

Einfache elastische Kurven

von

Dipl. Math. Ekkehard-Heinrich Tjaden

Dem Fachbereich Mathematik
der Technischen Universität Berlin
zur Verleihung des akademischen Grades
Doktor der Naturwissenschaften
vorgelegte Dissertation

Berlin 1991
(D 83)

Abstract

Ekkehard-Heinrich Tjaden: Einfache elastische Kurven

Es werden gerahmte Kurven in Raumformen untersucht, die Extremale eines Funktionals sind, das physikalisch der totalen Biege- und Torsionsenergie eines elastischen Stabes entspricht. Aus der Variation wird die Euler-Lagrange-Gleichung für die Krümmung hergeleitet, und es wird gezeigt, daß die Torsion konstant ist. Die Differentialgleichung wird auf eine spezielle Form gebracht, in der die Materialsteifigkeiten und die Schnittkrümmung der Raumform als Einflussgrößen nicht mehr vorkommen. Eine Regel für die Dimension des Raumes, in dem die Kurven noch substantiell liegen, wird angegeben.

Elastische Kurven sind einfach, wenn die quadratische Torsionsmatrix ein Vielfaches der Identität ist. Mit diesem Begriff werden alle elastischen Kurven erfasst, deren (skalare) Krümmungsfunktion bereits bei den klassischen Elastika vorkommt.

Die Menge der einfachen elastischen Kurven wird so parametrisiert, dass die einzelnen Parameter eine geometrische Eigenschaft wiedergeben. Für Kurven im dreidimensionalen Raum werden Geschlossenheitsbedingungen angegeben.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Gerahmte Kurven	6
2.1	Definitionen	6
2.2	Rahmenwechsel	6
2.3	Spezielle Rahmen	7
3	Elastische Kurven	8
3.1	Materielle Vorstellung	8
3.2	Das beobachtete Funktional	8
3.3	Definitionen	8
3.4	Spezielle Namen und Eigenschaften	8
4	Die Euler-Lagrange-Gleichung	10
4.1	Die erste Variation	10
4.2	Die allgemeine Differentialgleichung	12
4.3	Materialeichung	13
5	Konstanten der Bewegung	15
5.1	Das Rotationsfeld	15
5.2	Potential und Energie	16
5.3	Lokale Drehimpulse	16
5.4	Lokale Kählerwinkel	17
5.5	Reduktion der Dimension	19
6	Einfache elastische Kurven	20
6.1	Definition	20
6.2	Die skalare Krümmung	20
6.3	Der Modulraum	22
6.4	W-Kurven	23
6.5	Elastische Frenetkurven	23
6.6	Biegeelastische Kurven	24
6.7	Ebene elastische Kurven	24
6.8	Quasiperiodische Kurven	25
6.9	Periodische Kurven	28
	Bilder	30
	Schreibweisen	34

Index	35
Literaturverzeichnis	37

1 Einleitung

Die Geschichte der elastischen Kurven oder Elastika beginnt im Jahre 1691 mit einem von Jakob Bernoulli gestellten Problem: An die Spitze eines elastischen Stabes, der senkrecht im Boden befestigt ist, wird ein Gewicht gehängt, so daß der Stab an der Spitze horizontal endet und über dem Boden die Auslenkung 1 bekommt.

Sein Neffe Daniel hat 1738 festgestellt, daß "Bernoullis Lintearia", wie diese Kurven auch genannt wurden, die quadratische Krümmung $\int \kappa^2$ minimieren. Damit sind die Zutaten für eine Theorie gegeben. Das Phänomen: Ein elastischer Stab, an dessen Enden Kräfte wirken und der sich sonst im Gleichgewicht befindet. Das Modell: Eine Kurve, die Extremale eines Funktionals ist.

In dieser Zeit waren schon verschiedene Eigenschaften der Elastika bekannt. Zwei Beispiele:

- Wird eine rechtwinklige Hyperbel auf einer Geraden abgerollt, so beschreibt der Mittelpunkt der Hyperbel eine elastische Kurve.
- Wird an den Enden einer Strecke ein Faden befestigt, so ist der Abstand des Schwerpunktes der eingeschlossenen Fläche von dieser Strecke für die elastischen Kurven maximal.

Leonhard Euler hat 1743 bei seiner Abhandlung über die Variationsrechnung die ebenen Elastika als erster klassifiziert und skizziert. Auch Raumkurven wurden hier schon untersucht. Viel später, im Jahre 1811, hat auch Lagrange in seiner zweiten Ausgabe der *Mechanique analytique* elastische Raumkurven untersucht. Die Differentialgleichungen für diese Kurven konnte er jedoch allgemein nicht lösen. Er vermutete, daß dies gar nicht möglich sei. Kurz darauf machte Binet den Einwand, es genüge nicht, die Biegeelastizität zu betrachten, sondern man müsse, um der Natur der Sache gerecht zu werden, auch die Elastizitätsmomente bei der Torsion der Materials berücksichtigen. Poisson zeigte, daß diese Größe entlang der elastischen Kurve konstant ist.

1844 führte Binet [Bi] die Differentialgleichungen für die Kurve auf Quadraturen zurück, und 1885 fand Hermite [He] explizite Lösungen mit Hilfe elliptischer Funktionen. Die ersten numerisch berechneten Bilder finden sich in der Dissertation von Born 1906. Ein Übersichtsartikel zur Geschichte der Elastizität wurde von Truesdell [Tr] geschrieben.

Bisher hatte man die Differentialgleichungen für diese Kurven aus der physikalischen Intuition abgeleitet, und insofern wurde das Phänomen

studiert. Aus geometrischer Sicht Neues gibt es erst 1984, als Langer und Singer [LS1][LS2] geschlossene elastische Kurven im euklidischen Raum und in zweidimensionalen Raumformen klassifizieren. Hier wird das mathematische Modell untersucht, und die Gleichungen werden abgeleitet. Als Funktional dient dabei $\int \kappa^2$, die quadratische Krümmung. Diese Kurven finden wir im Abschnitt 6 als biegeelastische Kurven wieder.

Für elastische Kurven auf Flächen im Raum gibt es eine Untersuchung von Nickerson und Manning [NM]. Hier werden die zulässigen Variationen auf eine Fläche eingeschränkt. Intrinsisch wird damit das Funktional geändert. Wir wollen Binets Einwand wieder aufgreifen und auch das Funktional in seinem Sinne ändern. Nun ist die Torsion eigentlich keine Größe, die der Kurve innewohnt, sondern einem Normalenfeld längs der Kurve. Ob die Binormale mit ihrem historischen Vorsprung — 1826 von Cauchy eingeführt — der natürliche Kandidat ist, bleibt vielleicht eine Frage des Zwecks. Die einfachsten Kurven haben keine Binormale. Der Vorteil eines selbstgewählten Rahmens längs einer Kurve ist außer seiner Existenz die Möglichkeit, die Konfiguration eines elastischen Draht modellieren zu können, der im kräftefreien Zustand keine Gerade war. In den Abschnitten 2 und 3 stellen wir die Begriffe dazu bereit.

Im Abschnitt 4 leiten wir die Euler-Lagrange-Gleichung des Variationsproblems in Raumformen her. Diese Bewegungsgleichung unterscheidet sich vom klassischen Fall durch einen geschwindigkeitsabhängigen Term und einen Term, der das Potential asymmetrisch machen kann. Den ersten Term können wir durch die Wahl eines geeigneten Rahmens wegdiskutieren. Die physikalische Interpretation dazu ist die Wahl eines Standardmaterials. Mit einem solchen Standarddraht können wir eine gegebene elastische Kurve, die aus anderem Material ist, nachvollziehen.

Nach einem Satz von Kirchhoff [Gr] erfüllt die Tangente einer biegeelastischen Kurve die Bewegungsgleichungen des sphärischen Pendels. Nehmen wir die Torsion hinzu, so wird aus dem Pendel ein symmetrischer Kreisel, der in einem Punkt befestigt ist.

Im Abschnitt 5 beschränken wir uns auf den euklidischen Fall. Für die Diskussion der Bewegungsgleichung der Krümmung ist dies keine Einschränkung. Extrinsisch konstante Felder sind allerdings einfacher zu behandeln. Wir finden zwei konstante Felder. Das Translationsfeld, physikalisch das Schwerfeld für den Kreisel, ist direkt ein Ergebnis der ersten Variation. Das Rotationsfeld entspricht im Dreidimensionalen der Projektion des Drehimpulses auf die Schwerfeldrichtung.

Die Diskussion der lokalen Drehimpulse und Kählerwinkel liefert eine Beschränkung der notwendigen Dimension des umgebenden Raumes. So

wie die klassischen biegeelastischen Kurven nur drei Dimensionen wirklich in Anspruch nehmen, können wir dies im allgemeinen Fall an den verschiedenen Eigenwerten der Torsionsmatrix abzählen.

Im Abschnitt 6 wird der Raum der einfachen elastischen Kurven parametrisiert. Zwei Freiheitsgrade bleiben unberücksichtigt, die Ähnlichkeit und die Möglichkeit, Kurven im \mathbf{R}^5 zu erzeugen. Es bleiben uns drei Parameter. Die Koordinaten sind dabei so gewählt, daß die geometrische Bedeutung gegenüber der physikalischen bevorzugt wird. Zum Beispiel liegen in den Koordinatenebenen jeweils bekannte Kurvenklassen: Helices, Frenetkurven und biegeelastische Kurven. Singularitäten lassen sich aber nicht ganz vermeiden.

Die Änderung der Torsion haben wir bei der Materialeichung im Abschnitt 4.3 verwendet, um bei festgehaltener Kurve die Differentialgleichung für die Krümmung auf eine angenehmere Form zu bringen. Eine zweite Möglichkeit ist, bei festgehaltener Lösung der Differentialgleichung die Kurve neu zu integrieren. Diese Kurvenfamilien bilden die τ_1 -Koordinatenlinien. Jede einfache elastische Raumkurve läßt sich mit dieser Methode aus einer biegeelastischen Kurve gewinnen.

Am Ende werden Schließungsbedingungen untersucht. Die quasiperiodischen Kurven liegen auf einer glatten topologischen Sphäre. Hier werden die Kandidaten für geschlossene Kurven gesucht. Leider steckt in der Schließungsbedingung eine Summe elliptischer Integrale der dritten Art, die mit analytischen Mitteln sehr schwer zu untersuchen ist. Mit den Methoden der Computergraphik findet man qualitativ das folgende Verhalten: Jede geschlossene biegeelastische Kurve kann in einen eventuell mehrfach überlagerten ebenen Kreis überführt werden. Vorstellen soll man sich dabei eine Kupplung in einem geschlossenen Draht, die es gestattet, den Draht zu tordieren, ohne daß dabei die Kurve geöffnet oder geknickt wird.

Geht eine reguläre Kurve, die in Polar- oder sphärischen Koordinaten beschrieben ist, durch den Ursprung, so wollen wir einen Vorzeichenwechsel des Radius in Kauf nehmen. Der Lohn ist eine glatte Argumentfunktion. Abbildungen und Mannigfaltigkeiten sollen in dieser Arbeit alle vom Typ C^∞ sein, soweit anderes nicht offensichtlich ist. Nutzen werden wir die zweite Ableitung der Krümmung, die dritte des Rahmens, also die vierfache Differenzierbarkeit der Kurve. Die Variationsrechnung läßt auch hier Abschwächungen zu. Tatsächlich sind die elastischen Kurven, wie auch die gefundenen Lösungen der aufgestellten Differentialgleichungen, analytisch.

Bedanken möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. U. Pinkall für die Anregung zu dieser Arbeit und für seine ermunternde Betreuung.

2 Gerahmte Kurven

2.1 Definitionen

Sei $I \subseteq \mathbf{R}$ ein Intervall, $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ eine $n+1$ -dimensionale Raumform der Schnittkrümmung σ und $\gamma : I \rightarrow M$ eine reguläre Kurve mit dem Bogenlängenparameter s . Ein *Rahmen* \mathbf{N} für die Kurve γ sei eine Familie $\{T, N_1, \dots, N_n\}$ von Vektorfeldern längs γ mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} T &= \gamma_*(\partial_s) \\ \langle T, N_i \rangle &= 0 \\ \langle N_i, N_j \rangle &= \delta_{ij} \quad (i, j = 1, \dots, n) \quad . \end{aligned}$$

Unter einer *gerahmten Kurve* verstehen wir ein Paar (γ, \mathbf{N}) . Die zugehörigen Ableitungsgleichungen lauten:

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial_s} T &= \sum_{i=1}^n \kappa_i N_i \\ \nabla_{\partial_s} N_i &= -\kappa_i T + \sum_{j=1}^n \tau_{ji} N_j \end{aligned}$$

mit den Koeffizientenfunktionen κ_i, τ_{ji} . Wir nennen die zweite Fundamentalförmung $\kappa : I \rightarrow \mathbf{R}^n$ die *Krümmungskurve* und die Zusammenhangsform des Normalenbündels $\tau : I \rightarrow \mathfrak{so}(n, \mathbf{R})$ die *Torsionsmatrix*.

$$\tau = ((\langle N_i, \nabla_{\partial_s} N_j \rangle))_{ij}$$

Für Abbildungen in Vektorräume kürzen wir die Ableitung nach der Bogenlänge s mit einem Strich ab, $\partial_s \dots = \dots'$.

2.2 Rahmenwechsel

Sind \mathbf{N} und $\widetilde{\mathbf{N}}$ zwei Rahmen längs γ , so sei

$$\begin{aligned} Q &:= ((q_{ij}))_{ij} \\ q_{ij} &:= \langle N_i, \widetilde{N}_j \rangle \end{aligned}$$

die *zugehörige Drehung* (von \mathbf{N} nach $\widetilde{\mathbf{N}}$). Die Transformationsregeln für die Krümmungskurve und die Torsionsmatrix lauten:

$$\begin{aligned} \widetilde{\kappa} &= Q^*(\kappa) \\ \widetilde{\tau} &= Q^*Q' + Q^*\tau Q \quad . \end{aligned}$$

Wir nennen zwei Rahmen *äquivalent*, wenn die zugehörige Drehung konstant ist.

$$\tilde{\tau} = Q^* \tau Q$$

2.3 Spezielle Rahmen

Spezielle Rahmen sind *parallele Rahmen* ($\tau = 0$) und *Rahmen konstanter Torsion* ($\tau' = 0$). Parallele Rahmen sind paarweise äquivalent. Für Rahmen konstanter Torsion wollen wir zwei Arten von Rahmenwechseln näher bezeichnen. Ist $\omega \in \mathfrak{so}(n, \mathbf{R})$ und hat die zugehörige Drehung die Form $Q = \exp(s\omega)$, so sagen wir, der neue Rahmen ist *verwandt*, wenn ω und τ kommutieren, und er ist *proportional*, wenn ω und τ proportional sind. Die Transformationsregel für die Torsionsmatrix ist dann eine Addition:

$$\tilde{\tau} = \omega + \tau .$$

3 Elastische Kurven

3.1 Materielle Vorstellung

Wir stellen uns einen Stahldraht mit quadratischem Querschnitt im schwerelos Raum vor, der an den Enden festgehalten wird. Das heißt, wir kontrollieren an den Enden des Drahtes jeweils die Lage, die Richtung und die Lage des Querschnittes. Im übrigen wird der Profildraht eine Gleichgewichtslage einnehmen, die einem Extremum einer gemischten Biege- und Torsionsenergie entspricht.

3.2 Das beobachtete Funktional

Wir modellieren unseren Profildraht durch eine gerahmte Kurve (γ, \mathbf{N}) der Länge L und beobachten folgendes Funktional:

$$\begin{aligned} F &:= F(\gamma, \mathbf{N}) \\ &:= \int_0^L \left(\frac{1}{2} c_1 \|\nabla_{\partial_s} T\|^2 + \frac{1}{2} c_2 \sum_{i=1}^n \|\nabla_{\partial_s} N_i\|^2 + c_3 \right) ds \\ &= \int_0^L \left(\frac{1}{2} (c_1 + c_2) \|\kappa\|^2 + \frac{1}{2} c_2 \|\tau\|^2 + c_3 \right) ds . \end{aligned}$$

Dabei sind c_1 und c_2 Materialgrößen, die das Verhältnis von Biege- zu Torsionssteifigkeit darstellen. Um die Länge der Kurve bei Variationen konstant halten zu können, führen wir den Lagrange-Multiplikator c_3 ein.

3.3 Definitionen

Definition: Eine gerahmte Kurve (γ, \mathbf{N}) heißt *elastisch*, wenn es Zahlen c_1, c_2, c_3 mit $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$ gibt, so daß (γ, \mathbf{N}) ein Extremum für das Funktional F liefert.

Definition: Eine Kurve γ heißt *elastisch*, wenn sie einen Rahmen \mathbf{N} zuläßt, der die so gerahmte Kurve elastisch macht.

3.4 Spezielle Namen und Eigenschaften

Spezielle Werte, die von den Funktionalparametern (c_1, c_2, c_3) angenommen werden, sind:

- (1, 0, c_3) Die klassischen Elastika. Wir nennen sie *biegeelastisch*. Der Rahmen ist hier ohne Einfluß und kann parallel gewählt werden.
- (0, 1, c_3) Als Gegenstück zum Vorigen nennen wir Extremale zu diesen Funktionalparametern *torsionselastisch*. Sie werden uns hauptsächlich beschäftigen.
- ($c_1, c_2, 0$) *Freie* Elastika. Eine Interpretation ist das Fehlen von Schub- und Zugkräften an den Enden.
- ($-c, c, c_3$) Physikalisch erscheinen negative Werte für c_1 oder c_2 wenig sinnvoll. Hier speziell ist jede Kurve mit parallelem Rahmen eine freie elastische Kurve. Wir schließen diesen Fall aus.
- (0, 0, c_3) Das Längenfunktional haben wir in der Definition ausgeschlossen, dennoch sind Geodätische Lösungen.

Nachdem wir den Fall $c_1 + c_2 = 0$ ausgeschlossen haben, vereinfachen wir unser Funktional, indem wir $c_1 + c_2 = 1$ setzen. Das bedeutet keine Einschränkung der Lösungsmenge, da unser Funktional homogen in den Parametern (c_1, c_2, c_3) ist.

4 Die Euler-Lagrange-Gleichung

4.1 Die erste Variation

Wir erweitern eine gegebene gerahmte Kurve um einen Variationsparameter w und betrachten

$$\begin{aligned}\gamma &: (-\varepsilon, \varepsilon) \times I \longrightarrow M \\ N_i &: (-\varepsilon, \varepsilon) \times I \longrightarrow TM \quad (i = 1, \dots, n) \\ (w, t) &\longmapsto (\gamma(w, t), \mathbf{N}(w, t))\end{aligned}$$

mit den Bezeichnungen

$$\begin{aligned}v &:= \|\partial_t\| \\ \partial_s &= \frac{1}{v} \partial_t \\ T &= \gamma_*(\partial_s) \\ W &= \gamma_*(\partial_w)\end{aligned}$$

und der Eigenschaft, daß $\{T, N_1, \dots, N_n\}_{(w,t)}$ eine orthonormale Basis des Tangentialraumes $T_{\gamma(w,t)}M$ ist. Für $w = 0$ soll die ursprüngliche gerahmte Kurve vorliegen. Zu den bisherigen Ableitungsgleichungen (siehe Abschnitt 2.1) paaren sich diejenigen in Variationsrichtung.

$$\begin{aligned}\nabla_{\partial_w} T &= \sum_{i=1}^n \lambda_i N_i \\ \nabla_{\partial_w} N_i &= -\lambda_i T + \sum_{j=1}^n \mu_{ji} N_j\end{aligned}$$

Zur Herleitung der ersten Variation stellen wir einige Rechenhilfen zusammen, die darauf abzielen, die Variationsfelder W , λ und μ auf eine Seite des Skalarproduktes zu bekommen.

Vertauschungsrelationen der partiellen Ableitungen:

$$\begin{aligned}[\partial_w, \partial_t] &= 0 \\ \partial_w v &= v \langle \nabla_{\partial_s} W, T \rangle \\ [\partial_w, \partial_s] &= -\langle \nabla_{\partial_s} W, T \rangle \partial_s \\ \nabla_{\partial_w} T &= \nabla_{\partial_s} W - \langle \nabla_{\partial_s} W, T \rangle T\end{aligned}$$

Symmetrie des Krümmungstensors:

$$\begin{aligned}
R(X, Y)Z &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \\
&= \sigma(\langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y) \\
\langle R(W, T)Z, \nabla_{\partial_s} Z \rangle &= \langle W, R(\nabla_{\partial_s} Z, Z)T \rangle
\end{aligned}$$

Der allgemeine Typ der partiellen Ableitung von "Energiedichten". Für jedes Feld Z (mit Werten in TM) längs γ gilt:

$$\begin{aligned}
\partial_w \frac{1}{2} \|\nabla_{\partial_s} Z\|^2 &= \langle W, R(\nabla_{\partial_s} Z, Z)T + \nabla_{\partial_s} (\|\nabla_{\partial_s} Z\|^2 T) \rangle \\
&\quad - \langle \nabla_{\partial_w} Z, \nabla_{\partial_s}^2 Z \rangle \\
&\quad - \partial_s \langle W, \|\nabla_{\partial_s} Z\|^2 T \rangle \\
&\quad + \partial_s \langle \nabla_{\partial_w} Z, \nabla_{\partial_s} Z \rangle .
\end{aligned}$$

Speziell für unseren Fall haben die benötigten Terme die folgende Gestalt: für das Tangentenfeld:

$$\begin{aligned}
\|\nabla_{\partial_s} T\|^2 &= \|\kappa\|^2 \\
\langle \nabla_{\partial_w} T, \nabla_{\partial_s} T \rangle &= \langle \lambda, \kappa \rangle \\
\langle \nabla_{\partial_w} T, \nabla_{\partial_s}^2 T \rangle &= \langle \lambda, \kappa' + \tau(\kappa) \rangle \\
R(\nabla_{\partial_s} T, T)T &= \sigma \nabla_{\partial_s} T ,
\end{aligned}$$

für die Normalenfelder:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \|\nabla_{\partial_s} N_i\|^2 &= \|\kappa\|^2 + \|\tau\|^2 \\
\sum_{i=1}^n \langle \nabla_{\partial_w} N_i, \nabla_{\partial_s} N_i \rangle &= \langle \lambda, \kappa \rangle + \langle \mu, \tau \rangle \\
\sum_{i=1}^n \langle \nabla_{\partial_w} N_i, \nabla_{\partial_s}^2 N_i \rangle &= \langle \lambda, \kappa' - \tau(\kappa) \rangle + \langle \mu, \tau' \rangle \\
\sum_{i=1}^n R(\nabla_{\partial_s} N_i, N_i)T &= \sigma \nabla_{\partial_s} T .
\end{aligned}$$

Für jedes Feld a (mit Werten in \mathbf{R}^n) längs γ gilt:

$$\begin{aligned}
\langle \lambda, a \rangle &= -\langle W, \nabla_{\partial_s} \sum_{i=1}^n a_i N_i \rangle \\
&\quad + \partial_s \langle W, \sum_{i=1}^n a_i N_i \rangle .
\end{aligned}$$

Damit können wir zwei der bereitgestellten Ausdrücke weiter umformen.

$$\begin{aligned} \langle \lambda, \kappa' \pm \tau(\kappa) \rangle &= -\langle W, \nabla_{\partial_s} \sum_{i=1}^n (\kappa' \pm \tau(\kappa))_i N_i \rangle \\ &\quad + \partial_s \langle W, \sum_{i=1}^n (\kappa' \pm \tau(\kappa))_i N_i \rangle \end{aligned}$$

Schließlich differenzieren wir unter dem Integral. Den Anteil aus den Vertauschungsrelationen integrieren wir partiell. Sei f der Integrand des Funktionals, so hat die Ableitung nach w die Gestalt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dw} F &= \int_I \partial_w (fv) dt \\ &= \int_0^L (\partial_w f - \langle W, \nabla_{\partial_s} (fT) \rangle) ds + \langle W, fT \rangle \Big|_0^L . \end{aligned}$$

Berücksichtigen wir die Vereinfachung $c_1 + c_2 = 1$, so können wir die erste Variation jetzt zusammenstellen.

Satz 1 *Die erste Variation des Funktionals F lautet:*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dw} F &= \int_0^L (\langle W, \nabla_{\partial_s} \mathcal{J} \rangle - c_2 \langle \mu, \tau' \rangle) ds \\ &\quad - \langle W, \mathcal{J} - \sigma T \rangle \Big|_0^L \\ &\quad + (\langle \lambda, \kappa \rangle + c_2 \langle \mu, \tau \rangle) \Big|_0^L \\ \mathcal{J} &= \left(\frac{1}{2} \|\kappa\|^2 + \frac{1}{2} c_2 \|\tau\|^2 - c_3 + \sigma \right) T \\ &\quad + \sum_{i=1}^n (\kappa' + (c_1 - c_2) \tau(\kappa))_i N_i . \end{aligned}$$

4.2 Die allgemeine Differentialgleichung

Die erste Ableitung des Funktionals soll an der Stelle $w = 0$ für alle Variationen verschwinden. Die ausintegrierten Anteile lassen wir unberücksichtigt, weil wir uns auf Variationen beschränken können, die am Rand von erster Ordnung verschwinden. Zuerst betrachten wir Variationen, welche die Kurve γ festlassen ($W \equiv 0$) und nur den Rahmen \mathbf{N} variieren. Da wir im Fall $c_2 = 0$ den Rahmen ohnehin parallel wählen (siehe Abschnitt 3.4), folgern wir aus dem zweiten Summanden unter dem Integral der ersten Variation:

Satz 2 *Die Torsionsmatrix τ einer gerahmten elastischen Kurve ist konstant.*

Der erste Summand im Integralteil liefert bei sonstigen Variationen

$$\nabla_{\partial_s} \mathcal{J} = 0 \quad ,$$

womit wir ein paralleles Feld längs γ gefunden haben. Rechnen wir die Koeffizienten von $\nabla_{\partial_s} \mathcal{J}$ aus, so erhalten wir:

Satz 3 (allgemeine Euler-Lagrange-Gleichung) *Die Krümmungskurve κ einer gerahmten elastischen Kurve erfüllt die Differentialgleichung*

$$0 = \kappa'' + 2c_1\tau(\kappa') + (c_1 - c_2)\tau^2(\kappa) + \left(\frac{1}{2}\|\kappa\|^2 + \frac{1}{2}c_2\|\tau\|^2 - c_3 + \sigma\right)\kappa \quad .$$

Dabei ist $c_1 + c_2 = 1$.

4.3 Materialeichung

In der eben gefundenen Bewegungsgleichung für die Krümmungskurve stören die Materialgrößen c_1 , c_2 und der "Magnetfeld"-Term $2c_1\tau(\kappa')$. Zur Abhilfe ändern wir den vorhandenen in einen proportionalen Rahmen ab,

$$\mathbf{N} \longmapsto \widetilde{\mathbf{N}}$$

mit der zugehörigen Drehung $Q(s) = \exp(-sc_1\tau)$. Die Kurve γ bleibt wie sie ist. Die neue Krümmungskurve $\tilde{\kappa}$ erfüllt dann die Differentialgleichung

$$0 = \tilde{\kappa}'' - (c_2\tau)^2(\tilde{\kappa}) + \left(\frac{1}{2}\|\tilde{\kappa}\|^2 + \frac{1}{2}\|c_2\tau\|^2 + \frac{1}{2}c_1c_2\|\tau\|^2 - c_3 + \sigma\right)\tilde{\kappa} \quad .$$

Dies ist genau die allgemeine Euler-Lagrange-Gleichung für den torsionselastischen Fall, wenn wir c_3 uminterpretieren.

$$\tilde{c}_3 = c_3 - \frac{1}{2}c_1c_2\|\tau\|^2$$

Die Torsionsmatrix hat sich nach der Additionsregel geändert.

$$\tilde{\tau} = c_2\tau$$

Satz 4 (spezielle Euler-Lagrange-Gleichung) *Jede elastische Kurve läßt einen Rahmen konstanter Torsion zu, der sie torsionselastisch macht. Ihre Krümmungskurve erfüllt die Differentialgleichung:*

$$\begin{aligned} 0 &= \kappa'' - \tau^2(\kappa) + \left(\frac{1}{2}\|\kappa\|^2 + \mu\right)\kappa \\ \mu &= \frac{1}{2}\|\tau\|^2 - c_3 + \sigma \quad . \end{aligned}$$

Um elastische Kurven zu finden, müssen wir also die torsionselastischen Kurven finden. Biegeelastische Kurven tauchen dann als *torsionsentspannte* ($\tau = 0$) torsionselastische Kurven auf. Man beachte, daß eine biegeelastische Kurve mit einem nicht parallelen Rahmen durchaus torsionselastisch sein kann (zum Beispiel eine Geodätische), sie ist dann eben nicht torsionsentspannt.

5 Konstanten der Bewegung

Da die Schnittkrümmung σ durch eine geeignete Wahl des Lagrange-Multiplikators c_3 abgefangen werden kann, werden wir uns ab jetzt nur noch mit dem euklidischen Fall ($\sigma = 0$) befassen. Die als Lösungen gefundenen Krümmungskurven stehen dann auch für andere Raumformen zur Verfügung.

5.1 Das Rotationsfeld

Neben dem bereits bekannten Translationsfeld

$$\mathcal{J} = \left(\frac{1}{2} \|\kappa\|^2 + \frac{1}{2} \|\tau\|^2 - c_3 \right) T + \sum_{i=1}^n (\kappa' - \tau(\kappa))_i N_i$$

wollen wir ein weiteres konstantes Feld, das einer infinitesimalen Drehung entspricht, finden. Aus der zweiten Ableitung der Normalenfelder

$$\nabla_{\partial_s}^2 N_i = -(\kappa' - \tau(\kappa))_i T + \sum_{j=1}^n (-\kappa \otimes \kappa + \tau^2)_{ji} N_j$$

erhalten wir eine leicht integrierbare Gleichung:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \nabla_{\partial_s}^2 N_i \wedge N_i &= -T \wedge \sum_{i=1}^n (\kappa' - \tau(\kappa))_i N_i \\ &\quad + \sum_{i,j=1}^n (-\kappa \otimes \kappa + \tau^2)_{ji} N_j \wedge N_i \\ &= -T \wedge \mathcal{J} \quad . \end{aligned}$$

Die Doppelsumme ergibt 0, weil die Koeffizienten symmetrisch, die 2-Vektoren dagegen schiefsymmetrisch in i und j sind. Durch Integration erhalten wir ein extrinsisch konstantes Feld:

$$\sum_{i=1}^n \nabla_{\partial_s} N_i \wedge N_i + \gamma \wedge \mathcal{J} = \text{konstant} \quad .$$

Den γ -Term entfernen wir durch eine Projektion, so daß \mathcal{J} im Kern liegt:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &:= \sum_{i=1}^n \nabla_{\partial_s} N_i \wedge N_i \\ \mathcal{K} &:= \mathcal{L} - \frac{1}{\|\mathcal{J}\|^2} \mathcal{L}(\mathcal{J}) \wedge \mathcal{J} \quad . \end{aligned}$$

Zwar verschwindet jede zweite Hauptinvariante von \mathcal{K} , dennoch bleiben $[n/2]$ Hauptinvarianten übrig, die als Funktionen von κ und κ' Konstanten der Bewegung sind.

Beweis: Der Drehimpuls der eingeschränkten Lösung ist konstant, weil κ'' und κ blockweise linear abhängig sind.

$$(\pi(\kappa) \wedge \pi(\kappa'))' = 0$$

□

Die so hinzugewonnenen Bewegungsinvarianten

$$\nu := \|\pi(\kappa) \wedge \pi(\kappa')\|/\sqrt{2}$$

nennen wir *lokale Drehimpulse*. Ihre Anzahl ist gleich der Anzahl verschiedener Eigenwerte von τ^2 .

5.4 Lokale Kählerwinkel

Auch in diesem Abschnitt verstehen wir unter "blockweise" immer die Einschränkung auf einen Eigenraum von τ^2 . Wir wollen die Lagen der Ebenen, in denen sich die Lösung blockweise bewegt, genauer bestimmen. Zuerst nehmen wir die Dimension n als gerade an. Falls nötig betten wir die Kurve γ samt dem sie umgebenden Raum in einen größeren Raum ein und erweitern den Rahmen um ein paralleles Normalenfeld. Die Torsionsmatrix erzeugt auf dem \mathbf{R}^n eine komplexe Struktur J , die im Kern von τ so gewählt wird, daß die bewußte Ebene eine komplexe Gerade wird. In den anderen Blöcken gilt:

$$J(x) = \frac{1}{\tau_k} \tau(x) \quad .$$

Den Winkel zwischen der Ebene und einer komplexen Geraden, die sie schneidet, nennen wir den *lokalen Kählerwinkel* θ . $\pi(\kappa)$ ist nicht konstant, wenn die Krümmungskurve in diesem Block eine Ebene aufspannt. Dann finden wir eine Stelle s , für die $\pi(\kappa)$ und $\pi(\kappa')$ linear unabhängig sind und setzen:

$$\begin{aligned} b_1 &:= \frac{\pi(\kappa)}{\|\pi(\kappa)\|} \\ b_2 &:= \left(\pi(\kappa') - \frac{\langle \pi(\kappa'), \pi(\kappa) \rangle}{\|\pi(\kappa)\|^2} \pi(\kappa) \right) / \|\dots\| \\ &= \sqrt{2} \frac{\|\pi(\kappa)\|^2 \pi(\kappa') - \langle \pi(\kappa'), \pi(\kappa) \rangle \pi(\kappa)}{\|\pi(\kappa) \wedge \pi(\kappa')\| \|\pi(\kappa)\|} \quad . \end{aligned}$$

b_1 und $J(b_1)$ bilden eine orthonormale Basis einer komplexen Geraden. Liegt b_2 nicht in dieser Ebene, so steht

$$b_3 := \left(b_2 - \frac{\langle b_2, J(b_1) \rangle}{\|J(b_1)\|^2} J(b_1) \right) / \|\dots\|$$

senkrecht auf b_1 und $J(b_1)$, das heißt, b_1 und b_3 bilden eine unitäre Basis einer komplexen Ebene. Die Ebene der Bewegung von $\pi(\kappa)$ ist darin enthalten. Zu ihrer reellen Beschreibung benötigen wir aber nur drei der vier Basisvektoren. Für den Kählerwinkel, der aus dem Intervall $[0, \pi]$ gewählt werden kann, ergibt sich dann:

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \langle J(b_1), b_2 \rangle \\ &= \left\langle \frac{J(\pi(\kappa))}{\|\pi(\kappa)\|}, \sqrt{2} \frac{\|\pi(\kappa)\| \pi(\kappa')}{\|\pi(\kappa) \wedge \pi(\kappa')\|} \right\rangle \\ &= \langle J(\pi(\kappa)), \pi(\kappa') \rangle / \nu . \end{aligned}$$

Wir fassen dies zusammen.

Satz 6 *Die lokalen Kählerwinkel liefern die Konstanten der Bewegung*

$$\langle J(\pi(\kappa)), \pi(\kappa') \rangle .$$

Beweis: Geometrisch ist klar, daß diese Größen konstant sind.

$$\begin{aligned} \langle J(\pi(\kappa)), \pi(\kappa') \rangle' &= \langle J(\pi(\kappa')), \pi(\kappa') \rangle + \langle J(\pi(\kappa)), \pi(\kappa'') \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

Der erste Summand hat den Wert 0, weil J schiefsymmetrisch ist, beim zweiten kommt wieder hinzu, daß κ und κ'' blockweise linear abhängig sind. \square

Satz 7 *Die auf einen Eigenraum von τ^2 eingeschränkte Krümmungskurve κ hat bei geeigneter Rahmenwahl als allgemeinste Form:*

$$\pi(\kappa) = r \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \sin \theta \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} .$$

Dabei ist $\nu = r^2 \varphi'$ das lokale Drehmoment und θ der lokale Kählerwinkel. Für den Kern von τ ist $\theta = 0$.

Beweis: Die Polarkoordinaten (r, φ) beziehen sich auf die Basis der Ebene $\{b_1, b_2\}$, die Parametrisierung der Kurve $\pi(\kappa)$ ist nach einer orthogonalen Fortsetzung der Basis der komplexen Ebene $\{b_1, J(b_1), b_3, J(b_3)\}$ entwickelt. \square

Eine Änderung der verschiedenen lokalen Kählerwinkel erreichen wir demnach durch eine orthogonale Matrix Q , die zwar nicht mit τ , aber dafür mit τ^2 kommutiert. Mit κ ist dann auch $Q(\kappa)$ Lösung.

5.5 Reduktion der Dimension

Bisher sind wir mit dem γ umgebenden Raum großzügig umgegangen. Jetzt können wir eventuell überflüssige Dimensionen wieder loswerden.

Definition: Der *Rang* einer Kurve im euklidischen Raum sei die Dimension des kleinsten affinen Unterraumes, der die ganze Kurve enthält.

Satz 8 Eine Kurve $\gamma : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ ist substantiell in einer Sphäre oder einer affinen Ebene der Dimension $1 + \text{Rang}(\kappa)$ enthalten, wenn κ die Krümmungskurve eines parallelen Rahmens ist.

Beweis: Wir nehmen an, die Kurve γ sei nicht substantiell, denn sonst ist die Aussage trivial. Durch geeignete Wahl des parallelen Rahmens erreichen wir für κ die Form $(\kappa_1, \dots, \kappa_k, \lambda, 0, \dots, 0)$, wobei die ersten k Koordinaten eine substantielle Kurve bilden und λ eine Konstante ist. Ist nun $\lambda = 0$, so trägt γ $n - k$ parallele Normalenfelder, die eine Ebene der Dimension $1 + k$ bestimmen. Ist $\lambda \neq 0$, so gilt dasselbe Argument für eine Ebene der Dimension $2 + k$. Außerdem ist γ aber in einer Sphäre vom Radius $1/\lambda$ enthalten, denn $\partial_s(\gamma + 1/\lambda N_{k+1}) = 0$. \square

Wir gehen nun von der bereits gezeigten Blockstruktur aus, und drehen den Rahmen konstanter Torsion einer elastischen Kurve in einen parallelen Rahmen. Die zugehörige Drehung ist $Q(s) = \exp(-s\tau)$. Die neue Kurve $Q^*(\kappa)$ füllt nun blockweise die ersten 1, 2 oder 4 Koordinaten nach folgender Tabelle:

$$\tau_k \neq 0 \quad \begin{cases} \nu \neq 0 & \text{und} & \theta \neq 0 & \rightsquigarrow & 4 \\ \nu \neq 0 & \text{und} & \theta = 0 & \rightsquigarrow & 2 \\ \nu = 0 & & (\Rightarrow \theta = 0) & \rightsquigarrow & 1 \end{cases}$$

$$\text{Kern}(\tau) \quad (\Rightarrow \theta = 0) \quad \begin{cases} \nu \neq 0 & \rightsquigarrow & 2 \\ \nu = 0 & \rightsquigarrow & 1 \end{cases} .$$

Alle übrigen Dimensionen sind nach obigem Satz überflüssig, und wir ignorieren sie. In der speziellen Euler-Lagrange-Gleichung müssen wir die Konstante μ dann neu interpretieren, da sich $\|\tau\|$ geändert hat.

6 Einfache elastische Kurven

6.1 Definition

Bisher waren die blockweisen Lösungen in der speziellen Euler-Lagrange-Gleichung durch das Quadrat der Norm der ganzen Krümmungskurve gekoppelt. Die Situation wird deutlich einfacher, wenn es nur einen Block gibt.

Definition: Eine gerahmte elastische Kurve heißt *einfach elastisch*, wenn das Quadrat ihrer Torsionsmatrix ein Vielfaches der Einheitsmatrix ist.

Das vorige Kapitel liefert uns eine Übersicht über die nötigen Dimensionen des umgebenden Raumes.

Satz 9 *Eine einfache elastische Kurve hat höchstens den Rang 5.*

Beweis: Da nur ein Block existiert, hat die Krümmungskurve eines parallelen Rahmens höchstens den Rang 4. Aus dem Dimensionssatz (siehe Abschnitt 5.5) folgt dann die Behauptung. \square

6.2 Die skalare Krümmung

Die Euler-Lagrange-Gleichung lautet nun:

$$\begin{aligned} 0 &= \kappa'' + \left(\frac{1}{2}\|\kappa\|^2 + \mu\right)\kappa \\ \mu &= \begin{cases} 2\tau_1^2 - c_3 & \text{für Raumkurven} \\ 3\tau_1^2 - c_3 & \text{für den } \mathbf{R}^5 \end{cases} . \end{aligned}$$

(Die Angaben für μ haben wenig Aussagekraft, da wir bei den Änderungen am Rahmen c_3 bereits verändert haben.)

Wir parametrisieren die Ebene, in der sich κ bewegt durch Polarkoordinaten (r, φ) und zerlegen die Euler-Lagrange-Gleichung:

$$\begin{aligned} 0 &= r'' - \frac{1}{2}\nu^2/r^3 + \mu r + \frac{1}{2}r^3 \\ \nu &= r^2\varphi' . \end{aligned}$$

Eine effektive Potentialfunktion ist

$$u(r) := \frac{1}{2}\nu^2/r^2 + \frac{1}{2}\mu r^2 + \frac{1}{8}r^4$$

mit der Energiebilanz

$$e = \frac{1}{2}r'^2 + u(r) .$$

Das Erweitern mit $8r^2$ führt zu einer Energiegleichung für die Variable r^2 ,

$$\begin{aligned} ((r^2)')^2 &= 4r^2(r')^2 \\ &= -4\nu^2 + 8er^2 - 4\mu r^4 - r^6 \quad , \end{aligned}$$

die zu einem elliptischen Integral umgestellt wird:

$$s = \int \frac{d(r^2)}{\sqrt{-4\nu^2 + 8er^2 - 4\mu r^4 - r^6}} \quad .$$

Das Inverse des Integrals ist eine elliptische Funktion, die allgemeine Lösung:

$$\begin{aligned} r(\varrho, \alpha, \beta; s) &:= \frac{1}{\varrho} \sqrt{dn^2(\alpha; \frac{s}{2\varrho}) - \tilde{\alpha}^2 \tilde{\beta}^2} \\ &= \frac{1}{\varrho} \sqrt{\alpha^2 cn^2(\alpha; \frac{s}{2\varrho}) + \tilde{\alpha}^2 \beta^2} \quad . \end{aligned}$$

Statt der "physikalischen" Parameter (ν, e, μ) führen wir "geometrische" Parameter (ϱ, α, β) ein, deren Bedeutung wir noch analysieren. Im einzelnen haben wir dabei zwei Paare von Moduln,

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \tilde{\alpha}^2 &= 1 \\ \beta^2 + \tilde{\beta}^2 &= 1 \quad , \end{aligned}$$

welche die Gestalt von r bestimmen. Der Parameter ϱ ist ein Streckungs-faktor des umgebenden Raumes. Wir normieren ihn zu 1. Außerdem haben wir den Bogenlängenparameter so gesetzt, daß die Kurve mit maximaler Krümmung startet.

$$\begin{aligned} r_{max} &:= r(1, \alpha, \beta; 0) \\ &= \sqrt{1 - \tilde{\alpha}^2 \tilde{\beta}^2} \end{aligned}$$

Den Zusammenhang zwischen den alten und den neuen Parametern bekommen wir durch Vergleich. Aus der Lösung erhalten wir

$$\begin{aligned} r' &= -\alpha^2 sn \, cn \, dn / 2r \\ (2rr')^2 &= (r^2 + \tilde{\alpha}^2 \tilde{\beta}^2)(r^2 - \tilde{\alpha}^2 \beta^2)(\alpha^2 + \tilde{\alpha}^2 \beta^2 - r^2) \quad . \end{aligned}$$

Das Polynom aus dem elliptischen Integral liefert nun:

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{4}(\tilde{\alpha}^2(3\tilde{\beta}^2 - 1) - 1) \\ \nu &= \frac{1}{2}(\tilde{\alpha}^2 \beta \tilde{\beta} r_{max}) \\ e &= \frac{1}{8}\tilde{\alpha}^2(\beta^2 - (3\beta^2 - 1)r_{max}^2) \quad . \end{aligned}$$

6.3 Der Modulraum

Fassen wir die Parameter, die eine einfache elastische Kurve bestimmen, das heißt, die Integration der Ableitungsgleichungen eindeutig machen, noch einmal zusammen:

θ Der Kählerwinkel. Wir setzen ihn 0 und betrachten Raumkurven. Jede einfache elastische Raumkurve ist aber nur ein Exemplar aus einer Einparameterschar von Kurven im \mathbf{R}^5 , die alle dasselbe Krümmungsverhalten haben.

τ_1 Die einzige relevante Zahl in der Torsionsmatrix. Auch hier bekommen wir eine Einparameterschar von Kurven mit gleicher Krümmung. Die Transformationsregel für die Torsionsmatrix, hier eine Addition, passen wir der klassischen Frenettheorie an. Der Rahmen \mathbf{N} sei positiv orientiert und $\tau_1 = \langle N'_1, N_2 \rangle$. Dann ist:

$$\tau_{Frenet} = \tau_1 + \varphi' .$$

ϱ Der Homothetiefaktor. Er ist auch in den anderen Parametern so versteckt, daß die Gleichungen homogen werden. Zum Beispiel in μ vom Grad -2 , in ν vom Grad -3 . Für $\varrho = 1$ ist dies nicht sichtbar.

α Der erste Modul ist im Intervall $[-1, +1]$ frei wählbar. Er und sein Komodul $\tilde{\alpha}$ werden nur quadratisch vorkommen.

β Der zweite Modul und sein Komodul $\tilde{\beta}$ kommen nicht nur quadratisch vor. Wir vereinbaren für die Vorzeichen:

$$\beta \in [-1, +1] \quad , \quad \tilde{\beta} = +\sqrt{1 - \beta^2} .$$

Die Vorzeichen von β und ν sind gleich.

Hinzu kommen die Anfangsbedingungen:

s Die "Phase" ist so gesetzt, daß für $s = 0$ die Krümmung maximal ist.

γ Die Anfangslage $\gamma(0)$.

\mathbf{N} Der Anfangsrahmen $\mathbf{N}_{(0)}$.

Für einfache elastische Raumkurven untersuchen wir die Parameter

$$(\alpha, \beta, \tau_1) \in [-1, 1] \times [-1, 1] \times \mathbf{R} .$$

Das ist unser *Modulraum*. Die beiden Randebenen $\{\alpha = \pm 1\}$ sind in Wahrheit nur zwei Randgeraden, weil die skalare Krümmung dort nicht von β abhängt. Neben der Spiegelung an der (β, τ_1) -Ebene bemerken wir eine weitere Symmetrie, die Spiegelung an der α -Geraden. Ändern β und τ_1 beide ihr Vorzeichen, so wechselt auch die Frenettorsion ihr Vorzeichen, aber die Krümmung bleibt wie sie ist. Diese Umorientierung des \mathbf{R}^3 können wir im Modulraum auch durch eine Spiegelung am Ursprung erreichen. Für dem Betrage nach sehr große Torsionen nähern sich die Kurven sehr rasch einer Geraden, da die Krümmung durch 1 beschränkt ist.

6.4 W-Kurven

W-Kurven sind Kurven mit konstanten Krümmungen der Frenettheorie. Im Raum sind dies die Helices einschließlich der Geraden und Kreise. Bis auf Ähnlichkeit ist der Quotient aus Krümmung und Torsion der einzige Freiheitsgrad. Wir betrachten gerahmte Kurven, so erhalten wir eine Ebene von W-Kurven.

Satz 10 *Im Modulraum finden wir die W-Kurven in der Koordinatenebene $\{\alpha = 0\}$.*

Beweis: Die skalare Krümmung ist genau dann konstant, wenn $\alpha = 0$ ist. Dann ist auch die Frenettorsion konstant, weil φ' konstant ist. \square

Die Geraden liegen auf der τ_1 -Achse mit der torsionsentspannten Geraden im Ursprung. Auf der Ellipse

$$\{(2\tau_1)^2 + \beta^2 = 1\}$$

liegen die Kreise ($\beta\tau_1 < 0$), in den Scheiteln liegen je zwei torsionsentspannte Einheitskreise und zwei Geraden. Auf dem Rest Ellipse liegen spezielle Helices, die später noch erwähnt werden.

6.5 Elastische Frenetkurven

Wir verstehen darunter elastische gerahmte Kurven, deren Rahmen stückweise äquivalent zum Frenetrahmen ist. Die Geraden nehmen wir willkürlich hinzu.

Satz 11 *Im Modulraum finden wir die elastischen Frenetkurven am Rand und in der Koordinatenebene $\{\beta = 0\}$.*

Beweis: Die Krümmungskurve ist drehimpulsfrei. $\nu = 0$, falls $\alpha = \pm 1$ oder $\beta \in \{0, \pm 1\}$. \square

Wir erwähnen hier ohne Beweis, daß diese Kurven, sofern sie nicht eben sind, als Asymptotenlinien von Schraubflächen konstanter Gaußscher Krümmung $-\tau_1^2$ vorkommen. Spezielle Schraubflächen in diesem Sinn sind Rotationsflächen.

6.6 Biegeelastische Kurven

Satz 12 *Die biegeelastischen Kurven finden wir in der Koordinatenebene $\{\tau_1 = 0\}$.*

Beweis: Ist $\tau_1 = 0$, so sehen wir bereits am Funktional, daß eine biegeelastische Kurve vorliegt. In der anderen Richtung ist nichts zu beweisen, denn als Teil unserer Begriffsbildung (siehe Abschnitt 3.4) wählen wir bei einer (zunächst ungerahmten) biegeelastischen Kurve den Rahmen parallel. \square

Die W-Kurven mit nicht parallelem Rahmen sind hier also ausgeschlossen.

6.7 Ebene elastische Kurven

Die historischen Elastika.

Satz 13 *Abgesehen von den Kreisen und den Geraden sind die ebenen elastischen Kurven im Modulraum gerade die torsionsentspannten ($\tau_1 = 0$) elastischen Frenetkurven.*

Beweis: Aus der Gleichung für die Frenettorsion erhalten wir:

$$\varphi' = \text{konstant} .$$

Soll r nicht konstant sein, so muß der Drehimpuls verschwinden, also liegt eine Frenetkurve vor. Diese ist dann parallel gerahmt, weil die obige Konstante 0 ist. \square

Wir schreiben die Parametrisierungen passend für unseren Modulraum. E ist das elliptische Integral zweiter Art, am , cn und dn sind die Jacobischen elliptischen Funktionen.

$$\phi := am(\alpha; s/2)$$

Auf der α -Achse liegen die "Wellenartigen" einschließlich der "Acht"

$$\gamma(s) = \begin{pmatrix} 4E(\alpha; \phi) - s \\ 4\alpha cn(\alpha; s/2) \end{pmatrix},$$

am Rand ($\beta = \pm 1$) liegen die "Schlaufenartigen"

$$\gamma(s) = \frac{1}{\alpha^2} \begin{pmatrix} 4E(\alpha; \phi) - (2 - \alpha^2)s \\ 4 dn(\alpha; s/2) \end{pmatrix},$$

als gemeinsame Grenzlagen ($\alpha = \pm 1$) das "Soliton"

$$\gamma(s) = \begin{pmatrix} 4 \tanh(s/2) - s \\ 4 / \cosh(s/2) \end{pmatrix}.$$

6.8 Quasiperiodische Kurven

Wir haben gesehen, daß die elastischen Raumkurven ein periodisches Krümmungsverhalten zeigen. Da die Torsion konstant ist, erhalten wir bei der Integration der Ableitungsgleichungen kongruente Kurvenstücke. An den Nahtstellen, den kritischen Stellen der skalaren Krümmung, kann die Kurve an ihrer Hauptnormalen gespiegelt werden. Sehen wir von der "Feinstruktur" der Kurve auf solch einem Periodenstück ab, gleicht das fortgesetzte Spiegeln einer Schraubbewegung. Wir nennen eine elastische Kurve *quasiperiodisch*, wenn der Translationsanteil dieser Schraubung gleich 0 ist.

Definition: Eine *halbe Periode* $L/2$ sei durchlaufen, wenn die skalare Krümmung das Intervall $[r_{min}, r_{max}]$ genau einmal durchlaufen hat.

Die Ausnahmen, bei denen die Definition keinen Sinn macht, sind die W-Kurven und die klassischen Elastika auf der α -Achse. In beiden Fällen ist die gesuchte Schraubung aber bekannt.

Um bestimmte Integrale längs der Kurve ausrechnen zu können, bringen wir unser Integral des Bogenlängenparameters s auf eine andere Form. Mit

$$x := dn^2(\alpha; s/2)$$

folgt:

$$\begin{aligned}(x')^2 &= x(1-x)(x-\tilde{\alpha}^2) \\ &=: p(x) \ .\end{aligned}$$

Die vollständigen elliptischen Integrale der ersten bis dritten Art über eine halbe Periode lauten:

$$\begin{aligned}\int_{\tilde{\alpha}^2}^1 \frac{dx}{\sqrt{p(x)}} &= 2K(\alpha) \\ \int_{\tilde{\alpha}^2}^1 \frac{x dx}{\sqrt{p(x)}} &= 2E(\alpha) \\ \int_{\tilde{\alpha}^2}^1 \frac{dx}{(x-\xi)\sqrt{p(x)}} &= \frac{2}{\xi} \left(-K(\alpha) + \frac{\tilde{\alpha}^2}{\tilde{\alpha}^2 - \xi} \Pi\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\xi\alpha^2}{\tilde{\alpha}^2 - \xi}, \alpha\right) \right) \ .\end{aligned}$$

Die Notation für Π richtet sich nach [GH]. Die Periodenlänge haben wir bereits integriert.

Satz 14 *Die elastischen Raumkurven setzen sich aus kongruenten Kurvenstücken der Länge*

$$L/2 = 2K(\alpha)$$

zusammen.

Den Translationsanteil einer halben Periode messen wir am konstanten Feld \mathcal{J} :

$$\begin{aligned}\int_0^{L/2} \frac{\langle \mathcal{J}, T \rangle}{\|\mathcal{J}\|} ds &= \frac{1}{\|\mathcal{J}\|} \int_{\tilde{\alpha}^2}^1 (\mu - \tau_1^2 + \frac{1}{2}r^2) \frac{dx}{\sqrt{p(x)}} \\ &= \frac{2K(\alpha)}{\|\mathcal{J}\|} \left(-\frac{1 + \tilde{\alpha}^2\beta^2}{4} - \tau_1^2 + \frac{E(\alpha)}{2K(\alpha)} \right) \ .\end{aligned}$$

Satz 15 *Eine notwendige Bedingung für die Parameter einer quasiperiodischen Kurve ist:*

$$\frac{E(\alpha)}{K(\alpha)} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\tilde{\alpha}^2\beta^2 + 2\tau_1^2 \ .$$

Die Lösungsmenge dieser Gleichung ist eine glatte topologische Sphäre.

Beweis: Die Bedingung folgt aus dem Integral für den Translationsanteil, wenn wir es 0 setzen. Die Lösungsmenge schreiben wir als Niveaufläche der Funktion

$$f(\alpha, \beta, \tau_1) := 2\tau_1^2 + \frac{1}{2}\tilde{\alpha}^2\beta^2 + \eta$$

zum Funktionswert $\frac{1}{2}$. Qualitativ hat η die Eigenschaften von α^2 .

$$\begin{aligned}\eta(\alpha) &:= 1 - \frac{E(\alpha)}{K(\alpha)} \\ \eta(0) &= 0 \\ \eta(\pm 1) &= 1 \\ \eta'(0) &= 0 \\ \eta''(\alpha) &> 0\end{aligned}$$

Da η auf der Niveaufläche durch $\frac{1}{2}$ beschränkt ist, gilt:

$$|\alpha| \leq \alpha_{max} < 1 .$$

Insbesondere ist $\tilde{\alpha}^2$ hier immer von 0 verschieden. Der Gradient von f

$$\text{grad}(f) = \begin{pmatrix} -\alpha\beta^2 + \eta'(\alpha) \\ \tilde{\alpha}^2\beta \\ 4\tau_1 \end{pmatrix}$$

hat nur im Koordinatenursprung eine Nullstelle, wenn wir von den Randgeraden $\alpha = \pm 1$ einmal absehen. \square

Der maximale Modul

$$\alpha_{max} \approx 0.9089$$

ist Lösung der Gleichung:

$$2E(\alpha) = K(\alpha) .$$

Die dazugehörige elastische Kurve ist die ebene "Acht".

Die hergeleitete Bedingung für quasiperiodische Kurven ist nicht hinreichend, weil wir die Richtung der Translation durch \mathcal{J} bestimmen, \mathcal{J} kann aber Nullstellen haben. Wir sehen dies auf dem Äquator der Sphäre in der W-Kurven-Ebene. Zu jedem Kreis ($\beta\tau_1 < 0$) auf der Äquatorellipse gibt es eine Helix derselben Krümmung, aber entgegengesetzter Torsion auf dieser

Ellipse ($\tau_1 \mapsto -\tau_1$), die offensichtlich nicht quasiperiodisch ist. Betrachten wir das konstante Feld \mathcal{J} in den Rahmenkoordinaten

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \mu - \tau_1^2 + \frac{1}{2}r^2 \\ \kappa'_1 + \tau_1\kappa_2 \\ \kappa'_2 - \tau_1\kappa_1 \end{pmatrix},$$

so folgt für seine Nullstellen :

$$\begin{aligned} r &= \text{konstant} \\ \varphi' &= \tau_1 . \end{aligned}$$

Für $\varphi' = -\tau_1$ hatten wir bereits die Kreise gefunden. Die andere Hälfte der Ellipse liefert die Nullstellen von \mathcal{J} . Hier war die Normierung von \mathcal{J} zur Berechnung des Translationsanteils bereits illegal. Wir werden daher erst normieren und uns dann diesen Nullstellen nähern. Für $\alpha = 0$ ist

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\tilde{\beta}^2 - \tau_1^2 \\ (\frac{1}{2}\tilde{\beta} - \tau_1)r \sin \varphi \\ -(\frac{1}{2}\tilde{\beta} - \tau_1)r \cos \varphi \end{pmatrix},$$

und damit ist im Grenzwert

$$\frac{\mathcal{J}}{\|\mathcal{J}\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \varphi \\ -\cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Dies erklärt, warum wir bestimmte Helices in dieser Sphäre finden. Singulär bleibt einzig die τ_1 -Achse, weil die Polarkoordinaten im Ursprung singulär sind und φ nicht definiert ist.

6.9 Periodische Kurven

Qualitativ verhalten sich quasiperiodische elastische Kurven wie Geodätische auf einem Torus. Sie schließen sich nur, wenn bestimmte Rationalitätskriterien erfüllt werden. In höheren Dimensionen müßten wir das Rotationsfeld \mathcal{K} bemühen. Da \mathcal{J} im Kern von \mathcal{K} liegt, ist es im dreidimensionalen Raum ausreichend, die Winkelgeschwindigkeit der Kurve oder der Tangente der Kurve um diese \mathcal{J} -Achse über eine Periode zu integrieren. Ist der Wert des Integrals ein rationales Vielfaches der Kreiszahl π , dann schließt

sich die Kurve. Unsere Kurven sind aus kongruenten Stücken halber Periodenlänge zusammengesetzt, und der Höhengewinn in \mathcal{J} -Richtung ist hier bereits 0. Wir integrieren die Winkelgeschwindigkeit der Tangente:

$$\begin{aligned}
\Omega' &:= \|\mathcal{J}\| \frac{\langle \mathcal{J}, T \times T' \rangle}{\|\mathcal{J} \times T\|^2} \\
&= \frac{\|\mathcal{J}\|(\nu - \tau_1 r^2)}{(\|\mathcal{J}\| + \tau_1^2 - \mu - \frac{1}{2}r^2)(\|\mathcal{J}\| - \tau_1^2 + \mu + \frac{1}{2}r^2)} \\
&= \frac{\nu + \tau_1 \zeta_+}{r^2 + \zeta_+} - \frac{\nu + \tau_1 \zeta_-}{r^2 + \zeta_-} \\
\zeta_{\pm} &:= 2(\mu - \tau_1^2 \pm \|\mathcal{J}\|)
\end{aligned}$$

Nach dieser Partialbruchzerlegung werden die einzelnen Summanden integriert. Die Variablensubstitution aus dem vorigen Abschnitt gibt uns vollständige elliptische Integrale der dritten Art.

$$\begin{aligned}
\Omega &= \Omega_+ - \Omega_- \\
\Omega_{\pm} &= \int_0^{L/2} \frac{\nu + \tau_1 \zeta_{\pm}}{r^2 + \zeta_{\pm}} ds \\
&= (\nu + \tau_1 \zeta_{\pm}) \int_{\tilde{\alpha}^2}^1 \frac{dx}{(x - \tilde{\alpha}^2 \tilde{\beta}^2 + \zeta_{\pm}) \sqrt{p(x)}} \\
&= \frac{2}{\tilde{\alpha}^2 \tilde{\beta}^2 - \zeta_{\pm}} \left(-\text{K}(\alpha) + \frac{\tilde{\alpha}^2}{\tilde{\alpha}^2 \tilde{\beta}^2 + \zeta_{\pm}} \Pi\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\tilde{\alpha}^2 \tilde{\beta}^2 - \zeta_{\pm}}{\tilde{\alpha}^2 \tilde{\beta}^2 + \zeta_{\pm}} \alpha^2, \alpha\right) \right)
\end{aligned}$$

Wesentliche Vereinfachungen sind hier leider nicht sichtbar. Die Schnittlinien der Niveauflächen dieser Funktion mit der Sphäre der quasiperiodischen Kurven lassen sich numerisch verfolgen. Die Vermutung ist: Diese Linien sind alle geschlossen, singuläre Linien sind die Helices, die Gerade und der entspannte Kreis.

Ist diese Vermutung richtig, so durchlaufen alle geschlossenen elastischen Raumkurven während ihrer Metamorphose die Stadien

$$\text{Kreis} \rightsquigarrow \text{Biegeelastika} \rightsquigarrow \text{Frenetelastika} \rightsquigarrow \text{Kreis}$$

und zurück, denn die Kreise an den Enden sind verschieden. Die einzige Ausnahme davon ist die Linie, die die ebene "Acht" enthält. Hier fallen der biegeelastische und der Frenet-Fall zusammen.

Bilder

Bild 1: Der Modulraum $(\alpha, \beta, \tau_1) \in [-1, 1] \times [-1, 1] \times \mathbf{R}$, (τ_1 überhöht).

- | | |
|--------------------------------|-------------------------------------|
| (1) Geraden | (5) ebene Elastika |
| (2) Kreise | (6) quasiperiodische Biegeelastika |
| (3) "quasiperiodische" Helices | (7) quasiperiodische Frenetelastika |
| (4) das "Soliton" | (8) die "Acht" |

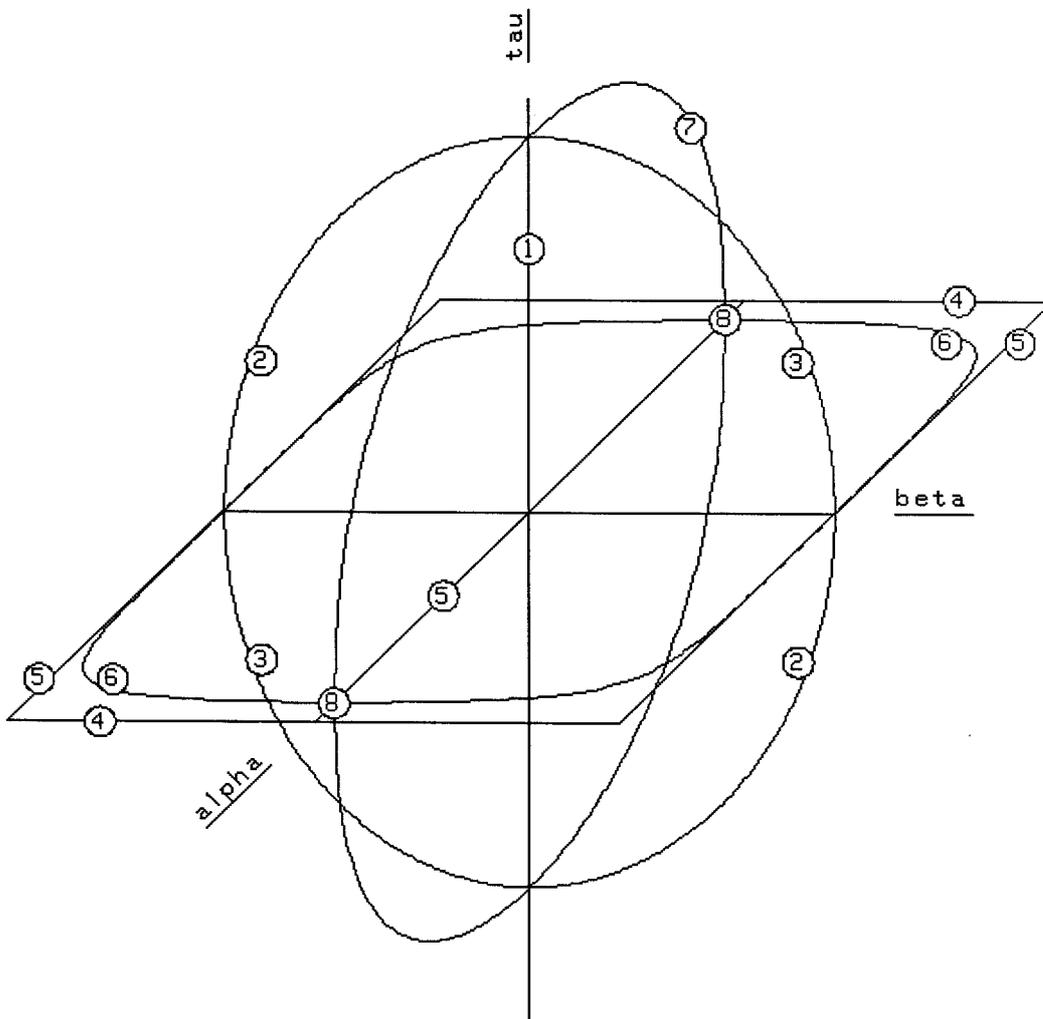


Bild 2: Metamorphose eines einfachen Kreises mit 2 Periodenlängen zur "Acht".

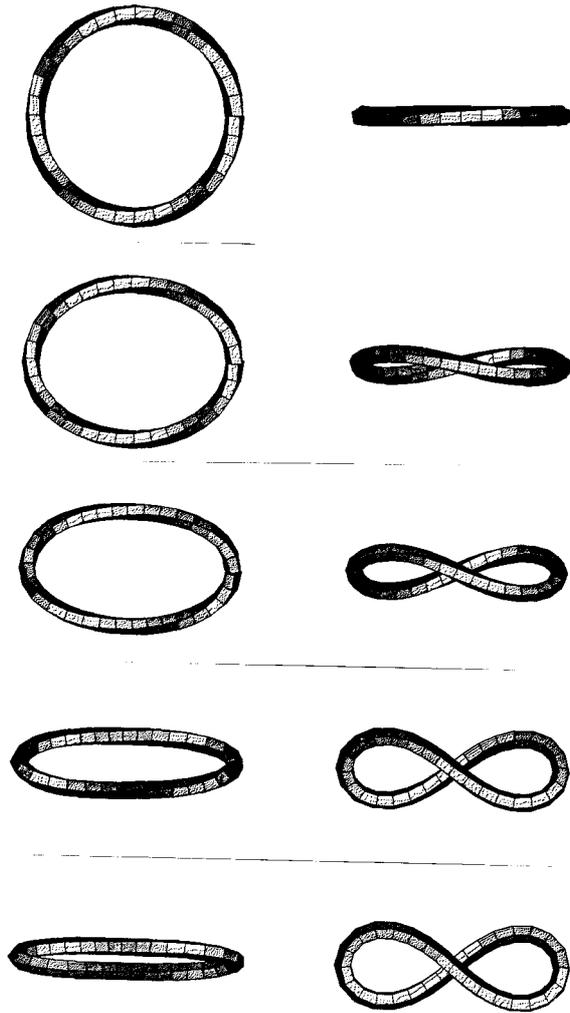


Bild 3: Metamorphose eines dreifachen Kreises mit 4 Periodenlängen. Aus einem (3,4)-Torusknoten wird ein (1,4)-Torusknoten.

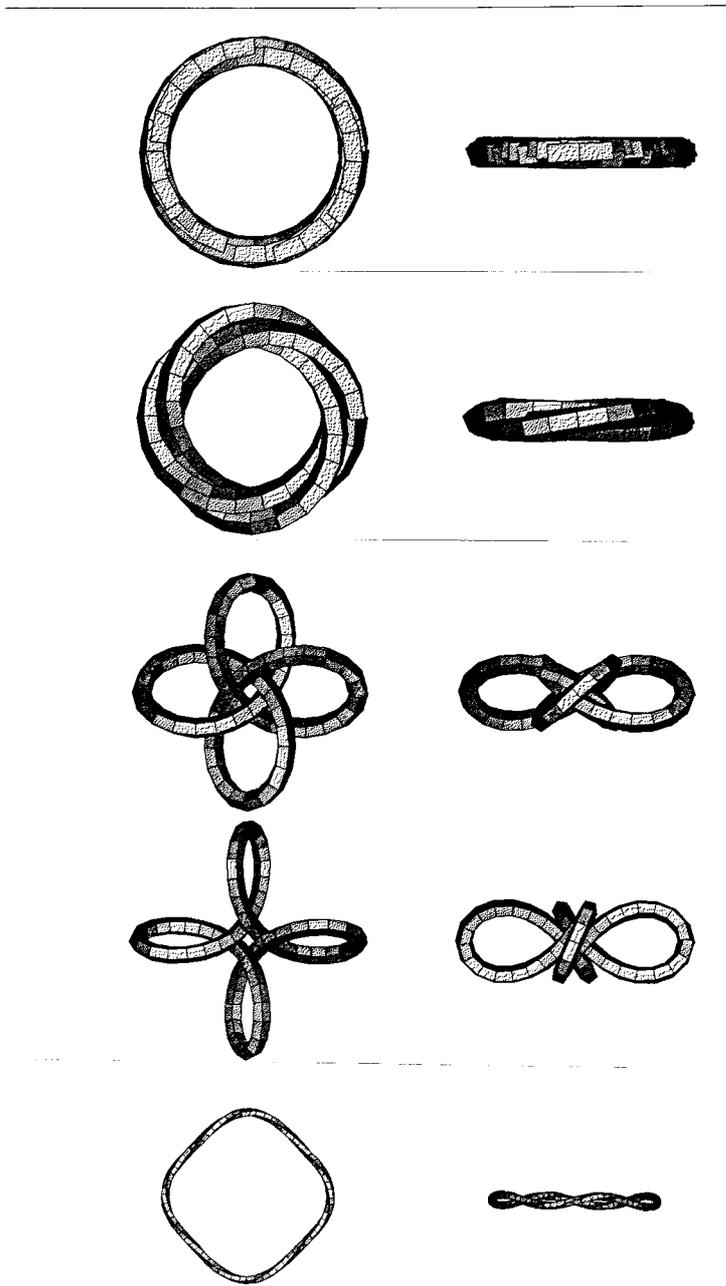
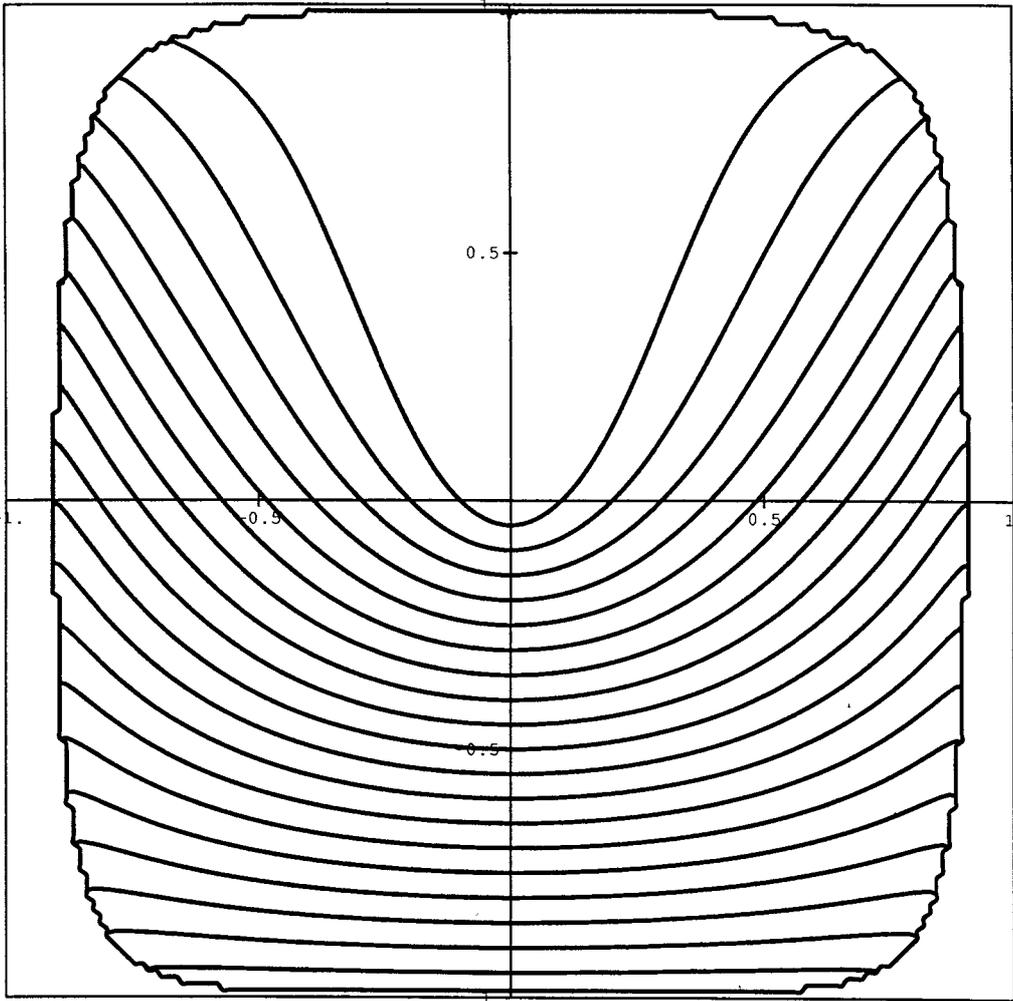


Bild 4: Linien konstanter Rotation Ω auf der quasiperiodischen Sphäre. Blick aus τ_1 -Richtung auf die α - β -Ebene.



Schreibweisen

Folgende Schreibweisen verwenden wir für Größen im \mathbf{R}^n .
Vektoren und Matrizen:

$$\begin{aligned}
 a &= \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \\
 a^* &= (a_1, \dots, a_n) \\
 B &= ((B_{ij}))_{ij} \\
 &= \begin{pmatrix} B_{11} & \dots & B_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{m1} & \dots & B_{mn} \end{pmatrix} \\
 B^* &= ((B_{ji}))_{ij} \\
 &= \begin{pmatrix} B_{11} & \dots & B_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{n1} & \dots & B_{nm} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Dyade:

$$\begin{aligned}
 a \otimes b &= ((a_i b_j))_{ij} \\
 &= ab^*
 \end{aligned}$$

Äußeres Produkt:

$$a \wedge b = a \otimes b - b \otimes a$$

Skalarprodukte:

$$\begin{aligned}
 \langle a, b \rangle &= \sum_{i=1}^n a_i b_i \\
 \langle C, D \rangle &= \text{Spur}(C^t D) \\
 &= \sum_{i,j=1}^n c_{ij} d_{ij} \\
 \langle a \wedge b, c \wedge d \rangle &= 2(\langle a, c \rangle \langle b, d \rangle - \langle a, d \rangle \langle b, c \rangle)
 \end{aligned}$$

Rechenregeln:

$$\begin{aligned}
 \text{Spur}(a \otimes b) &= \text{Spur}(ab^*) \\
 &= a^* b \\
 &= \langle a, b \rangle \\
 \langle a \otimes b, C \rangle &= \langle a, C(b) \rangle
 \end{aligned}$$

Index

α $\tilde{\alpha}$	21
α_{max}	27
äquivalente Rahmen	7
Acht	25
am	25
β $\tilde{\beta}$	21
biegeelastisch	9
Block	16
c_1 c_2 c_3	8
dn	21
E	25
einfach elastisch	20
elastische Kurve	8
F	8
φ	20
frei	9
γ	6
gerahmte Kurve	6
J	17
\mathcal{J}	12
K	26
\mathcal{K}	15
κ	6
Krümmungskurve	6
\mathcal{L}	15
λ μ	10
M	6
μ	14
\mathbf{N} N_i	6
ν	17
Ω	29
Π	29
$\pi(\kappa)$	16
parallele Rahmen	7
Periode	25
proportionale Rahmen	7
R	11

r	20
$r(\varrho, \alpha, \beta; s)$	21
r_{max}	21
ϱ	21
Rahmen	6
Rahmen konstanter Torsion	7
Rang	19
s	6
σ	6
Soliton	25
T	6
τ	6
τ_1 τ_{Frenet}	22
θ	17
torsionselastisch	9
torsionsentspannt	14
Torsionsmatrix	6
verwandte Rahmen	7
W	10
w	10
zugehörige Drehung	6

Literaturverzeichnis

- [Ar] Vladimir Igorevich Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer Verlag 1978
- [Bi] J. Binet, Mémoire sur l'intégration des équations de la courbe élastique à double courbure, *Compte Rendu*, 1844, 1^{er} Semestre.(T.XVIII, No 25.)
- [Bo] Oskar Bolza, *Variationsrechnung*, Chelsea Publishing Company 1909
- [Gr] Greenhill, *Les Fonctions elliptiques et leurs applications*, trad. par Griess, Paris 1895
- [GH] Wolfgang Gröbner und Nikolaus Hofreiter, *Integraltafel*, Springer Verlag, 1957
- [He] Charles Hermite, *Sur quelques applications des fonctions elliptiques*, 1885
- [LS1] Joel Langer and David A. Singer, On the Total Squared Curvature of Closed Curves, *Journal of Differential Geometry* **20** (1984), 1-22
- [LS2] Joel Langer and David A. Singer, Knotted Elastica in \mathbf{R}^3 , *J. London Math. Soc.* **30** (1984), 512-520
- [NM] H. K. Nickerson and Gerald S. Manning, Intrinsic Equations for a Relaxed Elastic Line on an Oriented Surface, *Geometriae Dedicata* **27** (1988), 127-136
- [SO] Jerome Spanier and Keith B. Oldham, *An Atlas of Functions*, Springer Verlag 1987
- [Tr] C. Truesdell, The Influence of Elasticity on Analysis: The Classical Heritage, *Bull. Amer. Math. Soc.* **9** (1983), 293-310