8. Tutorium

Bemerkung: Gegeben sei z. B. $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,
$(x,y,z) \mapsto u(x,y,z)$

$\boxed{\text{Was bedeutet „}u\text{ in Zylinderkoordinaten"?}}$

$$\Im_{zyl} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(r, \varphi, z) \longmapsto (r \cdot \cos(\varphi), r \cdot \sin(\varphi), z)$$

„glatt", „glatte Umkehrabbildung",
„fast bijektiv"

$\rightarrow$ betrachte $u \circ \Im_{zyl}$ statt u.

aus Kettenregel kommen die Formeln aus der VL, zB

$$\operatorname{grad}(u) = \frac{\partial u}{\partial r} \underbrace{\boxed{\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}}}_{\vec{e_r}} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi} \underbrace{\boxed{\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}}}_{\vec{e_\varphi}} + \frac{\partial u}{\partial z} \underbrace{\boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}}_{\vec{e_z}}$$

$\boxed{A1}$ $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \neq (0,0)\}$

$$u : G \to \mathbb{R} \qquad\qquad \vec{v} : G \to \mathbb{R}^3$$

$$(x,y,z) \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}^3} + y^2 + e^z \qquad (x,y,z) \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

a.) u und $\vec{v}$ in Zylinderkoord.

$$u(r,\varphi,z) = \frac{1}{r^3} + r^2 \sin^2(\varphi) + e^z$$

$$\vec{v}(r,\varphi,z) = \frac{1}{r} \cdot \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

b.) grad(u) in Zylinderkoordinaten,

d.h. brauchen

$$\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{3}{r^4} + 2r\sin^2(\varphi)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = 2r^2\sin(\varphi)\cdot\cos(\varphi)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = e^z$$

Ergebnis: grad$(u) =$

$$\left(-\frac{3}{r^4} + 2r\sin^2(\varphi)\right)\cdot\vec{e}_r + \frac{1}{r}\left(2r^{\cancel{2}}\sin(\varphi)\cdot\cos(\varphi)\right)\cdot\vec{e}_\varphi + e^z\cdot\vec{e}_z .$$

c.) $\operatorname{div}\vec{v}$, $\operatorname{rot}\vec{v}$ in Zylinderkoord

$$\vec{v}(r,\varphi,z) = \underbrace{\boxed{1}}_{v_r}\cdot\vec{e}_r + \underbrace{\boxed{0}}_{v_\varphi}\cdot\vec{e}_\varphi + \underbrace{\boxed{0}}_{v_z}\cdot\vec{e}_z$$

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{v} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{1}{r}\cdot v_r} \quad \text{VL}$$

$$= \frac{1}{r}.$$

$$\boxed{\begin{aligned}\operatorname{rot}(\vec{v}) &= \left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial v_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial v_\varphi}{\partial z}\right)\cdot\vec{e}_r + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\cdot\vec{e}_\varphi \\ &+ \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{1}{r}\cdot v_\varphi\right)\cdot\vec{e}_z\end{aligned}} \quad \text{VL}$$

$$= \vec{0}$$

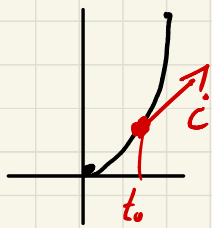
2. Aufgabe (hier: Kurvenintegral = Wegintegral zweiter Ordnung)

generelle Bedeutung: geg. sei Vektorfeld $\vec{F}$ und Kurve c, die in Def'bereich von $\vec{F}$ abbildet. ($c: [0,1] \to \mathbb{R}^3$)

(nur) Notation:

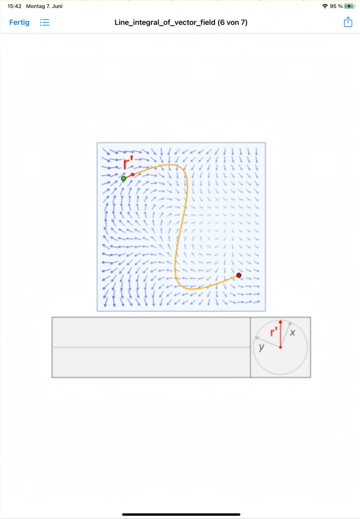
$$\boxed{\int_c \vec{F} \cdot d\vec{s}} = \int_0^1 \left\langle \vec{F}(c(t)), \dot{c}(t) \right\rangle dt$$

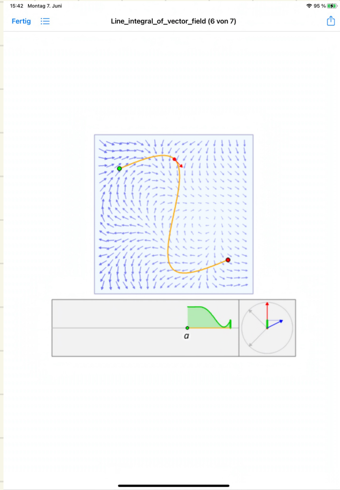
z.B. $c(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$

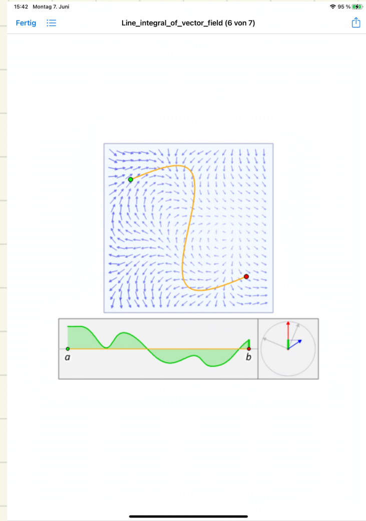


Vorhersehbar

Wildwasserrutsche, kompliziertes Kraftfeld.







$\boxed{A2}$

$$\int_{\vec{\gamma}} \begin{pmatrix} z \\ -y \\ x \end{pmatrix} d\vec{s} \qquad \vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ t \\ \cos(t) \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

$$\int_{\vec{\gamma}} \begin{pmatrix} z \\ -y \\ x \end{pmatrix} d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -t \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos(t) \\ 1 \\ -\sin(t) \end{pmatrix} \right\rangle dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\cos^2(t) - t - \sin^2(t) \right) dt$$

Additions-Theorem

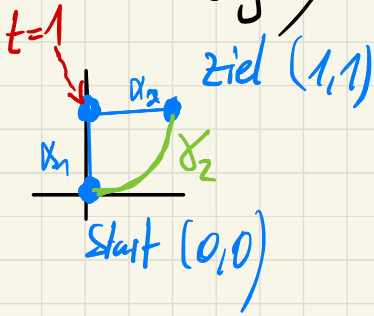
$$= \int_0^{2\pi} \cos(2t) - t \, dt$$

$$= \left[\frac{\sin(2t)}{2} - \frac{t^2}{2} \right]_0^{2\pi} = \underline{\underline{-2\pi^2}}$$

$\boxed{A3}$ $\vec{v}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x,y) \longmapsto \begin{pmatrix} y \\ x+y^2 \end{pmatrix}$$

a.) i.) γ_1:



$$\gamma_1 = [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \longmapsto \begin{cases} \underbrace{\boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}}}_{\alpha_1(t)} & \text{für } 0 \le t \le 1 \\ \underbrace{\boxed{\begin{pmatrix} t-1 \\ 1 \end{pmatrix}}}_{\alpha_2(t)} & \text{für } 1 \le t \le 2 \end{cases}$$

$$\int_{\gamma_1} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_{\alpha_1} \vec{v}\, d\vec{s} + \int_{\alpha_2} \vec{v} \cdot d\vec{s}$$

$$= \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle dt + \int_1^2 \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle dt$$

$$= \int_0^1 t^2\, dt + \underbrace{\cancel{\int_1^2 1\, dt}}_{=1} = \underline{\underline{\frac{4}{3}}}$$

ii.) Achtung, $\vec{v}$ scheint ein Potential zu besitzen (b.))

$$\Rightarrow \int_{\gamma_2} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \frac{4}{3} \text{ muss.}$$

γ_2: Parabelast von $(0,0)$ nach $(1,1)$.

$$\gamma_2 : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$t \longmapsto \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$$

$$\int_{\gamma_2} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} t^2 \\ t+t^4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} \right\rangle dt$$

$$= \int_0^1 \left(t^2 + 2t^2 + 2t^5 \right) dt$$

$$= \left[t^3 + \frac{t^6}{3} \right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{4}{3}}}$$

b.) Satz aus der VL: Sei Def'bereich von $\vec{v}$ konvex und offen.

Dann: $\vec{v}$ hat ein Potential $\Longleftrightarrow$ Integrabilitätsbed.

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \quad \forall i,j$$

hier: gilt $\frac{\partial v_2}{\partial x} = \frac{\partial v_1}{\partial y}$?

$= 1 = \checkmark = 1$

Satz aus VL $\Rightarrow$ Das Vektorfeld $\vec{v}$ besitzt ein Potential

Suche SF u mit $\operatorname{grad}(u) \overset{(*)}{=} -\vec{v}$.

erste Zeile von (*): $\frac{\partial u}{\partial x} = -y$

$\Rightarrow u(x,y) = -xy + c(y)$

zweite Z. von (*): $\frac{\partial u}{\partial y} = \cancel{-x} + c'(y) \overset{!}{=} \cancel{-x} - y^2$

$\Rightarrow c(y) = -\frac{y^3}{3} + C_1$, $C_1 \in \mathbb{R}$ konst.

Ein Pot. von $\vec{v}$ ist gegeben durch

$$u(x,y) = -xy - \frac{y^3}{3} + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R} \text{ konst.}$$

c.) $\int_{\vec{x}} \vec{v} \cdot d\vec{s}$ wobei $\vec{x}$ Rand eines Kreises.

Der Rand eines Kreises wird durch eine Kurve beschrieben, für welche der Start- mit dem Endpunkt übereinstimmt.

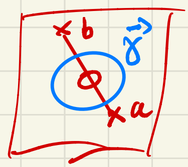
$\vec{v}$ hat Potential $\Longrightarrow$

$$\int_{\vec{x}} \vec{v} \cdot d\vec{s} = 0$$

4. Aufgabe

$$D = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,c) \in \mathbb{R}^3 : c \in \mathbb{R}\}$$

↳ nicht konvex



$$\vec{v} : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x,y,z) \longmapsto \begin{pmatrix} -\frac{y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\vec{\gamma}$ = Einheitskreis

$$\operatorname{rot}(\vec{v}) = \vec{0} \left(= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ?-? \end{pmatrix} \right)$$

b.) $\int_{\vec{\gamma}} \vec{v} \cdot d\vec{s}$ berechnen. (Hätte $\vec{v}$ ein Potential, dann <u>muss</u> $\int_{\vec{\gamma}} \vec{v} \cdot d\vec{s} = 0$)

!

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3 \qquad \text{(Parametrisierung)}$$

$$t \longmapsto \begin{pmatrix} 1 \cdot \cos(t) \\ 1 \cdot \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\int_{\vec{\gamma}} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \underbrace{\sin^2(t) + \cos^2(t)}_{1} \, dt = 2\pi \neq 0.$$