Eine diskrete Autoevolute als Ring räumlicher Rauten

Ekkehard-H. Tjaden

Juli 2022

Zusammenfassung

Der Erfolg bei den glatten Autoevoluten weckt den Wunsch nach einem Pendant im diskreten Fall. Wir führen keine diskrete Kurventheorie ein, sondern verwenden einen archaisch einfachen Krümmungsbegriff anhand eines Krümmungskreises. Die Koppelung der Kurve mit ihrer Evolute im Fall konstanter Krümmung ist hier also eine **Forderung** und keine Konsequenz einer Theorie.

0.1 Eine diskrete Autoevolute

...ist eine geschlossene, diskrete Raumkurve, also eine zyklisch indizierte Punktfolge im $\mathbb{R}^3$. Die Anzahl der Punkte soll gerade sein (hier: $2n$). Von je drei aufeinander folgenden Punkten, P_{j-1}, P_j und P_{j+1}, fordern wir, dass sie eindeutig einen Kreis definieren, der längs der Kurve vom selben Radius ist (hier: 1). Der Kreismittelpunkt Q_j ist dann der zu P_j gehörige Evolutenpunkt. Damit die Evolute wieder die Kurve selbst ist, fordern wir $Q_j = P_{j+n}$. Dann gilt:

$$\|P_j - P_k\| = 1 \text{ solange } |j - k + n| \leq 1 \mod (2n) \tag{1}$$

Die Konstruktion hat unmittelbar zwei Konsequenzen. Zum einem bilden je vier Punkte P_j, Q_j, P_{j+1} und Q_{j+1} ein spezielles Tetraeder, eine "räumliche Raute", zum anderen haben zwei benachbarte Rauten an der gemeinsamen Kante denselben Diederwinkel Φ, der weitervererbt wird.

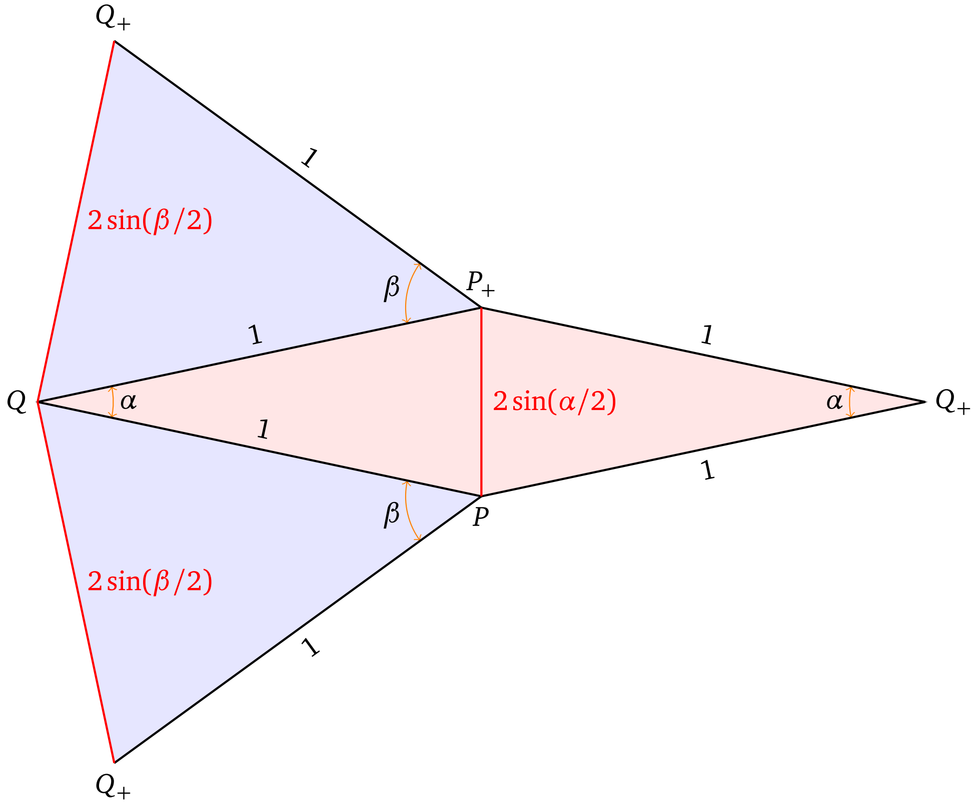
0.2 Die räumliche Raute

...ist ein (i.A. nicht ebenes) Viereck mit konstanter Kantenlänge. Die vier Ecken bilden ein Tetraeder mit zwei weiteren Kanten, den Diagonalen der Raute.

Bei unserer Autoevoluten bilden die vier Punkte P, Q, P_+ und Q_+ als zyklische Sequenz eine räumliche Raute mit der Kantenlänge 1. Die beiden Diagonalen stellen die Kurvensegmente[1] $\overline{P\,P_+}$ und $\overline{Q\,Q_+}$ dar.

Eine gute Vorstellung stellt ein Pyramidenstumpf mit quadratischen Grenzflächen oben und unten dar, bei dem vier überbenachbarte Ecken für das Tetraeder gewählt werden.

Hier ist ein Schnittmusterbogen.



Die beiden Diagonalen des Vierecks ($\overline{P\,P_+}$ und $\overline{Q\,Q_+}$) haben die im Bild angezeigten Längen. Die vier Innenwinkel (Diederwinkel Φ) an den Kanten zweier verschiedenfarbiger Dreiecke sind aus Symmetriegründen alle gleich und erfüllen die Identität

$$\cos(\Phi) = \tan(\alpha/2)\,\tan(\beta/2)\,. \tag{2}$$

Wir zeigen (2) anhand einer speziellen Platzierung. Dazu verwenden wir eine angepasste Basis, die bis auf die Eigenheit $\langle b_1, b_2\rangle = \cos(\Phi)$ orthogonal ist.

[1] Kurvensegmente sind hier gerade Strecken!

Zum Beispiel die Anfangsbasis:

$$b_1 := (\cos(\Phi/2), -\sin(\Phi/2), 0) \tag{3}$$
$$b_2 := (\cos(\Phi/2), +\sin(\Phi/2), 0) \tag{4}$$
$$b_3 := (0, 0, 1) \tag{5}$$

Wir platzieren...

$$Q := P + b_3 \tag{6}$$
$$P_+ := Q + \sin(\alpha)\, b_1 - \cos(\alpha)\, b_3 \tag{7}$$
$$Q_+ := P + \sin(\beta)\, b_2 + \cos(\beta)\, b_3 \tag{8}$$

Die beiden Dreiecke (Grenzflächen) mit der $\overline{PQ}$-Achse als gemeinsamer Kante haben den Diederwinkel Φ per Konstruktion. Ebenso haben bereits drei der vier Kanten der Raute die Länge 1. Es bleibt die vierte Kantenlänge...

$$\begin{aligned} ||Q_+ - P_+||^2 &= || - b_3 - \sin(\alpha)b_1 + \sin(\beta)b_2 + (\cos(\alpha) + \cos(\beta))b_3||^2 \\ &= \sin(\alpha)^2 + \sin(\beta)^2 - 2\sin(\alpha)\sin(\beta)\cos(\Phi) + (1 - \cos(\alpha) - \cos(\beta))^2 \\ &= 1 + 2\,((1 - \cos(\alpha))(1 - \cos(\beta)) - \sin(\alpha)\sin(\beta)\cos(\Phi)) \end{aligned} \tag{9}$$

und die letzte Klammer wird zu Null, gdw.

$$\begin{aligned} \cos(\Phi) &= \frac{1 - \cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}\,\frac{1 - \cos(\beta)}{\sin(\beta)} \\ &= \tan(\alpha/2)\tan(\beta/2) \end{aligned} \tag{10}$$

Bemerkung:
Wird Φ nahe bei $\pi/2$ gewählt, dann werden die Rauten sehr platt, weil ein Kurvensegment immer sehr kurz sein wird. Es entstehen flache Bänder. Wir haben im Beispiel $\Phi = \pi/4$ gewählt, da haben die Rauten schon etwas Volumen.

0.3 Die Autoevolute als Rautenkette

Nachdem α und β nun gekoppelt sind, entsteht jede Raute aus nur einem Parameter t. Ähnlich dem kontinuierlichen Fall setzen wir...

$$\tan(\alpha/2) = \sqrt{\cos(\Phi) + t^2} + t \tag{11}$$
$$\tan(\beta/2) = \sqrt{\cos(\Phi) + t^2} - t \tag{12}$$

Bei vorgegebenem Parameter t iterieren wir das Punktepaar P, Q und die Basis b_1, b_2, b_3. Das Punktepaar ist bereits in (7) und (8) fortgeschrieben, die Basis spiegeln wir zuerst an der zentralen Symmetrieachse v und danach an der neuen b_3-Achse.

$$\begin{aligned} v &= \frac{Q+Q_+}{2} - \frac{P+P_+}{2} \\ &= (-\sin(\alpha)b_1 + \sin(\beta)b_2 + (\cos(\alpha)+\cos(\beta))b_3)/2 \quad (13) \\ \|v\|^2 &= (\cos(\alpha)+\cos(\beta))/2 \quad (14) \end{aligned}$$

Die Basis wird dann iteriert.

$$b_1 \mapsto 2\frac{\langle b_1, v\rangle}{\|v\|^2} v - b_1 \quad (15)$$

$$b_2 \mapsto 2\frac{\langle b_2, v\rangle}{\|v\|^2} v - b_2 \quad (16)$$

$$b_3 \mapsto -2\frac{\langle b_3, v\rangle}{\|v\|^2} v + b_3 \quad (17)$$

0.4 Die Konstruktion des Kleeblatts

Nach vier Iterationen mit den Parametern t_1 bis t_4 verdrehen wir die letzte Basis, damit Kurve und Evolute getauscht werden.

$$b_1 \mapsto b_2 \quad (18)$$

$$b_2 \mapsto b_1 \quad (19)$$

$$b_3 \mapsto -b_3 \quad (20)$$

Mit dieser Basis und der Inversen der Startbasis erhalten wir eine euklidische Bewegung

$$x \mapsto A(x) + a \quad (21)$$

mit $a = Q_4 - P_0$. Numerisch suchen wir eine Lösung mit $Spur(A) = 0$ (Drehung um $2\pi/3$) und a senkrecht zum axialen Vektor von A. (Eigenvektor zum Eigenwert 1).
Drei dieser Ketten sollten dann eine geschlossenen Kurve bilden.
Numerisch gelöst wurde das mit MATHEMATICA Vers. 12 und der Funktion `NMinimize[]` nach der Nelder-Mead-Methode (auch Simplex-Methode).
Ein Bild der Tetraederkette findet man hier.
Für $\phi = \pi/4$ und die ersten vier t-Parameter $2.2038, -0.982729, 2.35695, -1.93921$ ergeben sich die Punktkoordinaten zu dieser Tabelle.