Vorkurs Mathematik
verallgemeinerte Vollständige Induktion

Andreas Unterreiter

12. Juni 2020

Inhaltsverzeichnis

1 Prolog

Gelegentlich treffen Aussagen nicht auf jede natürliche Zahl, sondern auf jede *ganze* Zahl grösser oder gleich einer bestimmten Zahl zu. So gilt etwa

$$\forall n : -4 \leq n \wedge n \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$
$$(-4) + (-3) + (-2) + \ldots + n = \frac{1}{2} \cdot (-4 + n) \cdot (5 + n). \quad (1)$$

Zum Beweis von (1) ist **Satz - Vollständige Induktion** nur bedingt geeignet. Zuerst müsste (1) in eine Form gebracht werden, in der die Variable "n" nicht alle ganzen Zahlen ab -4, sondern alle natürlichen Zahlen durchläuft, dann könnte **Satz - Vollständige Induktion** zum Beweis der modifizierte Aussage eingesetzt werden, um danach die modifizierte Aussage wieder in die Ausgangsformulierung zu bringen.

Dieser Umweg wäre bei allen ähnlichen Beweisen immer ähnlich zu beschreiten.

Das ist zu umständlich.

Statt dessen soll hier eine "verallgemeinerter Vollständige Induktion" vorgestellt werden, die ohne Weiteres zum Nachweis von (1) eingesetzt werden kann.

Vorab ist es angebracht, eine neue Notation einzuführen.

$$\boxed{\{a, \ldots\} := \{n : n \in \mathbb{Z} \wedge a \leq n\}}$$

Um "$n \in \{a, \ldots\}$" nachzuweisen, müssen *drei* Bedingungen erfüllt sein: n muss eine Menge sein, n muss eine ganze Zahl sein und es muss $a \leq n$ gelten. Via **Satz - $\in$Menge** folgt aber aus "$n \in \mathbb{Z}$" die Aussage "n Menge". Also müssen zum Nachweis von "$n \in \{a, \ldots\}$" tatsächlich nur zwei der Bedingungen nachgewiesen werden.

Satz - aZ

$$a \leq n \wedge n \in \mathbb{Z} \qquad \Rightarrow \qquad n \in \{a, \ldots\}.$$

Beweis VS $a \leq n \wedge n \in \mathbb{Z}$.

1: Aus VS"$n \in \mathbb{Z}$" folgt via **Satz - $\in$Menge**: n Menge.

2: Aus ta1 und aus VS folgt per definitionem "$\{a, \ldots\}$": $n \in \{a, \ldots\}$.

$\square$

Ohne allzu viel Mühe überzeugt man sich von folgenden Aussagen:

1) $\{0, \ldots\} = \mathbb{N}$.

2) $\{\sqrt{2}, \ldots\} = \{2, \ldots\}$.

3) $1 \notin \{\sqrt{2}, \ldots\}$, $\sqrt{2} \notin \{\sqrt{2}, \ldots\}$, $2 \in \{\sqrt{2}, \ldots\}$.

4) $\{e, \ldots\} = \{3, \ldots\}$.

5) $\{\pi, \ldots\} = \{4, \ldots\}$.

6) $3 \notin \{\pi, \ldots\}$, $\pi \notin \{\pi, \ldots\}$, $4 \in \{\pi, \ldots\}$.

7) $n \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad n \in \{n, \ldots\}$.

8) $a \in \{a, \ldots\} \quad \Rightarrow \quad a \in \mathbb{Z}$.

Mit Hilfe von "$\{n, \ldots\}$" ist **Satz - vVI** - "**vVI**" ist eine Abkürzung von

"**verallgemeinerte Vollständige Induktion**"

- einprägsam formulierbar:

<u>**Satz - vVI**</u>

$$
\begin{array}{ll}
 & l \in \mathbb{Z} \\
\wedge & l \in E \\
\wedge & \forall \lambda : (\lambda \in \mathbb{Z} \wedge \lambda \in E \wedge l \leq \lambda) \Rightarrow 1 + \lambda \in E \\
\Rightarrow & \\
 & \{l, \ldots\} \subseteq E.
\end{array}
$$

2 $(-4)+(-3)+(-2)+\ldots+n=*$

Die Aussage

Für jede ganze Zahl n mit $-4 \leq n$ gilt:

$$(-4)+(-3)+(-2)+\ldots n=\frac{1}{2}\cdot(-4+n)\cdot(5+n), \quad (2)$$

soll bewiesen werden. Zur Bearbeitung steht

<u>**Satz - vVI**</u>

$$l \in \mathbb{Z}$$

$$\wedge \quad l \in E$$

$$\wedge \quad \forall\lambda : (\lambda \in \mathbb{Z} \wedge \lambda \in E \wedge l \leq \lambda) \Rightarrow 1+\lambda \in E$$

$$\Rightarrow$$

$$\{l,\ldots\} \subseteq E.$$

zur Verfügung. Die Bearbeitung erfolgt ähnlich wie im Abschnitt "**Vollständige Induktion**", jedoch in gestraffter Form. Anders als im Abschnitt "**Vollständige Induktion**" treten hier *zwei* freie Variable - nämlich "l" und "E" - auf. Beide freie Variable werden an Hand der zu beweisenden Aussage festgelegt.

<u>**Neuer Term.**</u> Der noch unbekannte Term "$(-4)+(-3)+(-2)+\ldots+n$" ist für $n \in \{-4,\ldots\}$ (!) rekursiv definiert:

$$(-4)+(-3)+(-2)+\ldots+(-4)=-4, \quad (3)$$

$$\begin{aligned}\forall n : n \in \{-4,\ldots\} \Rightarrow (-4)+(-3)+(-2)+\ldots+(1+n) \\ = ((-4)+(-3)+(-2)+\ldots+n)+(1+n), \quad (4)\end{aligned}$$

<u>**Festlegung l.**</u> (2) soll für alle ganzen Zahlen≥ -4 gelten. Dies führt zur Festlegung

$$l=-4.$$

<u>**Festlegung E.**</u> E soll aus genau jenen Mengen bestehen, für die die Gleichung von (2) wahr ist:

$$E=\left\{\omega : (-4)+(-3)+(-2)+\ldots+\omega=\frac{1}{4}\cdot(-4+\omega)\cdot(5+\omega)\right\}. \quad (5)$$

Um **Satz - vIV** anwenden zu können, muss man sich bei der Festlegung von E nicht auf natürliche oder ganze Zahlen beschränken.

1.Prämisse "$l \in \mathbb{Z}$" . Aus $l = -4$ und $-4 \in \mathbb{Z}$ folgt $l \in \mathbb{Z}$.

2.Prämisse "$l \in E$" . Via (3) gilt

$$(-4) + (-3) + (-2) + \ldots + (-4) = -4. \tag{6}$$

Auch gilt

$$\frac{1}{2} \cdot (-4 + (-4)) \cdot (5 + (-4)) = \frac{1}{2} \cdot (-8) \cdot 1 = -4. \tag{7}$$

Aus (6), (7) folgt

$$(-4) + (-3) + (-2) + \ldots + (-4) = \frac{1}{2} \cdot (-4 + (-4)) \cdot (5 + (-4)). \tag{8}$$

Aus "$-4 \in \mathbb{Z}$" folgt via **Satz - $\in$Menge**,

$$-4 \text{ Menge}. \tag{9}$$

Aus (9) und (8) folgt via (5),

$$-4 \in E,$$

so dass wegen $l = -4$ auch

$$l \in E.$$

3.Prämisse “ $(\lambda \in \mathbb{Z} \wedge \lambda \in E \wedge l \leq \lambda) \Rightarrow 1 + \lambda \in E$ **” .**

`Thema1` $\lambda \in \mathbb{Z} \wedge \lambda \in E \wedge l \leq \lambda.$

`2.1:` Aus `Thema1`“ $\lambda \in E$” folgt via (5):

$$(-4) + (-3) + (-2) + \ldots + \lambda = \frac{1}{2} \cdot (-4 + \lambda) \cdot (5 + \lambda).$$

`2.2:` Aus `Thema1`“ $l \leq \lambda$” und “ $l = -4$” folgt: $-4 \leq \lambda.$

`2.3:` Aus `Thema1`“ $\lambda \in \mathbb{Z}$” folgt: $1 + \lambda \in \mathbb{Z}.$

`3:` Aus `2.2` und aus `Thema1`“ $\lambda \in \mathbb{Z}$”
folgt via **Satz - aZ**: $\lambda \in \{-4, \ldots\}.$

`4.1:` Aus `3` folgt via (4):

$$(-4) + (-3) + (-2) + \ldots + (1 + \lambda) = ((-4) + (-3) + (-2) + \ldots + \lambda) + (1 + \lambda).$$

`4.2:` Aus `2.3` folgt via **Satz -** $\in$**Menge**: $1 + \lambda$ Menge.

`5:` $(-4) + (-3) + (-2) + \ldots + (1 + \lambda)$

$$\stackrel{4.1}{=} ((-4) + (-3) + (-2) + \ldots + \lambda) + (1 + \lambda)$$

$$\stackrel{2.1}{=} \frac{1}{2} \cdot (-4 + \lambda) \cdot (5 + \lambda) + (1 + \lambda)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot ((-4 + \lambda) \cdot (5 + \lambda) + 2 \cdot (1 + \lambda))$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (-20 + \lambda + \lambda^2 + 2 + 2 \cdot \lambda)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (-18 + 3 \cdot \lambda + \lambda^2) = \ldots ?,$$

…und hier wird in gewohnter Weise eine Nebenrechnung, die für alle $\lambda \in \mathbb{Z}$ richtig ist und vom Erstrebten ausgeht, durchgeführt,

$$\frac{1}{2} \cdot (-4 + (1 + \lambda)) \cdot (5 + (1 + \lambda)) = \frac{1}{2} \cdot (-3 + \lambda) \cdot (6 + \lambda)$$
$$= \frac{1}{2} \cdot (-18 + 6 \cdot \lambda - 3 \cdot \lambda + \lambda^2) = \frac{1}{2} \cdot (-18 + 3 \cdot \lambda + \lambda^2), \quad (10)$$

so dass …

`Thema1` $\lambda \in \mathbb{Z} \wedge \lambda \in E \wedge l \leq \lambda$.

...

`5:` $(-4) + (-3) + (-2) + \ldots + (1 + \lambda) = \ldots = \frac{1}{2} \cdot (-18 + 3 \cdot \lambda + \lambda^2)$

$\stackrel{(10)}{=} \frac{1}{2} \cdot (-4 + (1 + \lambda)) \cdot (5 + (1 + \lambda))$.

`6:` Aus `3.2` und aus `5`"$(-4) + (-3) + (-2) + \ldots + (1 + \lambda)$
$= \ldots = \frac{1}{2} \cdot (-4 + (1 + \lambda)) \cdot (5 + (1 + \lambda)$"

folgt via (5): $1 + \lambda \in E$.

Ergo `Thema1`: $\forall \lambda : (\lambda \in \mathbb{Z} \wedge \lambda \in E \wedge l \leq \lambda) \Rightarrow 1 + \lambda \in E$.

Konklusion "$\{-4,\ldots\} \subseteq E$". Für

$$l = -4,$$

und die spezielle Klasse

$$E = \left\{\omega : (-4) + (-3) + (-2) + \ldots + \omega = \frac{1}{4} \cdot (-4+\omega) \cdot (5+\omega)\right\},$$

wurde gezeigt:

1: $l \in \mathbb{Z}$.

2: $l \in E$.

3: $\forall \lambda : (\lambda \in \mathbb{Z} \wedge \lambda \in E \wedge l \leq \lambda) \Rightarrow 1 + \lambda \in E$.

Damit sind die drei Prämissen von **Satz - vVI** wahr. Somit ist auch die Konklusion von **Satz - vVI**,

$$\{l, \ldots\} \subseteq E,$$

also wegen $l = -4$ auch

$$\{-4, \ldots\} \subseteq E, \tag{11}$$

wahr. Im Hinblick auf (2) bedeutet dies:

$\boxed{\texttt{Thema2}}$ $-4 \leq n \in \mathbb{Z}$.

1 Aus `Thema2`$n \in \mathbb{N}$ folgt via **Satz - aZ**: $n \in \{-4, \ldots\}$.

2 Aus `1`"$n \in \{-4, \ldots\}$" und aus (11)"$\{-4, \ldots\} \subseteq E$" folgt per definitionem "$\subseteq$": $n \in E$.

3 Aus `2` und aus (5) folgt:

$$(-4) + (-3) + (-2) + \ldots + n = \frac{1}{2} \cdot (-4+n) \cdot (5+n).$$

Ergo `Thema2`:

$$\forall n : -4 \leq n \in \mathbb{Z} \Rightarrow (-4) + (-3) + (-2) + \ldots + n = \frac{1}{2} \cdot (-4+n) \cdot (5+n).$$

□

3 $1 + 2 \cdot n \leq n^2$

Die Aussage

$$\text{Für jede natürliche Zahl } n \text{ mit } 3 \leq n \text{ gilt:} \quad 1 + 2 \cdot n \leq n^2, \tag{12}$$

soll bewiesen werden.

Es werden zwei Lösungswege dargestellt.

Bearbeitung 1 verallgemeinerte Vollständige Induktion.

Es wird

> **Satz - vVI**
>
> $l \in \mathbb{Z}$
>
> $\wedge \quad l \in E$
>
> $\wedge \quad \forall \lambda : (\lambda \in \mathbb{Z} \wedge \lambda \in E \wedge l \leq \lambda) \Rightarrow 1 + \lambda \in E$
>
> $\Rightarrow$
>
> $\{l, \ldots\} \subseteq E.$

verwendet.

Festlegung l. (12) soll für alle natürlichen Zahlen ≥ 3 gelten. Dies führt zur Festlegung

$$l = 3.$$

Festlegung E. E soll aus genau jenen Mengen bestehen, für die die Gleichung von (12) wahr ist.

$$E = \left\{\omega : 1 + 2 \cdot \omega \leq \omega^2\right\}. \tag{13}$$

1.Prämisse "$l \in \mathbb{Z}$". Aus $l = 3$ und $3 \in \mathbb{Z}$ folgt $l \in \mathbb{Z}$.

2.Prämisse "$l \in E$". Es gilt

$$1 + 2 \cdot 3 = 7,$$

sowie

$$3^2 = 9,$$

so dass via $7 \leq 9$,

$$1 + 2 \cdot 3 \leq 3^2. \tag{14}$$

Aus $3 \in \mathbb{Z}$ folgt via **Satz - $\in$Menge** die Aussage "3 Menge". Hieraus, aus (14) und aus (13) folgt

$$3 \in E,$$

so dass via "$l = 3$" auch

$$l \in E.$$

3.Prämisse "$(\lambda \in \mathbb{Z} \wedge \lambda \in E \wedge l \leq \lambda) \Rightarrow 1 + \lambda \in E$".

`Thema1`		$\lambda \in \mathbb{Z} \wedge \lambda \in E \wedge l \leq \lambda.$
`2.1:`	Aus `Thema1` "$\lambda \in E$" folgt via (13):	$1 + 2 \cdot \lambda \leq \lambda^2.$
`2.2:`	Aus `Thema1` "$l \leq \lambda$" und aus "$l = 3$" folgt:	$3 \leq \lambda.$
`2.3:`	Aus `Thema1` "$\lambda \in \mathbb{Z}$" folgt:	$1 + \lambda \in \mathbb{Z}.$
`3.1:`	Aus `2.3` folgt via **Satz - $\in$Menge**:	$1 + \lambda$ Menge.
`3.2:`	$1 + 2 \cdot (1 + \lambda)$ $= 1 + 2 + 2 \cdot \lambda$ $= 2 + (1 + 2 \cdot \lambda)$ $\stackrel{2.1}{\leq} 2 + \lambda^2 \leq \ldots ?,$	

...und hier ist es nicht unmittelbar einsichtig, wie dieser Term durch "$(1 + \lambda)^2$" nach oben abgeschätzt werden kann. Es empfiehlt sich, in einer Nebenrechnung erst einmal vom Angestrebten auszugehen,

$$2 + \lambda^2 \leq (1 + \lambda)^2$$

$$\Rightarrow 2 + \lambda^2 \leq 1 + 2 \cdot \lambda + \lambda^2$$

$$\Rightarrow 1 + 1 + \lambda^2 \leq 2 \cdot \lambda + 1 + \lambda^2$$

$$\Rightarrow 1 \leq 2 \cdot \lambda,$$

um dann in umgekehrter Reihenfolge, ausgehend von den verfügbaren Eigenschaften von λ, den Weg, wenn möglich, rückwarts zu beschreiten:

$3 \leq \lambda$

$$\Rightarrow 6 \leq 2 \cdot \lambda$$

$$\Rightarrow 1 \leq 2 \cdot \lambda$$

$$\Rightarrow 1 + 1 + \lambda^2 \leq 2 \cdot \lambda + 1 + \lambda^2$$

$$\Rightarrow 2 + \lambda^2 \leq 1 + 2 \cdot \lambda + \lambda^2$$

$$\Rightarrow 2 + \lambda^2 \leq (1 + \lambda)^2.$$

Diese Überlegung wird in die Bearbeitung des Themas aufgenommen. ...

`Thema1`	$\lambda \in \mathbb{Z} \wedge \lambda \in E \wedge l \leq \lambda.$
...	
`3.2`: $1 + 2 \cdot (1 + \lambda) \leq \ldots \leq 2 + \lambda^2.$	
`3.3`: Aus `2.2` folgt:	$6 \leq 2 \cdot \lambda.$
`4`: Aus `3.3` folgt via "$1 \leq 6$" :	$1 \leq 2 \cdot \lambda.$
`5`: Aus `4` folgt:	$1 + 1 + \lambda^2 \leq 2 \cdot \lambda + 1 + \lambda^2.$
`6`: Aus `5` folgt:	$2 + \lambda^2 \leq 1 + 2 \cdot \lambda + \lambda^2.$
`7`: Aus `6` folgt:	$2 + \lambda^2 \leq (1 + \lambda)^2.$
`8`: Aus `3.2` und aus `7` folgt:	$1 + 2 \cdot (1 + \lambda) \leq (1 + \lambda)^2.$
`9`: Aus `3.1` und aus `8` folgt per definitionem "E" :	$1 + \lambda \in E.$

Ergo `Thema1`: $\forall \lambda : (\lambda \in \mathbb{Z} \wedge \lambda \in E \wedge l \leq \lambda) \Rightarrow 1 + \lambda \in E.$

Konklusion “$\{3,\ldots\} \subseteq E$” . Für

$$l = 3,$$

und die spezielle Klasse

$$E = \left\{\omega : 1 + 2 \cdot \omega \leq \omega^2\right\},$$

wurde gezeigt:

`1:` $l \in \mathbb{Z}$.

`2:` $l \in E$.

`3:` $\forall \lambda : (\lambda \in \mathbb{Z} \wedge \lambda \in E \wedge l \leq \lambda) \Rightarrow 1 + \lambda \in E$.

Damit sind die drei Prämissen von **Satz - vVI** wahr. Somit ist auch die Konklusion von **Satz - vVI**,

$$\{l,\ldots\} \subseteq E,$$

also wegen $l = 3$ auch

$$\{3,\ldots\} \subseteq E, \tag{15}$$

wahr. Im Hinblick auf (12) bedeutet dies:

$\boxed{\texttt{Thema2}}$	$3 \leq n \in \mathbb{N}$.
`1` Aus `Thema2`“$n \in \mathbb{N}$” folgt:	$n \in \mathbb{Z}$.
`2` Aus `Thema2`“$3 \leq n$” und `1` folgt via **Satz - aZ**:	$n \in \{3,\ldots\}$.
`3` Aus `2`“$n \in \{3,\ldots\}$” und aus (15)“$\{3,\ldots\} \subseteq E$” folgt per definitionem “$\subseteq$” :	$n \in E$.
`4` Aus `3` und aus (13) folgt:	$1 + 2 \cdot n \leq n^2$.

Ergo `Thema2`: $\forall n : 3 \leq n \in \mathbb{N} \Rightarrow 1 + 2 \cdot n \leq n^2$.

$\square$

Bearbeitung 2 Rechnen in $\mathbb{R}$.

Es ist ein Privileg des Vorkurses, bei der Darstellung eines Gebiets der Mathematik - die verallgemeinerte Vollständige Induktion - an geeigneten Stellen in andere Gebiete der Mathematik abweichen zu können.

(12) eignet sich hervorragend für eine Abweichung in die reelle Analysis. Nicht nur weil das Rechnen in $\mathbb{R}$ reaktiviert wird, es wird in $\mathbb{R} \to \mathbb{N}, \mathbb{Z}$ auch eine allgemeine Methode zur Bearbeitung einiger mathematischer Aufgaben vorgestellt.

(12) *kann, muss aber nicht* mit verallgemeinerter Vollständiger Induktion nachgewiesen werden.

Wieso wurde (12) mit verallgemeinerter Vollständiger Induktion bewiesen? Weil sich die Fragestellung auf natürliche Zahlen$\geq$ 3 bezieht und weil **Satz - vVI** bekannt ist.

Wenn aber (12) nicht nur für *natürliche*, sondern allgemeiner für *reelle* Zahlen$\geq$ 3 richtig wäre? Dann wäre (12) vermutlich in der Form

$$\text{Für jede reelle Zahl } x \text{ mit } 3 \leq x \text{ gilt:} \quad 1 + 2 \cdot x \leq x^2, \tag{16}$$

dargestellt worden.

Die Wirkung des - mathematisch irrelevanten - Wechsels von der (gebundenen) Variablen "n" zur (gebundenen) Variablen "x" ist enorm: Bei "n" denkt man auf Grund "üblicher Bezeichnungen" an natürliche (oder ganze) Zahlen mit Abzählen, Teilbarkeitsregeln, Brüchen, Exponenten, Vollständiger Induktion. Bei "x" denkt man an reelle Zahlen mit Kurvendiskussionen, Ableitungen, Integralen. Einleuchtend, dass je nach Sichtweise - "n" oder "x" - unterschiedliche Vorstellungen der zur Verfügung stehenden Methoden aktiviert werden und gewisse Ideen zur Problemlösung erscheinen, andere aber gar nicht erst aufkommen.

Wer hat schon je daran gedacht, eine Aussage über natürliche Zahlen erst für reelle Zahlen zu beweisen?

Vermutlich wenige.

Dabei ist die Idee, den Umweg über die reellen Zahlen zu nehmen, auf Grund der unscheinbaren Aussagen

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R},$$

$$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R},$$

nicht einmal so fernliegend: Wenn eine mathematische Aussage *für alle reellen Zahlen* gilt, dann sicher auch die *speziellen reellen Zahlen aus* $\mathbb{N}$ - also die natürlichen Zahlen - und die *speziellen reellen Zahlen aus* $\mathbb{Z}$ - also die ganzen Zahlen.

Diese Beobachtung ist es wert, als Merksatz formuliert zu werden:

$\mathbb{R} \to \mathbb{N}, \mathbb{Z}$

Eine mathematische Aussage, die für alle $x \in \mathbb{R}$ richtig ist, ist auch für alle $n \in \mathbb{N}$ und für alle $n \in \mathbb{Z}$ richtig.

Im Hinblick auf (16) ist eine modifizierte Form dieser Merkregel besser einsetzbar:

$\mathbb{R} \to \mathbb{N}, \mathbb{Z}$ **- unt**

Eine mathematische Aussage, die für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $a \leq x$ richtig ist, ist auch für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $a \leq n$ und für alle $n \in \mathbb{Z}$ mit $a \leq n$ richtig.

Der Vollständigkeit halber sei hier auch noch

$\mathbb{R} \to \mathbb{N}, \mathbb{Z}$ **- obn**

Eine mathematische Aussage, die für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \leq b$ richtig ist, ist auch für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \leq b$ und für alle $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \leq b$ richtig.

angeführt.

Für welche reellen x gilt die Abschätzung von (16) ? Wieder bietet es sich an, zunächst von der angestrebten Aussage auszugehen:

$$
\begin{aligned}
&1 + 2 \cdot x \leq x^2 \\
&\Rightarrow 0 \leq -1 - 2 \cdot x + x^2 \\
&\Rightarrow 0 \leq -2 + 1 - 2 \cdot x + x^2 \\
&\Rightarrow 0 \leq -2 + (1 - x)^2 \\
&\Rightarrow 2 \leq (1 - x)^2 \\
&\Rightarrow \sqrt{2} \leq |1 - x|,
\end{aligned}
$$

Diese Abschätzung soll Gegenstand eines eigenen Satzes, dessen Beweis das Rechnen mit $\leq$ und mit dem reellen Betrag $|.|$ involviert, sein. Der Satz besteht aus einem “A priori - Teil ” - in dem von der Gültigkeit der Abschätzung $\sqrt{2} \leq |1 - x|$” ausgegangen wird - und aus einem “A posteriori - Teil ” - in dem Bedingungen für die Gültigkeit der Abschätzung $\sqrt{2} \leq |1 - x|$ angegeben werden.

Satz - abs -1

a) $x \in \mathbb{R} \wedge \sqrt{2} \leq |1 - x| \quad \Rightarrow \quad x \leq 1 - \sqrt{2} \quad \vee \quad 1 + \sqrt{2} \leq x.$

b) $x \in \mathbb{R} \wedge \left(x \leq 1 - \sqrt{2} \quad \vee \quad 1 + \sqrt{2} \leq x\right) \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2} \leq |1 - x|.$

Beweis a) VS $x \in \mathbb{R} \wedge \sqrt{2} \leq |1 - x|$.

Aus VS $x \in \mathbb{R}$ folgt $1 - x \leq 0$ oder $0 \leq 1 - x$.

Fallunterscheidung.

1.Fall $1 - x \leq 0$.

Dann $|1 - x| = -(1 - x)$ und aus VS $\sqrt{2} \leq |1 - x|$ folgt $\sqrt{2} \leq -(1 - x)$ und hieraus $\sqrt{2} \leq -1 + x$, so dass $1 + \sqrt{2} \leq x$.

Es folgt $x \leq 1 - \sqrt{2} \quad \vee \quad 1 + \sqrt{2} \leq x$.

2.Fall $0 \leq 1 - x$.

Dann $|1 - x| = 1 - x$ und aus VS $\sqrt{2} \leq |1 - x|$ folgt $\sqrt{2} \leq 1 - x$ und hieraus $x + \sqrt{2} \leq 1$, so dass $x \leq 1 - \sqrt{2}$.

Es folgt $x \leq 1 - \sqrt{2} \quad \vee \quad 1 + \sqrt{2} \leq x$.

Ende Fallunterscheidung.

In beiden Fällen gilt: $x \leq 1 - \sqrt{2} \quad \vee \quad 1 + \sqrt{2} \leq x$.

⋆

Beweis b) VS $x \in \mathbb{R} \left(x \leq 1 - \sqrt{2} \quad \vee \quad 1 + \sqrt{2} \leq x\right)$.

Nach VS gilt $\left(x \leq 1 - \sqrt{2} \quad \vee \quad 1 + \sqrt{2} \leq x\right)$.

Fallunterscheidung.

1.Fall $x \leq 1 - \sqrt{2}$.

Es folgt $\sqrt{2} + x \leq 1$, so dass

$$\sqrt{2} \leq 1 - x. \tag{17}$$

Hieraus folgt via $0 < \sqrt{2}$ auch $0 \leq 1 - x$, so dass $1 - x = |1 - x|$ und sich via (17) die Abschätzung $\sqrt{2} \leq |1 - x|$ ergibt.

2.Fall $1 + \sqrt{2} \leq x$.

Es folgt $1 \leq x - \sqrt{2}$, und hieraus $-x + 1 \leq -\sqrt{2}$, so dass

$$1 - x \leq -\sqrt{2}. \tag{18}$$

Aus (18) folgt via $-\sqrt{2} < 0$ die Abschätzung $1 - x \leq 0$ und hiermit $1 - x = -|1 - x|$. Dies in (18) eingesetzt ergibt $-|1 - x| \leq -\sqrt{2}$, woraus $\sqrt{2} \leq |1 - x|$ folgt.

Ende Fallunterscheidung.

In beiden Fällen gilt: $\sqrt{2} \leq |1 - x|$.

□

Mit Hife von **Satz - abs -1** kann (16) in zwei Schritten nachgewiesen werden.

> **Satz - abs -2**
>
> `a)` $x \in \mathbb{R} \wedge 1 + \sqrt{2} \leq x \quad \Rightarrow \quad 1 + 2 \cdot x \leq x^2.$
>
> `b)` $x \in \mathbb{R} \wedge 3 \leq x \quad \Rightarrow \quad 1 + 2 \cdot x \leq x^2.$

Beweis `a)` VS $x \in \mathbb{R} \wedge 1 + \sqrt{2} \leq x$.

Aus VS folgt via **Satz - abs -1**: $\sqrt{2} \leq |1 - x|$. Hieraus und aus $0 \leq \sqrt{2}$ folgt $(\sqrt{2})^2 \leq |1 - x|^2$, so dass via $(\sqrt{2})^2 = 2$ und $|1 - x|^2 = (1 - x)^2$ die Abschätzung $2 \leq (1-x)^2$, also auch $2 \leq 1 - 2 \cdot x + x^2$ folgt. Es ergibt sich hieraus $1 + 2 \cdot x \leq x^2$.

⋆

Beweis `b)` VS $x \in \mathbb{R} \wedge 3 \leq x$.

Bekannter Massen gilt

$$1 < \sqrt{2} < 2,$$

so dass

$$2 < 1 + \sqrt{2} < 3. \tag{19}$$

Aus (19) und aus VS $3 \leq x$ folgt $1 + \sqrt{2} \leq x$. Hieraus und aus VS $x \in \mathbb{R}$ folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $1 + 2 \cdot x \leq x^2$.

□

Wendet man auf **Satz - abs -2** `b)` Merkregel $\mathbb{R} \to \mathbb{N}, \mathbb{Z}$ **- unt** an, so folgt ohne Weiteres

$$n \in \mathbb{N} \wedge 3 \leq n \quad \Rightarrow \quad 1 + 2 \cdot n \leq n^2.$$

Hat man Merkregel $\mathbb{R} \to \mathbb{N}, \mathbb{Z}$ **- unt** nicht parat, muss (12) noch mit Hilfe von **Satz - abs -2** `b)` bewiesen werden.

> **Satz - abs -3**
>
> $$n \in \mathbb{N} \wedge 3 \leq n \quad \Rightarrow \quad 1 + 2 \cdot n \leq n^2.$$

Beweis VS $n \in \mathbb{N} \wedge 3 \leq n$.

Aus VS $n \in \mathbb{N}$ und aus $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ folgt $n \in \mathbb{R}$. Aus $n \in \mathbb{R}$ und aus VS $3 \leq n$ folgt via **Satz - abs -2** `b)`: $1 + 2 \cdot n \leq n^2$.

□

4 $n^2 \leq 2^n$

Die Aussage

$$\text{Für jede natürliche Zahl } n \text{ mit } 4 \leq n \text{ gilt:} \quad n^2 \leq 2^n, \tag{20}$$

soll bewiesen werden.

Da der Term "2^x" für $x \in \mathbb{R}$ in der gegenwärtigen Phase des Vorkurses noch nicht zur Verfügung steht, erfolgt die Bearbeitung mit

Satz - vVI

$$\begin{array}{ll} & l \in \mathbb{Z} \\ \wedge & l \in E \\ \wedge & \forall \lambda : (\lambda \in \mathbb{Z} \wedge \lambda \in E \wedge l \leq \lambda) \Rightarrow 1 + \lambda \in E \\ \Rightarrow & \\ & \{l, \ldots\} \subseteq E. \end{array}$$

Festlegung l. (20) soll für alle natürlichen Zahlen$\geq$ 4 gelten. Dies führt zur Festlegung

$$l = 4.$$

Festlegung E. E soll aus genau jenen Mengen bestehen, für die die Gleichung von (20) wahr ist.

$$E = \left\{ \omega : \omega^2 \leq 2^\omega \right\}. \tag{21}$$

1.Prämisse "$l \in \mathbb{Z}$" . Aus $l = 4$ und $4 \in \mathbb{Z}$ folgt $l \in \mathbb{Z}$.

2.Prämisse "$l \in E$" . Es gilt

$$4^2 = 16,$$

sowie

$$2^4 = 16,$$

so dass wegen $16 \leq 16$,

$$4^2 \leq 2^4. \tag{22}$$

Aus $4 \in \mathbb{Z}$ folgt via **Satz - $\in$Menge** die Aussage "4 Menge" . Hieraus, aus (22) und aus (21) folgt

$$4 \in E,$$

und somit wegen $l = 4$ auch

$$l \in E.$$

3.Prämisse "$(\lambda \in \mathbb{Z} \wedge \lambda \in E \wedge l \leq \lambda) \Rightarrow 1 + \lambda \in E$" .

`Thema1` $\lambda \in \mathbb{Z} \wedge \lambda \in E \wedge l \leq \lambda$.

`2.1:` Aus `Thema1`"$\lambda \in E$" folgt via (21): $\lambda^2 \leq 2^\lambda$.

`2.2:` Aus `Thema1`"$l \leq \lambda$" und aus "$l = 4$" folgt: $4 \leq \lambda$.

`2.3:` Aus `Thema1`"$\lambda \in \mathbb{Z}$" folgt: $1 + \lambda \in \mathbb{Z}$.

`3.1:` Aus `2.3` folgt via **Satz - $\in$Menge**: $1 + \lambda$ Menge.

`3.2:` $(1+\lambda)^2$
$= 1 + 2 \cdot \lambda + \lambda^2$
$\overset{2.1}{\leq} 1 + 2 \cdot \lambda + 2^\lambda \leq \ldots ?$,

... und nun sollte weiter "$1+2\cdot\lambda+2^\lambda \leq 2^{1+\lambda}$" abgeschätzt werden können. Doch ist diese Abschätzung richtig? Neuerlich geht man vom Erstrebten aus,

$$1 + 2 \cdot \lambda + 2^\lambda \leq 2^{1+\lambda}$$
$$\Rightarrow 1 + 2 \cdot \lambda + 2^\lambda \leq 2 \cdot 2^\lambda$$
$$\Rightarrow 1 + 2 \cdot \lambda + 2^\lambda \leq 2^\lambda + 2^\lambda$$
$$\Rightarrow 1 + 2 \cdot \lambda \leq 2^\lambda,$$

und da nach `2.1` die Abschätzung "$\lambda^2 \leq 2^\lambda$" zur Verfügung steht, könnte man, wenn man die Abschätzung

$$\boxed{\textbf{to do:}} \quad 1 + 2 \cdot \lambda \leq \lambda^2, \tag{23}$$

zur Verfügung hätte, folgender Massen zu Ende argumentieren:

$$(1+\lambda)^2$$
$$= 1 + 2 \cdot \lambda + \lambda^2$$
$$= (1 + 2 \cdot \lambda) + \lambda^2$$
$$\overset{(23)}{\leq} \lambda^2 + \lambda^2$$
$$= 2 \cdot \lambda^2$$
$$\overset{2.1}{\leq} 2 \cdot 2^\lambda$$
$$= 2^{1+\lambda}.$$

Doch gilt (23) ? Sicher nicht *für alle* $\lambda \in \mathbb{N}$, da etwa für $\lambda = 0$, $1+2\cdot\lambda = 1+2\cdot 0 = 1$ echt grösser als $0 = 0^2 = \lambda^2$ ist. Jedoch wird (23) gar nicht für *beliebige* natürliche λ benötigt, sondern nur für ein λ aus dem Kontext von `Thema1`. Für ein derartiges λ gilt unter anderem `2.2`"$4 \le \lambda$" . Gilt (23) "wenigstens" für alle λ mit $4 \le \lambda \in \mathbb{N}$? Es gibt zwei Möglichkeiten, dies zu klären. Entweder man beweist die Aussage

Für jede natürliche Zahl n mit $4 \le n$ gilt: $\quad 1 + 2 \cdot n \le n^2$,

- oder man erinnert sich an das vorherige Kapitel mit **Satz - abs -3**.

Hier wird das Erinnern und das Schaffen von Erinnern - das Erlernen - nachdrücklich empfohlen.

Mit **Satz - abs - 3** kann die Bearbeitung von `Thema1` zielstrebig fortgesetzt werden ...

$\boxed{\texttt{Thema1}}$		$\lambda \in \mathbb{Z} \wedge \lambda \in E \wedge l \le \lambda$.
...		
`3.2`:		$(1+\lambda)^2 \le \ldots \le 1 + 2 \cdot \lambda + 2^\lambda$.
`3.3`:	Aus "$3 \le 4$" und aus `2.2` folgt:	$3 \le \lambda$.
`4`:	Aus "$0 \le 3$" und aus `3.3` folgt:	$0 \le \lambda$.
`5`:	Aus `4` und aus `Thema1`"$\lambda \in \mathbb{Z}$" folgt:	$\lambda \in \mathbb{N}$.
`6`:	Aus `5` und aus `3.3` folgt via **Satz - abs -3**:	$1 + 2 \cdot \lambda \le \lambda^2$.
`7`:	$(1+\lambda)^2$ $\stackrel{3.2}{\le} 1 + 2 \cdot \lambda + 2^\lambda$ $\stackrel{6}{\le} \lambda^2 + 2^\lambda$ $\stackrel{2.1}{\le} 2^\lambda + 2^\lambda$ $= 2 \cdot 2^\lambda$ $= 2^{1+\lambda}$.	
`8`:	Aus `3.1` und aus `7`"$(1+\lambda)^2 \le \ldots \le 2^{1+\lambda}$" folgt per definitionem "E" :	$1 + \lambda \in E$.

Ergo `Thema1`: $\quad \forall \lambda : (\lambda \in \mathbb{Z} \wedge \lambda \in E \wedge l \le \lambda) \Rightarrow 1 + \lambda \in E$.

Konklusion "$\{4,\ldots\}\subseteq E$" . Für

$$l = 4,$$

und die spezielle Klasse

$$E = \left\{\omega : \omega^2 \le 2^\omega\right\},$$

wurde gezeigt:

`1:` $l \in \mathbb{Z}$.

`2:` $l \in E$.

`3:` $\forall\lambda : (\lambda \in \mathbb{Z} \wedge \lambda \in E \wedge l \le \lambda) \Rightarrow 1 + \lambda \in E$.

Damit sind die drei Prämissen von **Satz - vVI** wahr. Somit ist auch die Konklusion von **Satz - vVI**,

$$\{l,\ldots\} \subseteq E,$$

also wegen $l = 4$ auch

$$\{4,\ldots\} \subseteq E, \tag{24}$$

wahr. Im Hinblick auf (20) bedeutet dies:

`Thema2`	$4 \le n \in \mathbb{N}$.
1 Aus `Thema2`"$n \in \mathbb{N}$" folgt:	$n \in \mathbb{Z}$.
2 Aus `Thema2`"$4 \le n$" und `1` folgt via **Satz - aZ**:	$n \in \{4,\ldots\}$.
3 Aus `2`"$n \in \{4,\ldots\}$" und aus (24)"$\{4,\ldots\} \subseteq E$" folgt per definitionem "$\subseteq$" :	$n \in E$.
4 Aus `3` und aus (21) folgt:	$n^2 \le 2^n$.

Ergo `Thema2`: $\forall n : 4 \le n \in \mathbb{N} \Rightarrow n^2 \le 2^n$.

□

5 $n^2 \leq 3^n$

Die Aussage

$$\text{Für jede natürliche Zahl } n \text{ gilt:} \quad n^2 \leq 3^n, \tag{25}$$

soll bewiesen werden. Als Hilfsmittel darf, wie es bei Übungsaufgaben der Mathematik gelegentlich vorkommt, ein "HINWEIS" benutzt werden.

HINWEIS:

$$\text{Für jede natürliche Zahl } n \text{ mit } 2 \leq n \text{ gilt:} \quad 1 + 2 \cdot n \leq 2 \cdot n^2. \tag{26}$$

HINWEISe müssen zur Bearbeitung einer Aufgabe nur dann bewiesen werden, wenn dies ausdrücklich verlangt wird. Dies ist im vorliegenden Fall nicht so. Dennoch eignet sich (26) hervorragend als Übungsaufgabe, die wie in Kapitel $1 + 2 \cdot n \leq n^2$ auf zwei Arten bearbeitet werden kann. Die Ausführungen sind im Übungsteil zu finden.

1.Versuch (25) ist eine Aussage, die für alle natürlichen Zahlen gelten soll. Es liegt nahe, zur Bearbeitung **Satz - Vollständige Induktion** einzusetzen.

Festlegung E. E soll aus genau jenen natürlichen Zahln bestehen, für die die Gleichung von (25) wahr ist:

$$E = \left\{\omega : \omega \in \mathbb{N} \land \omega^2 \leq 3^\omega\right\}. \tag{27}$$

1.Prämisse "$E \subseteq \mathbb{N}$".

`Thema1`	$p \in E$.
`1`: Aus `Thema1` folgt via (27):	$p \in \mathbb{N} \land p^2 \leq 3^p$.
`2`: Aus `1` folgt:	$p \in \mathbb{N}$.

Ergo `Thema1`: $\forall p : p \in E \Rightarrow p \in \mathbb{N}$.

Konsequenz per definitionem "$\subseteq$": $E \subseteq \mathbb{N}$.

2.Prämisse "$0 \in E$". Es gilt

$$0^2 = 0, \tag{28}$$

sowie

$$3^0 = 1, \tag{29}$$

so dass via "$0 \leq 1$" aus (28), (29),

$$0^2 \leq 3^0. \tag{30}$$

Wie bereits früher festgestellt gilt auch

$$0 \text{ Menge} \wedge 0 \in \mathbb{N}. \tag{31}$$

Aus (31) und (30) folgt via (27),

$$0 \in E.$$

3.Prämisse "$\lambda \in E \Rightarrow 1 + \lambda \in E$".

`Thema2`		$\lambda \in E$.
`1.1:`	Aus `Thema2` folgt via (27):	$\lambda \in \mathbb{N}$.
`1.2:`	Aus `Thema2` folgt via (27):	$\lambda^2 \leq 3^\lambda$.
`2.1:`	Aus `1.1` folgt:	$1 + \lambda \in \mathbb{N}$.
`2.2:`	$(1+\lambda)^2$ $= 1 + 2 \cdot \lambda + \lambda^2$ $\stackrel{1.2}{\leq} 1 + 2 \cdot \lambda + 3^\lambda \leq \ldots ?,$	

...und hier würde man gerne die Abschätzung "$1 + 2 \cdot \lambda \leq 2 \cdot \lambda^2$" vom HINWEIS verwenden. Doch im HINWEIS ist "$2 \leq \lambda$" vorausgesetzt. Dies ist hier nicht notwendiger Weise der Fall, denn `1.1`"$\lambda \in \mathbb{N}$" lässt auch die Möglichkeiten $\lambda = 0$ oder $\lambda = 1$ zu. Gilt die Abschätzung von HINWEIS auch in diesen Fällen ? Die Antwort ist zweimal "Nein", da für $\lambda = 0$, der Term $1 + 2 \cdot \lambda = 1$ und 1 ist echt grösser als $0 = 2 \cdot 0^2 = 2 \cdot \lambda^2$ ist und für $\lambda = 1$ der Term $1 + 2 \cdot \lambda$ gleich 3 und 3 ist echt grösser als $2 = 2 \cdot 1^2 = 2 \cdot \lambda^2$ ist. Andererseits könnte unter Verwendung der im HINWEIS gegebenen Abschätzung mit

$$1 + 2 \cdot \lambda^2 + 3^\lambda \stackrel{\text{HINWEIS}}{\leq} 2 \cdot \lambda^2 + 3^\lambda \stackrel{1.2}{\leq} 2 \cdot 3^\lambda + 3^\lambda = 3 \cdot 3^\lambda = 3^{1+\lambda},$$

zielgerechnet weiter umgeformt werden. Diese Bearbeitung ist so überzeugend, dass es naheliegt, die Argumentation, wenn schon nicht für alle natürlichen λ möglich, zumindest für alle λ mit $2 \leq \lambda \in \mathbb{N}$ "zu retten". Man gelangt zur verallgemeinerten Vollständigen Induktion.

2.Versuch verallgemeinerte Vollständige Induktion.

Festlegung l. Nicht von der zu beweisenden Aussage von (25), sondern von den Prämissen vom HINWEIS geleitet, liegt es nahe,

$$l = 2,$$

zu setzen.

Festlegung E. E soll genau aus jenen Mengen bestehen, für die die Aussage von (25) wahr ist,

$$E = \{\omega : \omega^2 \le 3^\omega\}. \tag{32}$$

In der nun Fahrt aufnehmenden neuen Bearbeitung ist die Festlegung von E in (27) des 1.Versuchs hinfällig. Ebenso kann nicht mehr auf die Aussagen " $E \subseteq \mathbb{N}$" , " $0 \in E$" des 1.Versuchs zurückgegriffen werden, da das dortige " E" ein anderes als das aktuelle " E" von (32) ist.

1.Prämisse " $l \in \mathbb{Z}$" . Aus $l = 2$ und $2 \in \mathbb{Z}$ folgt $l \in \mathbb{Z}$.

2.Prämisse " $l \in E$" . Es gilt

$$1 + 2 \cdot 2 = 5,$$

sowie

$$3^2 = 9,$$

so dass via $5 \le 9$,

$$1 + 2 \cdot 2 \le 3^2. \tag{33}$$

Aus $2 \in \mathbb{Z}$ folgt via **Satz - $\in$Menge** die Aussage "2 Menge" . Hieraus, aus (33) und aus (32) folgt

$$2 \in E,$$

so dass wegen $l = 2$ auch

$$l \in E$$

gilt.

3.Prämisse "$(\lambda \in \mathbb{Z} \wedge \lambda \in E \wedge 2 \leq \lambda) \Rightarrow 1 + \lambda \in E$" .

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\qquad \lambda \in \mathbb{Z} \wedge \lambda \in E \wedge 2 \leq \lambda.$

`2.1:` Aus `Thema1`"$\lambda \in E$" folgt via (32): $\lambda^2 \leq 3^\lambda.$

`2.2:` Aus `Thema1`"$l \leq \lambda$" und aus "$l = 2$" folgt: $2 \leq \lambda.$

`2.3:` Aus `Thema1`"$\lambda \in \mathbb{Z}$" folgt: $1 + \lambda \in \mathbb{Z}.$

`2.4:` Aus `Thema1`"$\lambda \in \mathbb{Z}$" folgt: $\lambda \in \mathbb{N}.$

`3.1:` Aus `2.3` folgt via **Satz - $\in$Menge**: $1 + \lambda$ Menge.

`3.2:` Aus `2.2`, aus `2.4` folgt via HINWEIS: $1 + 2 \cdot \lambda \leq 2 \cdot \lambda^2.$

`3.3:` Aus `2.1` folgt: $2 \cdot \lambda^2 \leq 2 \cdot 3^\lambda.$

`3.4:` $(1 + \lambda)^2$

$$= 1 + 2 \cdot \lambda + \lambda^2$$

$$\stackrel{2.1}{\leq} 1 + 2 \cdot \lambda + 3^\lambda$$

$$\stackrel{3.2}{\leq} 2 \cdot \lambda^2 + 3^\lambda$$

$$\stackrel{3.3}{\leq} 2 \cdot 3^\lambda + 3^\lambda$$

$$= 3 \cdot 3^\lambda$$

$$= 3^{1+\lambda}.$$

`4:` Aus `3.1` und aus `3.4`"$(1 + \lambda)^2 \leq \ldots \leq 3^{1+\lambda}$"
folgt per definitionem "E" : $1 + \lambda \in E.$

Erog `Thema1`: $\forall \lambda : (\lambda \in \mathbb{Z} \wedge \lambda \in E \wedge l \leq \lambda) \Rightarrow 1 + \lambda \in E.$

Konklusion "$\{2,\ldots\} \subseteq E$" . Für

$$l = 2,$$

und die spezielle Klasse

$$E = \left\{\omega : \omega^2 \le 3^\omega\right\},$$

wurde gezeigt:

`1`: $l \in \mathbb{Z}$.

`2`: $l \in E$.

`3`: $\forall \lambda : (\lambda \in \mathbb{Z} \wedge \lambda \in E \wedge l \le \lambda) \Rightarrow 1 + \lambda \in E$.

Damit sind die drei Prämissen von **Satz - vVI** wahr. Somit ist auch die Konklusion von **Satz - vVI**,

$$\{l,\ldots\} \subseteq E,$$

also wegen $l = 2$ auch

$$\{2,\ldots\} \subseteq E, \tag{34}$$

wahr. Im Hinblick auf (25) bedeutet dies:

`Thema2`	$2 \le n \in \mathbb{N}$.
`1` Aus `Thema2`"$n \in \mathbb{N}$" folgt:	$n \in \mathbb{Z}$.
`2` Aus `Thema2`"$2 \le n$" und `1` folgt via **Satz - aZ**:	$n \in \{2,\ldots\}$.
`3` Aus `2`"$n \in \{2,\ldots\}$" und aus (34)"$\{2,\ldots\} \subseteq E$" folgt per definitionem "$\subseteq$" :	$n \in E$.
`4` Aus `3` und aus (32) folgt:	$n^2 \le 3^n$.

Ergo `Thema2`:

$$\forall n : 2 \le n \in \mathbb{N} \Rightarrow n^2 \le 3^n. \tag{35}$$

...und trotzdem ist die Bearbeitung von (25) nicht beendet, denn in (25) wird gesagt, dass die Abschätzung "$n^2 \le 3^n$" für *jede* natürliche Zahl n gilt und nicht nur, wie soeben mit (35) gezeigt, für jede natürliche Zahl n, die grösser oder gleich 2 ist.

Glücklicher Weise ist die Diskrepanz zwischen dem bereits Bewiesenen und dem zu Beweisenden gering. Zum Nachweis von (25) fehlen nur mehr die Verifikationen für $n = 0$ und $n = 1$. Dies kann durch Einsetzen bewerkstelligt werden.

`Thema3` $n \in \mathbb{N}$.

4: Aus `Thema3` folgt: $n < 2 \vee 2 \leq n$.

`Fallunterscheidung`

`4.1.Fall` $n < 2$.

5: Aus `Thema3` und aus `4.1.Fall` folgt: $n = 0 \vee n = 1$.

`Fallunterscheidung`

`5.1.Fall` $n = 0$.

6: $n^2 \overset{\texttt{5.1.Fall}}{=} 0^2 = 0 \leq 1 = 3^0 \overset{\texttt{5.1.Fall}}{=} 3^n$.

7: Aus 6 folgt: $n^2 \leq 3^n$.

`5.2.Fall` $n = 1$.

6: $n^2 \overset{\texttt{5.2.Fall}}{=} 1^2 = 1 \leq 3 = 3^1 \overset{\texttt{5.2.Fall}}{=} 3^n$.

7: Aus 6 folgt: $n^2 \leq 3^n$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $n^2 \leq 3^n$.

`4.2.Fall` $2 \leq n$.

5: Aus `4.2.Fall` und aus `Thema3` folgt via (35): $n^2 \leq 3^n$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $n^2 \leq 3^n$.

Ergo `Thema3`: $\forall n : n \in \mathbb{N} \Rightarrow n^2 \leq 3^n$.

□

6 UE - verallgemeinerte Vollständige Induktion

6.1 $1+2\cdot n\leq 2\cdot n^2$

Die Aussage

$$\text{Für jede natürliche Zahl } n \text{ mit } 2\leq n \text{ gilt:}\quad 1+2\cdot n\leq 2\cdot n^2, \tag{36}$$

soll bewiesen werden. Die Bearbeitung ist ähnlich wie in Kapitel “$1+2\cdot n\leq n^2$”, doch gestraffter.

Es sollen zwei Vorgehensweisen präsentiert werden.

Bearbeitung 1 verallgemeinerte Vollständige Induktion.

Es wird

Satz - vVI

$$
\begin{array}{ll}
 & l\in\mathbb{Z}\\
\wedge & l\in E\\
\wedge & \forall\lambda:(\lambda\in\mathbb{Z}\wedge\lambda\in E\wedge l\leq\lambda)\Rightarrow 1+\lambda\in E\\
\Rightarrow & \\
 & \{l,\ldots\}\subseteq E.
\end{array}
$$

verwendet.

Festlegung l. (36) soll für alle natürlichen Zahlen$\geq$ 2 gelten. Dies führt zur Festlegung

$$l=2.$$

Festlegung E. E soll aus genau jenen Mengen bestehen, für die die Gleichung von (36) wahr ist.

$$E=\left\{\omega:1+2\cdot\omega\leq 2\cdot\omega^2\right\}. \tag{37}$$

1.Prämisse “$l\in\mathbb{Z}$”. Aus $l=2$ und $2\in\mathbb{Z}$ folgt $l\in\mathbb{Z}$.

2.Prämisse “$l\in E$”. Es gilt

$$1+2\cdot 2=5,$$

sowie

$$2\cdot 2^2=2\cdot 4=8,$$

so dass via $5 \leq 8$,

$$1 + 2 \cdot 2 \leq 2 \cdot 2^2, \tag{38}$$

folgt. Aus $2 \in \mathbb{Z}$ folgt via **Satz -** $\in$**Menge** die Aussage "2 Menge" . Hieraus, aus (38) und aus (37) folgt

$$2 \in E,$$

so dass via "$l = 2$" auch

$$l \in E.$$

3.Prämisse “$(\lambda \in \mathbb{Z} \wedge \lambda \in E \wedge l \leq \lambda) \Rightarrow 1 + \lambda \in E$” .

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\lambda \in \mathbb{Z} \wedge \lambda \in E \wedge l \leq \lambda$.

`2.1:` Aus `Thema1`“ $\lambda \in E$ ” folgt via (37): $1 + 2 \cdot \lambda \leq 2 \cdot \lambda^2$.

`2.2:` Aus `Thema1`“ $l \leq \lambda$ ” und aus “ $l = 2$” folgt: $2 \leq \lambda$.

`2.3:` Aus `Thema1`“ $\lambda \in \mathbb{Z}$ ” folgt: $1 + \lambda \in \mathbb{Z}$.

`2.4:` Aus `Thema1`“ $\lambda \in \mathbb{Z}$ ” folgt:
$$(1 + 2 \cdot (1 + \lambda)^2) - (1 + 2 \cdot (1 + \lambda)^2) = 0.$$

`3.1:` Aus `2.3` folgt via **Satz - $\in$Menge**: $1 + \lambda$ Menge.

`3.2:` Aus `2.2` folgt: $-1 - 4 \cdot \lambda \leq -9$.

`4:` Aus `3.2` und aus “ $-9 \leq 0$” folgt: $-1 - 4 \cdot \lambda \leq 0$.

`5:`
$$\begin{aligned}
1 + 2 \cdot (1 + \lambda) &= 1 + 2 + 2 \cdot \lambda = 2 + (1 + 2 \cdot \lambda) \\
&\stackrel{\texttt{2.1}}{\leq} 2 + 2 \cdot \lambda^2 \\
&= 2 + 2 \cdot \lambda^2 + 0 \\
&= 2 + 2 \cdot \lambda^2 + (1 + 2 \cdot (1 + \lambda)^2) - (1 + 2 \cdot (1 + \lambda)^2) \\
&= 2 + 2 \cdot \lambda^2 - (1 + 2 \cdot (1 + \lambda)^2) + (1 + 2 \cdot (1 + \lambda)^2) \\
&= 2 + 2 \cdot \lambda^2 - 1 - 2 \cdot (1 + 2 \cdot \lambda + \lambda^2) + (1 + 2 \cdot (1 + \lambda)^2) \\
&= 1 + 2 \cdot \lambda^2 - 2 - 4 \cdot \lambda - 2 \cdot \lambda^2 + (1 + 2 \cdot (1 + \lambda)^2) \\
&= -1 - 4 \cdot \lambda + (1 + 2 \cdot (1 + \lambda)^2) \\
&\stackrel{\texttt{4}}{\leq} 0 + (1 + 2 \cdot (1 + \lambda)^2) \\
&= 1 + 2 \cdot (1 + \lambda)^2.
\end{aligned}$$

`6:` Aus `3.1` und aus `5`“ $1 + 2 \cdot (1 + \lambda) \leq \ldots \leq 1 + 2 \cdot (1 + \lambda)^2$ ”
folgt per definitionem “ E” : $1 + \lambda \in E$.

Ergo `Thema1`: $\forall \lambda : (\lambda \in \mathbb{Z} \wedge \lambda \in E \wedge l \leq \lambda) \Rightarrow 1 + \lambda \in E$.

Konklusion "$\{2,\ldots\} \subseteq E$" . Für

$$l = 2,$$

und die spezielle Klasse

$$E = \left\{\omega : 1 + 2\cdot\omega \le 2\cdot\omega^2\right\},$$

wurde gezeigt:

`1`: $l \in \mathbb{Z}$.

`2`: $l \in E$.

`3`: $\forall\lambda : (\lambda \in \mathbb{Z} \wedge \lambda \in E \wedge l \le \lambda) \Rightarrow 1 + \lambda \in E$.

Damit sind die drei Prämissen von **Satz - vVI** wahr. Somit ist auch die Konklusion von **Satz - vVI**,

$$\{l,\ldots\} \subseteq E,$$

also wegen $l = 2$ auch

$$\{2,\ldots\} \subseteq E, \tag{39}$$

wahr. Im Hinblick auf (36) bedeutet dies:

`Thema2`	$2 \le n \in \mathbb{N}$.
`1` Aus `Thema2`"$n \in \mathbb{N}$" folgt:	$n \in \mathbb{Z}$.
`2` Aus `Thema2`"$2 \le n$" und `1` folgt via **Satz - aZ**:	$n \in \{2,\ldots\}$.
`3` Aus `2`"$n \in \{2,\ldots\}$" und aus (39)"$\{2,\ldots\} \subseteq E$" folgt per definitionem "$\subseteq$" :	$n \in E$.
`4` Aus `3` und aus (37) folgt:	$1 + 2\cdot n \le 2\cdot n^2$.

Ergo `Thema2`: $\forall n : 2 \le n \in \mathbb{N} \Rightarrow 1 + 2\cdot n \le 2\cdot n^2$.

$\square$

<u>Bearbeitung 2</u> Rechnen in $\mathbb{R}$.

Es soll die "reelle Version von (36),

$$\text{Für jede reelle Zahl } x \text{ mit } 3 \leq x \text{ gilt:} \quad 1 + 2 \cdot x \leq 2 \cdot x^2, \tag{40}$$

bewiesen werden.

Zunächst wird von der angestrebten Aussage ausgegangen.

$$\begin{aligned}
1 + 2 \cdot x \leq 2 \cdot x^2 \\
&\Rightarrow 0 \leq -1 - 2 \cdot x + 2 \cdot x^2 \\
&\Rightarrow 0 \leq -\frac{1}{2} - x + x^2 \\
&\Rightarrow 0 \leq -\frac{3}{4} + \frac{1}{4} - x + x^2 \\
&\Rightarrow 0 \leq -\frac{3}{4} + \left(\frac{1}{2} - x\right)^2 \\
&\Rightarrow \frac{3}{4} \leq \left(\frac{1}{2} - x\right)^2 \\
&\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \leq \left|\frac{1}{2} - x\right|,
\end{aligned}$$

<u>Satz - abs -U1</u>

a) $x \in \mathbb{R} \wedge \dfrac{\sqrt{3}}{2} \leq \left|\dfrac{1}{2} - x\right| \quad \Rightarrow \quad x \leq \dfrac{1-\sqrt{3}}{2} \quad \vee \quad \dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \leq x.$

b) $x \in \mathbb{R} \wedge \left(x \leq \dfrac{1-\sqrt{3}}{2} \quad \vee \quad \dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \leq x\right) \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\sqrt{3}}{2} \leq \left|\dfrac{1}{2} - x\right|.$

<u>Beweis</u> a) VS $x \in \mathbb{R} \wedge \dfrac{\sqrt{3}}{2} \leq \left|\dfrac{1}{2} - x\right|.$

Aus VS $x \in \mathbb{R}$ folgt $\dfrac{1}{2} - x \leq 0$ oder $0 \leq \dfrac{1}{2} - x$.

Fallunterscheidung.

<u>1.Fall</u> $\dfrac{1}{2} - x \leq 0.$

Dann $\left|\frac{1}{2}-x\right| = -\left(\frac{1}{2}-x\right)$ und aus VS $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \left|\frac{1}{2}-x\right|$ folgt $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq -\left(\frac{1}{2}-x\right)$ und hieraus $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq -\frac{1}{2}+x$, so dass $\frac{1+\sqrt{3}}{2} \leq x$.

Es folgt $x \leq \frac{1-\sqrt{3}}{2} \quad \vee \quad \frac{1+\sqrt{3}}{2} \leq x$.

<u>**2.Fall**</u> $0 \leq \frac{1}{2}-x$.

Dann $\left|\frac{1}{2}-x\right| = \frac{1}{2}-x$ und aus VS $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \left|\frac{1}{2}-x\right|$ folgt $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \frac{1}{2}-x$ und hieraus $x+\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \frac{1}{2}$, so dass $x \leq \frac{1-\sqrt{3}}{2}$.

Es folgt $x \leq \frac{1-\sqrt{3}}{2} \quad \vee \quad \frac{1+\sqrt{3}}{2} \leq x$.

<u>**Ende Fallunterscheidung.**</u>

In beiden Fällen gilt: $$x \leq \frac{1-\sqrt{3}}{2} \quad \vee \quad \frac{1+\sqrt{3}}{2} \leq x.$$

⋆

<u>Beweis</u> `b)` VS $x \in \mathbb{R}\left(x \leq \frac{1-\sqrt{3}}{2} \quad \vee \quad \frac{1+\sqrt{3}}{2} \leq x\right)$.

Nach VS gilt $\left(x \leq \frac{1-\sqrt{3}}{2} \quad \vee \quad \frac{1+\sqrt{3}}{2} \leq x\right)$.

Fallunterscheidung.

<u>**1.Fall**</u> $x \leq \frac{1-\sqrt{3}}{2}$.

Es folgt $2 \cdot x \leq 1-\sqrt{3}$, so dass $\sqrt{3} \leq 1-2 \cdot x$, und hieraus

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \frac{1}{2}-x. \tag{41}$$

Wegen $0 < \sqrt{3}$ ergibt sich nun $0 \leq \frac{1}{2}-x$, so dass $\frac{1}{2}-x = \left|\frac{1}{2}-x\right|$ und via (41) folgt die Abschätzung $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \left|\frac{1}{2}-x\right|$.

<u>**2.Fall**</u> $\frac{1+\sqrt{3}}{2} \leq x$.

Es folgt $1 + \sqrt{3} \leq 2 \cdot x$, und hieraus $-2 \cdot x + 1 \leq -\sqrt{3}$, so dass

$$\frac{1}{2} - x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}. \tag{42}$$

Aus (42) folgt via $-\sqrt{3} < 0$ die Abschätzung $\frac{1}{2} - x \leq 0$ und hiermit $\frac{1}{2} - x = -\left|\frac{1}{2} - x\right|$. Dies in (42) eingesetzt ergibt $-\left|\frac{1}{2} - x\right| \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$, woraus $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \left|\frac{1}{2} - x\right|$ folgt.

<u>**Ende Fallunterscheidung.**</u>

In beiden Fällen gilt: $$\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \left|\frac{1}{2} - x\right|.$$

□

Mit Hife von **Satz - abs -U1** kann (40) in zwei Schritten nachgewiesen werden.

<u>**Satz - abs -U2**</u>

`a)` $x \in \mathbb{R} \wedge \frac{1+\sqrt{3}}{2} \leq x \quad \Rightarrow \quad 1 + 2 \cdot x \leq 2 \cdot x^2$.

`b)` $x \in \mathbb{R} \wedge 2 \leq x \quad \Rightarrow \quad 1 + 2 \cdot x \leq 2 \cdot x^2$.

<u>Beweis</u> `a)` VS $x \in \mathbb{R} \wedge \frac{1+\sqrt{3}}{2} \leq x$.

Aus VS folgt via **Satz - abs -U1**: $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \left|\frac{1}{2} - x\right|$. Hieraus und aus $0 \leq \sqrt{3}$ folgt $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \leq \left|\frac{1}{2} - x\right|^2$, so dass via $(\sqrt{3})^2 = 3$ und $\left|\frac{1}{2} - x\right|^2 = \left(\frac{1}{2} - x\right)^2$ die Abschätzung $\frac{3}{4} \leq \left(\frac{1}{2} - x\right)^2$, also auch $\frac{3}{4} \leq \frac{1}{4} - x + x^2$ folgt. Es ergibt sich hieraus $\frac{1}{2} + x \leq x^2$ und somit $1 + 2 \cdot x \leq 2 \cdot x^2$.

⋆

<u>Beweis</u> `b)` VS $x \in \mathbb{R} \wedge 2 \leq x$.

Bekannter Massen gilt

$$1 < \sqrt{3} < 2,$$

so dass

$$2 < 1 + \sqrt{3} < 3,$$

und somit

$$1 < \frac{1+\sqrt{3}}{2} < \frac{3}{2}. \tag{43}$$

Aus (43), aus "$\frac{3}{2} \leq 2$" und aus VS $2 \leq x$ folgt $\frac{1+\sqrt{3}}{2} \leq x$. Hieraus und aus VS $x \in \mathbb{R}$ folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $1 + 2 \cdot x \leq 2 \cdot x^2$.

$\square$

Wendet man auf **Satz - abs -U2** `b)` Merkregel $\mathbb{R} \to \mathbb{N}, \mathbb{Z}$ **- unt** an, so folgt ohne Weiteres

$$n \in \mathbb{N} \wedge 2 \leq n \quad \Rightarrow \quad 1 + 2 \cdot n \leq 2 \cdot n^2.$$

$\square$