(A1) Es gilt: $p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} (\lambda+1) & -2 & -2 \\ 1 & (\lambda-2) & -1 \\ 1 & -1 & (\lambda-2) \end{vmatrix} = (\lambda-1)^3,$

und $Rg(A-I) = Rg\left(\begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = 1, \quad Rg((A-I)^2) = 0,$

also: $J_A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}.$

Gesucht wird $\underline{u}_2$ aus $\mathbb{C}^3 \setminus \text{Kern}((A-I))$:

$\underline{u}_2 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad (A-I)\,\underline{u}_2 = \begin{bmatrix} -2x+2y+2z \\ -x+y+z \\ -x+y+z \end{bmatrix},$

$\underline{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ist OK, und

$A \times \underline{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \underline{u}_2 + \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \underline{u}_2 + \underline{u}_1.$

Mit $\underline{u}_3$ beliebig aus $\{\text{Kern}((A-I)) \setminus \text{Spann}(\underline{u}_1)\}$ erhält man eine Jordan-Basis von $\mathbb{C}^3$, z.B.: $\underline{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$

$\leadsto P = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$

$$\boxed{PJP^{-1} = A}.$$

## A2

a) Nein: $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,

$$P_A(\lambda) = P_B(\lambda) = \lambda^2, \quad A \not\sim B.$$

b) Ja,

$$m_A(\lambda) = \sum_{k=0}^{l} \alpha_k \lambda^k,$$

$$m_A(A^T) = \sum_{k=0}^{l} \alpha_k (A^T)^k = (m_A(A))^T,$$

also: $m_A \mid m_{A^T}$,

$$m_{A^T} \mid m_{(A^T)^T} = m_A.$$

$\leadsto m_{A^T} = m_A$ ($m_A$ ~~hat~~ Hauptkoeff.)

---

## A3

• Allgemeine Lösung:

$$\underline{y}(t) = P \times e^{tJ} \times \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} e^t & & & \\ & e^t & & \\ & & e^{4t} & te^{4t} \\ & & & e^{4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha e^t \\ \beta e^t \\ (\gamma+\delta t)e^{4t} \\ \delta e^{4t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\gamma+\delta(1+t))\, e^{4t} \\ \alpha\, e^t \\ -(\gamma+\delta t)\, e^{4t} \\ \beta\, e^t \end{bmatrix} \quad (\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R})$$

• $\underline{y}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$: setze $\alpha = 1$, $\beta = \gamma = \delta = 0$.

$$\left( \underline{y}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ e^t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right).$$

(A4) a) Mit $\alpha = (1-3i)$, $\beta = 0$, $\gamma = (1+2i)$

ist $A$ Hermitesch, also normal.

b) Setze $B = \frac{1}{2}(A + A^T)$, $C = \frac{1}{2}(A - A^T)$

$B$ ist symmetrisch, also normal.

$C^T = -C$, $\boxed{A = B + C}$,

$CC^T = -C^2 = C^T C$, $C$ ist normal.

---

(A6) a) • Sei $\varphi \in (U+W)^\perp$. Es gilt

$\forall \underline{u} \in U, \forall \underline{w} \in W, \ \varphi(\underline{u} + \underline{w}) = 0$,

insbesonders: $\forall \underline{u} \in U, \ \varphi(\underline{u} + \underline{0}_V) = \varphi(\underline{u}) = 0$,

also: $\varphi \in U^\perp$, ähnlicherweise: $\varphi \in W^\perp$

$\rightsquigarrow (U+W)^\perp \subseteq U^\perp \cap W^\perp$.

• Sei $\varphi \in (U^\perp \cap W^\perp)$. Es gilt:

$\forall \underline{u} \in U, \forall \underline{w} \in W, \ \varphi(\underline{u}) = \varphi(\underline{w}) = 0$,

a fortiori: $\forall \underline{u} \in U, \forall \underline{w} \in W, \ \varphi(\underline{u} + \underline{w}) = 0$

$\rightsquigarrow (U^\perp \cap W^\perp) \subseteq (U+W)^\perp$.

$$U^\perp \cap W^\perp = (U+W)^\perp.$$

b) $\Rightarrow$: sei $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ Basis von $V$.

$$A = [a_{i,j}],$$

$$a_{i,j} = \beta(b_j, b_i) = \beta(b_i, b_j) = a_{j,i},$$

die Darstellungsmatrix $A$ von $\beta$ bzgl. $\mathcal{B}$ ist symmetrisch.

$\Leftarrow$: Seien $\mathcal{B}$ und $A$ wie oben.

Für $\underline{u}, \underline{v} \in V$ beliebig gilt, mit

$$\underline{u} = \sum_{i=1}^{n} \mu_i b_i, \quad \underline{v} = \sum_{j=1}^{n} \nu_j b_j,$$

$$\beta(\underline{u}, \underline{v}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \mu_i \nu_j \, \beta(b_i, b_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \mu_i \nu_j \, a_{j,i}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \mu_i \nu_j \, a_{i,j} \quad (A \text{ ist symmetrisch})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \mu_i \nu_j \, \beta(b_j, b_i) = \beta(\underline{v}, \underline{u}),$$

$\beta$ ist symmetrisch.

c) $\Leftarrow$ ist hier falsch: $V = \mathbb{R}^2$, $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$,

$f_1 = e_1$, $f_2 = e_1 + e_2 = (1,1)$, $\mathcal{C} = \{f_1, f_2\}$, $F: V \to V$

mit ${}_{\mathcal{C}}[F]^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, d.h.:

$F(f_1) = F(e_1) = 0$, $F(f_2) = F(e_1 + e_2) = F(e_2) = f_2 = e_1 + e_2 \dots$

$\langle F(e_2), e_1 \rangle \neq \langle e_2, F(e_1) \rangle$

Musterlösung für 4. Aufgabe, LA2-Klausur

a) **1. Diagonalisierung.** Da $P$ symmetrisch ist, gibt es eine orthogonale Matrix $W$ so dass $P = WDW^T$, wobei $D$ diagonal ist. Ausserdem besitzt $P$ nur nichtnegative Eigenwerte, damit sind auch alle Diagonaleinträge von $D$ nichtnegativ. Für das Approximationsproblem folgt

$$\begin{aligned}\min_{U \text{ orthogonal}} \|P - U\|_F &= \min_{U \text{ orthogonal}} \|WDW^T - U\|_F \\ &= \min_{U \text{ orthogonal}} \|W(D - W^TUW)W^T\|_F \\ &= \min_{U \text{ orthogonal}} \|D - \underbrace{W^TUW}_{=:\tilde{U}}\|_F \\ &= \min_{\tilde{U} \text{ orthogonal}} \|D - \tilde{U}\|_F, \qquad (1)\end{aligned}$$

da die Frobenius-Norm invariant unter orthogonalen Transformationen ist.

**2. Lösung des reduzierten Problems.** Zur Lösung von (1) wird die Spur-Darstellung der Frobenius-Norm angewandt:

$$\begin{aligned}\|D - \tilde{U}\|_F^2 &= \operatorname{spur}((D - \tilde{U})^T(D - \tilde{U})) = \operatorname{spur}(D^2 - D\tilde{U} - \tilde{U}D + I), \\ &= \sum_{i=1}^n d_{ii}^2 - 2d_{ii}\tilde{u}_{ii} + 1,\end{aligned}$$

wobei $d_{ii}$ und $\tilde{u}_{ii}$ die $i$-ten Diagonaleinträge von $D$ und $\tilde{U}_i$ bezeichnen. Das Approximationsproblem zerfällt also in $n$ unabhängige Teilprobleme

$$\min_{-1 \le u_{ii} \le 1} d_{ii}^2 - 2d_{ii}u_{ii} + 1.$$

(Beachte, dass $u_{ii}$ als Eintrag einer orthogonalen Matrix betragsmässig nicht grösser als 1 sein kann.) Das Minimum wird angenommen wenn der negative Anteil $2d_{ii}u_{ii}$ am grössten ist, also für $\tilde{u}_{ii} = 1$. Da jede Spalte von $\tilde{U}$ Norm 1 hat, folgt daraus $\tilde{U} = I_n$.

**3. Rücktransformation.** Wenn $\tilde{U}$ das reduzierte Problem (1) löst, dann löst $U = W\tilde{U}W^T$ das Ausgangsproblem, mit 2. folgt also $U = WIW^T = I$.

**Alternativer Lösungsvorschlag für den 2. Schritt.** Bezeichne $v_i$ die $i$-te Spalte von $D - \tilde{U}$. Dann gilt

$$\|D - \tilde{U}\|_F^2 = \sum_{i=1}^n \|v_i\|_2^2 = \sum_{i=1}^n \|d_{ii}e_i - \tilde{u}_i\|_2^2 \ge \sum_{i=1}^n (d_{ii} - 1)^2.$$

Mit der Wahl $\tilde{u}_i = e_i$ wird diese untere Schranke angenommen; also löst $\tilde{U} = I$ das Approximationsproblem (1).

b) Mit der Zerlegung $A = QP$ folgt

$$\min_{U \text{ orthogonal}} \|A - U\|_F = \min_{U \text{ orthogonal}} \|Q(P - \underbrace{Q^TU}_{=:\hat{U}})\|_F = \min_{\hat{U} \text{ orthogonal}} \|P - \hat{U}\|_F.$$

Aus Teil a) wissen wir, dass $\hat{U} = I$ letzteres Approximationsproblem löst, also löst $U = Q\hat{U} = Q$ das Ausgangsproblem.