Freie Universität Berlin

Die Goldbachsche Vermutung und ihre bisherigen Lösungsversuche

Konstantin Fackeldey

2002

Inhaltsverzeichnis

1 Erste Gedanken

Die Mathematik ist die Königin aller Wissenschaften. Ihr Liebling ist die Wahrheit, ihre Kleidung - Einfachheit und Klarheit. Ihr Palast ist von Dornengehölz umwachsen, wer zu ihm gelangen will, muß sich durch dieses Dickicht kämpfen. Ein zufälliger Reisender wird im Palast nichts Anziehendes finden. Seine Schönheit ffnet sich nur dem Verstand, der die Wahrheit liebt, der beim Überwinden von Schwierigkeiten hart wurde und der Zeuge ist fr die erstaunliche Neigung des Menschen zu verworrenen, aber unerschöpflichen und erhabenen geistigen Genüssen.

J. B. Snidadecki

1.1 Das Problem

Im Jahre 1742 schrieb der preussische Mathematiker Christian Goldbach (1690 – 1764) in einem Brief an Euler:

„Es scheinet wenigstens, dass eine jede Zahl größer als zwei, ein aggretum trium numerorum primorum[1] sey.“

Euler replizierte, dass sich nach seiner Kenntnis jede natürliche, gerade Zahl $n \geq 6$ als Summe von zwei ungeraden Primzahlen darstellen lasse.

In der Literatur findet man für die Goldbachsche Vermutung vorwiegend folgende Form:

(G) $n = p_1 + p_2$ ist lösbar mit ungeraden $p_1, p_2 \in \mathbb{P}$ für jedes gerade natürliche $n \geq 6$.

(U) $N = p_1 + p_2 + p_3$ ist lösbar mit ungeraden $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{P}$ für jedes ungerade natürliche $N \geq 9$.

mit $\mathbb{P} := \{p \in \mathbb{N} : p \text{ ist Primzahl}\}$. Die Vermutung (G) wird auch als *starke* oder *strenge* Goldbachsche Vermutung bezeichnet, da aus ihr (U) folgt:
wenn $N - 3 = p_1 + p_2$ für ungerades $N \in \mathbb{N}$ gilt, dann auch
$N = p_1 + p_2 + 3$.
Es sei noch erwähnt, dass bereits Descartes (1596 - 1650) bemerkt hatte, dass jede Zahl die Summe von nicht mehr als drei Primzahlen ist. Sein Manuskript wurde jedoch erst 1908 veröffentlicht. Diese Tatsache beeinträchtigt

[1] „aggretum trium numerorum primorum“= „die Summe von drei Primzahlen“

nicht die Priorität GOLDBACHs, denn er hat als erster von seiner Entdeckung Mitteilung gemacht.

Vereinbarung:
Wenn p und q nicht weiter beschrieben sind, handelt es sich um Primzahlen, ebenso p_i.
EULER hatte keinen Zweifel, dass die von Goldbach aufgestellte Vermutung richtig sei, jedoch konnte auch er sie nicht beweisen.

1.2 Die Wahrscheinlichkeit, dass die Goldbachsche Vermutung nicht stimmt

Ähnlich wie EULER ging es Dutzenden von großen Mathematikern, die sich nach bekannt werden des Problems damit befassten. Auch heute noch versuchen Mathematiker dieses Problem zu lösen. Anlass für solche Versuche geben folgende Resultate.

Satz 1 *Die Wahrscheinlichkeit, dass die Goldbachsche Vermutung für unendlich viele n nicht stimmt, ist 0.*

Beweisskizze:
Sei

$$x_i := \begin{cases} 1 & i \text{ ist prim oder } 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Aus dem *Primzahlsatz* erhalten wir:

$$\sum_{i \leq n} x_i \approx \frac{n}{\log n}.$$

Die Goldbachsche Vermutung ist dann äquivalent zu folgender Aussage:

$$\sum_{i=1}^{2n} x_i x_{2n-i} > 0.$$

Nun definieren wir eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf einer Menge der natürlichen Zahlen in folgender Weise:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{mit der Wahrscheinlichkeit } \frac{1}{\log i} \\ 0 & \text{mit der Wahrscheinlichkeit } 1 - \frac{1}{\log i} \end{cases} , \quad i > 2$$

und $X_1 = X_2 = 1$.
Dann ist

$$\sum_{i \leq n} X_i \approx \frac{n}{\log n} \quad \text{fast sicher,}^{2}$$

so dass die Menge $\{i : X_i = 1\}$ genauso schnell wächst wie die Primzahlen.
Bestimmen wir nun die Wahrscheinlichkeit von:

$$\sum_{i=1}^{2n} X_i X_{2n-i} > 0, \qquad \text{für alle } n.$$

Sei E_n das Ereignis das $\sum_{i=1}^{2n} X_i X_{2n-i} = 0$ gilt. Dann ergibt sich für $n > 3$

$$P(E_n) = \frac{1}{\log(2n-1)} \frac{1}{\log(2n-2)} \prod_{i=3}^{n} \left(1 - \frac{1}{\log i \log 2n - i}\right)$$

Aus der Maßtheorie haben wir folgenden Satz:

Lemma 1 (Borel-Cantelli) *Sei λ das Lebesgue-Maß. Wenn für die Menge $E_n \subseteq [0,1]$ mit*
$\sum \lambda(E_n) < \infty$ gilt, dann hat die Menge der Punkte in unendlich vielen der E_n das Maß 0.

Dieses Lemma kann auch auf Wahrscheinlichkeitsmaße angewandt werden und da für die Summe

$$\sum_{n=3}^{\infty} P(E_n) < \infty$$

gilt, ist der *Satz 1* gezeigt.

Montgomery & Vaughan bewiesen, dass die Mächtigkeit der Ausnahmemenge vom Goldbachschen Problem

$$E_2(X) := |\{n \leq X : 2n \neq p_1 + p_2\}| \tag{1.1}$$

Folgendes erfüllt:

$$E_2(X) \ll X^{1-\delta}$$

[2]**Definition ('fast sicher', nach [?])** *Y und für $n \in \mathbb{N}$, Y_n seien reellwertige Zufallsvariablen auf Ω . $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert fast sicher gegen Y, falls $P(K) = 1$, mit*

$$K := \{\omega \in \Omega : \lim_{n \to \infty} Y_n(\omega) = Y(w)\}$$

ist.

wobei $\delta > 0$ eine absolute Konstante ist. Sie wurde von Li [?] bestimmt, mit $\delta = 0,079$ und $\delta = 0,086$. Unter Annahme der Gültigkeit der *Riemannschen Vermutung* gilt die Aussage auch für $\delta < 0,5$ (eine Folgerung aus einem Satz von Hardy & Littlewood).
Hua konzentrierte sich auf die Darstellung $N = p_1 + p_2 + p_3$ und zeigte, dass die dazu entsprechende Ausnahmemenge $E_3(X)$

$$E_3(X) \ll X log^{-B} X$$

erfüllt, für geeignete $B > 0$. Leung & Liu [?] zeigten sogar:

$$E_3(X) \ll X^{1-\delta}$$

mit $\delta > 0$.

1.3 Ein C++ Programm als Besipiel

Die Goldbachsche Vermutung wurde mit Hilfe von Computern bis $n = 4 \cdot 10^{14}$ (Richstein, 2001) verifiziert. Das nachfolgende Beispiel-Programm in C++ veranschaulicht, wie die Goldbachsche Vermutung implementiert werden kann.

```
#include <math.h>
#include <stdio.h>
int primenumber(int p); // Hilfsprogramm
int main( void) // Hauptprogramm
{

    int i;          // ''kleinerer'' Primsummand
    int j;          // ''grsserer'' Primsummand
    int h=1;         // Die eingegebene Zahl
    int k=0;         // Hilfszhlvariable
    printf( ''\n'');
    printf(''\n Geben Sie eine gerade natuerliche
    Zahl ein: '');
    scanf(''%d'', &h);

    for (i=2; i<= h/2; i++)
    {
```

```
        k = h/2 -i;   // Gibt den Abstand von der
        kleienren Zahl zur ''Mitte'' an
        j = h-i;
           if (primenumber(i))
             if (primenumber (j) )
    printf("\n %5d %5d %5d '', i,j,k);     // Ausgabe
    }

    return 0;

}


int primenumber(int p)
{

    int t =2; // Teiler wird initialisiert
    while (t <= (int) sqrt((float)p))
    {
        if( p\%t == 0)   // p\%t bedeutet Primzahl
        //p modulo Teiler t
        return 0;    //keine Primzahl
        else
        t++;
    }
    return 1;    //eine Primzahl

}
```

Wie arbeitet das Programm?
Das Programm besteht aus `main` und `primenumber`. Im `main`-Teil wird die eingegebene Zahl eingelesen. Dann wird eine Schleife gebildet, in der die eingegebene Zahl in `j = h -i` ($\Leftrightarrow$ h= i+j) aufgeteilt wird. Nun erfolgt der Test, unter Benutzung von `primenumber`, ob `i` und `j` Primzahlen sind.
Es wird dabei eine *while-Schleife* gebildet, die mit einem `t` $\in \{t \in \mathbb{N} : 2 \leq t \leq \lfloor\sqrt{p}\rfloor\}$ prüft, ob die Zahl `p` $\mod t \equiv 0$ ergibt. Ist dies der Fall, dann wird eine „0“ausgegeben, andernfalls wird `t` erhöht. Wenn also alle `t` aus der oben stehenden Menge nicht Teiler von `p` sind, handelt es sich um eine Primzahl. Das dargestellte Programm soll ausschließlich als Beispiel dienen und ist keinesfalls laufzeitoptimiert.

AGARWAL et al. entwickelten einen neuen Algorithmus, der derzeit der fortschrittlichste und zuverlässigste Test für Primzahlen ist. Seine Korrektheit basiert auf der verallgemeinerten *Riemannschen Vermutung*. In dem oben aufgezeigten Programm kann die Methode `primenumber` wie folgt ersetzt werden:

```
int primenumber2(int p)
if( n==a^b, b>1)

    return 0;
    int r=2
    if(ggT(n,r) !=1)
    return 0;
    {

        if (primenumber(r))
        int q=largestprimefactor(r-1);
        if(q =>4*sqrt(r)*log(n) && n^(r-1)/q !=1%r)
        break;
        r++;

    }

for(a=1;2*sqrt(r)*log(n);a++)


    if((x-a)^n!=(x^n-a)(%x^r-1,n)
    return 0;

return 1;
```

`primenumber2` benötigt als Eingabe eine ungerade, quadratfreie Zahl. Ebenso wie in `primenumber` erfolgt als Ausgabe eine 1 für den Fall, dass `p` eine Primzahl ist. Ist `p` keine Primzahl, so wird eine 0 ausgewiesen. Obwohl `primenumber2` die langsame Methode `primenumber` benutzt, ist dieser Prim - zahltest schneller als alle bisherigen. Das liegt daran, dass in der *while-Schleife* `r<n` als Bedingung steht. In [**?**] wird seine Korrektheit und seine Überlegenheit gegenüber anderen Tests aufgezeigt. Auf weiterführende Ausführungen soll hier wegen der Komplexität verzichtet werden.
Die ersten computergestützten Verifikationen fingen 1940 mit Pipping an, der die Goldbachsche Vermutung bis $n < 100000$ zeigte. Bis heute konnte die Vermutung bis $n < 4 \cdot 10^{14}$ nachgewiesen werden. Diese Resultate sind zwar eine beachtenswerte numerische Leistung, jedoch sind sie kein richtiger Beweis.

1.4 Zwei unterschiedliche Lösungsstategien

In den folgenden Kapiteln verlassen wir diese Ebene der computergestützten Tests und gehen zu den klassischen mathematischen Herangehensweisen über. Bei den bisherigen Lösungsversuchen lassen sich zwei unterschiedliche Methoden finden. Diese sind die *Basismethode* und die *Fast-Primzahlmethode*.

- Bei der *Basismethode* zeigt man, dass jede gerade Zahl die Summe einer festen Anzahl von genau k Primzahlen ist. Als nächstes versucht man dieses k immer kleiner und kleiner zu wählen, bis eventuell $k = 2$ ist, was dann der Beweis der Goldbachschen Vermutung wäre.
- Bei der *Fast-Primzahlmethode* zeigt man, dass jede Zahl die Summe von Fast-Primzahlen (also Zahlen die ein Produkt von endlich vielen Primzahlen sind) ist. Die Idee besteht darin, die „Qualität“der Fast-Primzahlen so zu verbessern, dass aus den Fast-Primzahlen normale Primzahlen werden.

2 Die Basismethode

Der Name *Basismethode* kommt hier aus der additiven Zahlentheorie. Seien nämlich $A, B \subseteq \mathbb{N}$ und $B \subseteq A$, dann ist B eine Basis h-ter Ordnung von A falls $hB = A$ ist. Die Goldbachsche Vermutung besagt nun, dass die Menge der ungeraden Primzahlen eine Basis der Ordnung 2 für die Menge der geraden Zahlen ≥ 6 hat.

2.1 Darstellung natürlicher Zahlen als Summe von ungleichen Primzahlen

Aus der Arbeit von H.E. Richert, *„Über Zerfällungen in ungleiche Primzahlen"*, 1941, stammt folgender Satz, der eine zurückhaltende Annäherung an das Goldbachsche Problem enthält:

Satz 2 *Jedes natürliche $n > 6$ ist als Summe ungleicher Primzahlen darstellbar.*

Um diesen Satz zu beweisen, benötigt man folgendes Lemma, welches in der Vorlesung Zahlentheorie (SoSe 2002) [2] erwähnt wurde:

Lemma 2 *Sei $\pi(n)$ die Primzahlfunktion, dann gilt:*
$\pi(2n) - \pi(n) \geq 1$.
D.h. für die kleinste Primzahl p, die $n < p$ erfüllt, gilt $p \leq 2n$.

Beweis (von Satz 2)
Betrachte zuvor folgende Zerlegungen:
$7 = 7,\ 8 = 5 + 3, 9 = 7 + 2, ..., 18 = 11 + 7,\ 19 = 11 + 5 + 3.$
Wir können also durch geeignete Summation mit $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, p_4 = 7, p_5 = 11$ ein Folge von $s_0 = 13$ aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen erzeugen. Addiert man noch $p_6 = 13$, so entstehen $s_1 = s_0 + p_6 = 13 + 13 = 26$ aufeinander folgende Zahlen und zwar alle $n \in \mathbb{N}$ mit $7 \leq n \leq 32$.
Analog für s_2 :
$s_2 = s_1 + p_7$ Zahlen im Bereich $7 \leq n \leq 49$.
Die neuen Zahlen, die jedesmal dazukommen bestehen aus der Summe der einen Primzahl und aus einem Restterm, welcher aus der vorangegangenen Summe stammt, für den wir bekanntlich schon eine Darstellung in Primzahlen gefunden haben. Das Verfahren läßt sich unbegrenzt fortsetzen, wenn in $s_{k+1} = s_k + p_{6+k}$ stets $p_{6+k} \leq s_k$ gilt. Dies zeigt man durch vollständige Induktion:

<u>k=1:</u>

$$p_6 = 13 \leq 13 = s_0 \quad \surd$$

$k-1 \to k$:

$$\text{Sei } k \in \mathbb{N} \text{ beliebig und es gelte: } p_{6+k-1} \leq s_{k-1}$$

dann gilt auch:

$$p_{6+k} \overset{Lemma}{<} 2p_{6+k-1} \leq s_{k-1} + p_{6+k-1} = s_k.$$

□

Aufgrund von *Satz 2* wissen wir nun, dass es eine Basis für die Menge der Primzahlen gibt. Es folgt eine Verschärfung dieser Aussage.

2.2 Darstellung natürlicher Zahlen als endliche Summe von ungleichen Primzahlen

Mit dem folgenden Satz zeigte der russische Mathematiker SCHNIRELMANN, dass die Menge der Primzahlen $\mathbb{P}$ eine Basis endlicher Ordnung für $\mathbb{N}$ hat.

Satz 3 (Schnirelmann) *Jedes natürliche $n > 1$ ist als Summe von höchstens S Primzahlen darstellbar.*

Dieser Beweis wird leichter nachvollziehbar, wenn man ihn in mehrere Schritte unterteilt:

- Im **1.Schritt** wird der Begriff der Dichte eingeführt.
- Im **2.Schritt** wird gezeigt, wie wir die Dichten von z.B. zwei Folgen nach oben abschätzen können.
- **3.Schritt:** Zu einer gegebenen Menge und einer gegebenen Dichte wird die maximale Anzahl der Summanden bestimmt.
- Der im **4.Schritt** gezeigte Beweis ist sehr aufwendig: hier muß auf eine in diesem Text nicht bewiesene Abschätzung von $D(x) = |\{x \in \mathbb{N} \,|\, x = p_1 + p_2;\, p_1, p_2 \in \mathbb{P}\}|$ zurückgegriffen werden.
- Im *Satz 5* benötigten wir eine positive Dichte, im *Satz 4* zeigten wir, dass die Dichte von $2\mathbb{P}$ positiv ist. Diese beiden Resultate werden im **5. Schritt** zusammengefaßt und ergeben den Beweis von *Satz 3*.

<u>1.Schritt:</u> Die Dichte einer Zahlenfolge

Es sei $a_{n\in\mathbb{N}} = \{a_1 = 1, a_2, ...\}$ eine die Eins enthaltende Teilfolge der Folge $n_{k\in\mathbb{N}}$ der natürlichen Zahlen. Ferner definieren wir $A(m)$ als die Anzahl der Folgenglieder der Folge $a_{n\in\mathbb{N}}$ für die gilt: $a_i \leq m$, $m \in \mathbb{N}$ und a_i ist i-tes Folgenglied von $a_{n\in\mathbb{N}}$.

Definition 1 (Dichte) *Unter der Schnirelmann-Dichte α einer Folge $a_{n\in\mathbb{N}}$ verstehen wir:*

$$\alpha = \inf_{m>1} \tfrac{A(m)}{m}$$

Bemerkung 2.1 Die Menge der Primzahlen hat die Dichte 0, denn

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi(n)}{n} = 0.$$

Das bedeutet also, dass „fast alle“natürlichen Zahlen zusammengesetzt sind.

Mit der *Definition 2* gilt $A(m) \geq \alpha m$ für alle $m \geq 1$ und $0 \leq \alpha \leq 1$.
Aus $\alpha = 1$ folgt $a_{n\in\mathbb{N}} = n_{k\in\mathbb{N}}$. Stellen wir uns nun k Folgen vor:

$$a^1_{n\in\mathbb{N}}, a^2_{n\in\mathbb{N}}, ..., a^k_{n\in\mathbb{N}} \text{ mit den Dichten } \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k.$$

Jetzt bilden wir daraus die Summenfolge:

$$w_n = a^1_{n\in\mathbb{N}} + a^2_{n\in\mathbb{N}} + ... + a^k_{n\in\mathbb{N}},$$

welche alle verschiedenen Zahlen

$$\nu = \delta_1 a_{i_1} + \delta_2 a_{i_2} + ... + \delta_k a_{i_k}, \text{ wobei } \delta_i = 1 \text{ oder } 0 \text{ ist},$$

der Größe nach geordnet enthält. Für den Fall

$$a^1_{n\in\mathbb{N}} = a^2_{n\in\mathbb{N}} = ... = a^k_{n\in\mathbb{N}} =: a_n$$

und dass w_n alle natürlichen Zahlen enthält, also $w_n = ka_n = n_{n\in\mathbb{N}}$ gilt, bedeutet dies, dass sich jedes $s \in \mathbb{N}$ als Summe von höchstens k Summanden aus a_n darstellen läßt.

<u>2.Schritt:</u> Abschätzung der Summe von Dichten
Im Jahr 1942 bewies H.B. Mann, dass für die Dichte γ von w_n folgendes gilt:

$$\gamma \geq \min(\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_k, 1).$$

Für unseren Beweis wollen wir jedoch nicht diese Abschätzung benutzen, sondern eine schwächere Abschätzung von γ, da wir nur die Existenz einer Konstanten zeigen wollen.

Satz 4 *Sei*

$A := \{a \in \mathbb{N}\}$, $A(x) = |\{a \in A : a \leq x\}|$

$B := \{b \in \mathbb{N}\}$, $B(x) = |\{b \in B : b \leq x\}|$

$S := \{s \in \mathbb{N} \ : s = a \, oder \, s = b \, oder \, s = a + b\}$

$0 \leq \alpha = \inf_{x \geq 1} \frac{A(x)}{x}$ *und*

$0 \leq \beta = \inf_{x \geq 1} \frac{B(x)}{x}$

dann gilt für alle $x > 0$:

$$S(x) \geq (\alpha + \beta - \alpha\beta)x.$$

Wir verzichten hier auf den Beweis und betrachten noch das folgende Lemma:

Lemma 3 *Ist mit den Notationen von Satz 4*

$$\alpha + \beta \geq 1$$

dann gilt für alle $x > 0$

$$S(x) = x$$

es ist also jede natürliche Zahl ein "s".

Beweis:
Fallunterscheidung:

- Ist $\alpha = 0$, dann ist $\beta \geq 1$ also $\beta = 1 \ \Rightarrow B$ enthält alle natürlichen Zahlen.
- Sei $\alpha > 0$, zu zeigen ist, dass $x \in S$ gilt.
  - Sei $x \in A \ \Rightarrow x \in S$

– andernfalls: sei $x > 1$ und

$$A(x-1) = A(x) \geq \alpha x > \alpha(x-1)$$

$$B(x-1) \geq \beta(x-1).$$

Die $a \in A$ mit $a \leq x-1$ sind also mehr als $\alpha(x-1)$ Zahlen, die $b \leq x-1$ mindestens $\beta(x-1)$ Zahlen, also die positiven $x-b \leq x-1$ mindestens $\beta(x-1)$ Zahlen. Wegen $\alpha(x-1)+\beta(x-1) \geq x-1$ ist also $a = x-b \Leftrightarrow x = a+b$.

□

3.Schritt: Abschätzung für natürliche Zahlen

Satz 5 *Es sei* $\alpha > 0$*,*

$A := \{a \in \mathbb{N}\}\,;\, A(x) = |\{a \in A : a \leq x\}|$ *und*

$0 \leq \alpha = inf_{x \geq 1} \frac{A(x)}{x}$,

dann ist jede natürliche Zahl als Summe von höchstens $c_1(\alpha)$ *Summanden a darstellbar.*

Beweis: Setze $1 - \alpha = \gamma$ mit $0 \leq \gamma \leq 1$.
Ferner ist $A_h := \{a \in A : a$ besteht aus höchstens h Summanden$\}$ mit den Elementen $a_h \in A_h$. Analog zu $A(x)$ ist $A_h(x) = |\{a \in A_h : a_h \leq x\}|$ Wir wollen nun durch Induktion über h die folgende Formel für alle $x > 0$ zeigen:

$$A_h(x) \geq (1-\gamma^h)x$$

$\underline{h=1}$:

$$A_1(x) \geq (1-\gamma)x$$

$\underline{h \to h+1}$:
wir benutzen *Satz 4* mit: $B = A_h$ und $\beta = 1 - \gamma^h$:

$$A_{h+1} \geq (\alpha + \beta - \alpha\beta)x = (1-\gamma+1-\gamma^h-(1-\gamma)(1-\gamma^h))x$$
$$= (1-\gamma^{h+1})x \text{ für alle } x.$$

Wenn man nun $h = c_2(\alpha)$ mit $1-\gamma^h \geq 1/2$ wählt, dann gehört nach *Lemma 3* jede natürliche Zahl zu $A_{2h} = A_{c_1(\alpha)}$.
Damit ist der Satz bewiesen.
4. Schritt: Primzahlsumme mit positiver Dichte

Satz 6 *Die aus 1 und den Primzahlsummen p und q gebildete Folge hat positive Dichte.*

Beweis: $D(i)$ sei die Anzahl der Darstellungen von i als Summe von zwei Primzahlen und $M(x)$ sei die Anzahl der $y \leq x$, für die gilt: $y = p + p'$ mit $y, x \in \mathbb{N}$, $p, p' \in \mathbb{P}$ Man erhält also:

$$\sum_{\substack{i=1 \\ D(i)\geq 1}}^{x} 1 = M(x).$$

Nun benutzen wir die CAUCHY-SCHWARZsche-Ungleichung geschickt, um einen Zusammenhang herauszufinden:

$$0 < \left(\sum_{n=4}^{x} 1 \cdot D(n) \right)^2 \leq M(x) \sum_{n=4}^{x} D^2(n) \tag{2.1}$$

oder

$$M(x) \geq \frac{\left(\sum_{n=4}^{x} D(n)\right)^2}{\sum_{n=4}^{x} D^2(n)}. \tag{2.2}$$

Da es zu zeigen gilt, dass $M(x)$ positiv ist brauchen wir
i) eine untere Schranke für den Zähler und
ii) eine obere Schranke für den Nenner
zu i)
Betrachte: Für alle $p \leq x/2$ und $q \leq x/2$ ist $p + q \leq x$ eine Darstellung, die in $\sum D(n)$ gezählt[3] wird, daher die erste Ungleichung:

$$\sum_{n=4}^{x} D(n) \geq \sum_{\substack{p,q \in \mathbb{P} \\ p,q \leq \frac{x}{2}}} 1 = \pi^2 \left(\frac{x}{2}\right) \overset{\text{Tschebyscheff}}{>} \frac{c_1 x^2}{\log^2 x}. \tag{2.3}$$

zu ii)
Wir benutzen folgende Abschätzung, deren Beweis in [32] zu finden ist. Es gibt eine positive Konstante c, so dass für alle $n \geq 2$ gilt:

$$D(n) \leq c \prod_{p|n} (1 + p^{-1}) \cdot \frac{n}{\log^2 n}. \tag{2.4}$$

[3] Wobei für $q \neq p$, $p + q$ und $q + p$ als verschieden gelten sollen.

Dann ist

$$\sum_{n=1}^{x} D^2(n) \overset{(1.4)}{\leq} D(1) + c^2 \sum_{n=2}^{x} \left(\frac{n^2}{\log^4 n} \cdot \prod_{p|n} (1+p^{-1})^2 \right)$$

$$\overset{D(1)=1}{\leq} 1 + c^2 \frac{x^2}{\log^4 x} \cdot \sum_{n=2}^{x} \left(\prod_{p|n} (1+p^{-1})^2 \right).$$

Der Produktterm soll dabei noch weiter abgeschätzt werden:
Wie in (1.4) betrachten wir nun die Entwicklung für alle Primteiler von n und finden mit $a, b \in \mathbb{N}$ Folgendes:

$$\prod_{p|n} (1+p^{-1}) = \sum a^{-1} \sum b^{-1} = \sum (ab)^{-1}. \tag{2.5}$$

Hierbei durchlaufen a und b unabhängig voneinander die quadratfreien Teiler von n. Wenn man jetzt a und b über alle Teiler von n gehen läßt, kann die Summe $\sum (ab)^{-1}$ nur größer werden.
Außerdem gilt $kgV(a,b)|n$, d.h ein beliebiges Produkt $(ab)^{-1}$ wobei $a \leq x$ und $b \leq x$ ist kann also zu $\left\lfloor \frac{x}{kgV(a,b)} \right\rfloor$ Zahlen gehören, für die $n \leq x$ gilt. Dies erklärt die erste Ungleichung. Die Zweite ergibt sich aus der Tatsache, dass $kgV(a,b) \geq \sqrt{ab}$ ist.

$$\sum_{n=1}^{x} \prod (1+p^{-1})^2 \leq \sum_{a=1}^{x} \sum_{b=1}^{x} (ab)^{-1} \left\lfloor \frac{x}{kgV(a,b)} \right\rfloor \leq \sum_{a=1}^{x} \sum_{b=1}^{x} (ab)^{-3/2}$$

$$< x \sum_{a=1}^{\infty} a^{-3/2} \sum_{b=1}^{\infty} b^{-3/2} < c_2 x. \tag{2.6}$$

Für $n \in \{k \in \mathbb{N} : 8 \leq k \leq x\}$ gilt:

$$\sum_{n \leq x} D^2(n) \leq 1 + c^2 c_2 \frac{x^3}{\log^4 x} = c_3 \frac{x^3}{\log^4 x}. \tag{2.7}$$

Setzt man dies nun in (1.2) ein erhält man:

$$M(x) > c_1^2 \frac{x^4}{\log^4 x} \cdot \frac{\log^4 x}{x^3 c_3} = \frac{c_1^2}{c_3} x. \tag{2.8}$$

Dies bedeutet also, dass es eine positive Konstante κ gibt mit

$$\frac{M(x)}{x} \geq \kappa.$$

□

5.Schritt: Das Finale
Beweis:(Satz 3)
Sei A die Menge, die aus 1 und allen $p+p_1$ besteht, dann ist $A(x) = 1+M(x)$. Nach *Satz 7* ist :

$$1 + M(x) \geq \kappa x \text{ also } A(x) \geq cx$$

Nach *Satz 6* ist jedes $x > 0$ in höchstens $c_1\kappa = c_4$ Summanden 1 und $p+p_1$ zerlegbar, also in maximal $2\kappa = c_5$ Summanden 1, p zerlegbar.
$x = 2 \in \mathbb{P}$, dann folgt: $x = 2 + \sum(1 \text{ oder } p)$,
wobei die Summe höchstens c_5 Glieder enthält.
Wir wollen nun die Einsen eliminieren: Kommt keine 1 in der Darstellung vor, dann ist x in höchstens $1 + c_5$ Primzahlen zerlegt. Kommt eine 1 in der Darstellung vor, dann vereinigt man 2 und die Einsen zu Zweien oder zu einer Drei und sonst Zweien und x ist in höchstens c_5 Primzahlen zerlegt. Also

$$S = 1 + c_5.$$

Damit ist der Satz bewiesen.

□

2.3 Die Schnirelmannsche Konstante

Die im *Satz 3* erwähnte Konstante S (Schnirelmannsche *Konstante*) wurde von Schnirelmann (1930) $S \leq 800000$ errechnet und schließlich durch Ricci (1936) auf $S \leq 67$ reduziert. Für genügend große n ergab sich $S \leq 20$ (Shapiro und Warga , 1950) und $S \leq 18$ (Yin Wen Lin , 1957).
Die Konstante S konnte aufgrund von besseren Approximationen verringert werden. Zum Beispiel kann in (1.4) bei der Abschätzung von $D(x)$ $(= |\{(p,q) : x = p+q, p \leq q \,\text{mit}\, p,q \in \mathbb{P}\}|)$ folgendes benutzt werden:

Satz 7

$$D(x) \approx \sum_{k=3}^{x/2} \frac{1}{\ln(k)\ln(n-k)}, \qquad \textit{für gerades } x \geq 6.$$

Beweisskizze:
Es gelten:

Satz 8 (Primzahlsatz) *Sei $\pi(x)$ die Anzahl der Primzahlen mit $2 \leq p \leq x$, dann gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\ln(x)} = 1.$$

Satz 9 (Tschebyscheff)

$$\frac{7}{8} < \frac{\pi(x)}{x/\ln(x)} < \frac{9}{8}$$

Aufgrund von *Satz 8 & Satz 9* erhält man die Abschätzung:

$$\pi(x) = \frac{x}{\ln(x)}.$$

Die Wahrscheinlichkeit von x eine Primzahl zu sein ist:

$$\begin{aligned} P(x) \approx \frac{\pi(x) - \pi(x-1)}{n-(n-1)} = \pi(x) - \pi(x-1) \approx \frac{d}{dy}\frac{y}{\ln(y)}|_{y=x} \\ = \frac{1}{\ln(x)} - \frac{1}{ln(x-1)} \approx \frac{1}{\ln(x)}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Nun nehmen wir uns eine Zahl:

$$k \in \{m \in \mathbb{N} : 3 \leq m \leq x/2, \qquad x \geq 6 \text{ ist gerade}\}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass k und $x-k$ beide Primzahlen sind, ist:

$$P(k)P(x-k).$$

Da $D(x)$ die Anzahl der „Primzahlsummenpärchen “zählt, kann diese Funktion durch die Summe über alle k (mit $3 \leq k \leq x/2$) der $P(k)P(x-k)$ approximiert werden:

$$\begin{aligned} D(x) \approx \sum_{k=3}^{x/2} P(k)P(x-k), \text{ für gerades } x \geq 6 \\ \approx \sum_{k=3}^{x/2} \frac{1}{\ln(k)\ln(x-k)}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Hiermit ist ein Weg aufgezeigt, den RICCI et al. beschritten haben, um den Wert der absoluten Konstante S auf eine niedrigere Größe zu reduzieren.

2.4 Darstellung einer ungeraden Zahl als Summe von 3 Primzahlen

Wir haben bis jetzt gesehen, dass die Menge der Primzahlen eine Basis endlicher Ordnung ist. Für genügend große n konnte sogar bewiesen werden, dass die Basis ≤ 18 ist.
Im folgenden Beweis erfolgt nun der Durchbruch von VINOGRADOV. Er hat gezeigt, dass die Menge der ungeraden Primzahlen eine Basis der asymptotischen Ordnung 3 für die Menge der ungeraden Zahlen ist. $B \subseteq A$ ist eine Basis asymptotoscher Ordnung h von A, wenn hB alle bis auf endlich viele Zahlen aus A enthält.
Der Beweis von VINOGRADOV ist sehr aufwendig und umfangreich. In diesem Abschnitt soll versucht werden, die Kreismethode und die *Riemannsche Vermutung* vorzustellen, bevor die Beweisskizze über den Satz von VINOGRADOV erfolgt.
HARDY und LITTLEWOOD hatten im Jahr 1923 gezeigt, dass unter Annahme einer Verallgemeinerung der *Riemannschen Vermutung* jede hinreichend große, ungerade natürliche Zahl als Summe von drei ungeraden Primzahlen dargestellt werden kann, wobei hinreichend groß $> 3,6 \cdot 10^{32}$ (vgl.[16]) bedeutet.
ZINOVIEV zeigte sogar folgenden Satz:

Satz 10 (Zinoviev) *Unter der Annahme der verallgemeinerten Riemannschen Vermutung gilt: jede ungerade Zahl größer* 10^{20} *ist eine Summe von drei Primzahlen.*

Wir werden uns hier die Beweise von HARDY und LITTLEWOOD bzw. ZINOVIEV jedoch nicht ansehen, weil sie auf einer Vermutung basieren und außerdem sehr lang sind. Trotzdem ist ihre Erwähnung berechtigt, weil HARDY & LITTLEWOOD die unten erwähnte *Kreismethode* entwickelten, welche für viele folgende Beweise die Grundlage ist. Außerdem konnten die beiden Mathematiker mit ihrer Methode bedeutende Ergebnisse beim WARING-Problem erzielen, darauf soll in 3.1.2 weiter eingegangen werden.
Jetzt wollen wir uns mit einer Beweisidee zu einem Satz von VINOGRADOV befassen , der die gleiche Aussage wie HARDY und LITTLEWOOD zeigt, wobei der Beweis jedoch nicht auf der Annahme der *Riemannschen Vermutung* basiert.

2.4.1 Die Hardy - Littlewoodsche Kreismethode

Für gegebenes natürliches s und komplexes z bilden wir die Potenzreihen:

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{(m^s)} \qquad (|z| < 1). \tag{2.11}$$

Wenn man nun solche einzelnen Terme zusammen zu einer großen Summe zieht, so dass $m_1^k + ... + m_s^k = n$ ist, sieht man, dass

$$F^2(z) = \sum_{m_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{m_s=1}^{\infty} z^{m_1^k+...+m_s^k} = \sum_{n=1}^{\infty} R_s(n) z^n.$$

Wobei $R_s(n)$ die Anzahl der Darstellungen von n in der benötigten Form $m_1^k + ... + m_s^k = n$ ist. Wir erhalten damit nach einem Satz von CAUCHY:

$$R_s(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{F(z)^s}{z^{n+1}} dz,$$

wobei γ ein Kreis mit dem Mittelpunkt im Ursprung und Radius ρ, $0 < \rho < 1$ und einem Kreisbogen in einer bestimmten Umgebung des rationalen Punktes $\mathbf{e}(a/q) := e^{2\pi i/q}$ ist. Dann erhält man die Approximation:

$$F(\rho\mathbf{e}(\beta + a/q)) \approx q^{-1} S(q,a) C_k (1 - \rho\mathbf{e}(\beta))^{-1/k},$$

wobei

$$S(q,a) = \sum_{x=1}^{q} \mathbf{e}(ax^k/q)$$

ist. Leider waren sie nur in der Lage dies zu zeigen, wenn

$$\rho = 1 - 1/n, \qquad |\beta| < q^{-1} n^{-1+1/k}, \qquad 1 \leq a \leq q \leq n^{1/k}, \leq (a,q) = 1$$

gilt.
Diese Methode erwies sich als sehr sinnvoll, doch in ihrem weiteren Beweis benötigten sie Abschätzungen, die auf der Richtigkeit der *Riemannschen Vermutung* basieren. Daher:

2.4.2 Die Riemannsche Vermutung

Lässt man p die Menge $\mathbb{P}$ durchlaufen, so wird formal:

$$\prod_{p\in\mathbb{P}}^{\infty} (1 - p^{-1})^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Während $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert, ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} = \prod_{p\in\mathbb{P}}^{\infty} (1 - p^{-z})^{-1}$ konvergent für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $Re(z) > 1$. Die hierdurch definierte Funktion heißt RIEMANNsche ζ-Funktion. Sie hat Nullstellen bei allen negativen, geraden Zahlen und für unendlich viele komplexe Zahlen z mit $0 \leq Re(z) \leq 1$. Dabei

haben unendlich viele Nullstellen den Realteil 1/2. *Riemanns Vermutung* ist nun, dass für alle Nullstellen mit $0 \leq Re(z) \leq 1$ gilt: $Re(z) = 1/2$. Die Richtigkeit dieser Vermutung (allerdings in einer allgemeineren Form) benötigten HARDY & LITTLEWOOD für ihre Abschätzungen.
Mit Hilfe dieser Aussage, waren sie in der Lage zu zeigen, dass jede hinreichend große ungerade Zahl als Summe von drei ungeraden Primzahlen darstellbar ist. Die von ihnen entwickelten Methoden waren so maßgebend, dass man 1981 insgesamt 400 Veröffentlichungen zählte, in denen andere Mathematiker ihre Methoden benutzten. Einer von ihnen war VINOGRADOV:

Satz 11 (Vinogradov) *Jede hinreichend große ungerade Zahl N kann als Summe dreier Primzahlen dargestellt werden. Bezeichne $r(N)$ die Anzahl der Lösungen der Gleichung*

$$N = p_1 + p_2 + p_3 \tag{2.12}$$

in Primzahlen p_1, p_2, p_3 so gilt für $N \to \infty$

$$r(N) = \overbrace{\frac{1}{2}\mathcal{S}(N)N^2(\log N)^{-3}}^{Hauptglied} + \overbrace{O(N^2 \log\log N \cdot (\log N)^{-4})}^{Fehlerglied}, \tag{2.13}$$

wobei

$$\mathcal{S}(N) = \prod_{p \nmid N}(1 + (p-1)^{-3}) \cdot \prod_{p|N}(1 - (p-1)^{-2}) \tag{2.14}$$

ist. Für ungerades N ist $\mathcal{S}(N) \geq 6\pi^{-2} > 0$.

Für gerades N ist $\mathcal{S}(N) = 0$, so dass man also in diesem Fall nichts aussagen kann.
VINOGRADOV hatte in seinem Beweis eine etwas abgewandelte Methode von HARDY & LITTLEWOOD benutzt, mit dem Unterschied jedoch, dass er die Exponentialsummen sehr scharfsinnig abschätzt (mit trigonometrischen Summen). Das Resultat ist der folgende Satz:

Satz 12 *Sei* $1 < q < N, \quad (a, q) = 1$

$$\xi = \frac{a}{q} + \frac{\vartheta}{q^2}, \qquad |\vartheta| \leq 1$$

und

$$S_N(\xi) = \sum_{p \leq N} e^{\xi 2\pi i p} =: \sum_{p \leq N} \boldsymbol{e}(\xi p)$$

Dann gilt:

$$S_N(\xi) = \Big(CN \log^{9/2} N \Big\{(q^{-1} + qN^{-1})^{1/2} + exp(-\log 1/2N)\Big\}\Big). \qquad (2.15)$$

Der Beweis ist sehr umfangreich, da man neben der Abschätzung von Summen über Teilerfunktionen auch noch Abschätzungen über gewisse Exponentialsummen benötigt. Er soll hier nicht erbracht werden, es wird auf [27] verwiesen. Die Gleichung in (1.15) ist besser als $S_N(\xi) = O(N/\log N)$ wenn q nicht zu klein aber auch nicht zu nahe bei N liegt. Deswegen wird (1.15) für $\log^A N \le q \le N(\log N)^{-A}$ angewandt.
Es soll nun eine Beweisskizze für den *Satz 11* von VINOGRADOV erfolgen. Dabei wird vorrausgesetzt, dass N eine genügend große natürliche Zahl ist. Es bezeichne $r(n)$ die Anzahl der Lösungen der Gleichung (1.12). Mit $r_N^*(n)$ bezeichnen wir die Anzahl der Lösungen von (1.12) in Primzahlen $p_j \le N$, $(j = 1, 2, 3)$. Für $n \le N$ gilt offenbar $r_N^*(n) = r(n)$, da die Bedingung $p_j \le N$ dann von selbst erfüllt ist. Ausgehend von:

$$S_N(\xi) = \sum_{p \le N} \mathbf{e}(\xi p) \qquad (2.16)$$

erhält man:

$$S^3(\xi) = \sum \sum_{p_1,p_2,p_3 \le N} \sum \mathbf{e}(\xi(p_1 + p_2 + p_3)) = \sum_{6 \le n \le 3N} r_N^*(n)\mathbf{e}(\xi n) \qquad (2.17)$$

Für ganzes k bei beliebigen reellen w_0 :

$$\int_{-w_0}^{1-w_0} \mathbf{e}(k\xi)\, d\xi = \begin{cases} 1 & \text{für } k{=}0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad (2.18)$$

Aus (1.17) und (1.18) erhält man unter der Bedingung $r_N^*(N) = r(N)$:

$$r(N) = \int_{-w_0}^{1-w_0} S^3(\xi)\mathbf{e}(\xi N)\, d\xi \qquad (2.19)$$

Aus der Integraldarstellung (1.19) soll nun $r(N)$ asymptotisch berechnet werden. Wegen *Satz 12* kann $S(\xi)$ in der Umgebung eines Punktes $\xi = a/q$ mit „großem“q gut abgeschätzt werden. Zuvor muß jedoch eine Aufteilung des Integrationsintervalles $[-w_0, 1 - w_0]$ erfolgen. Es wird sich zeigen, dass in einer gewissen Umgebung $M_{a,q}$ rationaler Punkte $\xi = a/q$ mit „kleinem “q der Ausdruck $S^3(\xi)$ mit Hilfe des Primzahlsatzes von PAGE, SIEGEL & WALFISZ [4] durch einfachere Funktionen ersetzt werden kann, so dass dann die Integration ausgeführt werden kann. Durch einige Umformungen kann (1.13) in eine Gestalt gebracht werden, aus der man ersieht, dass für ungerades N das Hauptglied dem Fehlerglied überwiegt, denn $S(N) > 6\pi^{-2}$. Für gerades N erhält man: $S(N) = 0$. Damit hat man dann gezeigt, dass Folgendes für die Anzahl der Darstellungen gilt:

$$r(N) > 0 \text{ für genügend große und ungerade } N,$$

wobei „genügend großes N “bedeutet: $> 3^{3^{15}}$, es handelt sich dabei um eine Zahl mit 6 846 165 Stellen, die BORODZKIN 1956 bestimmt hat. CHEN & WANG zeigten, dass VIONGRADOVS Theorem auch für ungerade $N > 10^{43000}$ gilt. Aber auch diese Zahl ist zu groß, als dass man bis dahin mit Computern die Goldbachsche Vermutung verifizieren könnte. VINOGRADOV hatte mit seinem Beweis damit auch gezeigt, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.

[4] Der Satz wird nur der Vollständigkeit halber erwähnt. Was wir uns merken sollten, ist, dass man die Primzahlfunktion π hier mit einem Integral annähern kann.

Satz 13 (Page-Siegel-Walfisz) *Zu vorgegebenen $B > 0$ exitstieren positive, höchstens von B abhängige Konstanten, C_1, C_2 derart, dass für alle $x \geq 2$ und alle $k \leq (\log x)^B$ die Abschätzung:*

$$\left|\pi(x; k, a) - \frac{1}{\varphi(k)} \int_2^x \frac{du}{\log u}\right| \leq C_1 x \exp(-C_2 \log^{1/10} x)$$

mit

$$\pi(x, k, a) = \sum_{p \leq x,\, p \equiv a \mod k} 1 \text{ und } \varphi(k) = k \prod_{p|k} (1 - p^{-1}).$$

3 Die Fast-Primzahlmethode

Die im Folgenden erläuterte Methode, ist ein Hilfsmittel, um zu zeigen, dass sich jedes genügend große $n \in \mathbb{N}$ in der Form $n = a^{(s)} + a^{(t)}$ darstellen läßt, wobei $a^{(r)}$ eine aus höchstens r Primzahlen zusammengesetzte Zahl sein soll. Die Variablen s und t konnten sehr gut verkleinert werden (auf $s = 1$ und $t = 2$).
Aufgrund der Überschrift folgt eine

Definition 2 *Eine natürliche Zahl heißt Fast-Primzahl, wenn ihre Anzahl der Primfaktoren eine bestimmte Zahl nicht überschreitet.*
Notation: $\mathbb{P}_i = \{p_1 \cdot ... \cdot p_i | p_1, ..., p_i \in \mathbb{P}\}$.

3.1 Darstellung einer geraden Zahl als Summe von zwei Fast-Primzahlen

In diesem Abschnitt soll das BRUNsche Siebverfahren vorgestellt werden, welches eine Verbesserung des Siebes von ERATOTHENES darstellt. Auf Grundlage dieser Konstruktion wurde o.g. Resultat erziehlt.

3.2 Das Brunsche Siebverfahren

Das BRUNsche Siebverfahren dient zur Siebung der Zahlen $n \leq$ einer arithmetischen Folge F mit dem Anfangsglied $a > 0$ und der Differenz d.
Das Sieb wird auf folgende Weise gebildet:
Aus der Folge der Primzahlen streichen wir die Zwei und alle Primzahlteiler von d. Die übriggebliebenen Primzahlen ordnen wir der Grösse nach und bezeichen sie mit $q_1, q_2, ...$.
Sei $\nu(y)$ die Anzahl der $q_i \leq y$. Jedem $q_i \leq y$ werden zwei arithmetische Folgen A_i und B_i mit dem Anfangsglied a_i bzw. b_i und der Differenz q_i zugeordnet, unter der Bedingung, dass $0 \leq a_i < q_i$; $0 \leq b_i < q_i$; $a_i \neq b_i$. Alle diese Folgen A_i und B_i (derer sind es $2\nu(y)$) bilden jetzt das Sieb, indem man aus F diejenigen n wegfallen läßt, die in einer Folge A_i oder B_i liegen.
Die übriggebliebenen $n \leq x$ erfüllen dann die Bedingungen:

$$n \equiv a (mod\, d); \qquad n \not\equiv a_i (mod\, q_i); \qquad n \not\equiv b_i (mod\, q_i); \qquad a_i \neq b_i.$$

Diese Bedingungen werden natürlich erfüllt, weil die Zahlen, welche den Bedingungen nicht genügen, von uns aussortiert wurden.
Die Anzahl dieser restlichen n bezeichnen wir mit $\Upsilon(d, x, y)$. Da wir über $\Upsilon(d, x, y)$ nur spezielle von a, a_i, b_i unabhängige Aussagen machen, werden

eben diese Argumente nicht in $\Upsilon(d,x,y)$ aufgeführt. Das Ziel des Siebverfahrens ist es, eine möglichst gute Abschätzung für $\Upsilon(d,x,y)$ zu finden.

Betrachtung 1 *Sei* $a = 1; \quad d = 2; \quad q_1 = 3; \quad q_2 = 5; \quad q_i = p_{i+1}$ *und* $a_i = 0$ *für jedes* i*;* $b_i \equiv x(\mod q_i)$ *für* $x \not\equiv 0(\mod q_i)$*, aber* $b_i \not\equiv x(\mod q_i)$*, wenn* $x \equiv 0(\mod q_i)$*. Ist* x *gerade und* $u \geq 2$ *ganz, so ist* $\Upsilon(2,x,x^{1/u}) \leq$ *der Anzahl der ungeraden* $n < x$ *mit der Eigenschaft, dass weder* n *noch* $x - n$ *durch eine Primzahl* $\leq x^{1/u}$ *teilbar ist.*
Aus $x - n \equiv 0(\mod q_i)$ *folgt nämlich* $n \equiv b_i(\mod q_i)$*, wenn* $x \not\equiv 0(\mod q_i)$ *und* $n \equiv 0(\mod q_i)$*, wenn* $x \equiv 0(\mod q_i)$*. Alle Primteiler von* n *und x-n sind also* $> x^{1/u}$*. Das bedeutet:*
sowohl n *als auch* $x-n$ *können höchstens* $u-1$ *Primfaktoren enthalten. Aus* $\Upsilon(2,x,x^{1/u}) > 2$ *würde also die Existenz einer Darstellung* $x = n + (x-n)$ *folgen, in der* n *und* $x-n$ *Primzahlen sind.*

Die Ausführungen in *Betrachtung 1* zeigen, dass das Brunsche Siebverfahren auch auf das Goldbachsche Problem führt (schließlich ist die letzte Zeile in *Betrachtung 1* eine andere Formulierung der Vermutung). Der Ansatz mit der Siebmethode führt jedoch leider nicht zu einer Lösung der Vermutung, da der Term $\Upsilon(2,x,x^{1/u})$ keine positive untere Schranke besitzt. Somit konnte man den Fall $s = t = 1$ nicht zeigen. Jedoch war es möglich mit dem Siebverfahren , ausgehend von $n = a^{(s)} + a^{(t)}$, folgendes zu erreichen:
$s = t = 9$ (Brun 1919); $s = t = 7$ (Rademacher 1924); $s = t = 6$ (Estermann 1932); $s = 5, t = 7$; $s = 4, t = 9$;$s = 3, t = 15$;$s = 2, t = 366$ (Ricci 1936); $s = t = 4$ (Buchstab 1940); $s = t = 3$ (Vinogradov 1957); $s = 2, t = 3$ (Wang Yuan 1959, Levin 1963).

3.3 Darstellung einer geraden Zahl als Summe einer Primzahl und einer Fast-Primzahl

Hier werden Resultate der Form $(s = 1, t = K)$ vorgestellt, wobei man das K auf 1 zu reduzieren versuchte - bis jetzt ohne Erfolg. Wir wollen uns zuerst einen Satz ansehen, der schon im Jahr 1934 von Romanoff bewiesen wurde:

Satz 14 *Sei* $a \geq 2$ *mit* $a \in \mathbb{N}$*. Die Zahlen* n*, welche sich in der Form*

$$n = p + a^m, \qquad p \quad prim, \qquad m = 1, 2, ... \tag{3.1}$$

darstellen lassen, haben positive (asymptotische) Dichte.

Bei a^m handelt es sich leider nicht um eine Primzahlpotenz, deswegen passt der Satz eigentlich auch nicht unter diese Überschrift. Trotzdem wird er erwähnt, um zu zeigen, wie wenig man eigentlich über die additve Theorie der Primzahlen weiß. ROMANOFF hat zwar gezeigt, dass die Zahlen, die sich wie in (2.1) darstellen lassen positive Dichte haben. Es ist offensichtlich, dass mit $p + 2^m$, $p \in \{q \in \mathbb{P} : q \text{ ist ungerade}\}$ nur ungerade Zahlen dargestellt werden können. Jedoch zeigten ERDÖS und V.D. CORPUT dass es eine arithme -tische Reihe von ungeraden Zahlen gibt, welche nicht in dieser Form darstell -bar ist. SUN zeigte in [31], dass es unendlich viele ungerade Zahlen n gibt, so dass weder n noch $n + 448$ eine Darstellung in der Form $2^k + p^a$ besitzen, wobei a eine Primzahlpotenz ist.
Es zeigt sich also, dass Aussagen in dieser Form nicht stark genug sind.

Im Jahr 1932 bewies T. ESTERMANN, dass jede große, gerade Zahl die Summe von einer Primzahl und einer Fast-Primzahl (d.h. ein Element von $\mathbb{P}$) ist. Jedoch geht auch [5] dieser Beweis von der Riemannschen Vermutung aus. RENYI zeigte 1947/48 (unabhänging von der *Riemannschen Vermutung*): Jede gerade Zahl lässt sich als Summe einer Primzahl und einer Fast-Primzahl darstellen, wobei die Fast-Primzahl eine Zahl mit maximal K Primfaktoren ist.
12 Jahre später -im Jahr 1960- bewiesen WANG YUAN 1962 & LEVIN 1963 unter Gültigkeit der *Riemannschen Vermutung* den Fall $K = 4$ (bzw.$s = 1, t = 4$, mit obiger Notation), PANG CHENG DONG zeigte $K = 5$ (s=1, t=5) und BUCHSTAB $K = 3$ (s=1, t=3). Im nächsten Abschnitt werden wir darauf eingehen, wie CHEN JING-RUN den Fall $K = 2$ bewiesen hat.

3.4 Das Theorem von Chen

Im Jahr 1978 veröffentlichte J.R.CHEN das bisher „beste“Resultat in Bezug auf die Goldbachsche Vermutung:
Sei $R(n)$ die Anzahl der Primzahlen $p \leq n-2$ für die $n-p$ das Produkt von höchstens 2 Primzahlen ist also

$$R(n) = |\{p : p \leq N, N - p = P_2\}|$$

dann gilt:

[5] wie HARDY-LITTLEWOOD

Theorem 1 (Chen) *Für jedes genügend große und gerade n ist*

$$R(n) > 0,67 \prod_{p>2} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \prod_{2<p|N} \frac{p-1}{p-2} \frac{N}{\log^2 N}.$$

Das bedeutet also: Jede genügend große gerade Zahl kann als die Summe von einer Primzahl und einer Zahl die ≤ 2 Primfaktoren hat, dargestellt werden.

Chen ging bei seinem Beweis von einem Satz von Renyi aus, dieser besagte: Es existiert ein $k \geq 1$, so dass 2 auf unendlich viele Arten in der Form : $2 = m - p$ dargestellt werden kann, wobei p Primzahl und m eine k-Fast-Primzahl (also $m \in \mathbb{P}_k$) ist. Chen zeigte dann mit der Siebmethode, dass $k = 2$ gewählt werden kann, so dass

$$2 = m - p \text{ mit } m \in \mathbb{P}_2 \text{ und } p \in \mathbb{P} \text{ gilt.}$$

Chen bewies also gleichzeitig:
Es gibt unendlich viele Primzahlen, so dass $p + 2 \in \mathbb{P}_2$ ist.
Dieses Resultat ist sehr dicht an der berühmten und bisher unbewiesenen Vermutung, dass es unendlich viele *Primzahlzwillinge* gibt ($p, p' \in \mathbb{P}$ heißen *Primzahlzwillinge* wenn $p' = p + 2$ gilt (z.B.: (5,7);(11,13);(17,19)). Der Beweis von *Theorem 1* ist sehr technisch und benötigt viele Hilfsmittel, die hier nicht in Kürze erklärt werden können. In Anlehnung an 2.2 hat Chen also den Fall $s = 1, t = 2$ gezeigt. Bei seinem Beweis benutzt er die Selbergsche Siebmethode, die eine Art Modifikation des Siebes von Eratosthenes und des Siebes von Brun ist.

4 Schlußbetrachtungen

In diesem Kapitel werden die jüngsten Resultate vorgestellt, die man mit der *Siebmethode* und der *Kreismethode* erzielt hat. Zum Abschluß erfolgt noch eine chronologische Betrachtung der Goldbachschen Vermutung, dabei wird die Entwicklung des Problems in drei Zeitabschnitte unterteilt.

4.1 Zusammenhänge

Bei der Betrachtung der Goldbachschen Vermutung drängen sich folgende Überlegungen auf:

1. Wieso ist eine scheinbar so einfache Behauptung so schwer zu beweisen?

2. Wieso arbeitete nicht auch Euler daran?

Zu (a) : Die Goldbachsche Vermutung verbindet eine multiplikative Eigenschaft (eine Primzahl zu sein) mit einer additiven Eigenschaft. Das ist eine Verbindung, die bis heute noch nicht ausreichend erforscht ist.
Zu (b) : Es sind keine Versuche Eulers bekannt, die Goldbachsche Vermutung zu beweisen. Möglicherweise sind im weiteren Briefwechel zwischen *Euler* und Goldbach Bemerkungen über Primzahlzwillinge als derartige Versuche anzusehen. Das Resultat von Chen, in dem man einen klaren Zusammenhang zu den Primzahlzwillingsproblem sieht, bestärken diese Annahme.
Bei den meisten Annähernugen an die Goldbachsche Vermutung sind zwei Ansätze zu finden:

- Siebmethode
- Kreismethode.

4.2 Siebmethode

Für lange Zeit dachte man, dass die Siebmethoden vielleicht nie die Aufgabe erfüllen können, für die sie eigentlich konstruiert wurden, nämlich für das Aufspüren von Primzahlen. Bekannt wurde dies als *„parity problem “*, welches eine Barriere war, die Zahlentheoretiker davon abhielt, die Siebmethode in Fragen bezüglich der Verteilung von Primzahlen zu benutzen.
Die Siebmethode geht nach dem folgenden Prinzip vor:

1. Schreibe alle natürlichen Zahlen von 2 bis N auf

2. Streiche alle Vielfachen der Primzahlen $p = 2, 3, 5, ...$

3. Wiederhole (b) so lange, bis alles $\leq \sqrt{n}$ gestrichen ist.

Die übrigbleibenden Zahlen sind die Primzahlen zwischen $\sqrt{n}$ und n.
Wir fangen mit $n-1$ Zahlen an, streichen die $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ Vielfachen von 2, danach streichen wir die Vielfachen von 3, das sind $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ minus $\lfloor \frac{n}{6} \rfloor$, die schon bei der 2 mitgezählt wurden. Nach diesem Streichen sind also nur noch:

$$n - 1 - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - \lfloor \frac{n}{3} \rfloor + \lfloor \frac{n}{6} \rfloor$$

Zahlen übrig. Die 4 wurde schon durch die 2 abgehandelt, also nehmen wir die Vielfachen von 5, womit wir dann auch schon 10 und 15 erledigt haben. Jedoch müssen wir die Vielfachen von 30 wieder dazuzählen, die haben wir ja schon vorher gestrichen.
Nach dem Streichen aller Vielfachen von 2,3 und 5 bleiben noch:

$$-1 + \lfloor \frac{n}{1} \rfloor - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - \lfloor \frac{n}{5} \rfloor + \lfloor \frac{n}{6} \rfloor + \lfloor \frac{n}{10} \rfloor + \lfloor \frac{n}{15} \rfloor - \lfloor \frac{n}{30} \rfloor.$$

Damit kommen wir zu folgenden Gleichung, die uns die Anzahl der Primzahlen zwischen $\sqrt{n}$ und n gibt:

$$\pi(n) - \pi(\sqrt{n}) = -1 + \sum_{d*} \mu(d) \lfloor \frac{n}{d} \rfloor. \tag{4.1}$$

Wobei $d^* = \{d : \text{Primfaktoren von d sind} \leq \sqrt{n}\}$ bedeuten soll. Wenn man (3.1) genau bestimmen könnte, wäre es möglich $\pi(n)$ gut abzuschätzen, aber dies ist überraschenderweise ziemlich kompliziert.
Was hat das mit der Goldbachschen Vermutung zu tun?
Wir benutzen ein sehr ähnliches System nur mit dem Unterschied, dass wir nicht mit einer Reihe von Zahlen anfangen, sondern eine Reihe von Zweiertupeln, die in der Summe jeweils $2n$ ergeben, betrachten.
Bsp.: $(1, 2n-1), .., (26, 2n-26), ..., (2n-1, 1)$. Dann streichen wir das erste Glied, welches ein echtes Vielfaches von 2 ist. Dann streichen wir das erste Glied, welches ein echtes Vielfaches von 3 ist ... Chen benutzte in seinem Beweis zum *Theorem 1* dieses System (natürlich hat er noch einige Feinheiten und Tricks zusätzlich benötigt).

4.2.1 Das jüngste Resultat mit der Siebmethode

Friedlander & Iwaniec [5] zeigten 1998, dass es unendlich viele Primzahlen der Form $x^2 + y^4$ gibt.
Was ist das Besondere daran?

Zahlentheoretiker, die sich mit Primzahlen beschäftigen, haben das Ziel Werkzeuge zu konstruieren, um diese besonderen Zahlen aufzuspühren. DIRICHLET zeigte im Jahr 1873, dass es unendlich viele Primzaheln der Form $a, a + d, a + 2d, a + 3d, ...$ (mit $ggT(a, d) \leq 1$) gibt. Später wurden dann noch Techniken entwickelt mit denen man z.B. zeigen konnte, dass es unendlich viele Primzahlen der Form x^2+21y^2 gibt. Diese dadurch konstruierten Folgen haben jedoch eines gemeinsam:
Sie besitzten noch sehr *viele* Nicht-Primzahlen. Ein Lösungsansatz ist z.B. eine Folge zu konstruieren, in der *relativ viele* Primzahlen und *relativ wenig* andere natürliche Zahlen vorkommen.
Um *relativ viel* bzw. *relativ wenig* besser zu erklären benötigen wir folgende Definition:

Definition 3 *Unter der natürlichen Dichte δ einer Folge $a_{n\in\mathbb{N}}$ verstehen wir :*

$$\delta = \lim_{m\to\infty} \frac{A(m)}{m}.$$

Das Bestreben ist es, eine Folge mit der Dichte $\delta = 0$ zu konstruieren, die unendlich viele Primzahlen hat. Machen wir uns den Sachverhalt an den Mengen $\{x^2 + y^2 : x, y \in \mathbb{N}\}$ und $\{x^2 + y^4 : x, y \in \mathbb{N}\}$ klar:
Es gilt:

$$|A| := |\{x^2 + y^2 : x, y \in \mathbb{N}\} \cap [1, n]| \approx Cn$$
$$|B| := |\{x^2 + y^4 : x, y \in \mathbb{N}\} \cap [1, n]| \leq n^{3/4}.$$

Für die jeweiligen natürlichen Dichten gilt:

$$\delta_A = \lim_{n\to\infty} \frac{|A|}{n} \approx \lim_{n\to\infty} \frac{Cn}{n} = C$$

$$\delta_B = \lim_{n\to\infty} \frac{|B|}{n} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{n^{3/4}}{n} = 0.$$

Hier liegt die besondere Leistung von FRIEDLANDER & IWANIEC . Sie endeckten eine „dünne“Menge die unendlich viele Primzahlen enthält. Anschaulich bedeutet dies, dass es zwischen 0 und 10^{18}

- ungefähr 27 Millionen Zahlen der Form $x^2 + y^2$, jedoch nur
- 1 Millionen Zahlen der Form $x^2 + y^4$ gibt.

Beide Mengen haben aber unendlich viele Primzahlen. Damit ist IWANIEC & FRIEDLANDER ein Durchbruch bei dem „parity problem“gelungen.

4.3 Die Kreismethode

Die Kreismethode wurde von HARDY & RAMANUJAN [8] erfunden. Sie ist ein elegantes Mittel um additive Zahlenprobleme zu untersuchen und zeigt damit einen Zusammenhang zwischen *Zahlentheorie* und *Funktionentheorie*. Später arbeiteten HARDY & LITTLEWOOD sie weiter aus. VINOGRADOV hat in seinem Beweis diese Methode benutzt und sie verbessert, indem er schärfere Abschätzungen benutzte. In 2.2 wird die Methode beschrieben. Mit Hilfe der Kreismethode konnte auch das WARING-Problem gelöst werden, WARING behauptete 1770:

Satz 15 (Waring) *Sei s eine feste natürliche Zahl. Dann gibt es stets eine natürliche Zahl $m = m(s)$, so dass die Gleichung*

$$n = x_1^s + \dots\dots\dots + x_m^s$$

mit ganzen $x_1 \dots . x_m \geq 0$ für jedes natürliche n mindestens eine Lösung hat.

Zwar ist die Behauptung 1909 - also vor der Entwicklung der Kreismethode - von Hilbert bewiesen worden, doch in [29] befindet sich ein Beweis, der die Hilfsmittel der Kreismethode verwendet. Das WARING Problem wurde hier erwähnt weil es eine gewisse Ähnlichkeit zur Goldbachschen Vermutung aufweist und um zu zeigen, dass die Kreismethode von HARDY & LITTLEWOOD ein weites Anwendungsfeld in der additiven Zahlentheorie besitzt.

Im 1. Kapitel wurde bereits die Kreismethode vorgestellt. Hier soll sie nochmal auf die *strengere Goldbachsche Vermutung* angewendet werden. Wir gehen wieder von folgender Summe aus:

$$f(z) = \sum_{a \in \tilde{\mathbb{P}}} z^a \quad \text{mit } \tilde{\mathbb{P}} := \mathbb{P} \cup \{0; 1\}.$$

Dann ist:

$$f^2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} R(n) z^n.$$

wobei $R(n)$ die Anzahl der Möglichkeiten ist n als Summe von höchstens 2 Primzahlen zu schreiben.
Mit einer Formel von CAUCHY gilt:

$$R(2n) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=\rho} \frac{f^2(z)}{z^{2n+1}} dz$$

Man erhält somit eine Gleichung für die Anzahl der Möglichkeiten durch die n als Summe von maximal zwei Primzahlen dargestellt werden kann.
Es reicht dabei zu zeigen, dass:

$$\left| \int\limits_{|z|=\rho} \frac{f^2(z)}{z^{2n+1}} dz \right| \geq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0 \tag{4.2}$$

ist. Die Berechnug ist jedoch kompliziert, man kann den Wert nur numerisch approximieren. Um dies zu tun, bricht man den Kreis $|z| = \rho$ in zwei unterschiedliche Bögen auf, die getrennt voneinander behandelt werden können: Es sind dies zum einen rationale Zahlen mit kleinem Zähler und zum anderen Bögen, die keine rationalen Zahlen haben.
Da $R(n)$ nur die Zahlen $< n$ zählt, können wir f wie folgt mit Hilfe der Summe definieren: (wobei wir $\rho = 1$ setzen)

$$f_m(z) = \sum_{a \in P, a < m} z^a.$$

Auf diese Art und Weise ist es bisher gelungen zu zeigen, dass *jede* ungerade Zahl die Summe von maximal 7 Primzahlen ist.

4.3.1 Das jüngste Resultat mit der Kreismethode

GOWERS führte kürzlich (2002) neue Techniken ein um Teile, die bei dem Integral in (3.2) vorkommen, zu vereinfachen. Dabei benutzt er die *Fourieranalysis auf endlichen Gruppen*, dieser Ansatz gilt als vielversprechend.[6]
Zur Übersicht folgt nun eine Tabelle, die die einzelnen „Meilensteine“bei den Lösungsversuchen zur Goldbachschen Vermutung in chronologischer Reihenfolge aufzeigt:

Jahr	Name	Formulierung math. Formulierung
1922	Hardy & Littlewood	Jede hinreichend große ungerade Zahl ist als Summe von 3 PZ darstellbar.
1930	Brun	Brunsches Siebverfahren
1931	Schnirelmann	Alle geraden Zahlen sind als Summe von max. 300000 $N = p_1 + p_2 + ... + p_{300000}$ Primzahlen darstellbar.
1934	Romanoff	$n = p + a^m$ Die Zahlen die sich in der Form darstellen lassen haben positive Dichte.
1937	Vinogradov	Hardy-Littlewood ohne Riemannsche Vermutung.
1938	Estermann v.d. Corput	fast alle geraden Zahlen sind Summe von zwei Primzahlen.
1947	Renyi	Jede gerade Zahl lässt sich als Summe von einer Primzahl und einer fast-Primzahl darstellen mit max. k Primfaktoren.
1960	Wang Yuan	Jede genügend große Zahl ist als Summe von einer Primzahl und einer fast-Primzahl darstellbar mit max. 4 Primfaktoren.
1965	Buchstab	Jede genügend große Zahl ist als Summe von einer Primzahl und einer fast-Primzahl darstellbar mit max. 3 Primfaktoren.
1973/78	Chen	Jede genügend große gerade Zahl N ist Summe einer Primzahl und einer Zahl die höchstens aus zwei Primfaktoren besteht.

[6]Dieser Ansatz ist die Ausarbeitung, einer früheren Veröffentlichung von GOWERS , für den er damals unter anderem im Jahr 1994 die *Fields Medallie* erhielt.

Diese Tabelle ist nicht vollständig, da es viele andere Mathematiker gab, die hilfreiche Anregungen zum Thema gegeben haben. So benutzten z.B. Hardy & Littlewood die Formulierung der *Allgemeinen Riemannschen Vermutung* aus [11] von E. Landau, der in seiner Arbeit von einem noch unklarem und „*geheimnissvollen*"Zusammenhang zwischen den Nullstellen der Zeta-Funktion und den Primzahlen schrieb.

4.4 Die Entwicklung der Vermutung in Perioden betrachtet

Die Geschichte der Lösungsversuche des Problems kann man in drei Perioden unterteilen.

- Die erste Periode (1742 - ca.1920) ist durch das Fehlen von mathematischen Methoden in der Erforschung gekennzeichnet. Die Richtigkeit der Vermutung wurde nur empirisch überprüft und aus den Wahrscheinlichkeitserwägungen wurden angenäherte Formeln für die Anzahl der Darstellungen aufgestellt. Landau zählte noch im Jahre 1912 die Goldbachsche Vermutung zu den Rätseln, die beim gegenwärtigen Stand der Wissenschaft noch unangreifbar sind.

- In der zweiten Periode (ca. 1920 - 1936) wurden die ersten mathematischen Methoden, die eine wichtige Grundlage für folgende Lösungsversuche bildeten, entwickelt. Das war vor allem die von Hardy & Littlewood entwickelte *Kreismethode*, welche die Verbindung zwischen der Vermutung und der analytischen Zahlentheorie zog. Ein weiter Grundstein war das Brun*sche Siebverfahren.*
  Das wichtigste Ergebnis jener Zeit ist der Satz von Schnirelmann, welcher besagt, dass es eine feste Zahl S gibt, so dass jede natürliche Zahl die Summe von nicht mehr als S Primzahlen ist. Die Grundgedanken von Schnirelmann wurden zur Grundlage der neuen metrischen Richtung in der additiven Zahlentheorie (*Dichte eine Zahlenfolge*).

- Die dritte Periode begann mit der grundlegenden Forschung von Vinogradov im Jahr 1937. Er entwickelte die Methode der endlichen Exponentialsummen, welche eine wesentliche Verbesserung der Methode von Hardy & Littlewood darstellt. Danach folgten noch weitere Ausarbeitungen der bereits bestehenden Methoden, die bis zum Theorem von Chen führten. Das Ergebnis von Friedlander & Iwaniec hat einen Durchbruch beim *parity problem* geschaffen; es besteht wenig Zweifel, dass dieses Resultat eine starke Auswirkung auf unser bisheriges Wissen in der Primzahlverteilung hat.

Zum Schluß möchte ich einer Anekdote folgen, die von folgendem Zitat des Mathematikers L. Kronecker ausgeht:

> *„Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott geschaffen, alles andere ist Menschenwerk.“*

Dementsprechend hat H. Hasse im Index seines Buches „Vorlesungen über Zahlentheorie“unter *‘L‘* den *„Lieben Gott“* aufgeführt.

Wir wollen hier ähnlich verfahren:

Satz 16 *Jede gerade Zahl* $n > 2$ *ist als Summe von zwei Primzahlen darstellbar.*

Beweis:
siehe [10]

Literatur

[1] Agarwal, Manindra et al. *Primes in P*, Dept. of Comp. Science & Engineering, Indian Institute of Technology Kanpur, 2002

[2] Aigner, Martin. *Zahlentheorie - Skript zur Vorlesung* . 2002

[3] Begehr, Heinrich. *Funktionentheorie I - Skript zur Vorlesung* . Jüngste Ausgabe

[4] Estermann, T. *Inroduction to Modern Prime Theory* . Cambridge at the University Press, 1969

[5] Friedlander und Iwaniec. *Asymptotic sieve for primes* . Math. Ann. **148**, 1998

[6] Halberstam,H und Richert H.E. Sieve Methods . Academic Press London, 1974

[7] Hardy, G.H. & Littlewood, J.E.. *Some Problems of „Partitio Numerorum III“: On the Expression of a Number as a Sum of Primes* . Acta Math., **44**, 1923

[8] Hardy, G.H. & Ramanujan, S.. *Asymptotic Formulare in Combinatory Analysis* . Proc. London Math. Soc. (2), **17**, 1918

[9] Koppelberg, Sabine. *Stochastik I - Skript zu Vorlesung* . 2001/2002

[10] Lieber Gott

[11] Landau, Edmund. *Gelößte und ungelößte Probleme aus der Theorie der Primzahlenverteilung und der Riemannschen Zeta-Funktion* . Jahresbericht der DMV, Vol **21**, 1921

[12] Landau, Edmund. *Über einige neuerer Fortschritte der additiven Zahlentheorie* . Stechert-Hafner Service Agency, 1964

[13] Leung, M.C. und Liu, M.C.. *On generalized quadratic equations in three prime variables* . Monatsh. Math., **115**, 1993

[14] Li, H. *The Exceptional Set of Goldbach Numbers* . Quater. Jour. Math Oxford **50**, 1999

[15] Liberty, Jesse. *C++ in 21 Tagen* . Markt und Technik, 2000

[16] LUCKE, BRUNO. *Zur Hardy-Littlewoodschen Behandlung des Goldbachschen Problems*, Diss. an der hohen Math.-Naturwiss. Fakultät, Georg August Univ. zu Göttingen, 1926

[17] NIVEN,IVAN UND ZUCKERMAN, HERBERT. *Einführung in die Zahlentheorie I und II* . B·I Wissenschaftsverlag, 1979

[18] O'BRYANT, KEVIN. *Goldbach's Conjecture.* Talkpaper im Internet: `http://www.math.ucsd.edu/ kobryant/`

[19] PRACHER, KARL. *Primzahlverteilung* . Springer, 1957

[20] REINHARDT, FRITZ et al. *dtv-Atlas Mathematik Bd I und II* . Deutscher Taschenbuch Verlag, 10. Aufl.,1998

[21] RIBENBOIM, PAULO. *The New Book of Prime Number Recorde* . Springer, 1984

[22] RICHERT,H.E.. *Über Zerfällungen in ungleiche Primzahlen* . Math. Zeits.,**52**, 1949

[23] ROSS, P.H.. *On Chen's Theorem that each Large Even Number has the Form* $p_1 + p_2$ *or* $p_1 + p_2 + p_3$. Lond. Journ. Math. Soc. **X.2**, 1975

[24] SCHEID,HARALD. *Zahlentheorie* . B·I Wissenschaftsverlag, 1991

[25] SCHNIRELMANN, L. *Über additive Eigenschaften von Zahlen* . Mathematische Annalen **107**, 1933

[26] SCHWARZ, WOLFGANG. *Einführung in die Siebmethoden der analytischen Zahlentheorie* . B·I Wissenschaftsverlag, 1976

[27] SCHWARZ, WOLFGANG. *Einführung in Methoden der Primzahltheorie* . B·I Wissenschaftsverlag, 1969

[28] SEE, MAX UND WOON, Chin. *On Partitions of Goldbach's Conjecture* . DPMMS, Cambridge University

[29] SIEGEL,C.L. *Analytische Zahlentheorie I Skript* . Mathematisches Institut der Universität Göttingen, SoSe 1963

[30] SINGH, SIMON. *Fermats letzter Satz* . Hanser, 1998

[31] SUN, ZHI-WEI. *Recent Projects on Covers of the Integers and their Applications*, Talkpaper Univ. Hong Kong, 2000, Dept. Math. Nanjing Univ. China

[32] TROST, ERNST. *Primzahlen* . Birkhäuser, 2. Aufl.,1968

[33] VAUGHAN, R.C. *Hardy's Legacy to Number Theory* . Journal Austraila Math. Soc. (Series A) **65**, 1998

[34] YUAN, WANG. *Goldbach Conjecture* . World Scientific, 1984