Ekkehard - Heinrich Tjaden

MINIMALE 2 - SPHÄREN IN DER 4 - SPHÄRE

Diplomarbeit bei

Prof. Dr. Dirk Ferus

Technische Universität Berlin

Fachbereich Mathematik

1983

Für die Betreuung dieser Diplomarbeit
danke ich Herrn Prof. Dr. Dirk Ferus.

Ekkehard - Heinrich Tjaden

Inhalt: Seite

I Einleitung

1. Überblick

Wir betrachten Minimalsphären, das sind minimale Immersionen der zweidimensionalen Sphäre S^2 mit differenzierbarer Struktur in die vierdimensionale Sphäre S^4 vom Radius 1 im fünfdimensionalen euklidischen Raum $\mathbb{R}^5$. Die Grundlagen dafür entstammen, abgesehen vom Kapitel V, der Arbeit von Chern zu diesem Thema.

Die Minimalsphären werden durch andere Objekte beschrieben. Im Kapitel II sind das total isotrope, komplexe Kurven im $P_4\mathbb{C}$, sogenannte Direktrix-Kurven, und im Kapitel IV sind das reguläre, komplexe Kurven im $P_3\mathbb{C}$, die hier erzeugende Kurven genannt werden. Der Vorteil dieser Umschreibung liegt in zwei Punkten:

(i) Erzeugende Kurven lassen sich leicht finden. Im Abschnitt 16 ordnen wir jeder rationalen, komplexen Funktion vom Grad größer als 2 eine erzeugende Kurve zu.

(ii) Das Verfahren, aus der erzeugenden Kurve eine Direktrix und weiter eine Minimalsphäre herzustellen, ist formal einfach (Abschnitte 15 und 12). Im Abschnitt 19 wird ein bekanntes Beispiel vorgerechnet.

Im Kapitel V zeigen wir, daß alle Minimalsphären außer dem Äquator nicht nur euklidisch im $\mathbb{R}^5$ bzw. isometrisch in S^4 bewegt werden können.

2. Zum Kalkül

Der fünfdimensionale Raum $\mathbb{R}^5$ ist mit einem kanonischen inneren Produkt $\langle .,. \rangle$ und einer kanonischen Ableitung ∇ ausgestattet, die wir als Riemannsche Metrik und zugehörige Levi-Civita-Ableitung auffassen. Der folgende Cartan-Kalkül ist in Ho/Ru §15 genauer ausgeführt. Für multilineare Differentialformen mit Werten in $\mathbb{R}^5 \times \mathbb{R}$ bzw. dem Tangentialbündel $T\mathbb{R}^5$ haben wir äußere Ableitungen d bzw. d^∇.
Einige Eigenschaften sind:
(i) Das Verschwinden des Krümmungstensors im $\mathbb{R}^5$ ist äquivalent zur Gleichung

$$(d^\nabla)^2 = 0 \ .$$

(ii) Sind y_j, $j=1,..,n+1$, Vektorfelder aus $\Gamma(T\mathbb{R}^5)$ und ist Z eine vektorwertige n-Form, so berechnet man die äußere Ableitung durch

$$d^\nabla Z(y_1,..,y_{n+1}) = \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{j+1} \nabla_{y_j} Z(y_1,..,\hat{y}_j,..,y_{n+1})$$
$$+ \sum_{j<k} (-1)^{j+k} Z([y_j,y_k],y_1,..,\hat{y}_j,..,\hat{y}_k,..,y_{n+1}) \ .$$

Dabei bedeutet $\hat{y}_j$ das Weglassen dieses Feldes. Diese Gleichung gilt auch für die Ableitung d, wenn bei Funktionen f die Derivation $\nabla_y f := y \cdot f$ eingesetzt wird.
(iii) Ist ω eine k-Form, so gilt die Produktverträglichkeit

$$d^\nabla(\omega \wedge Z) = d\omega \wedge Z + (-1)^k \omega \wedge d^\nabla Z \ .$$

(iv) Vektorfelder können wir als vektorwertige 0-Formen auffassen.

3. Die Strukturformeln für S^4

Sei $S^4 := \{x \in \mathbb{R}^5 \mid \langle x,x\rangle = 1\}$ die Einheitssphäre. Wir wählen auf S^4 lokale Vektorfelder e_j, $j=0,\dots,4$, so, daß e_0 die äußere Normale, $e_1,\dots,e_4$ tangential an S^4 und $e_0,\dots,e_4$ orthonormal in $T\mathbb{R}^5$ sind. Für S^4-tangentiale Vektorfelder y definieren wir die lokalen 1-Formen

$$\begin{aligned} \omega_j(y) &:= \langle e_j, y\rangle , \\ \omega_{jk}(y) &:= \langle e_k, d^\nabla e_j(y)\rangle = \langle e_k, \nabla_y e_j\rangle . \end{aligned} \qquad j,k = 0,\dots,4$$

Dann gilt

$$\omega_0 = 0 ,$$

$$\omega_{jk} = -\omega_{kj}, \text{ denn } 0 = y\cdot\langle e_j, e_k\rangle = \langle e_j, \nabla_y e_k\rangle + \langle \nabla_y e_j, e_k\rangle ,$$

$$\omega_{0j} = \omega_j, \text{ denn } \nabla_y e_0 = y,$$

(1) $$d^\nabla e_0 = \nabla e_0 = \sum_{j=1}^{4} \omega_{0j}\, e_j = \sum_{j=1}^{4} \omega_j\, e_j ,$$

(2) $$d^\nabla e_j = \nabla e_j = \sum_{k=0}^{4} \omega_{jk}\, e_k = -\omega_j\, e_0 + \sum_{k=1}^{4} \omega_{jk}\, e_k ,$$

(3) $$\begin{aligned} 0 = d^\nabla d^\nabla e_j &= -d\omega_j\, e_0 + \omega_j \wedge d^\nabla e_0 + \sum_{k=1}^{4} d\omega_{jk}\, e_k - \omega_{jk} \wedge d^\nabla e_k \\ &= -d\omega_j\, e_0 + \sum_{k=1}^{4} \omega_j \wedge \omega_k\, e_k + d\omega_{jk}\, e_k \\ &\quad + \sum_{k=1}^{4} \omega_{jk} \wedge \omega_k\, e_0 - \sum_{k,n=1}^{4} \omega_{jk} \wedge \omega_{kn}\, e_n . \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich in (3) ergibt die Maurer-Cartan-Strukturformeln für S^4 im $\mathbb{R}^5$:

(4) $$d\omega_j = \sum_{k=1}^{4} \omega_{jk} \wedge \omega_k ,$$

$$j,k = 0,\dots,4$$

(5) $$d\omega_{jk} = -\omega_j \wedge \omega_k + \sum_{n=1}^{4} \omega_{jn} \wedge \omega_{nk} .$$

(4) und (5) sind äquivalent zur Codazzi- und Gaußgleichung für die orientierte Hyperfläche S^4, vergl. Kühnel, Seite 121.

II Die Direktrix einer Minimalsphäre

4. Die gegebene Minimalsphäre

Sei S^2 eine differenzierbare zweidimensionale Sphäre und $x : S^2 \longrightarrow S^4$ eine Immersion. Wir ziehen die Metrik und damit alle Ableitungen auf S^2 zurück und machen x zur isometrischen Immersion. Da die so gewonnenen Strukturen auf S^2 und S^4 mit dem Lift x^* kommutieren, benutzen wir die bisherigen Bezeichnungen und Ergebnisse weiter. Allerdings dürfen wir in den Gleichungen (4) und (5) nur S^2-tangentiale Vektorfelder als Argumente zulassen. Die vektorwertigen Formen haben ihre Werte jetzt in $x^*(T\mathbb{R}^5)$. Dieses Bündel identifizieren wir mit $TS^2 \oplus \perp S^2 \oplus x^*\perp S^4$. Dabei ist $\perp S^2$ das Normalenbündel von S^2 bezogen auf die Immersion x und $\perp S^4$ das Normalenbündel von S^4 bezogen auf die Inklusion in den $\mathbb{R}^5$. Im letzteren identifizieren wir e_0 mit dem Ortsvektor x. Die lokalen Vektorfelder $e_0,\ldots,e_4$ brauchen wir nur noch im Bündel $x^*(T\mathbb{R}^5)$ erklären. Hier machen wir die weitere Einschränkung $e_1, e_2 \in \Gamma(TS^2)$, woraus $e_3, e_4 \in \Gamma(\perp S^2)$ und

(6) $$\omega_3 = \omega_4 = 0 \qquad \text{folgen.}$$

Sei $h \in \Gamma(\mathrm{Hom}_2(TS^2, \perp S^2))$ die zweite Fundamentalform der Immersion x. Bezogen auf $e_1,\ldots,e_4$ hat h die Darstellungskoeffizienten

(7) $$h^n_{jk} = \langle e_n, h(e_j, e_k)\rangle = \langle e_n, (\nabla_{e_j} e_k)^{\perp S^2}\rangle = \langle e_n, \nabla_{e_j} e_k\rangle$$

$$= \omega_{kn}(e_j) = \langle \omega_{kn}, \omega_j\rangle \;, \quad j,k = 1,2;\ n = 3,4\ .$$

Die letzte Gleichheit gilt, weil e_j und ω_j dual und normiert sind.

Daraus folgt für $k = 1,2$ und $n = 3,4$

(8) $$\omega_{kn} = \sum_{j=1}^{2} \langle \omega_{kn}, \omega_j \rangle \, \omega_j = \sum_{j=1}^{2} h^n_{jk} \, \omega_j \, .$$

Die Immersion x ist genau dann minimal, wenn die mittlere Krümmungsnormale Spur(h) verschwindet. Das heißt für $n = 3,4$

(9) $$h^n_{11} + h^n_{22} = 0 \, .$$

Von nun an betrachten wir nur noch minimale Immersionen $x : S^2 \longrightarrow S^4$.

5. Eine komplexe Schreibweise

In allen beteiligten Bündeln B führen wir eine komplexe Schreibweise ein:

$$B \longrightarrow \mathbb{C} \otimes B \ .$$

Die reellen Ableitungsoperatoren werden damit komplex linear. Mit Re bzw. Im bezeichnen wir den Real- bzw. den Imaginärteil einer Größe. $\bar{a}$ ist die zu a konjugiert komplexe Größe. Als kanonische Erweiterungen der Metrik $\langle .,. \rangle$ nehmen wir das hermitesche Produkt $\mu \langle a,b \rangle = \langle \bar{\mu} a,b \rangle = \langle a,\mu b \rangle$ und das bilineare Produkt $(a,b) := \langle \bar{a},b \rangle$.
Wir definieren:

(10) $$E_1 := e_1 + i\, e_2 \ ,$$

(11) $$E_2 := e_3 + i\, e_4 \ ,$$

(12) $$\Omega := \omega_1 + i\omega_2 \ ,$$

(13) $$H_k := h^k_{11} + i\, h^k_{12} \ , \qquad k = 3,4 \ .$$

Dazu geben wir eine Interpretation:
Wir betrachten die Immersion $\tilde{x} : S^2 \longrightarrow \mathbb{C}^5$,

$$S^2 \xrightarrow{x} S^4 \hookrightarrow \mathbb{R}^5 \hookrightarrow \mathbb{C}^5 \ ,$$

und erweitern unsere bisherige Identifizierung auf

$$\tilde{x}^*(T\mathbb{C}^5) \cong \mathbb{C} \otimes TS^2 \oplus \mathbb{C} \otimes \perp S^2 \oplus \mathbb{C} \otimes x^*(\perp S^4) \ .$$

In den einzelnen Summanden wählen wir lokale Vektorfelder E_1, E_2, e_0 so, daß – bezogen auf das hermitesche Produkt – E_j, $\bar{E}_j$ orthogonale, auf $\sqrt{2}$ normierte Basisfelder in $\mathbb{C} \otimes TS^2$ für $j = 1$ und in $\mathbb{C} \otimes \perp S^2$ für $j = 2$ ergeben und e_0 reell und normiert in $\mathbb{C} \otimes x^*(\perp S^4)$ ist.

Ein Schlüssel für die weiteren Ergebnisse ist die Isotropie der Felder E_1, E_2 bezogen auf die vom bilinearen Produkt erzeugte quadratische Form,

$$(E_j, E_j) = 0 \,, \qquad j = 1,2 \,.$$

Die Herleitung der Strukturformeln (4) und (5) können wir jetzt komplex nachvollziehen. Beachten wir die im Abschnitt 4 gemachten Einschränkungen an die Formen und ihre Argumente, so gilt mit (1), (2) und (6) bis (13):

$$\begin{aligned}
(14) \qquad d^\nabla E_1 &= -\Omega e_0 + \sum_{k=1}^{4} (\omega_{1k} + \omega_{2k})\, e_k \\
&= -\Omega e_0 + i\,\omega_{21}\, e_1 + \omega_{12}\, e_2 \\
&\quad + \sum_{k=3}^{4} \left[(h^k_{11} + i\, h^k_{12})\, \omega_1 - i(i\, h^k_{21} - h^k_{22})\, \omega_2 \right] e_k \\
&= -\Omega e_0 - i\,\omega_{12}\, E_1 + \bar{\Omega} \sum_{k=3}^{4} H_k\, e_k \,, \\
(15) \qquad d^\nabla d^\nabla E_1 &= -\, d\Omega\, e_0 + \Omega \wedge \sum_{j=1}^{2} \omega_j\, e_j \; - i\, d\omega_{12}\, E_1 \\
&\quad + i\,\omega_{12} \wedge d^\nabla E_1 + d\bar{\Omega} \sum_{k=3}^{4} H_k\, e_k \\
&\quad - \bar{\Omega} \wedge \sum_{k=3}^{4} (dH_k\, e_k + H_k \sum_{j=1}^{4} \omega_{kj}\, e_j) = 0 \,.
\end{aligned}$$

Sortieren der Koeffizienten in (15) ergibt:

$$(16) \qquad 0 = -\, d\Omega - i\,\omega_{12} \wedge \Omega \,,$$

$$(17) \qquad 0 = \Omega \wedge \omega_1 - i\, d\omega_{12} - \bar{\Omega} \wedge (H_3\, \omega_{31} + H_4\, \omega_{41}) \,,$$

$$(18) \qquad 0 = \Omega \wedge \omega_2 + d\omega_{12} - \bar{\Omega} \wedge (H_3\, \omega_{32} + H_4\, \omega_{42}) \,,$$

$$(19) \qquad 0 = i\,\omega_{12} \wedge H_3 \bar{\Omega} + H_3\, d\bar{\Omega} - \bar{\Omega} \wedge dH_3 + H_4\, \omega_{43} \wedge \bar{\Omega} \,,$$

$$(20) \qquad 0 = i\,\omega_{12} \wedge H_4 \bar{\Omega} + H_4\, d\bar{\Omega} - \bar{\Omega} \wedge dH_4 + H_3\, \omega_{34} \wedge \bar{\Omega} \,.$$

6. Die Krümmung

Wir multiplizieren die Gleichung (18) mit $-i$ und addieren dann (17). Setzen wir (8) und (9) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= \Omega \wedge \bar{\Omega} - 2\,i\,d\omega_{12} - \bar{\Omega} \wedge \sum_{k=3}^{4} H_k(\omega_{k1} - i\,\omega_{k2}) \\ &= -2\,i\,d\omega_{12} - \bar{\Omega} \wedge \Big[\Omega + \sum_{k=3}^{4} H_k(-\bar{H}_k\omega_1 - i\,\bar{H}_k\omega_2)\Big] \\ &= -2\,i\,d\omega_{12} - \Big(1 - \sum_{k=3}^{4} |H_k|^2\Big)\,\bar{\Omega} \wedge \Omega \quad . \end{aligned}$$

Diese Gleichung kann als Definition der Gaußkrümmung K – der einzigen Schnittkrümmung – verwendet werden. Tatsächlich folgt aus der Gaußgleichung* für die minimale Immersion x

$$\begin{aligned} K &= 1 + \langle h(e_1,e_1), h(e_2,e_2)\rangle - \|h(e_1,e_2)\|^2 \\ &= 1 + h^3_{11}\,h^3_{22} + h^4_{11}\,h^4_{22} - (h^3_{12})^2 - (h^4_{12})^2 \\ &= 1 - \sum_{k=3}^{4} |H_k|^2 \quad . \end{aligned} \tag{21}$$

* Siehe Ko/Nu, Seite 23, Prop. 4.1.

7. Die zweite Fundamentalform und ihre Nullstellen

Wir erweitern (19) mit H_3, (20) mit H_4, setzten (16) ein und addieren:

$$0 = \left[i\,(H_3^2 + H_4^2)\,\omega_{12} + i\,(H_3^2 + H_4^2)\,\omega_{12} + H_3 dH_3 + H_4 dH_4\right] \wedge \bar{\Omega} \;,$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$(22) \qquad 0 = \left[4\,i\,(H_3^2 + H_4^2)\,\omega_{12} + d(H_3^2 + H_4^2)\right] \wedge \bar{\Omega} \;.$$

Wir wollen zeigen, daß H_3 bereits die ganze zweite Fundamentalform h und die Krümmung K beschreibt. Dazu berechnen wir die komplexe Krümmungsnormale N, die $\mathbb{C} \otimes \perp S^2$- Komponente von $\frac{1}{2}\, d^{\nabla} E_1(E_1)$. Mit (14) folgt

$$(23) \qquad N := \frac{1}{2}\left(d^{\nabla} E_1(E_1)\right)^{\mathbb{C}\otimes\perp S^2} = \frac{1}{2}\,\bar{\Omega}(E_1) \sum_{k=3}^{4} H_k\, e_k$$
$$= \sum_{k=3}^{4} H_k\, e_k \;.$$

Wir definieren eine gewöhnliche (nicht alternierende) komplexwertige 4-Form

$$(24) \qquad \Phi := (\bar{N},\bar{N})\,\Omega^4 = (\bar{H}_3^2 + \bar{H}_4^2)\,\Omega^4$$

und untersuchen das Transformationsverhalten, falls wir die lokalen Felder $e_0,..,e_4$ durch $e_0, e_1^*,..,e_4^*$ ersetzen. Sind e_1, e_2 und e_1^*, e_2^* gleichorientiert, so gibt es auf dem Schnitt ihrer Definitionsbereiche eine reelle Funktion t und es gilt

$$e_1^* = \cos t \;\; e_1 - \sin t \;\; e_2 \;\;,$$

$$e_2^* = \sin t \;\; e_1 + \cos t \;\; e_2 \;\;,$$

$$(25) \qquad E_1^* = e^{it}\, E_1 \;.$$

Aus der Dualität $\bar{\Omega}(E_1) = 2, \Omega(E_1) = 0$ folgt

(26) $\quad \Omega^* = e^{it}\,\Omega \;.$

Aus (23) folgt

(27) $$N^* = \frac{1}{2}(d^\nabla E_1^*(E_1^*))^{\mathbb{C}\otimes\perp S^2} = \frac{1}{2}\left[(de^{it}\wedge E_1 + e^{it}\wedge d^\nabla E_1)(E_1^*)\right]^{\mathbb{C}\otimes\perp S^2}$$
$$= \frac{1}{2}de^{it}(E_1^*)\,E_1^{\mathbb{C}\otimes\perp S^2} + \frac{1}{2}e^{2it}(d^\nabla E_1(E_1))^{\mathbb{C}\otimes\perp S^2}$$
$$= e^{2it}\,N \;.$$

Die Gleichungen (24),(26),(27) liefern

$$\Phi^* = \Phi \;.$$

Damit ist Φ auf S^2 global definiert. Ein Wechsel der Felder e_3, e_4 hat keinen Einfluß auf N und Φ.
Wir wählen isotherme Koordinaten, das heißt aus dem (einzigen) konformen Atlas von S^2 wählen wir eine Karte

$$z : U \longrightarrow D\,,\quad U \subset S^2,\quad D \subset \mathbb{C},\quad U,D \text{ sind Gebiete.}$$

Dann gibt es eine reell differenzierbare Funktion $\lambda : U \longrightarrow \mathbb{C}$, und wir erhalten die lokale Darstellung

(28) $\quad \Omega = \lambda\, dz\,,$

$$\Phi = (\bar{H}_3^2 + \bar{H}_4^2)\,\lambda^4\, dz^4 \;.$$

Da x eine Immersion ist, hat die Funktion λ keine Nullstelle. Die Gleichung (16) erweitern wir mit λ, setzen (28) ein, konjugieren und erhalten

(29) $\quad i\,\bar{\lambda}\,\omega_{12}\wedge\bar{\Omega} = \bar{\lambda}\; d\bar{\Omega} = \bar{\lambda}\; d\bar{\lambda}\wedge d\bar{z} = d\bar{\lambda}\wedge\bar{\Omega} \;.$

Die Gleichung (22) erweitern wir mit $\bar{\lambda}^3$, setzen (28),(29) ein und erhalten

$$0 = \left[4\,\bar{\lambda}^3 (H_3^2 + H_4^2)\, d\bar{\lambda} + \bar{\lambda}^4 d(H_3^2 + H_4^2)\right] \wedge d\bar{z}$$
$$= d\left[\bar{\lambda}^4 (H_3^2 + H_4^2)\right] \wedge d\bar{z} \ .$$

Dies ist äquivalent zu

$$0 = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left[\lambda^4 (\bar{H}_3^2 + \bar{H}_4^2)\right] ,$$

und daher ist Φ ein globales holomorphes Differential vom Grad 4. Nach dem Satz von Riemann-Roch (Be/So, S.561, Gl.27) muß Φ identisch verschwinden, es folgt

(30) $$H_3^2 + H_4^2 = 0 \ .$$

Die Gleichung (27) sagt, daß die stetige, reelle Funktion $||N||^2 = |H_3|^2 + |H_4|^2$ auf ganz S^2 definiert ist. Ihre Nullstellenmenge

$$G := \{p \in S^2 \ ; \ ||N_{(p)}||^2 = 0\}$$

ist eine kompakte Teilmenge von S^2. Ihre Elemente bezeichnen wir als Ausnahmepunkte.

Ist $G = S^2$, so ist $H_3 = H_4 = 0$ für jede Wahl lokaler Felder $e_1,\dots,e_4$. Die zweite Fundamentalform h der Immersion x verschwindet identisch, das heißt S^2 ist totalgeodätisch immersiert und $x(S^2)$ ist ein zweidimensionaler Äquator in S^4. Diesen Fall schließen wir im weiteren aus.

Ist $G \neq S^2$, so zeigen wir, daß G endlich ist. Für den Fall $G = \emptyset$ ist nichts zu zeigen, sei also $G \neq \emptyset$.
Für einen Randpunkt $p \in \partial G$ wählen wir isotherme Koordinaten so, daß $z(p) = 0$ ist.

Die Gleichungen (19) und (20) lauten lokal

$$0=(2\,i\,H_3\,\omega_{12}+dH_3+H_4\,\omega_{43})\wedge\bar{\lambda}\,d\bar{z}\,,$$

$$0=(2\,i\,H_4\,\omega_{12}+dH_4+H_3\,\omega_{34})\wedge\bar{\lambda}\,d\bar{z}\,.$$

Wir entwickeln ω_{12} und ω_{34} lokal,

$$\omega_{jk}=\frac{1}{2}\,\omega_{jk}(E_1)\,\bar{\Omega}+\frac{1}{2}\,\omega_{jk}(\bar{E}_1)\,\Omega$$
$$=\frac{1}{2}\,\bar{\lambda}\,\omega_{jk}(E_1)\,d\bar{z}+\frac{1}{2}\lambda\,\omega_{jk}(\bar{E}_1)\,dz\,,$$

und setzen

$$a:=-\,i\lambda\,\omega_{12}(\bar{E}_1)\,,$$

$$b:=\frac{1}{2}\lambda\,\omega_{34}(\bar{E}_1)\,.$$

Nun können wir das System (19),(20) vollständig in dz und $d\bar{z}$ entwickeln. Beachten wir, daß λ keine Nullstellen hat und daß $d\bar{z}$-Terme verschwinden, so bleibt das Differentialgleichungssystem

$$\text{(31)}\qquad \begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z}H_3&=a\,H_3+b\,H_4\,,\\ \frac{\partial}{\partial z}H_4&=-\,b\,H_3+a\,H_4\,.\end{aligned}$$

Auf das zu (31) konjugierte System wenden wir den im Abschnitt 21 bewiesenen Satz an. Damit ist $p\in\partial G$ ein isolierter Punkt. S^2 ist kompakt, also ist ∂G endlich. Mit dem topologischen Argument aus dem Abschnitt 20 schließen wir, daß G endlich ist.

Da mit (30) H_3 und H_4 nur gemeinsame Nullstellen haben, können wir H_3/H_4 in Ausnahmepunkten stetig zu $+i$ oder $-i$ fortsetzen. Dies ist die zweite Aussage des Satzes aus Abschnitt 21 . Bei geeigneter Orientierung der lokalen Felder e_3, e_4 wird die Vorzeichenwahl stetig auf ganz S^2, und wir setzen ohne Einschränkung

(32) $\quad H_4 = i\, H_3 .$

Aus (23) folgt

(33) $\quad N = H_3\, E_2 ,$

und (21) liefert

(34) $\quad K = 1 - 2\, |H_3|^2 .$

Die Ausnahmepunkte sind genau die Punkte p auf S^2 mit der Krümmung $K_{(p)} = 1$.

8. Die Frenet-Boruvka-Formeln

Die komplexen Ableitungsgleichungen für die minimale Immersion $x: S^2 \longrightarrow S^4$ erhalten wir durch Entwickeln der vektorwertigen 1-Formen (Homomorphismen-felder) $d^\nabla x$, $d^\nabla E_1$, $d^\nabla E_2$ nach den orthogonalen Basisfeldern $x, E_1, \bar{E}_1, E_2, \bar{E}_2$ (Identifizierung $x = e_0$).
Aus (1) und (6) folgt

$$d^\nabla x = \mathrm{Re}(\bar{\Omega} E_1) .$$

Aus (14), (23), (33) erhalten wir

$$d^\nabla E_1 = -\Omega x - i\,\omega_{12} E_1 + H_3 \bar{\Omega} E_2 .$$

Von $d^\nabla E_2$ berechnen wir die Koeffizienten:

$$\langle x, d^\nabla E_2 \rangle = -\langle d^\nabla x, E_2 \rangle = 0 ,$$

$$\tfrac{1}{2}\langle E_1, d^\nabla E_2 \rangle = -\tfrac{1}{2}\langle d^\nabla E_1, E_2 \rangle = -\Omega \bar{H}_3 ,$$

$$\tfrac{1}{2}\langle \bar{E}_1, d^\nabla E_2 \rangle = -\tfrac{1}{2}\langle d^\nabla \bar{E}_1, E_2 \rangle = 0 ,$$

$$\tfrac{1}{2}\langle E_2, d^\nabla E_2 \rangle = \tfrac{1}{2}\omega_{33} - \tfrac{i}{2}\omega_{34} + \tfrac{i}{2}\omega_{43} + \tfrac{1}{2}\omega_{44} = -i\,\omega_{34} ,$$

$$\tfrac{1}{2}\langle \bar{E}_2, d^\nabla E_2 \rangle = \tfrac{1}{2}\omega_{33} + \tfrac{i}{2}\omega_{34} + \tfrac{i}{2}\omega_{43} - \tfrac{1}{2}\omega_{44} = 0 .$$

Wir fassen die Frenet-Boruvka-Formeln zusammen.

$$\boxed{\begin{aligned}
&(35) \quad d^\nabla x = \tfrac{1}{2}\bar{\Omega} E_1 + \tfrac{1}{2}\Omega \bar{E}_1 \\
&(36) \quad d^\nabla E_1 = -\Omega x - i\,\omega_{12} E_1 + H_3 \bar{\Omega} E_2 \\
&(37) \quad d^\nabla E_2 = -\bar{H}_3 \Omega E_1 - i\,\omega_{34} E_2
\end{aligned}}$$

9. Die induzierte Direktrix

Wie in Gleichung (28) wählen wir isotherme Koordinaten. Dann gibt es Funktionen $\varphi_1, \varphi_2 : U \longrightarrow \mathbb{C}$ mit

$$\omega_{34} = \varphi_1 \, dz + \varphi_2 \, d\bar{z} \, .$$

Sei die Funktion $\rho : U \longrightarrow \mathbb{C}$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \rho = i \, \varphi_2 \, \rho \quad \text{mit} \quad \rho(0) \neq 0 \, , \tag{38}$$

so folgt aus (37)

$$\begin{aligned} d^\nabla(\rho \, E_2) &= d\rho \, E_2 + \rho \, d^\nabla E_2 \\ &= \left(\left(\frac{\partial}{\partial z} \rho \right) E_2 - \rho \, \lambda \, \bar{H}_3 \, E_1 - i \, \rho \, \varphi_1 \, E_2 \right) dz \, . \end{aligned}$$

Dies bedeutet, daß die Komponentenfunktionen von $\rho \, E_2$ in z holomorph sind. Da die Gleichung (38) holomorphe Funktionen f wie Konstanten behandelt, das heißt

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} (f \, \rho) = f \, \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \rho \, ,$$

liegt es nahe, die komplexe Kurve $\rho \, E_2$ in homogenen Koordinaten zu interpretieren. Eine Transformation wie in (25) wird durch eine neue Lösung in (38) ausgeglichen. Wir erhalten eine global induzierte holomorphe Kurve

$$\xi := S^2 \longrightarrow P_4\mathbb{C}$$

und nennen sie die von der minimalen Immersion x induzierte Direktrix-Kurve.

Bemerkungen:

(i) ξ ist rational.

Jede Komponentenfunktion von ρE_2 läßt sich meromorph (holomorph bis auf Pole) auf ganz S^2 fortsetzen, weil ξ keine wesentliche Singularität hat. Die Komponentenfunktionen sind rational nach Be/So, S.202, Satz 11.

(ii) ξ ist substantiell.

Aus (35),(36),(37) folgt: Die Schmieghyperebene der Direktrix wird an einer Stelle $p \in S^2$ durch E_2, E_1, x, $\bar{E}_1$, jeweils an der Stelle p ausgewertet, aufgespannt. Soll die Schmieghyperebene raumfest bleiben, so muß in der zu (36) konjugierten Gleichung der Term $\bar{H}_3 \Omega \bar{E}_2$ identisch verschwinden, das heißt $H_3 = 0$. Es liegt ein „Äquator" vor.

(iii) ξ ist total isotrop.

Da E_2 isotrop ist, liegt ξ auf der vom bilinearen Produkt in $P_4\mathbb{C}$ induzierten Hyperquadrik

$$Q := \{ u \in P_4\mathbb{C} \mid (u,u) = 0 \} .$$

Nach (37) ist die Ableitung von E_2 Linearkombination von E_1 und E_2. Mit $(E_1,E_1) = (E_1,E_2) = (E_2,E_2) = 0$ liegen auch alle Tangentenlinien von ξ auf der Hyperquadrik Q. Solche Kurven heißen total isotrop (bezüglich Q).

III Die Minimalsphäre einer Direktrix

In der Hoffnung Direktrix-Kurven ξ leichter finden zu können als minimale Immersionen x, geben wir ein Konstruktionsverfahren an, das zur Konstruktion der Direktrix invers ist.

10. Multivektorraumkurven

Bezeichnungen:

$$\mathbb{N}_0 := \{0,1,2,\ldots\} ,$$

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C}^n \text{ sei holomorph, } D \subset \mathbb{C} \text{ sei ein Gebiet,}$$

$$f' := \frac{d}{dz} f ,$$

und wir identifizieren

$$\mathbb{C}^n \wedge \ldots \wedge \mathbb{C}^n \cong \mathbb{C}^{\binom{n}{k}}$$

unter Verwendung des durch die Determinante

$$\langle a_1 \wedge \ldots \wedge a_k , b_1 \wedge \ldots \wedge b_k \rangle := \det((\langle a_j , b_l \rangle))_{j,l=1,\ldots,k}$$

induzierten Skalarproduktes.

In einer Umgebung um $z_0 \in D$ hat f eine Entwicklung

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z - z_0)^j , \qquad \text{mit } a_j \in \mathbb{C}^n.$$

Für den Entwicklungspunkt z_0 definieren wir

(i) $\quad \mathrm{Rang}(f) := \dim \mathrm{Spann}\{a_j \mid j \in \mathbb{N}_0\}$,

(ii) $\quad f\text{-Index} : \{1,\ldots,n\} \longrightarrow \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$,

$$f\text{-Index}(k) := \begin{cases} \infty & \text{, falls } \mathrm{Rang}(f) < k \\ \min\{j \in \mathbb{N}_0 \mid \dim \mathrm{Spann}\{a_0,\ldots,a_j\} = k\}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Lemma: Betrachten wir die induzierten holomorphen Kurven $f \wedge f' : D \longrightarrow \mathbb{C}^{\binom{n}{2}}$ und $f \wedge f' \wedge f'' : D \longrightarrow \mathbb{C}^{\binom{n}{3}}$, so gilt für jeden Entwicklungspunkt $z_0 \in D$:

$$(39) \qquad f \wedge f'\text{-Index}(1) = f\text{-Index}(1) + f\text{-Index}(2) - 1\ ,$$

$$(40) \qquad f \wedge f'\text{-Index}(2) = f\text{-Index}(1) + f\text{-Index}(3) - 1\ ,$$

$$(41) \qquad f \wedge f' \wedge f''\text{-Index}(1) = \sum_{k=1}^{3} f\text{-Index}(k) - 3\ .$$

Ist ein Index unendlich, so ist entsprechend zu interpretieren.

Beweis: Für $k = 1,..,\mathrm{Rang}(f)$ sei $\mu_k := f\text{-Index}(k)$. Dann hat f die eindeutige lokale Darstellung

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\mathrm{Rang}(f)} a_{\mu_k} (z - z_0)^{\mu_k} g_k(z)$$

mit holomorphen Funktionen $g_k : D \longrightarrow \mathbb{C}$, $g_k(z_0) = 1$.
Daraus folgt

$$f \wedge f'(z) = \sum_{1 \leq j < k \leq \mathrm{Rang}(f)} a_{\mu_j} \wedge a_{\mu_k} (\mu_k - \mu_j) (z - z_0)^{\mu_j + \mu_k - 1} g_{jk}(z)$$

mit holomorphen Funktionen $g_{jk} : D \longrightarrow \mathbb{C}$, $g_{jk}(z_0) = 1$ und

$$f \wedge f' \wedge f''(z) = \sum_{1 \leq j < k < l \leq \mathrm{Rang}(f)} a_{\mu_j} \wedge a_{\mu_k} \wedge a_{\mu_l} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \mu_j & \mu_k & \mu_l \\ \mu_j^2 & \mu_k^2 & \mu_l^2 \end{vmatrix} (z - z_0)^{\mu_j + \mu_k + \mu_l - 3} g_{jkl}(z)$$

mit holomorphen Funktionen $g_{jkl} : D \longrightarrow \mathbb{C}$, $g_{jkl}(z_0) = 1$.
Diese Entwicklungsvektoren von f, $f \wedge f'$, $f \wedge f' \wedge f''$ sind jeweils linear unabhängig, und es gilt

$\mu_1 + \mu_2 < \mu_1 + \mu_3 < \mu_j + \mu_k$ für andere Paare $j<k$ sowie

$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 < \mu_j + \mu_k + \mu_l$ für andere Paare $j<k<l$.

Die Behauptungen (39),(40),(41) folgen daraus sofort.

11. Die gegebene Direktrix

Über eine feste konforme Karte z identifizieren wir S^2 mit der geschlossenen Ebene $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. $P_4\mathbb{C}$ beschreiben wir durch homogene Koordinaten im $\mathbb{C}^5$.

Wir geben eine Kurve $\xi : S^2 \longrightarrow P_4\mathbb{C}$ vor mit den Eigenschaften

(42) ξ ist holomorph und substantiell,

(43) $(\xi, \xi) = (\xi', \xi') = 0$ (totale Isotropie),

(44) ξ-Index(3) = ξ-Index(2) + 1 in jedem Entwicklungspunkt.

Folgerungen:

(i) Aufgrund homogener Koordinaten ist ξ-Index(1) = 0.

(ii) Die fünf Koordinatenfunktionen sind meromorph in S^2, also rational. Erweitern wir mit dem Hauptnenner, so läßt sich ξ durch fünf Polynome beschreiben.

(iii) Mehrfaches Differenzieren von (43) liefert

(45) $(\xi, \xi') = (\xi, \xi'') = (\xi', \xi'') = (\xi, \xi''') = 0$ und

(46) $(\xi'', \xi'') = -(\xi', \xi''')$.

Im weiteren setzen wir

(47) $m := \xi$-Index(2) $- 1$.

Damit ist $m : S^2 \longrightarrow \mathbb{N}_0$ eine Funktion des Entwicklungspunktes z_0 und wir werden sehen, daß die Punkte z_0 mit $m(z_0) > 0$ genau die Ausnahmepunkte sind.

Lemma:

(48) $m(z_0) = 0 \Leftrightarrow \{\xi, \xi', \bar{\xi}, \bar{\xi}'\}$ ist in z_0 linear unabhängig.

Beweis: Aus (39),(47) folgt $m(z_0) = 0 \Leftrightarrow \xi \wedge \xi'(z_0) \neq 0$.

Aus (43),(45) folgt $\|\xi \wedge \xi' \wedge \bar{\xi} \wedge \bar{\xi}'\|^2 = \|\xi \wedge \xi'\|^4$.

12. Die Konstruktion der Minimalsphäre

Um zu einer komplexen Kurve $x : S^2 \longrightarrow S^4$ zu gelangen, werden wir ξ, ξ', ξ'' sukzessive orthogonalisieren. Der orthogonale Rest von ξ'' bezüglich ξ und ξ' liegt im orthogonalen Komplement $\{\xi, \xi'\}^\perp$ und wegen (45) in $\{\xi, \xi', \bar{\xi}, \bar{\xi}'\}^\perp = \{\mathrm{Re}(\xi), \mathrm{Im}(\xi), \mathrm{Re}(\xi'), \mathrm{Im}(\xi')\}^\perp$. Ist $m(z_0) = 0$, so ist mit (48) dieser orthogonale Rest ein komplexes Vielfaches eines reellen Einheitsvektors x, der unser Kandidat für die gesuchte Minimalfläche ist. x ist bis auf sein Vorzeichen bestimmt, das heißt wir konstruieren die Flächen +x und -x gleichzeitig. Um dieses Verfahren auch in Ausnahmepunkten mit $m(z_0) > 0$ durchführen zu können, benötigen wir noch ein Lemma:

(49) Die nicht holomorphe, aber reell analytische Kurve $\xi' - \frac{\langle \xi, \xi' \rangle}{\|\xi\|^2} \xi$ hat in z_0 eine komplexe Nullstelle der Ordnung $m(z_0)$.

Beweis: $m = m(z_0)$. $[f]_m$ sei das um z_0 entwickelte Taylorpolynom vom Grad m in den Variablen Re(z) und Im(z). Wie im Beweis von (39) sei

$$\xi(z) = \sum_{k=1}^{\mathrm{Rang}(\xi)} a_{\mu_k} (z - z_0)^{\mu_k} g_k(z) .$$

Dann ist

$$[\xi]_m = a_0 [g_1]_m ,$$

$$[\xi']_m = a_0 [g_1']_m + a_{m+1} (m+1)(z - z_0)^m ,$$

$$[\xi' - \frac{\langle \xi, \xi' \rangle}{\|\xi\|^2} \xi]_m = a_0 [g_1']_m + a_{m+1} (m+1)(z - z_0)^m$$
$$-a_0 \Big[\frac{\|a_0\|^2 \bar{g}_1 g_1' + \langle a_0, a_{m+1} \rangle (m+1) \bar{g}_1 (z - z_0)^m}{\|a_0\|^2 |g_1|^2} g_1\Big]_m$$
$$= (a_{m+1} - a_0 \frac{\langle a_0, a_{m+1} \rangle}{\|a_0\|^2})(m+1)(z - z_0)^m .$$

Die Nullstellenordnung ist nicht größer, weil a_0 und a_{m+1} linear unabhängig sind.

Wir wählen $z_0 = 0$ als Entwicklungspunkt und führen das Verfahren mit $m = m(0)$ durch.

(50) $$E_2 := \sqrt{2}\,\frac{\xi}{\|\xi\|}$$

(51) $$E_1 := \sqrt{2}\,\frac{\|\xi\|\, z^{-m}\left(\xi' - \frac{\langle \xi, \xi' \rangle}{\|\xi\|^2}\,\xi\right)}{|z^{-m}|\; \|\xi \wedge \xi'\|} = \sqrt{2}\,\frac{z^{-m}}{|z^{-m}|}\;\frac{\|\xi\|^2\,\xi' - \langle \xi, \xi' \rangle\, \xi}{\|\xi\|\;\|\xi \wedge \xi'\|}$$

Nach Aussage (49) bleibt E_1 in $z = 0$ ein reell analytischer Ausdruck und $\|E_1\|^2 = 2$. Mit (43),(45) sind $E_1, E_2, \bar{E}_1, \bar{E}_2$ orthogonal und auf $\sqrt{2}$ normiert. Der orthogonale Rest von ξ'' ist demnach

(52) $$v\,x = \xi'' - \frac{1}{2}\langle E_1, \xi'' \rangle E_1 - \frac{1}{2}\langle E_2, \xi'' \rangle E_2 \,.$$

Dabei ist $v(z) \in \mathbb{C}$ und $x(z) \in S^4 \subset \mathbb{R}^5 \subset \mathbb{C}^5$. Einen direkten Zugang zum orthogonalen Rest bietet für alle Stellen z mit $m(z) = 0$ die Definition

(53) $$\eta := \sum_{j=0}^{2} (-1)^j \langle \xi \wedge \xi', \xi \wedge .\hat{j}. \wedge \xi'' \rangle\, \xi^{(j)} \quad , \ \hat{j} \mathrel{\hat{=}} \text{ohne } \xi^{(j)}.$$

Aus (43),(45) folgt

$$\langle \bar{\xi}, \eta \rangle = \langle \bar{\xi}', \eta \rangle = 0 \qquad \text{und daher}$$

$$\langle \bar{E}_2, \eta \rangle = \langle \bar{E}_1, \eta \rangle = 0 \,.$$

Weiter ist

$$\langle \xi^{(k)}, \eta \rangle = \sum_{j=0}^{2} (-1)^j \langle \xi \wedge \xi', \xi \wedge .\hat{j}. \wedge \xi'' \rangle \langle \xi^{(k)}, \xi^{(j)} \rangle$$
$$= \langle \xi \wedge \xi' \wedge \xi^{(k)}, \xi \wedge \xi' \wedge \xi'' \rangle \,, \text{ also}$$

$$\langle \xi, \eta \rangle = \langle \xi', \eta \rangle = 0 \,,$$

$$\langle E_2, \eta \rangle = \langle E_1, \eta \rangle = 0 \,,$$

$$\langle \xi'', \eta \rangle = \|\xi \wedge \xi' \wedge \xi''\|^2 \,.$$

Damit ist gezeigt, daß $v\,x$ und η linear abhängig sind, und es gilt

$$\langle v\,x, \eta \rangle = \langle \xi'', \eta \rangle = \|\xi \wedge \xi' \wedge \xi''\|^2 \,.$$

Vergleichen wir die Koeffizienten von ξ'' in (52) und (53), so folgt

(54) $\qquad \|\xi \wedge \xi'\|^2 \, v x = \eta$,

(55) $\qquad \|\xi \wedge \xi'\|^2 \, |v|^2 = \|\xi \wedge \xi' \wedge \xi''\|^2$.

Aus (43),(45) folgt

$$(\eta,\eta) = \sum_{j,k=0}^{2} (-1)^{j+k} \langle \xi \wedge \xi', \xi \wedge \overset{\hat{j}}{\cdots} \wedge \xi'' \rangle \langle \xi \wedge \xi', \xi \wedge \overset{\hat{k}}{\cdots} \wedge \xi'' \rangle (\xi^{(j)}, \xi^{(k)})$$

$$= \|\xi \wedge \xi'\|^4 (\xi'', \xi'') \; ,$$

also ist

(56) $\qquad v^2 = (\xi'', \xi'')$.

13. Die Probe

Wir wollen zeigen, daß x eine minimale Immersion ist, und berechnen dazu die Ableitungen von E_2, E_1, und x. Zuerst stellen wir einige der verwendeten Rechenhilfen zusammen. Mit

$$\vartheta := \text{Argument}(z) \quad \text{folgt aus (50),(51),(52)}$$

$$\xi = \frac{\|\xi\|}{\sqrt{2}} E_2 ,$$

$$\xi' = \frac{\|\xi \wedge \xi'\|}{\sqrt{2}\,\|\xi\|} e^{im\vartheta} E_1 + \frac{\langle \xi , \xi' \rangle}{\sqrt{2}\,\|\xi\|} E_2 ,$$

$$\xi'' = v\,x + \frac{1}{2} \langle E_1 , \xi'' \rangle E_1 + \frac{1}{2} \langle E_2 , \xi'' \rangle E_2 .$$

Weiter ist

$$d\vartheta = d\,\text{Im}(\ln z) = \text{Im}\left(\frac{dz}{z}\right) ,$$

$$d\|\xi\| = \frac{\text{Re}(\langle \xi \wedge \xi' \rangle\, dz)}{\|\xi\|} ,$$

$$d\left(\frac{1}{\|\xi\|}\right) = - \frac{\text{Re}(\langle \xi , \xi' \rangle\, dz)}{\|\xi\|^3} ,$$

$$d\|\xi \wedge \xi'\| = \frac{\text{Re}(\langle \xi \wedge \xi', \xi \wedge \xi'' \rangle\, dz)}{\|\xi \wedge \xi'\|} ,$$

$$d\left(\frac{1}{\|\xi \wedge \xi'\|}\right) = - \frac{\text{Re}(\langle \xi \wedge \xi', \xi \wedge \xi'' \rangle\, dz)}{\|\xi \wedge \xi'\|^3} ,$$

$$\langle E_1 , \xi'' \rangle = \frac{\sqrt{2}\, e^{im\vartheta} \langle \xi \wedge \xi', \xi \wedge \xi'' \rangle}{\|\xi\| \; \|\xi \wedge \xi'\|} ,$$

$$\langle E_2 , \xi'' \rangle = \frac{\sqrt{2} \langle \xi , \xi'' \rangle}{\|\xi\|} ,$$

und wir verwenden die logarithmische Ableitung

$$f = \prod_j g_j \quad \Rightarrow \quad df = f \sum_j \frac{dg_j}{g_j} .$$

$$d^\nabla E_2 = \frac{\sqrt{2}}{\|\xi\|}\,\xi'\,dz - \sqrt{2}\,\frac{\mathrm{Re}(\langle \xi,\xi'\rangle\,dz)}{\|\xi\|^3}$$

(57) $$d^\nabla E_2 = \frac{\|\xi\wedge\xi'\|}{\|\xi\|^2}\,e^{im\vartheta}\,dz\,E_1 + i\,\frac{\mathrm{Im}(\langle \xi,\xi'\rangle\,dz)}{\|\xi\|^2}\,E_2$$

$$d^\nabla E_1 = e^{im\vartheta}\,de^{-im\vartheta}\,E_1 + \|\xi\|\,d\Big(\frac{1}{\|\xi\|}\Big)\,E_1$$

$$+ \|\xi\wedge\xi'\|\,d\Big(\frac{1}{\|\xi\wedge\xi'\|}\Big)\,E_1$$

$$+ \frac{\sqrt{2}\,e^{-im\vartheta}}{\|\xi\|\,\|\xi\wedge\xi'\|}(2\,\mathrm{Re}(\langle \xi,\xi'\rangle\,dz)\,\xi' + \|\xi\|^2\,\xi''\,dz$$

$$- \|\xi'\|^2\,d\bar z\,\xi - \langle \xi,\xi''\rangle\,dz\,\xi - \langle \xi,\xi'\rangle\,\xi'\,dz)$$

$$d^\nabla E_1 = \Big(-i\,m\,d\vartheta - \frac{\mathrm{Re}(\langle \xi,\xi'\rangle\,dz)}{\|\xi\|^2} - \frac{\mathrm{Re}(\langle \xi\wedge\xi',\xi\wedge\xi''\rangle\,dz)}{\|\xi\wedge\xi'\|^2}\Big)\,E_1$$

$$+ \frac{\langle \xi',\xi\rangle}{\|\xi\|^2}\,d\bar z\,E_1 + \frac{|\langle \xi,\xi'\rangle|^2\,e^{-im\vartheta}}{\|\xi\|^2\,\|\xi\wedge\xi'\|}\,d\bar z\,E_2$$

$$+ \frac{\sqrt{2}\,e^{-im\vartheta}\,\|\xi\|\,dz}{\|\xi\wedge\xi'\|}\Big(v\,x + \frac{1}{2}\langle E_1,\xi''\rangle\,E_1 + \frac{1}{2}\langle E_2,\xi''\rangle\,E_2\Big)$$

$$- \frac{e^{-im\vartheta}}{\|\xi\wedge\xi'\|}(\|\xi'\|^2\,d\bar z + \langle \xi,\xi''\rangle\,dz)\,E_2$$

(58) $$d^\nabla E_1 = \frac{\sqrt{2}\,v\,\|\xi\|\,e^{-im\vartheta}}{\|\xi\wedge\xi'\|}\,dz\;x$$

$$- i\,\mathrm{Im}\Big(\Big(\frac{m}{z} + \frac{\langle \xi,\xi'\rangle}{\|\xi\|^2} - \frac{\langle \xi\wedge\xi',\xi\wedge\xi''\rangle}{\|\xi\wedge\xi'\|^2}\Big)\,dz\Big)\,E_1$$

$$- \frac{\|\xi\wedge\xi'\|\,e^{-im\vartheta}}{\|\xi\|^2}\,d\bar z\;E_2$$

Aus $\quad d^\nabla(v\,x) = x\,dv + v\,d^\nabla x \quad$ folgt

$$v\,d^\nabla x = -x\,dv + \xi'''\,dz - \frac{1}{2}\langle d^\nabla E_1,\xi''\rangle\,E_1 - \frac{1}{2}\langle d^\nabla E_2,\xi''\rangle\,E_2$$

$$- \frac{1}{2}\langle E_1,\xi'''\rangle\,dz\,E_1 - \frac{1}{2}\langle E_2,\xi'''\rangle\,dz\,E_2$$

$$- \frac{1}{2}\langle E_1,\xi''\rangle\,d^\nabla E_1 - \frac{1}{2}\langle E_2,\xi''\rangle\,d^\nabla E_2\,.$$

Der 2.,5. und 6. Summand der rechten Seite ergeben zusammen

$$\langle x,\xi'''\rangle\,x + \frac{1}{2}\langle \bar E_1,\xi'''\rangle\,\bar E_1\,.$$

Aus (45),(46),(56) folgt

$$v\langle x,\xi'''\rangle\,dz = (v\,x,\xi''')\,dz$$

$$= (\xi'',\xi''')\,dz - \frac{1}{2}\langle E_1,\xi''\rangle(E_1,\xi''')\,dz$$

$$= v\,dv + v^2\frac{\langle \xi\wedge\xi',\xi\wedge\xi''\rangle}{\|\xi\wedge\xi'\|^2}\,dz\ .$$

Setzen wir die beiden letzten Ergebnisse ein, so folgt

$$\begin{aligned}
v\,d^\nabla x = &\Big(-dv + dv + \frac{v\langle \xi\wedge\xi',\xi\wedge\xi''\rangle}{\|\xi\wedge\xi'\|^2}\,dz \\
&\quad - \frac{1}{2}\langle E_1,\xi''\rangle\frac{\|\xi\|\,v\sqrt{2}\,e^{-im\vartheta}}{\|\xi\wedge\xi'\|}\,dz\Big)\,x \\
&+ \frac{1}{2}(E_1,\xi''')\,dz\,\bar{E}_1 \\
&- \Big(\frac{1}{2}\langle d^\nabla E_1,x\rangle\langle x,\xi''\rangle + \frac{1}{4}\langle d^\nabla E_1,E_1\rangle\langle E_1,\xi''\rangle \\
&\quad + \frac{1}{4}\langle d^\nabla E_1,E_2\rangle\langle E_2,\xi''\rangle + \frac{1}{4}\langle E_1,\xi''\rangle\langle E_1,d^\nabla E_1\rangle \\
&\quad + \frac{1}{4}\langle E_2,\xi''\rangle\langle E_1,d^\nabla E_2\rangle\Big)\,E_1 \\
&- \frac{1}{4}\Big(\langle d^\nabla E_2,E_1\rangle\langle E_1,\xi''\rangle + \langle d^\nabla E_2,E_2\rangle\langle E_2,\xi''\rangle \\
&\quad + \langle E_1,\xi''\rangle\langle E_2,d^\nabla E_1\rangle + \langle E_2,\xi''\rangle\langle E_2,d^\nabla E_2\rangle\Big)\,E_2\ .
\end{aligned}$$

Beachten wir, daß $\langle d^\nabla E_1,E_1\rangle$ und $\langle d^\nabla E_2,E_2\rangle$ rein imaginär sind und daß $\langle d^\nabla E_2,E_1\rangle = -\langle E_2,d^\nabla E_1\rangle$ gilt, so bleibt

$$v\,d^\nabla x = -\frac{1}{2}\langle d^\nabla E_1,x\rangle\langle x,\xi''\rangle\,E_1 - \frac{v^2\,e^{-im\vartheta}\,\|\xi\|}{\sqrt{2}\,\|\xi\wedge\xi'\|}\,dz\,\bar{E}_1\ .$$

Da $v^2 = (v\,x,\xi'') = v\langle x,\xi''\rangle$ rational ist, folgt

$$d^\nabla x = \frac{-\bar{v}\,\|\xi\|\,e^{im\vartheta}}{\sqrt{2}\,\|\xi\wedge\xi'\|}\,d\bar{z}\,E_1 + \frac{-v\,\|\xi\|\,e^{-im\vartheta}}{\sqrt{2}\,\|\xi\wedge\xi'\|}\,dz\,\bar{E}_1\ . \tag{59}$$

Die Kurve x ist im Entwicklungspunkt $z_0 = 0$ genau dann eine Immersion, wenn

$$\frac{|v|^2}{\|\xi \wedge \xi'\|^2} = \frac{\|\xi \wedge \xi' \wedge \xi''\|^2}{\|\xi \wedge \xi'\|^4}$$

dort keine Nullstelle hat. Hier hilft die geforderte Eigenschaft (44) in Verbindung mit (39),(41) weiter. Wir entwickeln um $z_0 = 0$:

$$\frac{\|\xi \wedge \xi' \wedge \xi''\|^2}{\|\xi \wedge \xi'\|^4} = \frac{\|a_0 \wedge a_{m+1} \wedge a_{m+2}\|^2 (m+1)^2 (m+2)^2 |z|^{4m} + \ldots^*}{\|a_0 \wedge a_{m+1}\|^4 \quad (m+1) \quad |z|^{4m} + \ldots^*}.$$

Diese Funktion hat in $z = 0$ keine Nullstelle. x ist damit eine Immersion von S^2 nach S^4. Die Gleichung (59) zeigt, daß $E_1, \bar{E}_1$, und damit $E_2, \bar{E}_2$, genau vom Typ im Abschnitt 5 sind. (57),(58),(59) sind die Frenet-Boruvka-Formeln (35),(36),(37). Wir haben eine minimale Immersion konstruiert, und wir können die alten Bezeichnungen übernehmen:

$$\Omega = \frac{\sqrt{2}\, v\, \|\xi\|\, e^{-im\vartheta}}{\|\xi \wedge \xi'\|}\, dz\,,$$

$$\omega_{12} = \mathrm{Im}\Big(\Big(\frac{m}{z} + \frac{\langle \xi, \xi' \rangle}{\|\xi\|^2} - \frac{\langle \xi \wedge \xi', \xi \wedge \xi'' \rangle}{\|\xi \wedge \xi'\|^2}\Big)\, dz\Big),$$

$$\omega_{34} = \mathrm{Im}\Big(-\frac{\langle \xi, \xi' \rangle}{\|\xi\|^2}\, dz\Big),$$

(60) $$H_3 = \frac{\|\xi \wedge \xi'\|^2 e^{-2im\vartheta}}{\sqrt{2}\, \bar{v}\, \|\xi\|^3}\,.$$

Bemerkung: ω_{12} hat für $z = 0$ keinen Pol, der dritte Summand entwickelt sich zu $-\frac{m}{z} + \ldots^*$.

Mit (34),(55),(60) können wir die Krümmung durch die Direktrix ausdrücken,

(61) $$K = 1 - \frac{\|\xi \wedge \xi'\|^4}{|v|^2 \|\xi\|^6} = 1 - \frac{\|\xi \wedge \xi'\|^6}{\|\xi \wedge \xi' \wedge \xi''\|^2 \|\xi\|^6}\,.$$

*... $\hat{=}$ Terme höherer Ordnung.

Wir entwickeln (61) um $z_0 = 0$ und erhalten

$$K_{(z)} = 1 - \frac{\|a_0 \wedge a_{m+1}\|^6 \qquad (m+1)^6 \qquad |z|^{6m} + \ldots^*}{\|a_0\|^6 \, \|a_0 \wedge a_{m+1} \wedge a_{m+2}\|^2 (m+1)^2 (m+2)^2 |z|^{4m} + \ldots^*} \, .$$

So finden wir unsere Vermutung über die Ausnahmepunkte bestätigt,

$$m(z_0) > 0 \iff K_{(z_0)} = 1 \, ,$$

und dies geschieht nur in endlich vielen Punkten.

$^*\ldots \mathrel{\widehat{=}}$ Terme höherer Ordnung.

IV Erzeugende Kurven

14. Liniengeometrie

Wir untersuchen einen Sonderfall der im Abschnitt 10 eingeführten Multivektorraumkurven. Dazu referieren wir zwei Ergebnisse der projektiven Differentialgeometrie:

(i) (Siehe Bol, Seite 68). Einer Geraden, die durch zwei ihrer Punkte f, g im $P_3\mathbb{C}$ gegeben ist, entspricht genau ein Punkt $f \wedge g$ auf einer Quadrik Pl im $P_5\mathbb{C}$ und umgekehrt.
In homogenen Koordinaten (Plücker-Linienkoordinaten):

$$f = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}, \; g = \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} \quad \hat{=} \quad f \wedge g = \begin{pmatrix} f_0\, g_1 - f_1\, g_0 \\ f_0\, g_2 - f_2\, g_0 \\ f_0\, g_3 - f_3\, g_0 \\ f_2\, g_3 - f_3\, g_2 \\ f_3\, g_1 - f_1\, g_3 \\ f_1\, g_2 - f_2\, g_1 \end{pmatrix} .$$

Die Festlegung der Indexreihenfolge (01,02,03,23,31,12) bestimmt die Darstellung P der Plückerquadrik Pl in homogenen Koordinaten. Mit

$$P := \begin{pmatrix} 0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&1 \\ 1&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0 \end{pmatrix}$$

ist $\quad \mathrm{Pl} := \{ u \in P_5\mathbb{C} \mid (u, P\,u) = 0 \}$.

(ii) (Siehe Bol, Seite 73). Jeder Torse im $P_3\mathbb{C}$ entspricht genau eine bezüglich Pl total isotrope Kurve im $P_5\mathbb{C}$ und umgekehrt.

Den zweiten Punkt prüfen wir genauer.
Es gilt: Jede Torse, die kein Kegel ist, hat genau eine Gratlinie.
Zum Existenzbeweis, siehe Bol, Seite 59. Zur Eindeutigkeit sei $f \neq g$, $f \wedge f' = g \wedge g'$. Dann ist mit $\beta \neq 0 : g = \alpha f + \beta f'$
$\Rightarrow g' = \alpha' f + (\alpha + \beta') f' + \beta f'' \Rightarrow f'' \in \mathrm{Spann}\{f, f'\} \Rightarrow f$ ist eine Gerade, $f \wedge f'$ ist ein entarteter Kegel.

Folgende Fälle interessieren uns nicht weiter:
Punkte, Geraden, ebene Kurven im $P_3\mathbb{C}$ erzeugen Kegel, Geraden, ebene Torsen im $P_3\mathbb{C}$, diese entsprechen Punkten, Geraden und ebenen Kurven auf Pl im $P_5\mathbb{C}$.
Schließen wir diese Fälle aus, so bleibt eine Bijektion zwischen substantiellen Raumkurven im $P_3\mathbb{C}$ und nichtebenen, total isotropen Kurven im $P_5\mathbb{C}$.

15. Neue Kriterien

Unser Ziel ist es, die in (42),(43),(44) aufgestellten Kriterien auf Kurven im $P_3\mathbb{C}$ zu übertragen. Dazu müssen wir
(i) im $P_5\mathbb{C}$ die Quadriken wechseln,
(ii) die Dimension korrigieren.

Zu (i). Sei $Q' := \{u \in P_5\mathbb{C} \mid (u,u) = 0\}$ und sei

$$W := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ i & 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 & -i \end{vmatrix} ,$$

dann ist $\quad W^t W = P$, und W ist unitär.
Es gilt $\quad u \in Pl \Leftrightarrow Wu \in Q'$,
denn $\quad (u, Pu) = (u, W^t Wu) = (Wu, Wu)$.

Zu (ii). Wir identifizieren $P_4\mathbb{C}$ mit
$$\{u \in P_5\mathbb{C} \mid u^t = (u_0,u_1,u_2,u_3,u_4,0)\}.$$
Dann gilt $u \in Pl$ und $u_2 = u_5 \Leftrightarrow Wu \in Q' \cap P_4\mathbb{C}$,
denn $\quad (Wu)_5 = \frac{i}{\sqrt{2}}(u_2 - u_5) = 0 \Leftrightarrow u_2 = u_5$, (vgl. (65)).
Die Quadrik Q aus Abschnitt 9 ist genau $Q' \cap P_4\mathbb{C}$.

Betrachten wir die Indizes von $f \wedge f'$ bzw. $W(f \wedge f')$, so folgt mit den Bezeichnungen aus dem Beweis von (39):

$$\mu_1 + \mu_2 < \mu_1 + \mu_3 < \left\{ \begin{matrix} \mu_1 + \mu_4 \\ \mu_2 + \mu_3 \end{matrix} \right\} < \mu_2 + \mu_4 < \mu_3 + \mu_4 .$$

Aus dieser Ungleichungskette lesen wir ab:

$$\mathrm{Rang}(f \wedge f') = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Rang}(f) = 4 , \\ \mu_1 + \mu_4 = \mu_2 + \mu_3 , \\ g_{14}(z)/g_{23}(z) \text{ ist konstant, nicht } 0. \end{cases}$$

Nun können wir die neuen Kriterien aufstellen.

$\xi := W(f \wedge f')$ ist eine Direktrix-Kurve und erfüllt (42),(43),(44) genau dann, wenn $f : S^2 \longrightarrow P_3\mathbb{C}$ die folgenden Eigenschaften erfüllt:

(62) f ist holomorph und substantiell,

$$\left.\begin{array}{ll} (63) & f\text{-Index}(2) = 1 \\ (64) & f\text{-Index}(4) = f\text{-Index}(3) + 1 \end{array}\right\} \text{in jedem Entwicklungspunkt,}$$

(65) $f_0 f_3' - f_3 f_0' = f_1 f_2' - f_2 f_1'$.

Bemerkungen:

(i) Wir nennen Kurven, die (62) bis (65) erfüllen, erzeugende Kurven.

(ii) Ein Vergleich mit den Direktrixkurven und mit (40) zeigt, $f\text{-Index}(3) = m+2$, $f\text{-Index}(4) = m+3$.

(iii) Obwohl wir die Kriterien (63),(64),(65) in Abhängigkeit einer konformen Karte z und einer Entwicklung um einen Punkt z_0 formuliert haben, sind sie für die Kurve f charakteristisch und invariant formulierbar:

(63') f ist reguläre Kurve (im Sinne der Kurventheorie).

(64') Hat f einen Wendepunkt der Ordnung m, so entartet das begleitende Tetraeder von der Ordnung 2m .

(65') f gehört einem vorgegebenen linearen Geradenkomplex an (siehe Bol, §44).

Erläuterungen zu (64'):

(i) Der Wendepunktbegriff ist im Sinne von Bol, Seite 53.

(ii) Das begleitende Tetraeder, aufgespannt von f, f', f'', f''', ist nicht Bols Begleittetraeder.

(iii) Für die reguläre Kurve f gilt:

f hat einen Wendepunkt der Ordnung m,

$\Leftrightarrow$ die begleitende Schmiegebenenschar wird stationär von der Ordnung m,

$$\Leftrightarrow \quad (f \wedge f' \wedge f'')^{(k)} \begin{cases} = 0 & \text{für } k = 0,..,m-1 \\ \neq 0 & \text{für } k = m \end{cases},$$

$$\Leftrightarrow \quad f \wedge f' \wedge f^{(k+2)} \begin{cases} = 0 & \text{für } k = 0,..,m-1 \\ \neq 0 & \text{für } k = m \end{cases},$$

$$\Leftrightarrow \quad f\text{-Index}(3) = m + 2 .$$

(iv) Betrachten wir die k-fache Ableitung

$$(f \wedge f' \wedge f'' \wedge f''')^{(k)} = \sum_{\bar{J}} c_{\bar{J}} \, f^{(\alpha_{\bar{J}})} \wedge f^{(\beta_{\bar{J}})} \wedge f^{(\gamma_{\bar{J}})} \wedge f^{(\delta_{\bar{J}})} ,$$

so folgt aus der Schiefsymmetrie des Dachproduktes

$$\alpha_{\bar{J}} < \beta_{\bar{J}} < \gamma_{\bar{J}} < \delta_{\bar{J}} ,$$

ohne(!) Vertauschungen vorgenommen zu haben. $c_{\bar{J}}$ sind positive Konstanten. Genauer ist

$$(f \wedge f' \wedge f'' \wedge f''')^{(k)} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (f \wedge f' \wedge f'')^{(j)} \wedge f^{(k-j+3)} .$$

Setzen wir (iii) voraus, so verschwinden die Summanden für $j < m$ und diejenigen mit $\gamma_{\bar{J}} < m + 2$. Für die restlichen Summanden liefert dies die Ungleichungskette

$$m + 2 \leq \gamma_{\bar{J}} < \delta_{\bar{J}} = k - j + 3 \leq k - m + 3 .$$

Daraus folgt $2m \leq k$, und es bleibt:

$$(f \wedge f' \wedge f'' \wedge f''')^{(k)} \begin{cases} = 0 & \text{für } k = 0,..,2m-1 \\ = \binom{2m}{m} f \wedge f' \wedge f^{(m+2)} \wedge f^{(m+3)} & \text{für } k=2m. \end{cases}$$

Unter der Voraussetzung (iii) gilt:

Das begleitende Tetraeder entartet von der Ordnung 2m,

$\Leftrightarrow$ f-Index (4) = m + 3 .

16. Beispiele für erzeugende Kurven

Wir identifizieren weiterhin S^2 mit der geschlossenen Ebene $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Sei $r : S^2 \longrightarrow S^2$ eine rationale Funktion, deren Grad größer als zwei ist. Dann ist

$$(66) \qquad f(z) := \begin{vmatrix} 1 \\ z \\ r'(z) \\ z\, r'(z) - 2\, r(z) \end{vmatrix}$$

eine erzeugende Kurve im $P_3\mathbb{C}$, deren Ausnahmepunktverhalten (Wendepunktverhalten) wir anhand der Funktion r voraussagen.

Beweis:
Zu (62). Aus der Rationalität folgt die Holomorphie.
Die Eigenschaft „substantiell" wird in (64) gezeigt.

Zu (63). $(f \wedge f'(z))_0 = 1$ auf ganz S^2.

Zu (65). $f_0 f_3' - f_3 f_0' = z\, r'' - r' = f_1 f_2' - f_2 f_1'$.

Zu (64). Wir unterscheiden vier Fälle.
(i) z_0 ist endlich, r ist in z_0 holomorph. Damit ist (als vier Unterdeterminanten zu lesen)

$$f \wedge f' \wedge f''(z)$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ z & 1 & 0 \\ r'(z) & r''(z) & r'''(z) \\ z\, r'(z) - 2\, r(z) & z\, r''(z) - r'(z) & z\, r'''(z) \end{vmatrix}$$

$$= r'''(z)\, f(z)\,.$$

$m(z_0)$ ist genau die Nullstellenordnung von r''' in z_0, und es gilt

$$f \wedge f' \wedge f^{(m+2)} \wedge f^{(m+3)}(z_0)$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ z_0 & 1 & 0 & 0 \\ * & * & r^{(m+3)}(z_0) & r^{(m+4)}(z_0) \\ * & * & z_0\, r^{(m+3)}(z_0) + m\, r^{(m+2)}(z_0) & z_0\, r^{(m+4)}(z_0) + (m+1)\, r^{(m+3)}(z_0) \end{vmatrix}$$

$$= (m+1)\,(r^{(m+3)}(z_0))^2 - m\, r^{(m+2)}(z_0)\, r^{(m+4)}(z_0) \neq 0\,.$$

(ii) r hat in ∞ einen Pol höchstens zweiter Ordnung oder ist dort holomorph. Wir untersuchen das Verhalten der Kurve $\tilde{f}(z) := z\, f(\frac{1}{z})$ in 0 . $\tilde{f}$ ist in 0 holomorph(!), und $\tilde{f}(0) \neq 0$.

$$\tilde{f} \wedge \tilde{f}' \wedge \tilde{f}''(z)$$

$$= \left| \begin{array}{lll} z & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ z r'(\frac{1}{z}) & -\frac{1}{z} r''(\frac{1}{z}) + r'(\frac{1}{z}) & \frac{1}{z^3} r'''(\frac{1}{z}) \\ r'(\frac{1}{z}) - 2z r(\frac{1}{z}) & -\frac{1}{z^2} r''(\frac{1}{z}) + 2\frac{1}{z} r'(\frac{1}{z}) - 2r(\frac{1}{z}) & \frac{1}{z^4} r'''(\frac{1}{z}) \end{array} \right|$$

$$= -\frac{1}{z^4} r'''(\frac{1}{z})\, \tilde{f}(z)$$

r''' hat in ∞ eine Nullstelle mindestens vierter, aber endlicher Ordnung! Sei m+4 diese Nullstellenordnung, dann ist m die Nullstellenordnung von $w(z) := \frac{1}{z^4} r'''(\frac{1}{z})$ in 0 . Wir prüfen,

$$\tilde{f} \wedge \tilde{f}' \wedge \tilde{f}^{(m+2)} \wedge \tilde{f}^{(m+3)}(0)$$

$$= \left| \begin{array}{llll} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & m\, w^{(m-1)}(0) & (m+1)\, w^{(m)}(0) \\ * & * & w^{(m)}(0) & w^{(m+1)}(0) \end{array} \right|$$

$$= -m\, w^{(m-1)}(0)\, w^{(m+1)}(0) + (m+1)(w^{(m)}(0))^2 \neq 0 \,.$$

In diesem Fall ist $m(\infty)$ die Nullstellenordnung von r''' in ∞ minus vier.

(iii) r hat im endlichen z_0 einen Pol der Ordnung m + 1 . Wir untersuchen eine in z_0 holomorphe Darstellung von f,

$$\tilde{f}(z) := (z - z_0)^{m+2} f(z) \,, \text{ mit } \tilde{f}(z_0) \neq 0 \,.$$

Die erste Komponente von $\tilde{f}$ läßt den f-Index(3) = m + 2 erkennen. Wir prüfen,

$$\tilde{f} \wedge \tilde{f}' \wedge \tilde{f}^{(m+2)} \wedge \tilde{f}^{(m+3)}(z_0) = \left| \begin{array}{llll} 0 & 0 & (m+2)! & 0 \\ 0 & 0 & (m+2)!\, z_0 & (m+3)! \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{array} \right| \neq 0 \,.$$

Die Determinante des Blocks $\boxed{\begin{matrix} * & * \\ * & * \end{matrix}}$ verschwindet nicht, weil $\tilde{f}(z_0) \neq 0$ und f reguläre Kurve ist. Hier ist $m(z_0)$ die Polordnung von r minus eins.

(iv) r hat in ∞ einen Pol der Ordnung $m+3$. Wir untersuchen das Verhalten der Kurve $\tilde{f}(z) := z^{m+3}\, f(\frac{1}{z})$ in 0. Wieder ist $\tilde{f}$ in 0 holomorph und $\tilde{f}(0) \neq 0$. Die zweite Komponente von $\tilde{f}$ läßt den f-Index$(3) = m+2$ erkennen. Wir prüfen,

$$\tilde{f} \wedge \tilde{f}' \wedge \tilde{f}^{(m+2)} \wedge \tilde{f}^{(m+3)}(0) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & (m+3)! \\ 0 & 0 & (m+2)! & 0 \\ \boxed{* \quad *} & & * & * \\ \boxed{* \quad *} & & * & * \end{vmatrix} \neq 0,$$

analog dem Fall (iii). Hier ist $m(\infty)$ die Polordnung von r in ∞ minus drei.

Wir fassen alle vier Fälle zusammen.

(67) $\quad m(z_0)$ ist die $\left\{\begin{matrix}\text{Nullstellenordnung} \\ \text{Polstellenordnung}\end{matrix}\right\}$ von r''' in z_0 $\left\{\begin{matrix} - \\ \text{minus vier}\end{matrix}\right\}$, falls r''' in $z_0 \left\{\begin{matrix}\text{holomorph} \\ \text{singulär}\end{matrix}\right\}$ ist.

Für $z_0 = \infty$ ist der Zusatz „minus vier" in die andere Zeile zu setzen.

Soll ein vorgegebenes Ausnahmepunktverhalten erfüllt werden, so gehen wir von einer rationalen Funktion $\tilde{r}$ aus, die folgende Bedingungen erfüllt:

$$(68) \quad \begin{cases} \tilde{r} \neq 0, \\ \tilde{r} \text{ hat im Endlichen keine Pole der Ordnung } 1, 2 \text{ oder } 3, \\ \tilde{r} \text{ hat in } \infty \text{ keine Nullstelle der Ordnung } 1, 2 \text{ oder } 3. \end{cases}$$

Das Verschwinden aller Residuen zeigt, daß sich $\tilde{r}$ dreimal integrieren läßt, das heißt es gibt eine rationale Funktion r mit $r''' = \tilde{r}$. Die Gleichung (67) zeigt, daß die Integrationskonstanten für das Ausnahmepunktverhalten ohne Bedeutung sind.

Wir stellen die Bedeutung der Ausnahmemenge G aus Abschnitt 7 zusammen:

(i) Rationale Funktionen

r ist vom Grad größer als zwei, oder $\tilde{r} = r'''$ erfüllt (68).
Mit (67) ist $G = \{ z_0 \in S^2 \mid m(z_0) > 0 \}$.

(ii) Erzeugende Kurven

f entsteht aus r durch (66). G ist die Menge der Wendepunkte.

(iii) Direktrix-Kurven

$\xi = W(f \wedge f')$. In G ist ξ nicht regulär (keine Immersion).

(iv) Minimale Immersionen

x entsteht aus ξ durch (53). In G verschwindet die zweite Fundamentalform h, und die Krümmung nimmt den Wert 1 an.

V Scharen

17. Scharen von Direktrix-Kurven

Definitionen:

Dk sei die Menge aller Direktrix-Kurven ((42),(43),(44)) $\xi : S^2 \longrightarrow P_4\mathbb{C}$, wobei ξ und $\bar{\xi}$ nicht unterschieden werden (Willkür in (32)).

Möb sei die Menge der biholomorphen Abbildungen auf S^2 (Möbiustransformationen).

$SO(5,\mathbb{C})$ sei die spezielle komplex-orthogonale Gruppe (siehe Chev., Seite 4).

$SO(5,\mathbb{R}) := \{R \in SO(5,\mathbb{C}) \mid R \text{ ist reell}\}$.

Die Elemente aus $SO(5,\mathbb{C})$ sind genau die Repräsentanten derjenigen projektiven Transformationen, die unsere Quadrik Q aus Abschnitt 9 invariant lassen.
Aus (42),(43),(44) folgt für $M \in SO(5,\mathbb{C})$:

$$\xi \in Dk \iff M(\xi) \in Dk \ .$$

Im folgenden ist immer $\xi \in Dk$, $\gamma \in$ Möb, $M \in SO(5,\mathbb{C})$, $R \in SO(5,\mathbb{R})$.
Auf Dk lassen wir das direkte Produkt $SO(5,\mathbb{C}) \times$ Möb und die Untergruppe $SO(5,\mathbb{R}) \times$ Möb operieren:

$$(M,\gamma)\circ\xi := M(\xi\circ\gamma^{-1}) \ ,$$
$$(R,\gamma)\circ\xi := R(\xi\circ\gamma^{-1}) \ .$$

Für ξ definieren wir die Standgruppen

$$\mathbb{C}\text{-}St(\xi) := \{(M,\gamma) \in SO(5,\mathbb{C}) \times \text{Möb} \mid (M,\gamma)\circ\xi = \xi\} \ ,$$
$$\mathbb{R}\text{-}St(\xi) := \{(R,\gamma) \in SO(5,\mathbb{R}) \times \text{Möb} \mid (R,\gamma)\circ\xi = \xi\} \ ,$$

und die Mannigfaltigkeiten

$$\mathbb{C}\text{-Orbit}(\xi) := \{\psi \in Dk \mid \bigvee_{(M,\gamma)} (M,\gamma)\circ\xi = \psi\},$$

$$\mathbb{R}\text{-Orbit}(\xi) := \{\psi \in Dk \mid \bigvee_{(R,\gamma)} (R,\gamma)\circ\xi = \psi\}.$$

Bezeichnen wir die Lie-Algebren der auftretenden Lie-Gruppen mit kleinen Buchstaben (möb, $so(5,\mathbb{C})$, $so(5,\mathbb{R})$, $\mathbb{C}\text{-st}(\xi)$, $\mathbb{R}\text{-st}(\xi)$) und den Tangentialraum im Punkt p einer Mannigfaltigkeit durch vorangestelltes „T_p", so gelten die Vektorraum-isomorphien:

(69) $\quad so(5,\mathbb{C}) \oplus \text{möb} \cong \mathbb{C}\text{-st}(\xi) \oplus T_\xi \mathbb{C}\text{-Orbit}(\xi)$,

(70) $\quad so(5,\mathbb{R}) \oplus \text{möb} \cong \mathbb{R}\text{-st}(\xi) \oplus T_\xi \mathbb{R}\text{-Orbit}(\xi)$.

Es gilt

(71) $\quad \dim(\mathbb{R}\text{-St}(\xi)) = 0$ für jedes ξ.

Beweis: Sei $\xi(z) = R(\xi\circ\gamma^{-1}(z))$. In einem Fixpunkt z_0 von γ folgt aus (50),(51) für $j = 1, 2$:

$$E_j(z_0) = R(E_j(\gamma^{-1}(z_0))) = R(E_j(z_0)) .$$

Analog der Idee im Abschnitt 12 haben wir 4 linear unabhängige, reelle Eigenvektoren zum Eigenwert 1 gefunden.
Mit $\det(R) = 1$ folgt, R ist die Einheitsmatrix.
Da ξ substantiell ist, läßt sich eine Komponente lokal invertieren und $z = \gamma^{-1}(z)$ in einer offenen Menge.
Daher ist γ die identische Abbildung auf S^2.

Definition:
$I \subset \mathbb{R}$ sei ein offenes Intervall. Wir nennen Abbildung

$$\left.\begin{array}{l} I \longrightarrow Dk \\ t \longmapsto \xi_t \end{array}\right\} \text{ eine Schar von Direktrix-Kurven, wenn}$$

$$\left.\begin{array}{l} I \times S^2 \longrightarrow P_4\mathbb{C} \\ (t,z) \longmapsto \xi_t(z) \end{array}\right\} \text{eine differenzierbare Abbildung ist.}$$

Mit den operierenden Gruppen können wir Scharen erzeugen.
Sei
$$(M,\gamma)_{(t)} := (M_{(t)}, \gamma_{(t)})$$
eine differenzierbare Kurve in $SO(5,\mathbb{C}) \times$ Möb. Dann ist für $\xi \in Dk$

$$I \longrightarrow Dk$$
$$t \longmapsto \xi_t := (M,\gamma)_{(t)} \circ \xi$$

eine Schar. Wir nennen sie lineare Schar.

Definition:
Eine Schar heißt wesentlich, falls für alle $t_1, t_2 \in I$, $t_1 \neq t_2$ gilt:
$$\xi_{t_1} \notin \mathbb{R}\text{-Orbit}(\xi_{t_2}) .$$
Die Anzahl F der Freiheitsgrade, wesentliche lineare Scharen einer Direktrix ξ zu bilden, ist gegeben durch

(72) $$F := \dim(T_\xi \mathbb{C}\text{-Orbit}(\xi)) - \dim(T_\xi \mathbb{R}\text{-Orbit}(\xi)) .$$

Wir wollen F abschätzen. Da ξ substantiell ist, gilt
$$M(\xi) = \tilde{M}(\xi) \iff M = \tilde{M} .$$
Daraus folgt
$$\mathbb{C}\text{-st}(\xi) \cap so(5,\mathbb{C}) \oplus \{0\} = \{0\} \qquad \text{und}$$

(73) $$\dim(\mathbb{C}\text{-st}(\xi)) \leq 26 - 20 = 6 .$$

Aus (70),(71) folgt
$$16 = 0 + \dim(T_\xi \mathbb{R}\text{-Orbit}(\xi)) .$$
(72) lautet nun
$$F = \dim(T_\xi \mathbb{C}\text{-Orbit}(\xi)) - 16 ,$$
und aus (69) folgt
$$26 = F + 16 + \dim(\mathbb{C}\text{-st}(\xi)) .$$
Mit (73) erhalten wir

(74) $$4 \leq F \leq 10 .$$

18. Scharen von Minimalsphären

Definition:

Ms sei die Menge aller minimalen Immersionen $x : S^2 \longrightarrow S^4$, wobei $+x$ und $-x$ nicht unterschieden werden.

Das Kapitel II liefert eine Abbildung $\Xi : Ms \longrightarrow Dk$, $\Xi(x) = \xi$.
Das Kapitel III liefert eine Abbildung $X : Dk \longrightarrow Ms$, $X(\xi) = x$.
Im Abschnitt 14 ist nachgewiesen, daß beide Abbildungen zueinander invers sind,

(75) $$\Xi \circ X = id_{(Dk)}, \quad X \circ \Xi = id_{(Ms)} .$$

Im folgenden ist immer $x \in Ms$. Setzt man $\xi \circ \gamma$ in (53),(54) ein, so folgt

(76) $$X(\xi \circ \gamma) = (X(\xi)) \circ \gamma ,$$ und mit (75) folgt

(77) $$\Xi(x \circ \gamma) = (\Xi(x)) \circ \gamma .$$

Ebenso folgt aus (53),(54) für $R \in SO(5,\mathbb{R})$ (R ist unitär)

(78) $$X(R(\xi)) = R(X(\xi)) ,$$ und mit (75) folgt

(79) $$\Xi(R(x)) = R(\Xi(x)) .$$

Die Gleichung (79) sagt, daß sich mit der Minimalsphäre ihr Normalenraum $\perp S^2$ mitdreht. Dies war zu erwarten.

Auf Ms lassen wir $SO(5,\mathbb{C}) \times$ Möb und $SO(5,\mathbb{R}) \times$ Möb operieren,

$$(M,\gamma) \circ x := X((M,\gamma) \circ \Xi(x)) .$$

Mit (75) bis (79) folgt

$$(R,\gamma) \circ x = R(x \circ \gamma^{-1}) .$$

Analog dem Abschnitt 17 seien für $x \in Ms$ die Standgruppen, Orbits, Scharen und wesentliche Scharen definiert.
Sei $x = X(\xi)$, $\tilde{x} = X(\tilde{\xi})$, dann folgt aus (76) bis (79)

$$x \in \mathbb{R}\text{-Orbit}(\tilde{x}) \iff \xi \in \mathbb{R}\text{-Orbit}(\tilde{\xi}) .$$

Damit folgt das Lemma:

$$t \longmapsto \xi_t \text{ ist wesentliche Schar}$$

$$\iff t \longmapsto x_t := X(\xi_t) \text{ ist wesentliche Schar.}$$

Mit (72),(74) und diesem Lemma haben wir einen Satz bewiesen.

Satz:

(80) Jede minimale Immersion $x : S^2 \longrightarrow S^4$, deren Bild kein Äquator ist, liegt in einer mehrparametrigen wesentlichen Schar von minimalen Immersionen. Die Anzahl der Freiheitsgrade ist mindestens vier.

Im Abschnitt 11 haben wir jeder Direktrix eine Funktion $m : S^2 \longrightarrow \mathbb{N}_0$ zugeordnet, welche die Ausnahmepunkte gewichtet. Diese Zuordnung drücken wir durch eine formale Summe aus,

$$\xi \longmapsto \mathrm{Div}(\xi) := \sum_{z \in S^2} m(z)\, z \; .$$

Aus der Definition des Indexes im Abschnitt 10 folgt

$$\mathrm{Div}(M(\xi)) = \mathrm{Div}(\xi), \qquad \text{weiter ist}$$

$$\mathrm{Div}(\xi \circ \gamma) = \sum_{z \in S^2} m(\gamma(z))\, z \; .$$

Sei $(M,\gamma) \in \mathbb{C}\text{-St}(\xi)$, dann ist

$$\sum_{z \in S^2} m(z)\, z = \mathrm{Div}(\xi) = \mathrm{Div}(M(\xi \circ \gamma^{-1})) = \sum_{z \in S^2} m(z)\, \gamma(z) \; . \tag{81}$$

Kennen wir die Anzahl der Ausnahmepunkte, so können wir den Satz (80) verschärfen. Wir unterscheiden:
(i) $\# m^{-1}(\mathbb{N}) \geq 3$. Für jede lineare Schar mit $(M,\gamma)_{(t)} \in \mathbb{C}\text{-St}(\xi)$ hat $\gamma_{(t)}$ mindestens 3 Fixpunkte, das heißt $\gamma_{(t)} = \mathrm{id}_{(S^2)}$.

Dadurch können wir (73) und (75) besser abschätzen:

$$\dim(\mathbb{C}\text{-st}(\xi)) = 0 \text{ und } F = 10.$$

Analoge Überlegungen liefern:

(ii) $\# m^{-1}(\mathbb{N}) = 2 \Rightarrow \dim(\mathbb{C}\text{-st}(\xi)) \leq 2 \Rightarrow F \geq 8$,

(iii) $\# m^{-1}(\mathbb{N}) = 1 \Rightarrow \dim(\mathbb{C}\text{-st}(\xi)) \leq 4 \Rightarrow F \geq 6$,

(iv) $\# m^{-1}(\mathbb{N}) = 0 \Rightarrow \dim(\mathbb{C}\text{-st}(\xi)) \leq 6 \Rightarrow F \geq 4$, wie bereits im Satz.

Eine Bemerkung zum Äquatorfall:

Ist $x(S^2)$ ein Äquator (totalgeodätisch), so ist der Normalenraum konstant, die „Direktrix" ist ein Punkt. Ein Punkt kann nicht in einer wesentlichen Schar $t \longmapsto \xi_t$ enthalten sein, denn die Direktrix-Kurven müßten die zum Punkt polare Fernhyperebene verlassen, was im Widerspruch zur Werteannahme rationaler Funktionen steht.

Folgerung:

Eine totalgeodätische Immersion $x : S^2 \longrightarrow S^4$ gehört keiner wesentlichen Schar an.

19. Die Veronese in einer wesentlichen Schar

Die bisher aufgezeigten Verfahren sollen an einem konkreten Beispiel vorgeführt werden. Dazu gehen wir aus von der konstanten Funktion

$$\tilde{r}(z^*) = \frac{2}{\sqrt{3}} .$$

Sie erfüllt die Forderung (68) und $m = 0$, bzw. $G = \emptyset$. Wir integrieren dreimal, jeweils mit der Integrationskonstanten 0,

$$r(z^*) = \frac{1}{3\sqrt{3}} z^{*3} .$$

Daraus entsteht nach Gleichung (66) die erzeugende Kurve

$$f(z^*) = \begin{pmatrix} 1 \\ z^* \\ \frac{1}{\sqrt{3}} z^{*2} \\ \frac{1}{3\sqrt{3}} z^{*3} \end{pmatrix} ,$$

die wir mit $z := \frac{1}{\sqrt{3}} z^*$ umparametrisieren. Dies ergibt

$$f(z) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3}\, z \\ \sqrt{3}\, z^2 \\ z^3 \end{pmatrix} , \quad f'(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ 2\sqrt{3}\, z \\ 3\, z^2 \end{pmatrix} .$$

Die von f erzeugte Torse ζ lautet in Plücker-Linienkoordinaten

$$\zeta(z) := f \wedge f'(z) = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 2\sqrt{3}\, z \\ 3\, z^2 \\ \sqrt{3}\, z^4 \\ -2\sqrt{3}\, z^3 \\ 3\, z^2 \end{pmatrix} \mathrel{\hat{=}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2\, z \\ \sqrt{3}\, z^2 \\ z^4 \\ -2\, z^3 \\ \sqrt{3}\, z^2 \end{pmatrix} .$$

Wir erhalten die Direktrix-Kurve

$$\xi(z) := W(\zeta(z)) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 + z^4 \\ 2\,z\,(1 - z^2) \\ 2\sqrt{3}\,z^2 \\ i\,(1 - z^4) \\ 2\,i\,z\,(1 + z^2) \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Die in (53) verwendeten Koeffizienten $\langle \xi \wedge \xi', \xi \wedge .\overset{\hat{j}}{.} . \wedge \xi'' \rangle$ berechnen wir aus den entsprechenden Koordinaten der Torse. Dies führt zum richtigen Ergebnis, da W unitär ist.

$$\zeta(z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2\,z \\ \sqrt{3}\,z^2 \\ z^4 \\ -2\,z^3 \\ \sqrt{3}\,z^2 \end{pmatrix}, \quad \zeta'(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2\sqrt{3}\,z \\ 4\,z^3 \\ -6\,z^2 \\ 2\sqrt{3}\,z \end{pmatrix}, \quad \zeta''(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\sqrt{3} \\ 12\,z^2 \\ -12\,z \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\|\xi\|^2 &= (1 + |z|^2)^4 \\
\|\xi'\|^2 &= 4\,(1 + |z|^2)^2\,(1 + 4\,|z|^2) \\
\|\xi''\|^2 &= 24\,(1 + 6\,|z|^2 + 6\,|z|^4) \\
\langle \xi, \xi' \rangle &= 4\,\bar{z}\,(1 + |z|^2)^3 \\
\langle \xi, \xi'' \rangle &= 12\,\bar{z}^2\,(1 + |z|^2)^2 \\
\langle \xi', \xi'' \rangle &= 24\,\bar{z}\,(1 + |z|^2)(1 + 2\,|z|^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|\xi \wedge \xi'\|^2 &= 4\,(1 + |z|^2)^6 \\
\langle \xi \wedge \xi', \xi \wedge \xi'' \rangle &= 24\,\bar{z}\,(1 + |z|^2)^5 \\
\langle \xi \wedge \xi', \xi' \wedge \xi'' \rangle &= 48\,\bar{z}^2\,(1 + |z|^2)^4
\end{aligned}$$

$$v^2 = (\xi'', \xi'') = (\zeta'', P\,\zeta'') = 24\,, \quad v = 2\sqrt{6}$$

Die Gleichung (53) lautet nun

$$\begin{aligned}
4\,(1 + |z|^2)^6\; 2\sqrt{6}\; x(z) = {} & 48\,\bar{z}^2\,(1 + |z|^2)^4\; \xi(z) \\
& -24\,\bar{z}\,(1 + |z|^2)^5\; \xi'(z) + 4\,(1 + |z|^2)^6\; \xi''(z)
\end{aligned}$$

oder
$$2\sqrt{6}\,(1+|z|^2)^2\,x(z) = W\big(12\,\bar z^2\,\zeta(z) - 6\,\bar z\,(1+|z|^2)\,\zeta'(z) + (1+|z|^2)^2\,\zeta''(z)\big)$$

$$= W\begin{pmatrix} 12\,\bar z^2 \\ -12\,\bar z\,(1-|z|^2) \\ 2\sqrt{3}\,(1-4\,|z|^2+|z|^4) \\ 12\,z^2 \\ -12\,z\,(1-|z|^2) \\ 2\sqrt{3}\,(1-4\,|z|^2+|z|^4) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 12\,(z^2+\bar z^2) \\ -12\,(z+\bar z)(1-|z|^2) \\ 4\sqrt{3}\,(1-4\,|z|^2+|z|^4) \\ -\,i\,12\,(z^2-\bar z^2) \\ i\,12\,(z-\bar z)(1-|z|^2) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die so erhaltene minimale Immersion formen wir dreimal um.

(i) Wir setzen die stereographische Projektion ein,

$$z : \left\{ y = \begin{bmatrix} s \\ t \\ u \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; s^2+t^2+u^2 = 1 \right\} \longrightarrow \mathbb{C}\cup\{\infty\}\ ,$$

$z(y) := \dfrac{s+i\,t}{1-u}$, mit der Umkehrung

$$s = \frac{z+\bar z}{1+|z|^2}\ ,\quad t = -\,i\,\frac{z-\bar z}{1+|z|^2}\ ,\quad u = -\,\frac{1-|z|^2}{1+|z|^2}\ .$$

(ii) Wir drehen orthogonal im $\mathbb{R}^6$ mit

$$\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & -1 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 0 & -1 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{6} & 0 \\ 0 & \sqrt{6} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(iii) Wir benutzen eine Isometrie zwischen den symmetrischen Endomorphismen auf $\mathbb{R}^3$ und dem $\mathbb{R}^6$,

$$\mathrm{Sym}(\mathbb{R}^3) \ni ((a_{jk}))_{jk} \mathrel{\hat=} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{22} \\ a_{33} \\ \sqrt{2}\,a_{12} \\ \sqrt{2}\,a_{23} \\ \sqrt{2}\,a_{31} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^6\ .$$

Damit erhalten wir

$$x(z) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}\, \frac{(z+\bar z)^2 + (z-\bar z)^2}{(1+|z|^2)^2} \\ \sqrt{3}\, \frac{(z+\bar z)(1-|z|^2)}{(1+|z|^2)^2} \\ \left(\frac{1-|z|^2}{1+|z|^2}\right)^2 - \frac{1}{2}\, \frac{(z+\bar z)^2 - (z-\bar z)^2}{(1+|z|^2)^2} \\ -i\sqrt{3}\, \frac{(z+\bar z)(z-\bar z)}{(1+|z|^2)^2} \\ i\sqrt{3}\, \frac{(z-\bar z)(1-|z|^2)}{(1+|z|^2)^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{=}{(i)} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}(s^2-t^2) \\ \sqrt{3}\, s u \\ u^2 - \frac{1}{2}(s^2+t^2) \\ \sqrt{3}\, s t \\ \sqrt{3}\, t u \\ 0 \end{pmatrix} \underset{=}{(ii)} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{3}{2}}\,(s^2 - \frac{1}{3}) \\ \sqrt{\frac{3}{2}}\,(t^2 - \frac{1}{3}) \\ \sqrt{\frac{3}{2}}\,(u^2 - \frac{1}{3}) \\ \sqrt{3}\, s t \\ \sqrt{3}\, t u \\ \sqrt{3}\, u s \end{pmatrix} \underset{=}{(iii)} \sqrt{\frac{3}{2}}(y \otimes y - \frac{1}{3}\mathrm{id}).$$

Das Bild $x(S^2)$ ist eine Veronesefläche.

Wir nehmen $\tau \in \mathbb{R}$ als Scharparameter, variieren die Ausgangsfunktion $\tilde r$ und führen dasselbe Verfahren noch einmal durch.

$$\tilde r_\tau(z^*) := e^{-\tau}\, \tilde r(z^*) = e^{-\tau}\, \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$r_\tau(z^*) = e^{-\tau}\, \frac{1}{3\sqrt{3}}\, z^{*3}$$

$$f_\tau(z^*) = \begin{pmatrix} 1 \\ z^* \\ e^{-\tau}\, \frac{1}{\sqrt{3}}\, z^{*2} \\ e^{-\tau}\, \frac{1}{3\sqrt{3}}\, z^{*3} \end{pmatrix} \quad \hat{=} \quad \begin{pmatrix} e^{\tau/2} \\ e^{\tau/2}\, z^* \\ e^{-\tau/2}\, \frac{1}{\sqrt{3}}\, z^{*2} \\ e^{-\tau/2}\, \frac{1}{3\sqrt{3}}\, z^{*3} \end{pmatrix}$$

$$f_\tau(z) = \begin{pmatrix} e^{\tau/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\tau/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\tau/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-\tau/2} \end{pmatrix} f(z)$$

$$\zeta_\tau(z) = \begin{pmatrix} e^{\tau} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-\tau} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \zeta(z)$$

$$\xi_\tau(z) = \exp\left(i\tau \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \xi(z)$$

$$x_\tau(z) = q_\tau(z) \begin{pmatrix} \sqrt{3}(1+|z|^2)(z^2+\bar{z}^2) \\ -\sqrt{3}(z+\bar{z})(e^{\tau} - e^{-\tau}|z|^4) \\ e^{\tau} - 3e^{\tau}|z|^2 - 3e^{-\tau}|z|^4 + e^{-\tau}|z|^6 \\ -i\sqrt{3}(1+|z|^2)(z^2-\bar{z}^2) \\ i\sqrt{3}(z-\bar{z})(e^{\tau} - e^{-\tau}|z|^4) \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit $q_\tau(z) := 1/(e^{\tau} + 3e^{\tau}|z|^2 + 3e^{-\tau}|z|^4 + e^{-\tau}|z|^6)$

$$x_\tau \begin{pmatrix} s \\ t \\ u \end{pmatrix} = q_\tau(u) \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}(s^2-t^2) \\ \sqrt{3}\, s\, u_\tau \\ u\, u_\tau - \frac{1}{2}(s^2+t^2)\, c_\tau \\ \sqrt{3}\, s\, t \\ \sqrt{3}\, t\, u_\tau \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit $q_\tau(u) := 2/(2\cosh\tau - u(3-u^2)\sinh\tau)$

$u_\tau := u\cosh\tau - \frac{1+u^2}{2}\sinh\tau$

$c_\tau := \cosh\tau - u\sinh\tau$

Zum Beweis der Wesentlichkeit dieser Schar berechnen wir die Krümmung für $z = 0$ (wieder aus den Koordinaten der Torse).

$$\zeta_\tau(0) = \begin{pmatrix} e^\tau \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \zeta'_\tau(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \zeta''_\tau(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\sqrt{3} \\ 0 \\ 0 \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Aus (61) folgt

$$K_{(0)} = 1 - \frac{(2\,e^\tau)^6}{2\,(4\sqrt{3}\,e^\tau)^2\,(e^\tau)^6} = 1 - \frac{2}{3}\,e^{-2\tau}\,.$$

In einer Umgebung um $\tau = 0$ muß die Schar wesentlich sein, da nur für $\tau = 0$ eine Veronese vorliegt.

Zum Schluß geben wir eine Schar aus der $\mathbb{C}$-Standgruppe der Veronese an. Am einfachsten sehen wir dies an der Schar der erzeugenden Kurve.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3}\,z_\tau & 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{3}\,z_\tau^2 & 2\,z_\tau & 1 & 0 \\ z_\tau^3 & \sqrt{3}\,z_\tau^2 & \sqrt{3}\,z_\tau & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ \sqrt{3}\,(z - z_\tau) \\ \sqrt{3}\,(z - z_\tau)^2 \\ (z - z_\tau)^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ \sqrt{3}\,z \\ \sqrt{3}\,z^2 \\ z^3 \end{vmatrix}$$

Tatsächlich wird aus der angegebenen Matrix $M_{(z_\tau)}$ im Zuge des Verfahrens die komplex-orthogonale Matrix $W\,(M_{(z_\tau)} \wedge M_{(z_\tau)})\,W^{-1}$. Unter diesem Dachprodukt sind alle zweireihigen Unterdeterminanten zu verstehen. Die Indexreihenfolge für Zeilen und Spalten ist den Plücker-Linienkoordinaten zu entnehmen.
Da wir alle Translationsscharen $\gamma_{(\tau)}(z) := z + z_\tau$ durch geeignete Matrixscharen $M_{(z_\tau)}$ ausgleichen können, gilt für die Veronese

$F \leqslant 8$ (vgl.(74)).

VI Anhang

20. Ein topologisches Argument

Bezeichnungen: $\mathring{G}$:= offener Kern von G, $\overline{G}$:= abgeschlossene Hülle von G, $\partial G := \overline{G} \setminus \mathring{G}$.

Sei S ein topologischer Raum, $G \subset S$ und $S \setminus \partial G$ zusammenhängend, dann gilt $\overline{G} = \partial G$ oder $\overline{G} = S$.
Unter den weiteren Voraussetzungen

$G = \overline{G}$,

$G \neq S$,

∂G ist endlich,

gilt: G ist endlich.

Beweis: $S \setminus \partial G$ ist mit der Relativtopologie ein zusammenhängender Raum. Darin ist $\mathring{G}$ eine relativ-offene Menge und ihr Relativ-Komplement $S \setminus (\partial G \cup \mathring{G}) = S \setminus \overline{G}$ auch. Daraus folgt $\mathring{G} = \emptyset$ oder $\mathring{G} = S \setminus \partial G$. Dies ist äquivalent zur ersten Behauptung. Die zweite Behauptung folgt dann sofort.

21. Ein Satz über ein elliptisches Differentialgleichungssystem

Sei $S \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet um $z = 0$. Für $1 \leq \alpha, \beta \leq n$ seien $C^{(1)}$-Funktionen w_α, $a_{\alpha\beta} : S \longrightarrow \mathbb{C}$ gegeben, die das Differentialgleichungssystem

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} w_\alpha = \sum_{\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta} w_\beta$$

erfüllen. Sei

$$G := \bigcap_{\alpha=1}^{n} w^{-1}\{0\} \quad \text{und } G \neq S.$$

Dann gilt:

(i) G besteht aus isolierten Punkten.

(ii) Die komplexe Kurve $c : S \setminus G \longrightarrow P_{n-1}\mathbb{C}$,
$z \longmapsto (w_1(z), \ldots, w_n(z))$, ist in G stetig fortsetzbar.

Bezeichnungen: $\varepsilon, R > 0$,
$D_\varepsilon(z_0) := \{z \in \mathbb{C} ; |z - z_0| < \varepsilon\}$,
$D := D_R(0)$.

Im weiteren soll immer gelten:
$\bar{D} \subset S$, $z_0 \in D$ und $\bar{D}_\varepsilon(z_0) \subset D$.

„Konjugierte Mengen" kommen nicht vor.

Lemma 1.
Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig, dann gilt:

$$2\pi i f(z_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial D_\varepsilon(z_0)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \quad .$$

Beweis:

$$f_\varepsilon := \max\{|f(z)| ; z \in \partial D_\varepsilon(z_0)\},$$

$$\left| \int_{\partial D_\varepsilon(z_0)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \right| \leq f_\varepsilon \int_{\partial D_\varepsilon(z_0)} \left| \frac{dz}{z - z_0} \right| = 2\pi f_\varepsilon ,$$

$$f \text{ ist stetig} \Rightarrow \lim_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon = |f(z_0)|.$$

Betrachten wir die stetige Funktion $\tilde{f}(z) := f(z) - f(z_0)$, so folgt aus dem bisher Gezeigten für $\tilde{f}$:

$$0 = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\partial D_\varepsilon(z_0)} \frac{\tilde{f}(z)}{z - z_0}\,dz$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\partial D_\varepsilon(z_0)} \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz - 2\pi i\, f(z_0).$$

Beim letzten Schritt wurde die Cauchysche Integralformel verwendet.

Lemma 2.

$$\lim_{z_0\to 0} |z_0| \iint_D \frac{dx\,dy}{|z\,(z - z_0)|} = 0$$

Beweis:

Sei $0 < |z_0| < \frac{2}{3}R$, $\varepsilon := \frac{1}{2}|z_0|$. Wir zerlegen das Integral

$$\iint_D \ldots = \iint_{D_\varepsilon(0)} \ldots + \iint_{D_\varepsilon(z_0)} \ldots + \iint_{D \setminus (D_\varepsilon(0) \cup D_\varepsilon(z_0))} \ldots$$

und schätzen die Summanden ab:

(i) $$\iint_{D_\varepsilon(0)} \frac{dx\,dy}{|z\,(z - z_0)|} \leq \int_0^\varepsilon \int_0^{2\pi} \frac{r\,dr\,d\varphi}{r} = 2\pi\,.$$

Dasselbe gilt für den zweiten Summanden.

(ii) Die Funktion $\frac{z}{z - z_0}$ ist in $D \setminus \overline{D}_\varepsilon(z_0)$ analytisch, der Betrag nimmt sein Maximum auf dem Rande in $z = \frac{3}{2}z_0$ an, also ist

$$\left|\frac{z}{z - z_0}\right| \leq 3\,.$$

Damit gilt

$$\iint_{D \setminus (D_\varepsilon(0) \cup D_\varepsilon(z_0))} \frac{dx\,dy}{|z\,(z - z_0)|} \leq 3 \iint_{D \setminus D_\varepsilon(0)} \frac{dx\,dy}{|z|^2}$$

$$= 6\pi \int_\varepsilon^R \frac{dr}{r} = 6\pi\,(\ln R - \ln \varepsilon)\,.$$

Zusammengefaßt haben wir

$$|z_0| \iint\limits_D \frac{dx\,dy}{|z(z-z_0)|} \leq |z_0|\,(4\pi + 6\pi\,|\ln R| + 6\pi\,|\ln \frac{2}{|z_0|}|)\,.$$

Der rechte Wert strebt gegen 0 für $z_0 \to 0$.

Lemma 3.
Sei $f : \overline{D} \to \mathbb{C}$ stetig, lipschitzstetig in 0 und $f(0) = 0$.
Dann gilt

$$\lim_{z_0 \to 0} \iint\limits_D \frac{f(z)}{z(z-z_0)}\,dx\,dy = \iint\limits_D \frac{f(z)}{z^2}\,dx\,dy \quad .$$

Nach Voraussetzung gibt es eine positive Konstante K, so daß für alle $z \in D$ gilt:

$$|f(z)| \leq K\,|z|\,.$$

Das rechte Integral existiert, denn

$$\iint\limits_D \left|\frac{f(z)}{z^2}\right| dx\,dy \leq K \iint\limits_D \frac{dx\,dy}{|z|} = 2\pi R K\,.$$

Es genügt, die Differenz abzuschätzen,

$$\left|\iint\limits_D f(z)\left(\frac{1}{z(z-z_0)} - \frac{1}{z^2}\right) dx\,dy\right| \leq K\,|z_0| \iint\limits_D \left|\frac{1}{z(z-z_0)}\right| dx\,dy\,.$$

Nach Lemma 2 strebt der letzte Wert gegen 0 für $z_0 \to 0$.

Lemma 4.
Sei $f : S \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar, $f = o(|z|^{k-1})$ in $z = 0$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt in $D \setminus \{0\}$:

$$\frac{f(z_0)}{z_0^k} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \frac{f(z)\,dz}{z^k(z-z_0)} - \frac{1}{\pi} \iint\limits_D \frac{\frac{\partial}{\partial \bar z} f(z)\,dx\,dy}{z^k(z-z_0)}\,.$$

Bemerkung: Der mittlere Term ist z_0-analytisch in D.

Beweis:

$$d\left(\frac{f(z)\,dz}{z^k(z-z_0)}\right) = \frac{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}f(z)}{z^k(z-z_0)}\, d\bar{z} \wedge dz = 2\,i\, \frac{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}f(z)}{z^k(z-z_0)}\, dx \wedge dy \;.$$

Im Sinne uneigentlicher Integrale schreiben wir mit dem Satz von Stokes,

$$2\,i \iint\limits_D \frac{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}f(z)}{z^k(z-z_0)}\, dx\, dy = \int\limits_{\partial D} \frac{f(z)\,dz}{z^k(z-z_0)}$$

$$- \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\partial D_\varepsilon(z_0)} \frac{f(z)\,dz}{z^k(z-z_0)} - \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\partial D_\varepsilon(0)} \frac{f(z)\,dz}{z^k(z-z_0)} \;,$$

mit Lemma 1 folgt weiter

$$\ldots = \int\limits_{\partial D} \frac{f(z)\,dz}{z^k(z-z_0)} - 2\,\pi\, i\, \frac{f(z_0)}{z_0^k} - 2\,\pi\, i\, \left.\frac{f(z)}{z^{k-1}(z-z_0)}\right|_{z=0} \;.$$

Der letzte Summand verschwindet nach Voraussetzung.
Die Behauptung erhalten wir durch eine einfache Umformung.

Lemma 5.

Unter den Voraussetzungen des Satzes sei für alle $\alpha = 1,..,n$ und ein $k \in \mathbb{N}$ $w_\alpha = o(|z|^{k-1})$ in $z = 0$.
Dann existiert für jedes $\alpha = 1,..,n$ der Grenzwert

$$\lim_{z \to 0} \frac{w_\alpha(z)}{z^k} \;.$$

Beweis:

$$M(z) := \max\left\{|w_\alpha(z)| \;;\; \alpha = 1,..,n\right\} \;,$$

$$A := \max\left\{\sum_{\beta=1}^{n} |a_{\alpha\beta}(z)| \;;\; z \in \bar{D} \;,\; \alpha = 1,..,n\right\} \;.$$

Die Zerlegung nach Lemma 4 lautet:

$$(*) \qquad \frac{w_\alpha(z_0)}{z_0^k} = \frac{1}{2\,\pi\, i} \int\limits_{\partial D} \frac{w_\alpha(z)\,dz}{z^k(z-z_0)} - \frac{1}{\pi} \iint\limits_D \frac{\sum_{\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}(z)\, w_\beta(z)}{z^k(z-z_0)}\, dx\, dy \;.$$

Wir schätzen ab:

$$(**)\qquad \frac{M(z_0)}{|z_0|^k} \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \frac{M(z)\,|dz|}{|z|^k\,|z-z_0|} + \frac{A}{\pi} \iint_D \frac{M(z)\,dx\,dy}{|z|^k\,|z-z_0|} .$$

Wir bemerken:

$$(***)\qquad \iint_D \frac{dx_0\,dy_0}{|z_0-z_1|} \leq \iint_D \frac{dx_0\,dy_0}{|z_0|} = 2\pi R \qquad \text{und}$$

$$\frac{1}{|z-z_0|\,|z_0-z_1|} = \frac{1}{|z-z_1|} \left| \frac{1}{z-z_0} + \frac{1}{z_0-z_1} \right| .$$

Zusammen gilt:

$$\iint_D \frac{dx_0\,dy_0}{|z-z_0|\,|z_0-z_1|} \leq \frac{4\pi R}{|z-z_1|} .$$

Wir integrieren die Abschätzung (**) bezüglich $\dfrac{dx_0\,dy_0}{|z_0-z_1|}$ und erhalten:

$$\iint_D \frac{M(z_0)\,dx_0\,dy_0}{|z_0|^k\,|z_0-z_1|} \leq \frac{1}{2\pi} \iint_D \int_{\partial D} \frac{M(z)\,|dz|\,dx_0\,dy_0}{|z|^k\,|z-z_0|\,|z_0-z_1|}$$

$$+ \frac{A}{\pi} \iint_D \iint_D \frac{M(z)\,dx\,dy\,dx_0\,dy_0}{|z|^k\,|z-z_0|\,|z_0-z_1|}$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \frac{M(z)}{|z|^k} \frac{4\pi R}{|z-z_1|}\,|dz| + \frac{A}{\pi} \iint_D \frac{M(z)}{|z|^k} \frac{4\pi R}{|z-z_1|}\,dx\,dy .$$

Daher ist

$$(1-4AR) \iint_D \frac{M(z)\,dx\,dy}{|z|^k\,|z-z_1|} \leq 2R \int_{\partial D} \frac{M(z)\,|dz|}{|z|^k\,|z-z_1|} .$$

Wir wählen den Radius R so klein, daß $4AR < 1$ ist. Damit gilt

$$\iint_D \frac{M(z)\,dx\,dy}{|z|^k\,|z-z_1|} \leq \frac{2R}{1-4AR} \frac{\max\{M(z);\, z \in \partial D\}}{R^k} \frac{2\pi R}{R-|z_1|} .$$

Insbesondere ist das Integral beschränkt für $z_1 \to 0$. Aus der Abschätzung (**) sehen wir, daß für jedes $\alpha = 1,\dots,n$

$$\left|\frac{w_\alpha(z)}{z^k}\right| \quad \text{beschränkt ist für } z \to 0 .$$

Damit ist $f_\alpha(z) := z^{1-k} \sum_{\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}(z)\, w_\beta(z)$ lipschitzstetig in 0, und wir wenden das Lemma 3 an. In der Zerlegung (*) existieren alle Grenzwerte für $z_0 \to 0$.

Lemma 6.

Unter den Voraussetzungen des Satzes sei für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle $\alpha = 1,..,n$ $w_\alpha = o(|z|^{k-1})$ in $z = 0$. Dann ist $0 \in \mathring{G}$.

Beweis:

Nehmen wir das Gegenteil an. Zu jedem $R > 0$ gibt es ein $z_0 \in D$ mit $M(z_0) \neq 0$. Wir integrieren die Abschätzung (**) aus dem Lemma 5 bezüglich $dx_0\, dy_0$. Mit (***) erhalten wir:

$$\iint_D \frac{M(z_0)}{|z_0|^k}\, dx_0\, dy_0 \leq \frac{1}{2\pi} \iint_D \int_{\partial D} \frac{M(z)\, |dz|}{|z|^k\, |z - z_0|}\, dx_0\, dy_0$$

$$+ \frac{A}{\pi} \iint_D \iint_D \frac{M(z)\, dx\, dy\, dx_0\, dy_0}{|z|^k\, |z - z_0|}$$

$$\leq R \int_{\partial D} \frac{M(z)}{|z|^k}\, |dz| + 2\, A\, R \iint_D \frac{M(z)}{|z|^k}\, dx\, dy \quad .$$

Somit gilt:

$$(1 - 2\, A\, R) \iint_D \frac{M(z)}{|z|^k}\, dx\, dy \leq R \int_{\partial D} \frac{M(z)}{|z|^k}\, |dz| \; .$$

Diese Ungleichung wird nach oben und unten abgeschätzt.

Dazu wählen wir

(i) R so klein, daß $1 > 2\, A\, R$ ist,

(ii) Konstanten K_1 und K_2,

$$K_1 := (1 - 2\, A\, R) \iint_{D_{|z_0|}(0)} M(z)\, dx\, dy \; ,$$

$$K_2 := R \int_{\partial D} M(z)\, |dz| \; .$$

Es ist $K_1 > 0$, weil $M(z_0) \neq 0$ und M stetig ist, $K_2 > 0$ aufgrund der Ungleichung. Die zusammengesetzte Ungleichungskette lautet:

$$0 < \frac{K_1}{|z_0|^k} \leqslant (1 - 2AR) \iint_{D_{|z_0|}(0)} \frac{M(z)}{|z|^k}\, dx\, dy$$

$$\leqslant (1 - 2AR) \iint_D \frac{M(z)}{|z|^k}\, dx\, dy \leqslant \frac{K_2}{R^k} .$$

Dies ergibt mit $\frac{|z_0|}{R} < 1$ und $0 < \frac{K_1}{K_2} \leqslant (\frac{|z_0|}{R})^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$

einen Widerspruch. Die Annahme war falsch, das Lemma 6 ist bewiesen.

Beweis des Satzes:

Falls $G = \emptyset$, so ist nichts zu zeigen. Sei also $G \neq \emptyset$ und o.B.d.A. sei $0 \in \partial G$. Nach Lemma 6 gibt es ein größtes $k \in \mathbb{N}$, so daß für alle $\alpha = 1,..,n$ gilt:

$$w_\alpha = o(|z|^{k-1}) \quad \text{in } z = 0.$$

Nach Lemma 5 existieren alle n Grenzwerte

$$\lim_{z \to 0} \frac{w_\alpha(z)}{z^k} .$$

Da k maximal gewählt war, ist mindestens einer dieser Grenzwerte von null verschieden. Angenommen $z = 0$ ist kein isolierter Randpunkt, dann gibt es eine Nullfolge $\{z_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ in G und

$$\lim_{j \to \infty} \frac{w_\alpha(z_j)}{(z_j)^k} = 0 .$$

Dies ist ein Widerspruch. Der Rand von G besteht aus isolierten Punkten. Mit dem Argument aus Abschnitt 20 folgt $\partial G = G$, da G abgeschlossen ist. Die Aussage (i) des Satzes ist bewiesen.
In homogenen Koordinaten ist

$$\lim_{z \to 0} (w_1(z),..,w_n(z)) = \lim_{z \to 0} (\frac{w_1(z)}{z^k},..,\frac{w_n(z)}{z^k}) \neq (0,..,0).$$

Dies ist die stetige Fortsetzung. Die Aussage (ii) ist bewiesen.

Literatur

Be/So	Heinrich Behnke, Friedrich Sommer: Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen. 2. Auflage. Berlin - Göttingen - Heidelberg, Springer 1962.
Bol	Gerrit Bol: Projektive Differentialgeometrie, 1. Teil. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht 1950.
Chern	Shiing-shen Chern: On Minimal Spheres in the Four-Sphere. In: Studies and Essays Presented to Y. W. Chen, p. 137 - 150. Taiwan 1970.
Chev	Claude Chevalley: Theory of Lie Groups, I. Princeton University Press 1946.
Ho/Ru	Harald Holmann, Hansklaus Rummler: Alternierende Differentialformen. Mannheim - Wien - Zürich, B. I.- Wissenschaftsverlag 1972.
Ko/Nu	Shoshichi Kobayashi, Katsumi Nomizu: Foundations of Differential Geometry, Volume II. New York - London - Sydney, Interscience Publishers 1969.
Kühnel	Wolfgang Kühnel: Skript zur Vorlesung Differentialgeometrie I. Berlin, Technische Universität 1980.