliegenden Fünf Farben Wald zu einem Anderen zu wechseln. Dies geschieht in der Hoffnung, einen Fünf Farben Wald zu finden, bei dem das Gleichungssystem eine nicht-negative Lösung besitzt.

Mit diesem Wissen können wir einen allgemeinen Algorithmus zur Konstruktion einer regelmäßigen Kontaktdarstellung angeben:

Algorithmus 1 Konstruktion einer gleichmäßigen Fünfeckskontaktdarstellung

Input: Eine 5-Triangulierung mit Außenfläche $a_1, \dots, a_5$.

Output: Eine regelmäßige Fünfeckskontaktdarstellung $\mathcal{S}$.

```

 $F \leftarrow$  beliebiger Fünf Farben Wald auf  $G$ 
 $A \leftarrow \alpha_5$ -Orientierung der Stack Erweiterung  $G^*$ , die zu  $F$  gehört
 $x_F \leftarrow$  Lösung des zu  $F$  gehörenden Gleichungssystems
while  $x_F \not\geq 0$  do
    Führe auf  $A$  eine Flip-Aktion aus
     $F \leftarrow$  Fünf Farben Wald, der zu  $A$  gehört
     $x_F \leftarrow$  Lösung des zu (dem veränderten)  $F$  gehörenden Gleichungssystems
end while
Konstruiere aus  $x_F$  eine gleichmäßige Fünfeckskontaktdarstellung  $\mathcal{S}$ 
return  $\mathcal{S}$ 

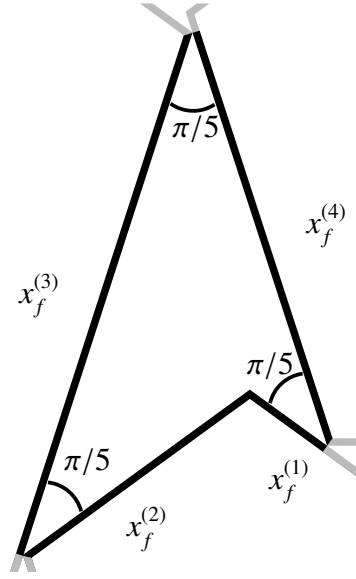
```

4.1 Das Gleichungssystem

Wir wollen nun das eben angesprochene lineare Gleichungssystem in Abhängigkeit eines gegebenen Fünf Farben Waldes F von G formal definieren.

Betrachten wir zuerst die Variablen des Gleichungssystems. Jeder innere Knoten $v \in G$ erhält eine Variable x_v , welche die Seitenlänge des dazugehörigen Fünfecks aus der Kontaktdarstellung repräsentiert. Sei nun f eine innere Fläche aus G . Dabei assoziieren wir mit f entweder einen Stack Knoten aus G^* oder eine innere Fläche, die zu zwei äußeren Knoten inzident ist. Jeder Knoten f repräsentiert also das zwischen drei Fünfecken liegende konkave Viereck (im Falle einer echten inneren Fläche) oder eben eins der fünf Dreiecke am Rand der Kontaktdarstellung. Jedes f erhält zunächst vier Variablen $x_f^{(1)}, \dots, x_f^{(4)}$, welche der Länge der jeweiligen Segmente des Flächenvierecks entsprechen. Dabei benennen wir die Segmente $(1), \dots, (4)$ im Uhrzeigersinn, beginnend in der konkaven Ecke des Vierecks, welche die Segmente (1) und (2) enthält (vgl. Abb. 4.2). Für die fünf inneren Flächen, die inzident zu zwei äußeren Knoten sind, setzen wir die entsprechende Variable $x_f^{(1)}$ auf Null bzw. streichen die Variable sowie die dazugehörige Gleichung $x_f^{(1)} = 0$ aus dem Gleichungssystem.

Kommen wir nun zu den Gleichungen. Mit jedem inneren Knoten v assoziieren wir fünf Gleichungen. Für $i = 1, \dots, 5$ sei $\delta_i(v)$ die Menge der Flächen, die inzident zu v sind und


 Abbildung 4.2: Ein Flächenviereck f mit den dazugehörigen Variablen

zwischen den beiden ausgehenden Kanten der Farben $i + 2$ und $i - 2$ liegen. Wir erhalten für $i = 1, \dots, 5$ die Gleichungen

$$x_v = \sum_{f \in \delta_i(v)} x_f^{(s_{v,f,i})}.$$

Dabei sind $s_{v,f,i} \in \{1, \dots, 4\}$ die passend gewählten Segmente (bzw. die mit diesen assoziierten Variablen) der Fläche f , die inzident zum Knoten v sind und im Intervall von δ_i liegen. Aus geometrischen Gründen sind die Winkel aller konvexen Ecken eines Flächenvierecks gleich $(1/5)\pi$ (vgl. Abb. 4.2). Daraus ergeben sich für jede innere Fläche f die folgenden Zusammenhänge:

$$x_f^{(3)} = x_f^{(1)} + \phi x_f^{(2)} \quad \text{und} \quad x_f^{(4)} = \phi x_f^{(1)} + x_f^{(2)}. \quad (\star)$$

Wobei $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ den Goldene Schnitt ausdrückt. Wie schon angesprochen, fügen wir außerdem eine Gleichung für die Länge der (oben liegenden) horizontalen Seite des auf dem Kopf stehenden Rahmenfünfecks hinzu, wobei wir diese auf Eins setzen. Das heißt, wir summieren die Segmente aller zu a_i inzidenten Flächen und erhalten somit die Gleichung $\sum_{f \in \delta_i(a_1)} x_f^{(s_{a_1,f,1})} = 1$, wobei die $s_{a_1,f,1} \in \{1, \dots, 4\}$ wieder passend gewählt sind. Wie wir bereits wissen ist das Rahmenfünfeck im Allgemeinen nicht regelmäßig. Die weiteren Seitenlängen ergeben sich jedoch direkt aus den Zusammenhängen.

In einem letzten Schritt ersetzen wir die Variablen $x_f^{(3)}$ und $x_f^{(4)}$ in den Gleichungen

$$\sum_{f \in \delta_i(v)} x_f^{(s_{v,f,i})} - x_v = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{f \in \delta_i(a_1)} x_f^{(s_{a_1,f,1})} = 1$$

durch Substitution entsprechend $(\star)$.

Wir erhalten das lineare Gleichungssystem $A_F x = e_1$. Dabei beschreibt A_F die von F abhängige Koeffizientenmatrix und $e_1 = \{1, 0, \dots, 0\}$ den ersten kanonischen Einheitsvektor.

4.1.1 Lösbarkeit

Um zu zeigen, dass $A_F x = e_1$ eindeutig lösbar ist, werden wir nachweisen, dass die Koeffizientenmatrix regulär ist. Dazu konstruieren wir auf Grundlage des Gleichungssystems einen bipartiten Graphen und werden mithilfe der perfekten Matchings auf diesem nachweisen, dass die Determinante von A_F nicht verschwindet. Beginnen wir mit der Feststellung, dass die Koeffizientenmatrix quadratisch ist.

Sei n die Anzahl der Knoten auf der betrachteten 5-Triangulierung. Wie schon in Kapitel 2 angesprochen, folgt aus der Eulerschen Formel, dass die Anzahl der inneren Flächen genau $2n - 7$ ist. Davon sind $2n - 12$ echte innere Flächen, die zu den konkaven Vierecken korrespondieren. Insgesamt hat das Gleichungssystem also

$$(n - 5) + 2(2n - 12) + 5 = 5n - 24$$

Variablen. Für jede innere Fläche setzen wir jeweils zwei Variablen, für jeden inneren Knoten sowie für die fünf Randdreiecke setzen wir jeweils eine Variable. Gleichzeitig haben wir für jeden inneren Knoten fünf Gleichungen sowie eine zusätzliche Gleichung für die horizontale Seite, womit wir

$$5(n - 5) + 1 = 5n - 24$$

Gleichungen erhalten. Somit gilt also $A_F \in \mathbb{R}^{(5n-24) \times (5n-24)}$.

Sei im Folgenden H_F ein bipartiter Graph mit den zwei Knotenklassen V und W . Dabei assoziieren wir die erste Knotenklasse mit den Variablen und die zweite Knotenklasse mit den Gleichungen des zugrundeliegenden Gleichungssystems. Wie wir gerade festgestellt haben, gilt dann $|V| = |W|$, das heißt $V = \{v_1, \dots, v_k\}$ und $W = \{w_1, \dots, w_k\}$. Eine Kante $v_i w_j$ existiert genau dann in H_F , wenn die i -te Variable in der j -ten Gleichung enthalten ist.

Zuerst wollen wir eine Einbettung des Graphen H_F in die Ebene angeben (vgl. Ab. 4.3). Wir beginnen mit einer geradlinigen planaren Zeichnung von G . Dann begrenzen wir jeden inneren Knoten v aus G mit paarweise disjunkten Kreisen und schneiden diese an den ausgehenden Kanten von v in fünf Bögen. Diese fünf Bögen assoziieren wir mit den fünf zu v gehörenden Gleichungen bzw. Gleichungs-Knoten. Jeder dieser Bögen ist in genau den Flächen der Einbettung von G enthalten, die an der entsprechenden Gleichung beteiligt sind. Somit schneidet jede innere Fläche $f \in G$ genau vier solcher Bögen. Seien diese im Uhrzeigersinn $A_1, \dots, A_4$, wobei A_1 und A_2 vom selben Knoten kommen. Dies entspricht der konkaven Ecke einer Fläche in der Kontaktdarstellung. Wir setzen die Knoten x_1 und x_2 , die zu $x_f^{(1)}$ und $x_f^{(2)}$ gehören in die Fläche f , aber außerhalb der zu den drei inzidenten Knoten von f gehörenden Bögen. Jetzt verbinden wir noch x_1 mit A_1 und A_4 sowie x_2 mit A_2 und A_3 . Bis zu diesem Zeitpunkt ist unsere Zeichnung kreuzungsfrei. Zum Schluss setzen wir noch für jedes f die beiden sich kreuzenden Kanten $x_1 A_3$ und $x_2 A_4$ in das Innere von f .

Wir werden im Folgenden die sich kreuzenden Kanten $x_1 A_3$ und $x_2 A_4$ als *Kreuzungskanten* (zusammen als Kreuzungspaar) sowie die dazugehörigen, sich nicht kreuzenden

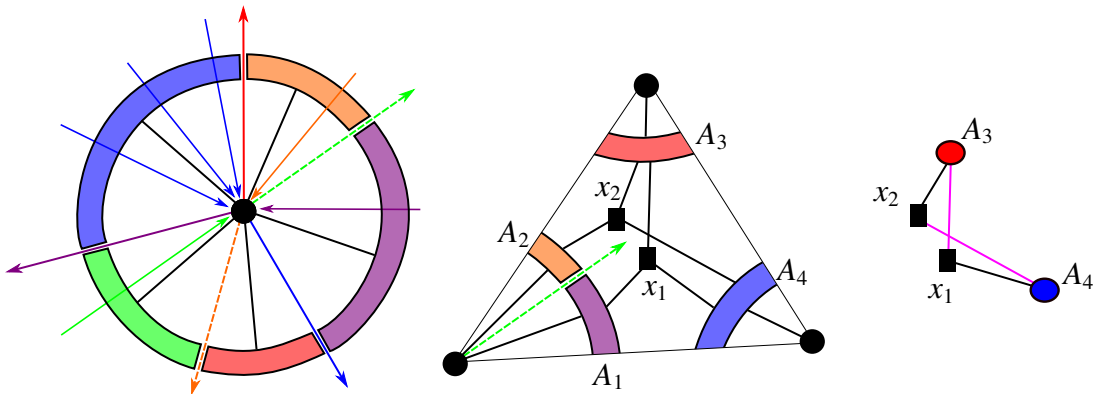


Abbildung 4.3: Einbettung von H_F in die Ebene. *Links*: Die Lokale Konstruktion an einem inneren Knoten. *Mitte*: Die beschriebene Situation in einer inneren Fläche. *Rechts*: Das Kreuzungspaar (pink) und das dazugehörige Doppelkantenpaar (schwarz) einer inneren Fläche.

Kanten x_1A_4 und x_2A_3 als *Doppelkanten* (zusammen also Doppelkantenpaar) bezeichnen (vgl. Abb. 4.3).

Lemma 4.1. Der bipartite Graph H_F besitzt ein perfektes Matching.

Um das Lemma zu beweisen, geben wir eine konkrete Konstruktion eines perfekten Matchings an. Diese stammt aus [7]. Der Einfachheit halber nennen wir die Variablen-Knoten $v_1, \dots, v_k$ v -Knoten und die Gleichungs-Knoten $w_1, \dots, w_k$ w -Knoten.

Beweis. Die fünf w -Knoten, die adjazent zu einem inneren Knoten v aus G sind, entsprechen den fünf Farben des zugrundeliegenden Fünf Farben Waldes F . Wir matchen jeden Knoten v mit dem jeweiligen w -Knoten, der zur Farbe 4 gehört. Die w -Knoten der Farben 2 und 3 matchen wir mit einer der beiden v -Knoten der im Uhrzeigersinn letzten inzidenten Fläche, die w -Knoten der Farben 5 und 1 mit einem der beiden zu der letzten Flächen gegen den Uhrzeigersinn gehörenden v -Knoten. Nun wollen wir zeigen, dass jede echte innere Fläche, also jede Fläche, die nicht inzident zu zwei Außenknoten ist, genau zweimal in dem Matching vorkommt. Dabei nennen wir ein Segment eines Flächenvierecks B , das in der konkaven Ecke von B liegt, ein *kurzes Segment*. Sonst nennen wir es *langes Segment*. Weiterhin nennen wir für zwei benachbarte Segmente von B das Segment, dessen zugehörige Seite des Fünfecks im Kontaktpunkt der beiden Segmente endet, ein *Schnitt-Segment*. Sei uvw eine echte innere Fläche aus G mit zugehörigem Stack Knoten s . Sei weiterhin us die in den Stack Knoten eingehende Kante sowie sv und sw die im Uhrzeigersinn ausgehenden Kanten von s . Wenn wir nun die zu sv und sw gehörigen (langen) benachbarten Segmente der Fläche betrachten, ist das zu dem Startknoten adjazente, gehörige Segment der gerichteten Kante (v, w) bzw. (w, v) das Schnitt-Segment. Wenn wir jedem zu einem inneren Knoten adjazenten w -Knoten (jeder Seite eines dazugehörigen Fünfecks) eine Farbe zuordnen, so können wir analog dazu jedem Segment von B eine Farbe zuordnen, da jedes Segment an genau einer der Gleichungen beteiligt ist. Wir werden nun folgende drei Fälle von B unterscheiden (vgl. Abb. 4.4):

(i) B hat ein *kurzes* Segment der Farbe 4:

Dann sind das andere kurze Segment und das Schnitt-Segment der beiden langen Segmente gematcht. Gehen wir kurz ins Detail. Das andere kurze Segment hat entweder Farbe 3, womit es die letzte inzidente Kante des w -Knotens im Uhrzeigersinn widerspiegelt, oder das Segment hat Farbe 5 und entspricht der letzte Kante gegen den Uhrzeigersinn des zugehörigen w -Knotens. Falls das (lange) Schnitt-Segment auf der linken (im Uhrzeigersinn von der konkaven Ecke) Seite der Fläche liegt, ist es von Farbe 5 oder 1. Also entspricht die letzte Kante gegen den Uhrzeigersinn der letzten inzidenten Fläche des zugehörigen Fünfecks. Wenn das Segment auf der rechten Seite der Fläche liegt, hat es Farbe 2 oder 3. Analog zu eben entspricht die zugehörige Kante der letzten im Uhrzeigersinn inzidenten Kante des w -Knotens der Farbe 2 oder 3 des entsprechenden Fünfecks.

(ii) B hat ein *langes* Segment der Farbe 4:

Dann werden das kurze Segment, das inzident zu dem (langen) Segment der Farbe 4 ist, und das Schnitt-Segment der zwei noch nicht betrachteten Segmente gematcht. Das kann wie in (i) durch eine Fallunterscheidung leicht geprüft werden.

(iii) B hat *kein* Segment der Farbe 4:

Dann wird das jeweilige Schnitt-Segment der Paare von inzidenten kurzen sowie von inzidenten langen Segmenten gematcht. Auch hier kann man das analog zu (i) überprüfen.

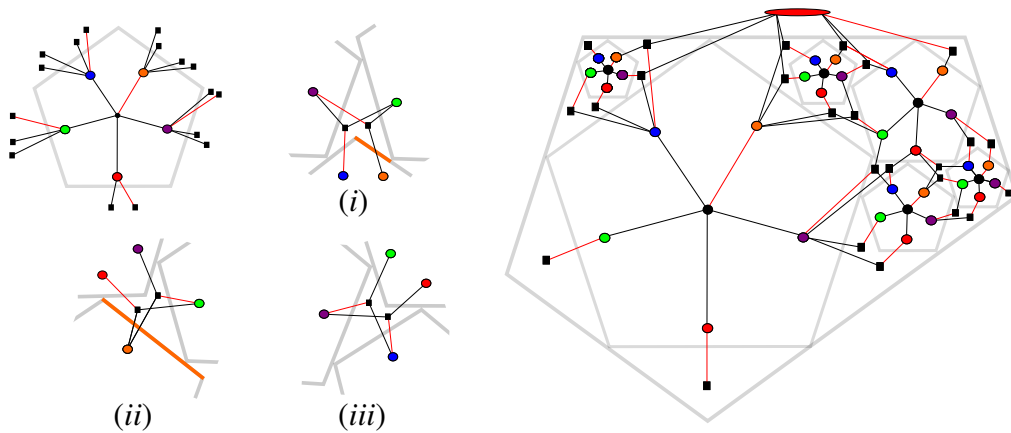


Abbildung 4.4: *Links:* Konstruktion des perfekten Matching an einem inneren Knoten sowie die Fälle (i) – (iii) aus dem Beweis. *Rechts:* Das perfekte Matching auf einem beispielhaften Graphen.

Somit wird in jedem Fall jede echte innere Fläche genau zweimal gematcht, das heißt jeder der beiden v -Knoten von B genau ein mal. Da jede Fläche, die inzident zu zwei äußeren Knoten ist, genau zu einem w -Knoten des zugehörigen Fünfecks adjazent ist, sind auch diese Flächen, bis auf die Fläche der Farbe 4 (oben rechts in der der Kontaktdarstellung) gematcht. Wenn wir nun noch den zu dieser Fläche assoziierten v -Knoten mit dem zur ersten Gleichung gehörenden w -Knoten matchen, erhalten wir das gewünschte Resultat. $\square$

Bevor wir zum Beweis der Existenz einer eindeutigen Lösung kommen, benötigen wir noch ein letztes Lemma. Dieses besagt, dass unter gewissen Voraussetzungen die Vorzeichen zweier perfekter Matchings auf H_f gleich sind. Sei dafür $\mathcal{M}_0$ die Menge der perfekten Matchings von H_F , die kein Kreuzungspaar besitzen. Das heißt es ist maximal eine der beiden Kreuzungskanten einer Fläche im Matching enthalten.

Lemma 4.2. Seien $M_1, M_2 \in \mathcal{M}_0$. Dann gilt $\text{sgn}(M_1) = \text{sgn}(M_2)$.

Beweis. Die symmetrische Differenz von M_1 und M_2 ist eine disjunkte Vereinigung von Kreisen. Sei C einer dieser Kreise. Wir müssen also zeigen, dass $\ell(C) \equiv 2 \pmod{4}$ ist. Aus Lemma 2.1 wissen wir, dass diese Eigenschaft stets erfüllt ist, wenn auf dem zugrundeliegenden bipartiten Graphen jede innere Fläche f durch Kreise der Länge $\ell_f \equiv 2 \pmod{4}$ begrenzt ist.

Sei $H_{\hat{F}}$ der Graph, der alle Kanten aus H_F enthält, die sich nicht kreuzen, ergänzt um jeweils genau eine Kante jedes Kreuzungspaares. Dabei erbt $H_{\hat{F}}$ die planare Einbettung, die H_F ohne eine der beide Kreuzungskanten nach Konstruktion besitzt. $H_{\hat{F}}$ ist somit ein aufspannender Teilgraph von H_F , in dem jede innere Fläche durch einen Kreis der Länge 6 begrenzt ist (vgl. Abb. 4.5).

Wenn C (aus der symmetrischen Differenz von zwei perfekten Matchings aus H_F) kreuzungsfrei ist oder von jedem Kreuzungspaar maximal eine Kante enthält, ist C auch in $H_{\hat{F}}$ enthalten und wir sind fertig. Betrachten wir nun also den Fall, dass C beide Kreuzungskanten eines Kreuzungspaares enthält. Wenn wir eine Möglichkeit finden, die Kreuzungen von C zu eliminieren, sodass der veränderte Kreis die Länge von C behält und ebenfalls in der symmetrischen Differenz zweier perfekter Matchings liegt, beendet dies den Beweis.

Sei C also ein Kreis aus der symmetrischen Differenz von M_1 und M_2 , der beide Kreuzungskanten eines Kreuzungspaares $v_A w_B, v_C w_D$ enthält. Dabei entsprechen die Knoten v_A und v_B den zwei v -Knoten einer (echten) inneren Fläche und w_B, w_D den w -Knoten der entsprechenden Seiten der zugehörigen Fünfecke. Insbesondere ist (v_A, w_B, v_C, w_D) ein 4-Kreis in H_F . Es existieren zwei Pfade P_1, P_2 , sodass $C = (v_A, w_B, P_1, w_D, v_C, P_2)$. Es kann nicht sein, dass der Kreis die Form $C = (v_A, w_B, P_1, v_C, w_D, P_2)$ hat, da der Pfad P_1 gerade sein müsste, damit die Kreuzungskanten v_A, w_B und v_C, w_D , wie angenommen, nicht beide in einem perfekten Matching liegen (C ist M_1 - und M_2 - alternierend). Dann würde der Kreis (w_B, P_1, v_C) jedoch ungerader Länge sein, was in einem bipartiten Graphen nicht möglich ist. Sei also $C = (v_A, w_B, P_1, w_D, v_C, P_2)$. Wir definieren eine Umorientierung des Kreises als $C' := (v_C, w_B, P_1, w_D, v_A, P_2^{-1})$, wobei P_2^{-1} die Umkehrung des Pfades ist. Dabei wird die Länge des Kreises erhalten, sprich $\ell(C) = \ell(C')$ und C' ist in der symmetrischen Differenz von M'_1 und M'_2 enthalten, wobei wir die perfekten Matchings M'_1 und M'_2 aus M_1 und M_2 erhalten, indem wir in einem Matching $v_A w_B$ durch $v_A w_D$ und in dem anderen Matching $v_C w_D$ durch $v_C w_B$ ersetzen und weiterhin alle Kanten aus P_1 das Matching wechseln. Wir ersetzen also je eine Kreuzungskante mit einer zugehörigen Doppelkante, weswegen der daraus entstehende Kreis C' eine Kreuzung weniger hat als der Startkreis C . Diesen Prozess iterieren wir bis zu einem kreuzungsfreien Kreis C^* mit $\ell(C) = \ell(C^*)$, der in der symmetrischen Differenz von zwei perfekten Matchings aus H_F enthalten ist. $\square$

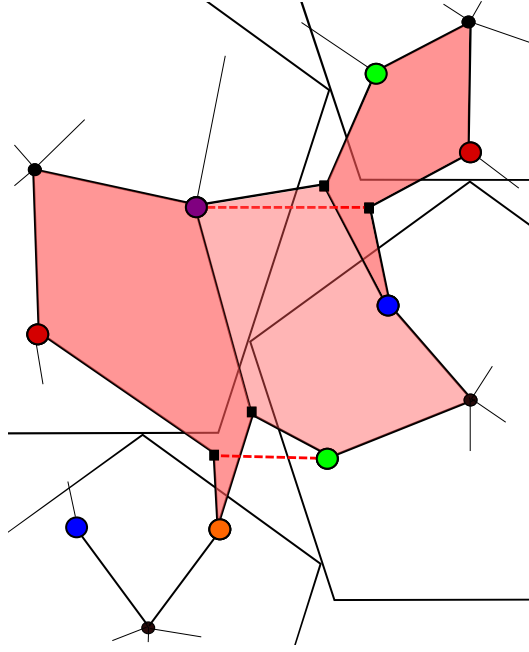


Abbildung 4.5: Beispielhafte Darstellung der Flächen in $H_{\hat{F}}$. Die rot gestrichelten Kanten sind die Kreuzungskanten, die $H_{\hat{F}}$ nicht enthält.

Satz 4.3. Das lineare Gleichungssystem $A_F x = e_1$ besitzt eine eindeutige Lösung.

Beweis. Sei $A_F x = e_1$ in Abhängigkeit eines beliebigen, festen Fünf Farben Waldes F gegeben. Wie wir bereits festgestellt haben, ist die Matrix $A \in \mathbb{R}^{(5n-24) \times (5n-24)}$ quadratisch. Um nun zu zeigen, dass $A_F x = e_1$ eine eindeutige Lösung besitzt, wollen wir nachweisen, dass A eine reguläre Matrix ist, das heißt, dass $\det(A_F) \neq 0$ ist.

Sei dafür $\hat{A}_F$ die Matrix, die wir aus A erhalten, indem wir alle Spalten, die wir mit Knoten aus G assoziieren, mit -1 multiplizieren. Da alle diese Spalten nicht-positive Einträge in A_F haben, die restlichen Einträge der Matrix jedoch nicht-negativ sind, folgt $\hat{A}_F \geq 0$. Weiterhin gilt durch die $n - 5$ -fache negative Multiplikation $\det(A_F) = (-1)^{n-5} \det(\hat{A}_F)$. Wir interpretieren $\hat{A}_F$ nun als gerichtete Adjazenzmatrix des oben definierten bipartiten Graphen H_F . Mit der Leibniz-Formel erhalten wir

$$\det(\hat{A}_F) = \sum_{\sigma} \text{sgn}(\sigma) \prod_i (\hat{A}_F)_{i\sigma(i)} = \sum_M \text{sgn}(M) P_M ,$$

wobei die zweite Summe über alle perfekten Matchings von H_F geht. Weiterhin ist $P_M > 0$ für alle perfekten Matchings. Es wird also jeweils ein v -Knoten v_i mit einem w -Knoten $w_{\sigma(i)}$ gematcht. Somit ist $\sum_{\sigma} \text{sgn}(\sigma) \prod_i (\hat{A}_F)_{i\sigma(i)}$ genau dann ungleich Null, wenn σ mit einem perfekten Matching aus H_F korrespondiert.

Aus Lemma 4.1 wissen wir, dass die Menge der perfekten Matchings auf H_F nicht leer ist. Betrachten wir nun alle perfekten Matchings auf H_F . Dabei nennen wir zwei perfekte Matchings M, M' äquivalent, wenn M' durch Austauschen eines Kreuzungspaares mit den dazugehörigen Doppelkanten aus M erhalten werden kann. Dabei ist jede Richtung des Tausches erlaubt. Mithilfe dieser Äquivalenzrelation teilen wir nun die Menge der

perfekten Matchings in Äquivalenzklassen ein. Sei $\mathcal{M}_0$, wie schon bekannt, die Menge der perfekten Matchings von H_F , die kein Kreuzungspaar besitzen. Dann enthält jede Äquivalenzklasse genau ein Matching aus $\mathcal{M}_0$. Sei $M_0 \in \mathcal{M}_0$ eins dieser Matchings. Sei weiter $k = k(M_0)$ die Anzahl von Doppelkantenpaaren, die in M_0 enthalten sind. Da jedes Doppelkantenpaar unabhängig mit dem zugehörigen Kreuzungspaar vertauscht werden kann, besteht die Äquivalenzklasse $\mathcal{A}_{M_0}$ von M_0 aus 2^k Matchings. Weiterhin enthält die Klasse für $i = 0, \dots, k$ jeweils $\binom{k}{i}$ Matchings mit genau i Kreuzungsparen. Betrachten wir nun das Produkt P_{M_0} von Einträgen aus $\hat{A}_F$. Diese entsprechen den Kanten des perfekten Matchings M_0 . Aus Gleichung (★) folgt, dass jedes Doppelkantenpaar einen Beitrag von ϕ^2 sowie jedes Kreuzungspaar einen Beitrag von eins beisteuert. Es gilt also

$$\sum_{M \in \mathcal{A}_{M_0}} \text{sgn}(M) P_M = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \text{sgn}(M_0) (-1)^i P_{M_0} \left(\frac{1}{\phi^2} \right)^i = \text{sgn}(M_0) P_{M_0} \left(1 - \frac{1}{\phi^2} \right)^k$$

und damit

$$\det(\hat{A}_F) = \sum_{M_0 \in \mathcal{M}_0} \sum_{M \in \mathcal{A}_{M_0}} \text{sgn}(M) P_M = \sum_{M_0 \in \mathcal{M}_0} \text{sgn}(M_0) P_{M_0} \left(1 - \frac{1}{\phi^2} \right)^{k(M_0)}.$$

Das Produkt P_{M_0} ist größer als Null, da die Einträge aus $\hat{A}_F$ nicht-negativ sind. Weil $(1 - \frac{1}{\phi^2}) > 0$ gilt, ist die Potenz ebenfalls größer als Null. Aus Lemma 4.2 wissen wir bereits, dass $\text{sgn}(M_0) = \text{sgn}(M'_0)$ für je zwei Matchings $M_0, M'_0 \in \mathcal{M}_0$ gilt. Somit hat die Matrix $\hat{A}_F$ eine nicht-verschwindende Determinante und das lineare Gleichungssystem ist eindeutig lösbar. $\square$

Jetzt, wo wir wissen, dass das Gleichungssystem eindeutig lösbar ist, wollen wir noch zeigen, dass aus einer nicht-negativen Lösung des Gleichungssystems die gesuchte Fünfeckskontaktdarstellung von G konstruiert werden kann. Das folgende allgemeine Lemma wird uns dabei helfen, eine kreuzungsfreie, geradlinige Zeichnung zu erhalten.

Lemma 4.4. Sei H eine innere Triangulierung eines Polygons. Für jede innere Fläche f von H mit Knoten v_1, v_2, v_3 im Uhrzeigersinn sei T_f ein Dreieck in der Ebene mit den im Uhrzeigersinn angeordneten Knoten $p(f, v_1), p(f, v_2), p(f, v_3)$, sodass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (i) Für jeden inneren Knoten v von H mit inzidenten Flächen $f_1, \dots, f_k$ gilt:

$$\sum_{i=1}^k \beta(f_i, v) = 2\pi,$$

wobei $\beta(f, v)$ den Innenwinkel von T_f an der Stelle $p(f, v)$ bezeichnet.

- (ii) Für jede innere Kante vw von H mit inzidenten Flächen f_1, f_2 gilt:

$$p(f_1, v) - p(f_1, w) = p(f_2, v) - p(f_2, w),$$

d.h. der Vektor zwischen v und w ist derselbe in T_{f_1} und in T_{f_2} .

4. KONSTRUKTION EINER FÜNFECKSKONTAKTDARSTELLUNG

Dann existiert eine kreuzungsfreie, geradlinige Zeichnung von H , sodass jede innere Fläche f durch Übersetzung aus T_f erhalten werden kann.

Beweis. Sei H^* der Dualgraph von H ohne den Knoten, der der äußeren Fläche von H entspricht. Sei S ein aufspannender Baum von H^* . Dann können wir die Dreiecke T_f aller inneren Flächen von H entlang der Kanten aus S aneinandersetzen. Für diese wissen wir durch die vorausgesetzten Eigenschaften bereits, dass sich die Dreiecke zweier inzidenter Flächen auf richtige Weise berühren. Um nun zu zeigen, dass die resultierende Gestalt keine Löcher oder Überlappungen vorweist, müssen wir uns noch vergewissern, dass dies auch bei den restlichen Kanten der Fall ist. Sei dafür $\bar{S}$ das Komplement von S , wobei wir $\bar{S}$ als Teilmenge von Kanten aus H interpretieren. Wenn der zur Außenfläche gehörende Knoten des Dualgraphen existieren würde, wäre $\bar{S}$ ein Spannbaum von H . Da wir H^* ohne diesen Knoten betrachten, ist $\bar{S}$ ein Wald auf H . Sei e eine Kante aus $\bar{S}$, die inzident zu einem Blatt v des Waldes ist, das einem inneren Knoten aus H entspricht. Dann wissen wir bereits für alle inzidenten Kanten $e' \neq e$ von v , dass sich die Dreiecke beider inzidenter Flächen von e' auf richtige Weise berühren. Da jeder innere Knoten v der Eigenschaft (i) genügt, muss dies auch für die beiden zu e inzidenten Flächen gelten. Da die noch verbleibende zu prüfende Kantenmenge weiterhin ein Wald ist, iterieren wir diesen Prozess, bis alle inneren Kanten von H überprüft sind. $\square$

Satz 4.5. Die eindeutige Lösung des Gleichungssystems $A_F x = e_1$ ist nicht-negativ genau dann, wenn der Fünf Farben Wald F durch eine reguläre Fünfeckskontaktdarstellung von G induziert wird.

Beweis. Angenommen es existiert eine regelmäßige Fünfeckskontaktdarstellung S des Graphen G . Durch Satz 3.4 wissen wir, dass S einen Fünf Farben Wald F auf dem dazugehörigen Kontaktgraphen induziert. Dann definieren die durch S gegebenen Kantenlängen der einzelnen Objekte eine nicht-negative Lösung von $A_F x = e_1$.

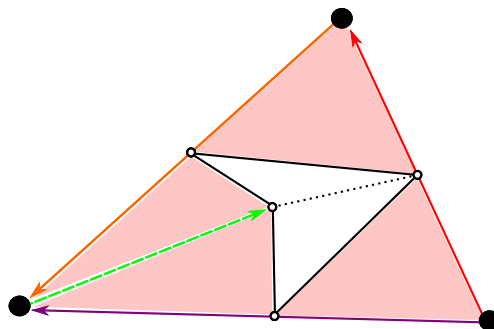


Abbildung 4.6: Unterteilung einer Fläche aus G in vier Dreiecke (rot) und ein Viereck, das mithilfe der schwarz gepunkteten Kante in zwei Dreiecke unterteilt wird.

Für die andere Richtung nehmen wir zunächst an, dass das System $A_F x = e_1$ eine nicht-negative Lösung besitzt. Um nun das obige Lemma 4.4 anwenden zu können, konstruieren wir eine Erweiterung des Skelettgraphen einer hypothetischen regelmäßigen Fünf-

eckskontaktdarstellung mit induziertem Fünf Farben Wald F , sodass diese eine innere Triangulierung besitzt. Wir beginnen mit einer kreuzungsfreien, geradlinigen Zeichnung von G , in welcher wir für jede Kante aus G einen Unterteilungsknoten auf diese setzen. Weiter zeichnen wir für jede echte innere Fläche von G einen Knoten. Im Anschluss zeichnen wir für jeden inneren Knoten v eine Kante, die in einem Flächenknoten endet, wenn diese Kante die eindeutige fehlende Kante aus Lemma 3.5 ist. Nun verbinden wir für jeden Knoten aus G alle neuen, zu diesem adjazente Knoten in der, aus der Zeichnung gegebenen, zyklischen Reihenfolge miteinander. Dann sind alle zu zwei Außenknoten inzidenten Flächen durch vier Dreiecke unterteilt und alle echten inneren Flächen in drei Dreiecke sowie ein Viereck (vgl. Abb.4.7). Einer der Knoten eines jeden Vierecks gehört zu den eben eingefügten Flächenknoten. Diese verbinden wir in einem letzten Schritt noch mit dem diagonal gegenüberliegenden Unterteilungsknoten des Vierecks, womit wir eine Triangulierung erhalten. Unter Verwendung der durch die nicht-negative Lösung des Gleichungssystems gegebenen Kantenlängen, können wir die Seitenlängen jedes Dreiecks T_f , die einer inneren Fläche f des Skelettgraphen entsprechen, berechnen. Wenn wir nun Lemma 4.4 anwenden, liefert dies eine regelmäßige Fünfeckskontaktdarstellung von G mit dem induziertem Fünf Farben Wald F . $\square$

4.2 Die Methode

Mit dem Wissen, dass eine nicht-negative Lösung des Gleichungssystems $A_F x = e_1$ eine regelmäßige Fünfeckskontaktdarstellung induziert, wollen wir in diesem Abschnitt eine Methode vorstellen, die im Falle einer negativen Lösung den zugrundeliegenden Fünf Farben Wald ändert. Diese soll die im Algorithmus 1 allgemein angegebene *Flip-Aktion* definieren. Wenn wir im Folgenden von Fünfecken bzw. konkaven Flächenvierecken einer Kontaktdarstellungen im Bezug auf negative Lösungen sprechen, sind damit stets die theoretische Kontaktdarstellung sowie die theoretischen Fünf- und Vierecke gemeint.

Von der Lösung x des Gleichungssystems können wir die Vorzeichen der vier Segmente eines Flächenvierecks f ablesen. Dabei nennen wir für $i = 1, \dots, 4$ ein Segment *positiv* bzw. *nicht-negativ*, falls $x_f^{(i)} \geq 0$ und *negativ*, falls $x_f^{(i)} < 0$ ist. Ein *Vorzeichenwechsel* der (theoretischen) Kontaktdarstellung ist ein Kontaktpunkt, an dem ein nicht-negatives Segment und ein negatives Segment aufeinander treffen. Wir machen folgende Feststellung:

Lemma 4.6. In einem konkaven Flächenviereck gibt es entweder keinen Vorzeichenwechsel oder es gibt genau zwei. Wenn es genau zwei Vorzeichenwechsel gibt, befindet sich einer davon in der eindeutigen konkaven Ecke, der andere in einer der drei konvexen Ecken.

Beweis. Seien $x_f^{(1)}, \dots, x_f^{(4)}$ die vier zum Flächenviereck gehörenden Variablen des Gleichungssystems (vgl. Abb. 4.2). Durch die Gleichungen

$$x_f^{(3)} = x_f^{(1)} + \phi x_f^{(2)} \text{ und } x_f^{(4)} = \phi x_f^{(1)} + x_f^{(2)},$$

wobei der Goldene Schnitt ϕ positiv ist, folgt die Aussage direkt. $\square$

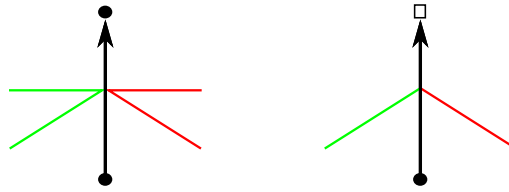


Abbildung 4.7: Wechselkanten vom Typ 1 (links) und Typ 2 (rechts).

Definition 6. Wir nennen die folgenden zwei Typen von gerichteten Kanten $e = (v, w) \in G^*$ *Wechselkanten*:

- (1) v, w sind normale Knoten, sodass das Fünfeck von v einen Vorzeichenwechsel in dem Kontaktpunkt mit dem Fünfeck von w hat und beide zu diesem Punkt inzidenten Flächenvierecke keinen Vorzeichenwechsel in diesem Punkt haben.
- (2) v ist ein normaler Knoten, w ist ein Stack Knoten, sodass das zu v gehörende Fünfeck ein Vorzeichenwechsel an der zu e gehörenden Ecke hat, wobei diese der konkaven Ecke des zu w gehörenden Vierecks entspricht.

Mit Lemma 4.6 folgt also, dass entweder alle Segmente eines Flächenvierecks das gleiche Vorzeichen haben oder die Fläche eine Wechselkante vom Typ 2 impliziert. Dass die Menge der Wechselkanten eines Gleichungssystems mit negativer Lösung nicht leer ist, zeigt das folgende Lemma.

Lemma 4.7. Wenn die Lösung des Systems $A_F x = e_1$ negative Variablen enthält, dann existiert eine Wechselkante.

Beweis. Da das lineare Gleichungssystem inhomogen ist und somit keine triviale Lösung besitzt, enthält die Lösung positive Variablen. Wenn es also negative Variablen gibt, existiert an irgendeiner Stelle der abstrakten Kontaktdarstellung ein Vorzeichenwechsel. Wenn dieser Vorzeichenwechsel in einem abstrakten Flächenviereck liegt, dann muss mit obigem Lemma 4.6 ein Vorzeichenwechsel in der konkaven Ecke des Flächenvierecks existieren, womit eine Wechselkante vom Typ 2 gefunden ist. Wenn dies nicht der Fall ist, müssen sich zwei Flächenvierecke, wobei eins der beiden nicht-negativ und das andere negativ ist, berühren. An dieser Stelle existiert also eine Wechselkante vom Typ 1. $\square$

Satz 4.8. Die negativen und nicht-negativen Variablen der Lösung des Gleichungssystems $A_F x = e_1$ sind durch eine disjunkte Vereinigung von gerichteten Kreisen in der zu F gehörenden α_5 -Orientierung getrennt. Wenn es negative Variablen gibt, ist die Vereinigung nicht leer.

Wir wollen an dieser Stelle kurz das Vorgehen des Beweises aus [7] nachvollziehen.

Beweis. Betrachten wir eine Wechselkante $e = vw$ vom Typ (1) oder (2), so entspricht diese einer Ecke des zu v gehörenden Fünfecks, in der ein Vorzeichenwechsel stattfindet. Wir nehmen an, dass die Variable x_v nicht-negativ ist und betrachten die Seite der zu e gehörenden Ecke des Fünfecks, die mit einem negativen Segment startet (wenn x_v negativ ist, betrachten wir die positive Seite). Auf dieser muss mindestens ein positives Segment

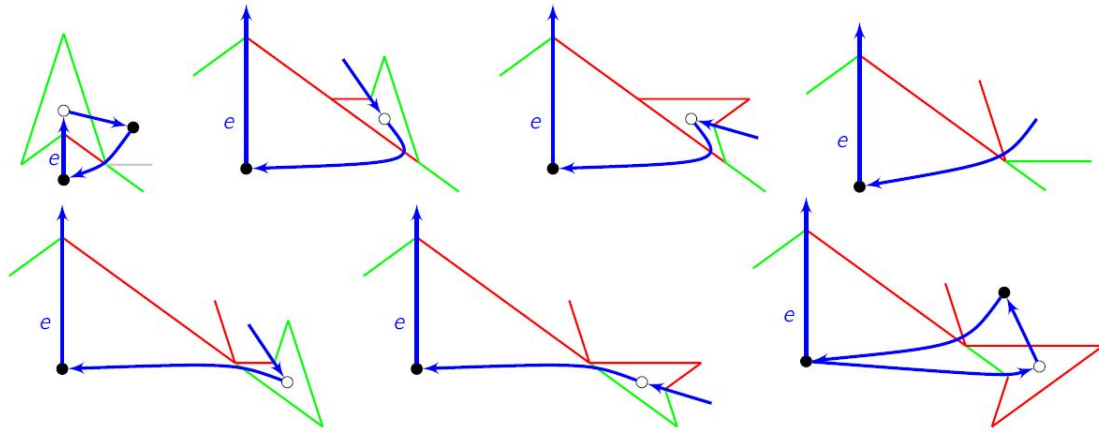


Abbildung 4.8: Konstruktion der Vorgänger-Pfade. Aus: [7], S.22

enthalten sein, da die Summe der an die Seite angrenzenden Segmente wie eben angenommen nicht-negativ ist. Wir betrachten nun den ersten Vorzeichenwechsel dieser Seite und konstruieren in Abhängigkeit der Vorzeichen der Kanten, die inzident zu diesem Punkt sind, einen Vorgänger-Pfad in der zugrundeliegenden α_5 -Orientierung (vgl. Abb. 4.8).

Sei E' die Menge der Wechselkanten einschließlich aller Kanten, die in einem Vorgänger-pfad auftreten. Dann können wir die Vorgänger-Zuweisung als Zuweisung von E' zur selben Menge E' interpretieren. Wenn diese Zuweisung eine Bijektion auf der Kantenmenge E' ist, folgt, dass E' eine disjunkte Vereinigung gerichteter Kreise in der α_5 -Orientierung ist, die die negativen und nicht-negativen Variablen trennt. Mit Lemma 4.7 folgt ferner, dass diese Vereinigung nicht-leer ist, wenn negative Variablen existieren. Da die Kantenmenge E' endlich ist, genügt es nachzuweisen, dass die Selbstabbildung injektiv ist. Mit einer Fallunterscheidung kann man dies zeigen, indem man für beide Typen von Wechselkanten einen eindeutigen Nachfolger aus der Menge E' angibt. $\square$

Da wir durch Reorientierung aller Kanten eines gerichteten Kreises einer α -Orientierung wieder eine α -Orientierung erhalten, bietet dieser Satz die Methode der gesuchten Flip-Aktion. Erhalten wir durch diese Änderung eine nicht-negative Lösung des Systems, können wir die Kontaktdarstellung konstruieren. Andernfalls wird erneut eine Flip-Aktion angewendet. Die Korrektheit dieses Algorithmus konnte bisher nicht bewiesen werden. Wir werden im nächsten Abschnitt jedoch sehen, dass in einem praktischen Test die Anzahl der Iterationen stets endlich und im Verhältnis zur Größe des Graphen vergleichsweise gering ist.

4.3 Das Programm

In diesem Abschnitt wollen wir das implementierte Programm zur Konstruktion einer regelmäßigen Fünfeckskontaktdarstellung vorstellen und danach die Auswertung eines praktischen Tests anführen. Dazu betrachten wir im Folgenden wieder eine 5-Triangulierung G mit Außenfläche $a_1, \dots, a_5$ und dem dazugehörigen Stackgraphen G^* .

Es gibt die folgenden zwei Möglichkeiten einen Graphen im Programm zu öffnen:

(1) Einen Zufallsgraph mit n Knoten erstellen.

Diese Methode wurde realisiert, indem zuerst die fünf äußeren Knoten um einen Mittelpunkt gelegt wurden. Ausgehend von diesem wurden auch die inneren Knoten gesetzt. Dabei erhält jeder Knoten einen zufälligen Winkel sowie eine zufällige Länge (diese ist natürlich kleiner als der Innenradius des zugrundeliegenden Fünfecks). Mithilfe dieser beiden Faktoren wird jedem inneren Knoten eine Position (Koordinate) zugeordnet. Ausgehend von einer Liste der möglichen Kanten, welche zu Beginn alle Kanten des vollständigen Graphen K_n enthält, mit Ausnahme der Kanten zwischen äußeren Knoten, wird zufällig eine Kante ausgewählt und zum Graphen hinzugefügt. Die Liste wird aktualisiert, das heißt alle Kanten, die die neu hinzugefügte Kante des Graphen kreuzen würden, werden aus der Liste genommen. Dieser Prozess wird iteriert, bis die Liste leer ist. Man erhält eine zufällige 5-Triangulierung mit n Knoten.

(2) Öffnen einer GraphML.

Dies ist sinnvoll, wenn man explizite Graphen von Hand eingeben möchte. Zudem bietet das XML-basierte Dateiformat eine Vereinheitlichung für die Repräsentation von Graphen, sodass man das Programm auch durch extern erstellte Graphen leicht benutzen kann.

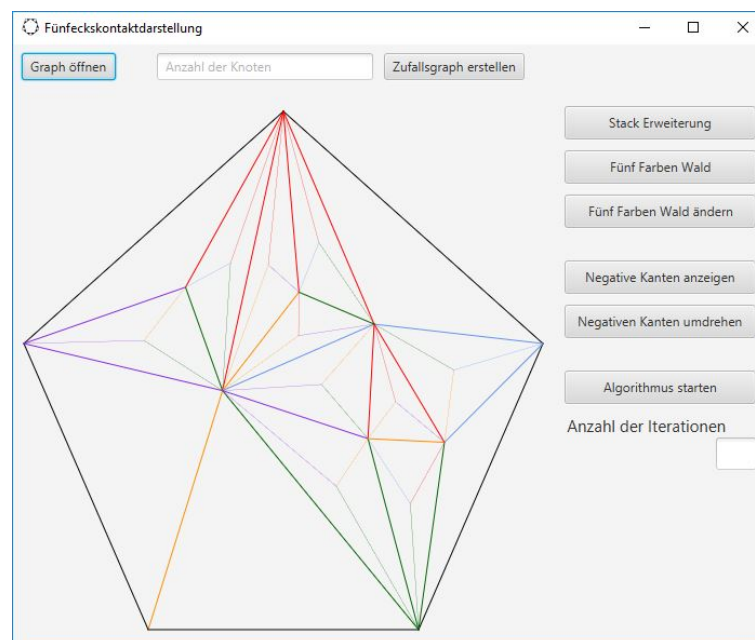


Abbildung 4.9: Screenshot des Programms mit dem Beispielgraphen dieser Arbeit (vgl. Abb. 3.1).

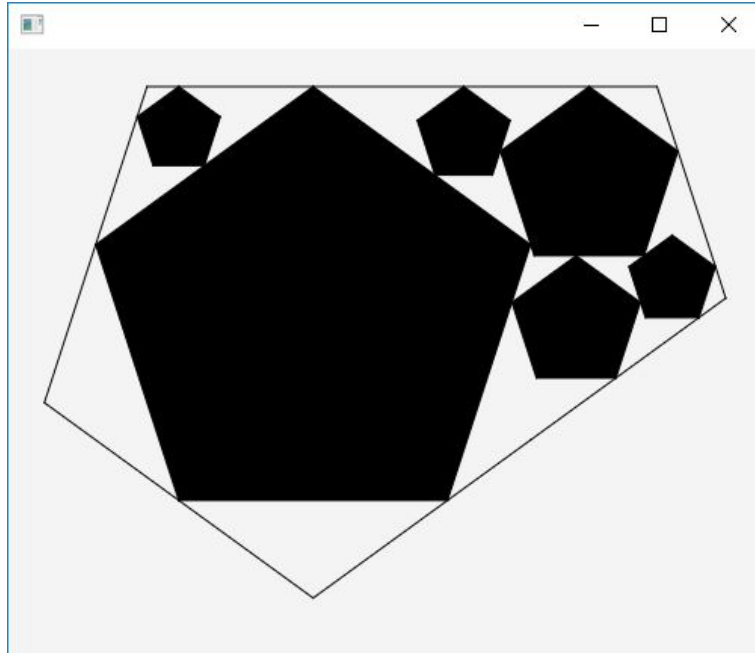


Abbildung 4.10: Die durch das Programm berechnete Fünfeckskontaktdarstellung des Graphen aus 4.9.

Der Beweis von Satz 3.3 zeigt uns eine Möglichkeit auf mithilfe der Konstruktion von Schnyder Wood einen Fünf Farben Wald auf unserem Graphen zu konstruieren. In der Implementierung wurde jedoch ein anderer Weg eingeschlagen, welcher die Bijektion zwischen Fünf Farben Wäldern und α_5 -Orientierungen ausnutzt.

Dazu konstruieren wir zuerst ein Netzwerk $\mathcal{N}_X = (G_X^*, u_X, s, t)$ in Abhängigkeit einer beliebigen Orientierung X . Das Netzwerk enthält einen gesonderten Startknoten s sowie Endknoten t , eine von X abhängige Kapazitätsfunktion u_X sowie den Graphen G_X^* .

Für jeden inneren Knoten $\{v_1, \dots, v_{(3n-7)}\} \in G^*$ zählen wir die Anzahl der ausgehenden Kanten und unterscheiden die folgenden zwei Fälle:

- (1) Ein Knoten v_i besitzt bzgl. der α_5 -Orientierung zu wenig ausgehende Kanten.
- (2) Ein Knoten v_j besitzt bzgl. der α_5 -Orientierung zu viel ausgehende Kanten.

Im ersten Fall konstruieren wir eine neue Kante $e = (s, v_i)$ und setzen die Kapazität dieser Kante auf

$$u(e) = \begin{cases} 5 - \text{outdeg}(v_i) & , \text{ wenn } v \text{ ein normaler Knoten ist,} \\ 2 - \text{outdeg}(v_i) & , \text{ wenn } v \text{ ein Stack Knoten ist.} \end{cases}$$

Im zweiten Fall konstruieren wir eine neue Kante $\hat{e} = (v_j, t)$ und setzen die Kapazität dieser Kante auf

$$u(\hat{e}) = \begin{cases} \text{outdeg}(v_i) - 5 & , \text{ wenn } v \text{ ein normaler Knoten ist,} \\ \text{outdeg}(v_i) - 2 & , \text{ wenn } v \text{ ein Stack Knoten ist.} \end{cases}$$

Der Graph $G_{\tilde{X}}^*$ setzt sich nun aus dem Stackgraphen von G , mit der Eigenschaft, dass alle inneren Kanten entgegen der Orientierung von X gerichtet sind und Kapazität eins haben, erweitert um die Knoten s und t und den eben definierten Kanten mit zugehörigen Kapazitäten zusammen.

Dabei wurde für die Startorientierung X die Richtung jeder inneren Kante von G^* zufällig, gleich-verteilt ausgewählt. Die zu den äußeren Knoten inzidenten Kanten wurden vorweg nach außen gerichtet. Der maximale Fluss f^* wurde mit dem Algorithmus von Ford-Fulkerson berechnet. Da wir wissen, dass die Menge der α_5 -Orientierungen auf G^* nicht-leer ist und alle Kapazitäten des konstruierten Netzwerkes positive ganze Zahlen sind, findet der Algorithmus stets einen maximalen s-t-Fluss, der uns das gewünschte Resultat liefert. Dass die Laufzeit $O(|f^*| \cdot |E|)$ des Ford-Fulkerson Algorithmus von dem Wert des maximalen Flusses f^* abhängt, soll uns in diesem Fall nicht weiter stören, da dieser genau die Anzahl der zu viel ausgehenden Kanten bzw. der zu wenig ausgehenden Kanten der Knoten im Graphen widerspiegelt und somit auf jeden Fall durch $|E|$ beschränkt ist. Gegeben dieser α_5 -Orientierung, erhalten wir mit den fest definierten Farben der zu den äußeren Knoten inzidenten Kanten direkt den dazugehörigen Fünf Farben Wald.

Algorithmus 2 Konstruktion einer α_5 Orientierung

Input: Die Stack Erweiterung G^* einer 5-Triangulierung mit Außenfläche $a_1, \dots, a_5$.

Output: Eine zufällige α_5 Orientierung.

$X \leftarrow$ eine beliebige Orientierung der inneren Kanten von G^*
 $\mathcal{N}_X \leftarrow$ das von X abhängige Netzwerk $(G_{\tilde{X}}^*, u_X, s, t)$
 $f^* \leftarrow$ konstruiere den maximalen Fluss auf $\mathcal{N}_X$

Kehre die Orientierung aller zu f^* gehörenden Kanten in X um.
return X

Die Methode, die die Kanten von G^* finden soll, die negativen und nicht-negativen Variablen der Lösung trennen und gleichzeitig eine disjunkte Vereinigung von gerichteten Kreisen bildet, wurde in Anlehnung an Satz 4.8 implementiert. Gehen wir kurz ins Detail.

Wenn wir eine Wechselkante $e = vw$ des zweiten Typs betrachten, impliziert Lemma 4.6, dass es einen weiteren Vorzeichenwechsel auf dem zu w gehörigen Flächenviereck geben muss. Wir wollen kurz bildlich auf die sechs verschiedenen Fälle einer Nachfolger-Kante eingehen, wobei zwei Fälle (1 und 3) zwei Nachfolger-Kanten besitzen. Dabei sei angemerkt, dass die zweite Nachfolger-Kante jeweils eine normale Kante ist, die wie eine Wechselkante vom Typ 1 einen Vorzeichenwechsel im Kontaktpunkt der dazugehörigen Fünfecke besitzt. Diesmal hat jedoch eins der beiden zu diesem Punkt inzidenten Flächenvierecke ebenfalls einen Vorzeichenwechsel.

Die Nachfolger-Kanten sind abhängig von der Lage des Vorzeichenwechsels. Wenn sich dieser an der Spitze des Flächenvierecks befindet, entscheidet die Richtung der Kante zwischen den beiden anderen Knoten der Fläche darüber, welche Nachfolger-Kante gewählt wird (vgl. Abb. 4.12, Fall 5 und 6, Kante $\{u, z\}$).

Für den Algorithmus betrachten wir also zuerst alle Stack Knoten f . Für jeden Stack Knoten, der eine Wechselkante impliziert, das heißt für den die zugehörigen Variablen

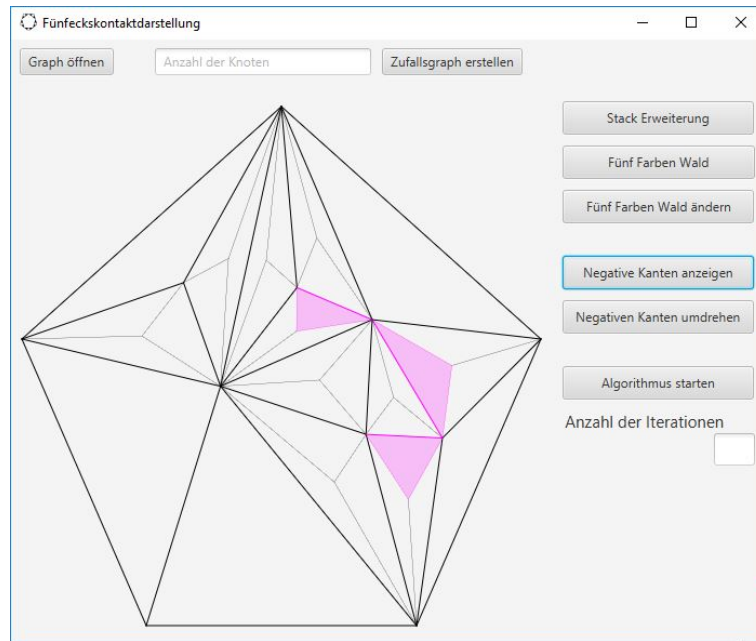


Abbildung 4.11: Die durch das Programm berechneten Wechselkanten mit dazugehörigen Nachfolger-Kanten des Graphen aus Abbildung 4.9 im Bezug auf den dort abgebildeten Fünf Farben Wald.

die Bedingung $\text{sgn}(x_f^{(1)}) \neq \text{sgn}(x_f^{(2)})$ erfüllen, überprüfen wir, welcher Falle aus Abbildung 4.12 auf diesen zutrifft und fügen die jeweiligen Kanten zur Menge der negativen Kanten hinzu. Danach überprüfen wir für alle inneren (normalen) Knoten, ob es sich bei den ausgehenden Kanten des Knotens um Wechselkanten des ersten Typs handelt.

Falls ja, fügen wir diese wieder zur Menge der negativen Kanten hinzu. Jetzt drehen wir noch die Menge der negativen Kanten auf der zugrundeliegenden α_5 -Orientierung um. Dies führt, wie schon angesprochen, im besten Fall zu einer Orientierung, deren Gleichungssystem positiv ist. Falls nicht, iterieren wir den Vorgang. Die Abbildung 4.13 zeigt die Anzahl der Iterationen in einem praktischen Test.

Für alle betrachteten Graphen wurde innerhalb weniger Iterationen die dazugehörige Fünfeckskontaktdarstellung gefunden. Jedoch liegt, wie bereits erwähnt, noch kein Beweis der Korrektheit des Algorithmus vor. So ist es theoretisch möglich, dass immer dieselbe Folge von Fünf Farben Wäldern ausgeführt wird und die Iteration nicht endet. Analog zu diesem Algorithmus hat Felsner in [4] und [6] bereits Algorithmen zur Konstruktion von regelmäßigen Kontaktdarstellungen von Dreiecken und Vierecken vorgestellt. Diese Algorithmen wurden jeweils umfangreich getestet (in [13] und [12]) und auch dort waren sie immer erfolgreich. Das legt die Vermutung nahe, dass der Algorithmus, der für jeden 5-triangulierten Graphen mit einem beliebigen Fünf Farben Wald startet, endlich ist. Das große Ziel ist es, einen Existenzbeweis einer Kontaktdarstellung zu finden, die auf Grundlage des angegebenen Algorithmus basiert, womit gleichzeitig die Frage nach der Komplexität der Berechnung gelöst wäre.

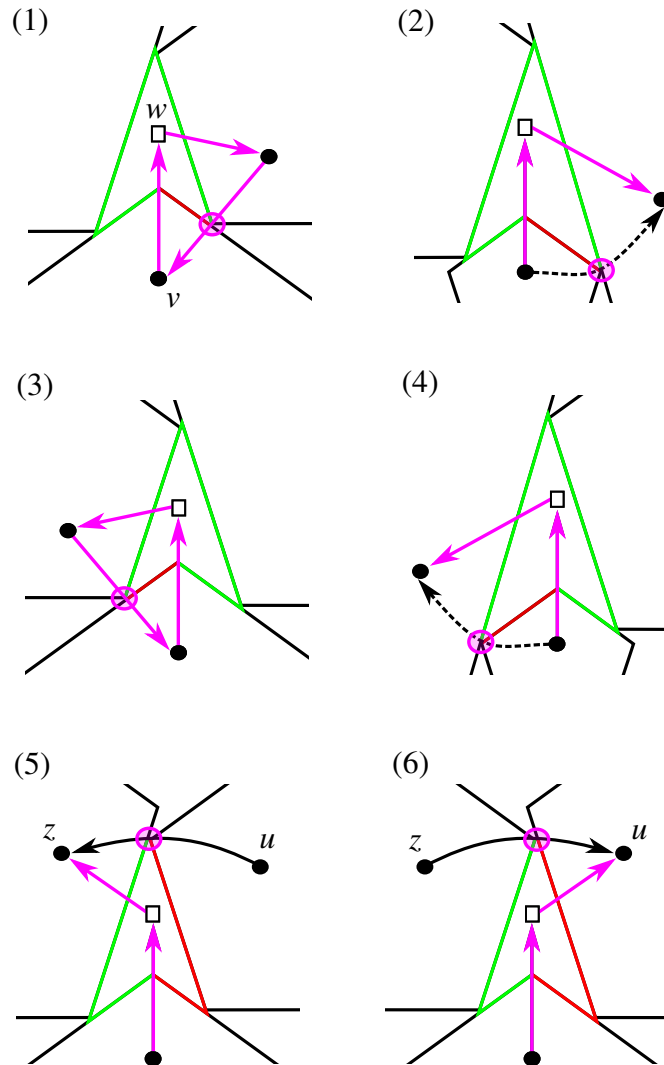


Abbildung 4.12: Die verschiedenen Fälle der Nachfolger-Kanten einer Wechselkante $e = vw$ vom Typ 2. Negative und positive Segmente des Flächenvierecks sind rot bzw. grün gekennzeichnet, wobei der jeweils andere Fall symmetrisch ist.

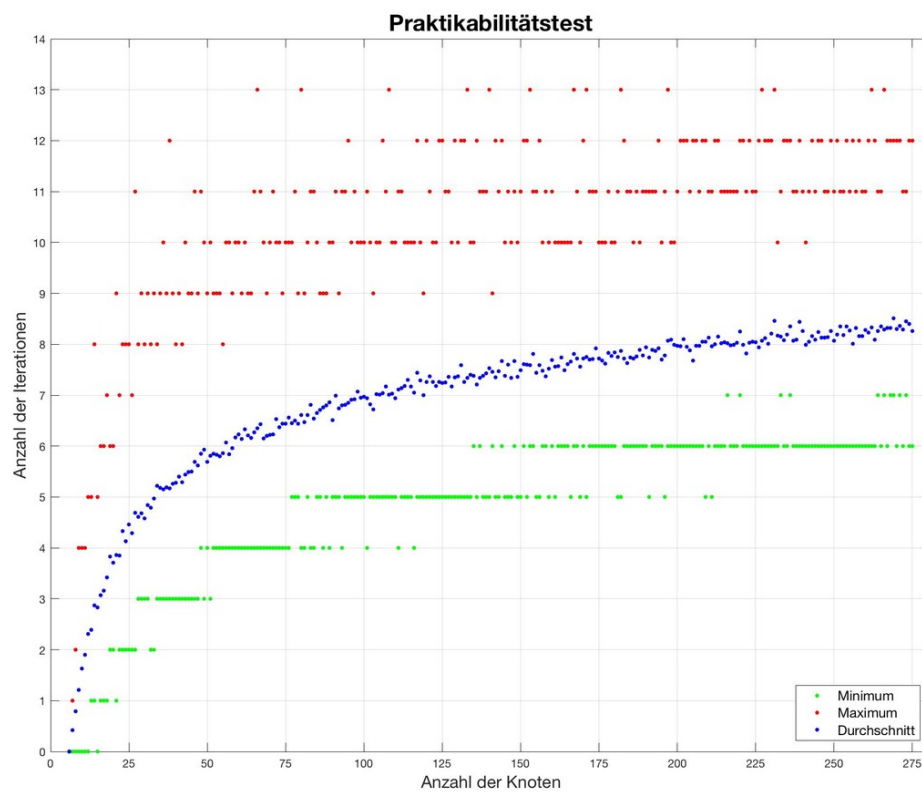


Abbildung 4.13: Praktischer Test des Programms, wobei in jeder Iteration alle Wechselkanten sowie die dazugehörigen Nachfolger-Kanten aus Abbildung 4.12 umgedreht werden.

Literaturverzeichnis

- [1] BATTISTA, G. D. ; VISMARA, L. : Angles of planar triangular Graphs. In: *SIAM J. Discrete Math.* 9 (1996), Nr. 3, S. 349–359
- [2] BREHM, E. : 3-orientations and schnyder 3-decompositions. (2000)
- [3] FELSNER, S. : Lattice structures from planar graphs. In: *The Election Journal of Combinatorics* Volume 11 (2004)
- [4] FELSNER, S. : Triangle contact representations. In: *Midsummer Combinatorial Workshop* Praha (2009). – <http://page.math.tu-berlin.de/~felsner/Paper/prag-report.pdf>
- [5] FELSNER, S. ; ZICKFELD, F. : On the Number of Planar Orientations with Prescribed Degrees. In: *The Election Journal of Combinatorics* Volume 15 (2008)
- [6] FELSNER, S. : Rectangle and square representations of planar graphs. (2010). – <http://page.math.tu-berlin.de/~felsner/Paper/geom-rep.pdf>
- [7] FELSNER, S. ; SCHREZENMAIER, H. ; STEINER, R. : Pentagon contact representations. (2017). – <http://page.math.tu-berlin.de/~felsner/Paper/fcf-long.pdf>
- [8] FRAYSSEIX, H. de ; MENDEZ, P. O.: On topological aspects of orientations. In: *Discrete Mathematics* (2001), S. 57–72
- [9] FRAYSSEIX, H. de ; MENDEZ, P. O. ; ROSENSTIEHL, P. : On triangle contact graphs. (1994), S. 233–246
- [10] KOEBE, P. : Kontaktprobleme der konformen Abbildung. [On the electrodynamics of moving bodies]. In: *Berichte über die Verhandlungen der Sächsischen Akad. Wiss., Math.-Phys* 88 (1936), S. 141–164
- [11] McKEE, T. A. ; McMORRIS, F. R.: *Topics in Intersection Graph Theory*. SIAM, 1991
- [12] PICCHETTI, T. : Finding a square dual of a graph. (2011)
- [13] RUCKER, J. : Kontaktdarstellungen von planaren Graphen. (2011). – <http://page.math.tu-berlin.de/~felsner/Diplomarbeiten/dipl-Rucker.pdf>
- [14] SCHNYDER, W. : Embedding Planar Graphs on the Grid. (1990), S. 138–148
- [15] SCHRAMM, O. : Combinatorically Prescribed Packings and Applications to Conformal and Quasiconformal Maps. In: *Modified version of PhD thesis from 1990*. – <https://arxiv.org/abs/0709.0710v1>

- [16] SCHREZENMAIER, H. : Zur Berechnung von Kontaktdarstellungen. (2016). – <http://page.math.tu-berlin.de/~schrezen/Papers/Masterarbeit.pdf>
- [17] STEINER, R. : Existenz und Konstruktion von Dreieckszerlegungen triangulierter Graphen und Schnyder woods. (2016). – https://www.fernuni-hagen.de/MATHEMATIK/DMO/pubs/Bachelorarbeit_Raphael_Steiner.pdf