Skalarprodukt. Vektroprodukt. Spatprodukt.

Andreas Unterreiter

18. August 2020

Inhaltsverzeichnis

1 Euklidisches Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$, $2 \leq n \in \mathbb{N}$

Zur besseren Unterscheidung zu Zahlen oder allgemeinen Mengen oder Klassen werden hier die Elemente des $\mathbb{R}^n$, $2 \leq n \in \mathbb{N}$ - die n-dimensionalen reeellen Vektoren - mit Frakturbuchstaben wie $\mathfrak{x}$ oder $\mathfrak{y}$ bezeichnet. Jeder dieser Vektoren hat genau n Koordinaten, die von 1 bis n durchnummeriert werden, etwa

$$\mathfrak{x} = (\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n).$$

Hier gilt $\mathfrak{x} \in \mathbb{R}$, aber $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n \in \mathbb{R}$. Ähnlich wie bei geordneten Paaren gilt

$$\forall \mathfrak{x}, \mathfrak{y} : \mathfrak{x} \in \mathbb{R}^n \wedge \mathfrak{y} \in \mathbb{R}^n \wedge \mathfrak{x} = \mathfrak{y} \Rightarrow \mathfrak{x}_1 = \mathfrak{y}_1 \wedge \ldots \wedge \mathfrak{x}_n = \mathfrak{y}_n,$$

während

$$\begin{aligned} \forall \mathfrak{x}, \mathfrak{y} : \mathfrak{x} \in \mathbb{R}^n \wedge \mathfrak{y} \in \mathbb{R}^n \wedge \mathfrak{x}_1 = \mathfrak{y}_1 \wedge \ldots \wedge \mathfrak{x}_n = \mathfrak{x}_n & \\ \Rightarrow \mathfrak{x} = (\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n) = (\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_n) = \mathfrak{y}, & \end{aligned}$$

auf Grund allgemeiner Ersetzungsregeln trivial richtig ist. Der Betrag eines Vektors im $\mathbb{R}^n$, $2 \leq n \in \mathbb{N}$ ist

$$|\mathfrak{x}| = \sqrt{\mathfrak{x}_1^2 + \ldots + \mathfrak{x}_n^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \mathfrak{x}_j^2},$$

wobai hier die Schreibweise mit dem Summensymbol darauf hindeutet, dass $\mathfrak{x} \in \mathbb{R}^n$ - oder allgemeiner, geordnete n-Tupel - als Funktionen

$$\mathfrak{x} : \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{R}, \quad \mathfrak{x}(j) = \mathfrak{x}_j,$$

aufgesfasst werden können. Genau genommen müsste die Abhängigkeit des Betrags von der Dimension n notiert werden. Da keine Verwechslungen zu befürchten sind und die Notationen im Vorkurs einfach gehalten werden sollen wird auf eine Erwähnung von n beim Betrag verzichtet. Mit funktionaler Abstraktion ist der Betrag im $\mathbb{R}^n$, $2 \leq n \in \mathbb{N} <$ eine Funktion

$$|.| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad |.|(\mathfrak{x}) = |\mathfrak{x}|.$$

In diesem Kontext gilt

$$\mathsf{dom}\,|.| = \mathbb{R}^n,$$

$$\mathsf{ran}\,|.| = [0| + \infty[,$$

wobei

$$\forall \mathfrak{x} : \mathfrak{x} \in \mathbb{R}^n \wedge |\mathfrak{x}| = 0 \Rightarrow \mathfrak{x} = (0, \ldots, 0),$$

und $(0, \ldots, 0)$ der Nullvektor im $\mathbb{R}^n$ ist. Bekannter Weise können Vektoren $\mathfrak{x}$ aus dem $\mathbb{R}^n$, $2 \leq n \in \mathbb{N}$, *koordinatenweise* mit einer reellen Zahl λ multipliziert werden,

$$\lambda \cdot \mathfrak{x} = (\lambda \cdot \mathfrak{x}_1, \ldots, \lambda \cdot \mathfrak{x}_n),$$

wobei hier das Multiplikationszeichen " $\cdot$" bedenklicher Weise einmal das Produkt einer Zahl mit einem Vektor - linke Seite der Gleichung - und dann n-mal das Produkt zweier reeller Zahlen - rechte Seite der Gleichung - bedeutet. Es gelten für $2 \leq n \in \mathbb{N}$ die Rechenregeln

$$\forall \mathfrak{x} : \mathfrak{x} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow 1 \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{x} \wedge 0 \cdot \mathfrak{x} = (0, \ldots, 0),$$

$$\forall \mathfrak{x} : \mathfrak{x} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow (-1) \cdot \mathfrak{x} = -\mathfrak{x},$$

wobei $-\mathfrak{x}$ der vorzeichengewechselte Vektor von $\mathfrak{x}$, also

$$-\mathfrak{x} = (-\mathfrak{x}_1, \ldots, -\mathfrak{x}_n),$$

ist, der die bemerkenswerte Eigenschaft

$$\mathfrak{x} + (-\mathfrak{x}) = (-\mathfrak{x}) + \mathfrak{x} = (0, \ldots, 0),$$

hat. Das Vorzeichensymbol " $-$" wird hier in mehrdeutiger Weise verwendet: einmal bezeichnet es den Vorzeichenwechsel bei einem Vektor aus dem $\mathbb{R}^n$, $2 \leq n \in \mathbb{N}$, dann n-mal den - üblichen - reellen Vorzeichenwechsel.

Es gilt für $2 \leq n \in \mathbb{N}$,

$$\forall \lambda, \mathfrak{x} : \lambda \in \mathbb{R} \wedge \mathfrak{x} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow |\lambda \cdot \mathfrak{x}| = |\lambda| \cdot |\mathfrak{x}|,$$

wobei hier sowohl das Multiplikationszeichen "$\cdot$" als auch die Betragsnotation mehrdeutig eingesetzt werden. Im Speziellen gilt für $2 \leq n \in \mathbb{N}$,

$$\forall \mathfrak{x} : \mathfrak{x} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow |-\mathfrak{x}| = |\mathfrak{x}|.$$

Jeder Vektor $\mathfrak{x}$ im $\mathbb{R}^n$, $2 \leq n \in \mathbb{N}$, der *ungleich dem Nullvektor* ist, kann durch Multiplikation mit

$$\frac{1}{|\mathfrak{x}|},$$

normiert werden, also in einen Vektor mit Länge 1 übergeführt werden:

$$\forall \mathfrak{x} : (0, \ldots, 0) \neq \mathfrak{x} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \left| \frac{1}{|\mathfrak{x}|} \cdot \mathfrak{x} \right| = 1,$$

da

$$\left| \frac{1}{|\mathfrak{x}|} \cdot \mathfrak{x} \right| = \left| \frac{1}{|\mathfrak{x}|} \right| \cdot |\mathfrak{x}| = \frac{1}{||\mathfrak{x}||} \cdot |\mathfrak{x}| = \frac{1}{|\mathfrak{x}|} \cdot |\mathfrak{x}| = 1,$$

und wegen $(0, \ldots, 0) \neq \mathfrak{x}$ auch $0 \neq |\mathfrak{x}|$ gilt. Unter mehrdeutigem Einsatz des Multiplikationszeichens "$\cdot$" gilt für $2 \leq n \in \mathbb{N}$,

$$\forall \lambda, \mu, \mathfrak{x} : \lambda \in \mathbb{R} \wedge \mu \in \mathbb{R} \wedge \mathfrak{x} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow (\lambda \cdot \mu) \cdot \mathfrak{x} = \lambda \cdot (\mu \cdot \mathfrak{x}).$$

Auch gilt für $2 \leq n \in \mathbb{N}$,

$$\forall \lambda, \mathfrak{x} : \lambda \in \mathbb{R} \wedge \mathfrak{x} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \lambda \cdot \mathfrak{x} = (-\lambda) \cdot (-\mathfrak{x}),$$

$$\forall \lambda, \mathfrak{x} : \lambda \in \mathbb{R} \wedge \mathfrak{x} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow (-\lambda) \cdot \mathfrak{x} = \lambda \cdot (-\mathfrak{x}) = -\lambda \cdot \mathfrak{x},$$

wobei hier "$-$" und Multiplikationsnotation mehrdeutig eingesetzt werden.

Vektoren im $\mathbb{R}^n$, $2 \leq n \in \mathbb{N}$, können auch koordinatenweise addiert werden,

$$\forall \mathfrak{x}, \mathfrak{y} : \mathfrak{x} \in \mathbb{R}^n \wedge \mathfrak{y} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathfrak{x} + \mathfrak{y} := (\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n + \mathfrak{y}_n),$$

wobei das Additionszeichen "$+$" mehrdeutig eingesetzt wird. In der linken Seite der Gleichung wird mit "$+$" die Summe zweier Vektoren des $\mathbb{R}^n$ bezeichnet, in der rechten Seite der Gleichung werden n-mal reelle Zahlen addiert. Für $2 \leq n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\forall \mathfrak{x}, \mathfrak{y} : \mathfrak{x} \in \mathbb{R}^n \wedge \mathfrak{y} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathfrak{x} + \mathfrak{y} = \mathfrak{y} + \mathfrak{x},$$

$$\forall \mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z} : \mathfrak{x} \in \mathbb{R}^n \wedge \mathfrak{y} \in \mathbb{R}^n \wedge \mathfrak{z} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathfrak{x} + (\mathfrak{y} + \mathfrak{z}) = (\mathfrak{x} + \mathfrak{y}) + \mathfrak{z},$$

$$\forall \mathfrak{x}, \mathfrak{y} : \mathfrak{x} \in \mathbb{R}^n \wedge \mathfrak{y} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow ||\mathfrak{x}| - |\mathfrak{y}|| \leq |\mathfrak{x} + \mathfrak{y}| \leq |\mathfrak{x}| + |\mathfrak{y}|,$$

wobei hier sowohl Betragsnotation als auch Additionszeichen "$+$" mehrdeutig eingesetzt werden. Auch gilt für $2 \leq n \in \mathbb{N}$,

$$\forall \lambda, \mathfrak{x}, \mathfrak{y} : \lambda \in \mathbb{R} \wedge \mathfrak{x} \in \mathbb{R}^n \wedge \mathfrak{y} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \lambda \cdot (\mathfrak{x} + \mathfrak{y}) = \lambda \cdot \mathfrak{x} + \lambda \cdot \mathfrak{y},$$

$$\forall \lambda, \mu, \mathfrak{x}, \mathfrak{y} : \lambda \in \mathbb{R} \wedge \mu \in \mathbb{R} \wedge \mathfrak{x} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow (\lambda + \mu) \cdot \mathfrak{x} = \lambda \cdot \mathfrak{x} + \mu \cdot \mathfrak{x},$$

$$\begin{aligned} &\forall \lambda, \mu, \mathfrak{x}, \mathfrak{y} : \lambda \in \mathbb{R} \wedge \mu \in \mathbb{R} \wedge \mathfrak{x} \in \mathbb{R}^n \wedge \mathfrak{y} \in \mathbb{R}^n \\ &\qquad \Rightarrow (\lambda + \mu) \cdot (\mathfrak{x} + \mathfrak{y}) = \lambda \cdot \mathfrak{x} + \mu \cdot \mathfrak{x} + \lambda \cdot \mathfrak{y} + \mu \cdot \mathfrak{y}, \end{aligned}$$

wobei hier Additions- "$+$" und Multiplikationszeichen "$\cdot$" mehrdeutig eingesetzt werden.

Ausgehend von "$-$" , angewendet auf Vektoren aus dem $\mathbb{R}^n$, $2 \leq n \in \mathbb{N}$, wird die Differenz derartiger Vektoren via

$$\forall \mathfrak{x}, \mathfrak{y} : \mathfrak{x} \in \mathbb{R}^n \wedge \mathfrak{y} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathfrak{x} - \mathfrak{y} := \mathfrak{x} + (-\mathfrak{y}) = (\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n - \mathfrak{y}_n),$$

fest gelegt. Hier wird das Subtraktionszeichen "$-$" mehrdeutig eingesetzt. In der linken Seite der Gleichung steht es für die Differenz zweier Vektoren, in der rechten Seite werden reellen Zahlen subtrahiert. Für $2 \leq n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\forall \mathfrak{x}, \mathfrak{y} : \mathfrak{x} \in \mathbb{R}^n \wedge \mathfrak{y} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow ||\mathfrak{x}| - |\mathfrak{y}|| \leq |\mathfrak{x} - \mathfrak{y}| \leq |\mathfrak{x}| + |\mathfrak{y}|,$$

wobei hier sowohl das Subtraktionszeichen als auch die Betragsnotation mehrdeutig eingesetzt werden. Auch gilt für $2 \leq n \in \mathbb{N}$,

$$\forall \mathfrak{x}, \mathfrak{y} : \mathfrak{x} \in \mathbb{R}^n \wedge \mathfrak{y} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathfrak{x} - \mathfrak{y} = -(\mathfrak{y} - \mathfrak{x}),$$

$$\forall \mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z} : \mathfrak{x} \in \mathbb{R}^n \wedge \mathfrak{y} \in \mathbb{R}^n \wedge \mathfrak{z} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathfrak{x} - (\mathfrak{y} - \mathfrak{z}) = (\mathfrak{x} - \mathfrak{y}) + \mathfrak{z},$$

$$\forall \mathfrak{x}, \mathfrak{y} : \mathfrak{x} \in \mathbb{R}^n \wedge \mathfrak{y} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow -(\mathfrak{x} + \mathfrak{y}) = (-\mathfrak{x}) + (-\mathfrak{y}) = -\mathfrak{x} - \mathfrak{y} = (-\mathfrak{x}) - \mathfrak{y}.$$

Bezüglich Multiplikation mit reellen Zahlen gilt für $2 \leq n \in \mathbb{N}$,

$$\forall \lambda, \mathfrak{x}, \mathfrak{y} : \lambda \in \mathbb{R} \wedge \mathfrak{x} \in \mathbb{R}^n \wedge \mathfrak{y} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \lambda \cdot (\mathfrak{x} - \mathfrak{y}) = \lambda \cdot \mathfrak{x} - \lambda \cdot \mathfrak{y},$$

$$\forall \lambda, \mu, \mathfrak{x}, \mathfrak{y} : \lambda \in \mathbb{R} \wedge \mu \in \mathbb{R} \wedge \mathfrak{x} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow (\lambda - \mu) \cdot \mathfrak{x} = \lambda \cdot \mathfrak{x} - \mu \cdot \mathfrak{x},$$

$$\begin{aligned} &\forall \lambda, \mu, \mathfrak{x}, \mathfrak{y} : \lambda \in \mathbb{R} \wedge \mu \in \mathbb{R} \wedge \mathfrak{x} \in \mathbb{R}^n \wedge \mathfrak{y} \in \mathbb{R}^n \\ &\qquad \Rightarrow (\lambda + \mu) \cdot (\mathfrak{x} - \mathfrak{y}) = \lambda \cdot \mathfrak{x} + \mu \cdot \mathfrak{x} - \lambda \cdot \mathfrak{y} - \mu \cdot \mathfrak{y}, \\ &\qquad\quad (\lambda - \mu) \cdot (\mathfrak{x} + \mathfrak{y}) = \lambda \cdot \mathfrak{x} - \mu \cdot \mathfrak{x} + \lambda \cdot \mathfrak{y} - \mu \cdot \mathfrak{y} \\ &\qquad\qquad (\lambda - \mu) \cdot (\mathfrak{x} - \mathfrak{y}) = \lambda \cdot \mathfrak{x} - \mu \cdot \mathfrak{x} - \lambda \cdot \mathfrak{y} + \mu \cdot \mathfrak{y}, \end{aligned}$$

wobei hier Additions- "$+$" und Subtraktions- "$-$" und Multiplikationszeichen "$\cdot$" mehrdeutig eingesetzt werden.

Das Euklidische Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$, $2 \leq n \in \mathbb{N}$ ist die Funktion

$$\langle . | . \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad \langle . | . \rangle \left((\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \right) = \langle \mathfrak{x} | \mathfrak{y} \rangle = \mathfrak{x}_1 \cdot \mathfrak{y}_1 + \ldots + \mathfrak{x}_n \cdot \mathfrak{y}_n = \sum_{j=1}^{n} \mathfrak{x}_j \cdot \mathfrak{y}_j.$$

Für $2 \leq n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\forall \mathfrak{x} : \mathfrak{x} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \langle \mathfrak{x} | \mathfrak{x} \rangle = |\mathfrak{x}|^2 \wedge |\mathfrak{x}| = \sqrt{\langle \mathfrak{x} | \mathfrak{x} \rangle},$$

$$\forall \mathfrak{x}, \mathfrak{y} : \mathfrak{x} \in \mathbb{R}^n \wedge \mathfrak{y} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \langle \mathfrak{x} | \mathfrak{y} \rangle = \langle \mathfrak{y} | \mathfrak{x} \rangle \,,$$

$$\forall \mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z} : \mathfrak{x} \in \mathbb{R}^n \wedge \mathfrak{y} \in \mathbb{R}^n \wedge \mathfrak{z} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \langle \mathfrak{x} | \mathfrak{y} + \mathfrak{z} \rangle = \langle \mathfrak{x} | \mathfrak{y} \rangle + \langle \mathfrak{x} | \mathfrak{z} \rangle \,,$$

$$\forall \mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z} : \mathfrak{x} \in \mathbb{R}^n \wedge \mathfrak{y} \in \mathbb{R}^n \wedge \mathfrak{z} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \langle \mathfrak{x} | \mathfrak{y} - \mathfrak{z} \rangle = \langle \mathfrak{x} | \mathfrak{y} \rangle - \langle \mathfrak{x} | \mathfrak{z} \rangle \,,$$

$$\forall \mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z} : \mathfrak{x} \in \mathbb{R}^n \wedge \mathfrak{y} \in \mathbb{R}^n \wedge \mathfrak{z} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \langle \mathfrak{x} + \mathfrak{y} | \mathfrak{z} \rangle = \langle \mathfrak{x} | \mathfrak{z} \rangle + \langle \mathfrak{y} | \mathfrak{z} \rangle \,,$$

$$\forall \mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z} : \mathfrak{x} \in \mathbb{R}^n \wedge \mathfrak{y} \in \mathbb{R}^n \wedge \mathfrak{z} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \langle \mathfrak{x} - \mathfrak{y} | \mathfrak{z} \rangle = \langle \mathfrak{x} | \mathfrak{z} \rangle - \langle \mathfrak{y} | \mathfrak{z} \rangle \,,$$

$$\forall \mathfrak{x}, \mathfrak{y} : \mathfrak{x} \in \mathbb{R}^n \wedge \mathfrak{y} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \langle \mathfrak{x} + \mathfrak{y} | \mathfrak{x} + \mathfrak{y} \rangle = |\mathfrak{x} + \mathfrak{y}|^2 = |\mathfrak{x}|^2 + 2 \cdot \langle \mathfrak{x} | \mathfrak{y} \rangle + |\mathfrak{y}|^2,$$

$$\forall \mathfrak{x}, \mathfrak{y} : \mathfrak{x} \in \mathbb{R}^n \wedge \mathfrak{y} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \langle \mathfrak{x} - \mathfrak{y} | \mathfrak{x} - \mathfrak{y} \rangle = |\mathfrak{x} - \mathfrak{y}|^2 = |\mathfrak{x}|^2 - 2 \cdot \langle \mathfrak{x} | \mathfrak{y} \rangle + |\mathfrak{y}|^2,$$

$$\forall \mathfrak{x}, \mathfrak{y} : \mathfrak{x} \in \mathbb{R}^n \wedge \mathfrak{y} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \langle \mathfrak{x} + \mathfrak{y} | \mathfrak{x} - \mathfrak{y} \rangle = |\mathfrak{x}|^2 - |\mathfrak{y}|^2,$$

$$\forall \mathfrak{x}, \mathfrak{y} : \mathfrak{x} \in \mathbb{R}^n \wedge \mathfrak{y} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow |\mathfrak{x} + \mathfrak{y}|^2 + |\mathfrak{x} - \mathfrak{y}|^2 = 2 \cdot \left(|\mathfrak{x}|^2 + |\mathfrak{y}|^2 \right) .$$

wobei hier Additions- und Subtraktionsnotation mehrdeutig eingesetzt werden.

Bezüglich Multiplikation mit reellen Zahlen und Euklidischem Skalarprodukt gilt für $2 \leq n \in \mathbb{N}$,

$$\forall \lambda, \mathfrak{x}, \mathfrak{y} : \lambda \in \mathbb{R} \wedge \mathfrak{x} \in \mathbb{R}^n \wedge \mathfrak{y} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \langle \lambda \cdot \mathfrak{x} | \mathfrak{y} \rangle = \langle \mathfrak{x} | \lambda \cdot \mathfrak{y} \rangle = \lambda \cdot \langle \mathfrak{x} | \mathfrak{y} \rangle \,,$$

$$\forall \lambda, \mu, \mathfrak{x}, \mathfrak{y} : \lambda \in \mathbb{R} \wedge \mu \in \mathbb{R} \wedge \mathfrak{x} \in \mathbb{R}^n \wedge \mathfrak{y} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \langle \lambda \cdot \mathfrak{x} | \mu \cdot \mathfrak{y} \rangle = (\lambda \cdot \mu) \cdot \langle \mathfrak{x} | \mathfrak{y} \rangle \,,$$

sowie

$$\begin{aligned} &\forall \lambda, \mu, \eta, \xi, \mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \mathfrak{w} : \lambda \in \mathbb{R} \wedge \mu \in \mathbb{R} \wedge \eta \in \mathbb{R} \wedge \xi \in \mathbb{R} \Rightarrow \\ &\qquad \langle \lambda \cdot \mathfrak{x} + \mu \cdot \mathfrak{y} | \eta \cdot \mathfrak{z} + \xi \cdot \mathfrak{w} \rangle \\ &\qquad = (\lambda \cdot \eta) \cdot \langle \mathfrak{x} | \mathfrak{z} \rangle + (\lambda \cdot \xi) \cdot \langle \mathfrak{x} | \mathfrak{w} \rangle + (\mu \cdot \eta) \cdot \langle \mathfrak{y} | \mathfrak{z} \rangle + (\mu \cdot \xi) \cdot \langle \mathfrak{y} | \mathfrak{w} \rangle \,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\forall \lambda, \mu, \eta, \xi, \mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \mathfrak{w} : \lambda \in \mathbb{R} \wedge \mu \in \mathbb{R} \wedge \eta \in \mathbb{R} \wedge \xi \in \mathbb{R} \Rightarrow \\ &\qquad \langle \lambda \cdot \mathfrak{x} + \mu \cdot \mathfrak{y} | \eta \cdot \mathfrak{z} - \xi \cdot \mathfrak{w} \rangle \\ &\qquad = (\lambda \cdot \eta) \cdot \langle \mathfrak{x} | \mathfrak{z} \rangle - (\lambda \cdot \xi) \cdot \langle \mathfrak{x} | \mathfrak{w} \rangle + (\mu \cdot \eta) \cdot \langle \mathfrak{y} | \mathfrak{z} \rangle - (\mu \cdot \xi) \cdot \langle \mathfrak{y} | \mathfrak{w} \rangle \,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\forall \lambda, \mu, \eta, \xi, \mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \mathfrak{w} : \lambda \in \mathbb{R} \wedge \mu \in \mathbb{R} \wedge \eta \in \mathbb{R} \wedge \xi \in \mathbb{R} \Rightarrow \\ &\qquad \langle \lambda \cdot \mathfrak{x} - \mu \cdot \mathfrak{y} | \eta \cdot \mathfrak{z} + \xi \cdot \mathfrak{w} \rangle \\ &\qquad = (\lambda \cdot \eta) \cdot \langle \mathfrak{x} | \mathfrak{z} \rangle + (\lambda \cdot \xi) \cdot \langle \mathfrak{x} | \mathfrak{w} \rangle - (\mu \cdot \eta) \cdot \langle \mathfrak{y} | \mathfrak{z} \rangle - (\mu \cdot \xi) \cdot \langle \mathfrak{y} | \mathfrak{w} \rangle \,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\forall \lambda, \mu, \eta, \xi, \mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \mathfrak{w} : \lambda \in \mathbb{R} \wedge \mu \in \mathbb{R} \wedge \eta \in \mathbb{R} \wedge \xi \in \mathbb{R} \Rightarrow \\ &\qquad \langle \lambda \cdot \mathfrak{x} - \mu \cdot \mathfrak{y} | \eta \cdot \mathfrak{z} - \xi \cdot \mathfrak{w} \rangle \\ &\qquad = (\lambda \cdot \eta) \cdot \langle \mathfrak{x} | \mathfrak{z} \rangle - (\lambda \cdot \xi) \cdot \langle \mathfrak{x} | \mathfrak{w} \rangle - (\mu \cdot \eta) \cdot \langle \mathfrak{y} | \mathfrak{z} \rangle + (\mu \cdot \xi) \cdot \langle \mathfrak{y} | \mathfrak{w} \rangle \,, \end{aligned}$$

wobei hier Additions- "$+$" und Subtraktions- "$-$" und Multiplikationszeichen "$\cdot$" mehrdeutig verwendet werden.

$\star$

Fall $2 \leq n \in \mathbb{N}$ gilt die Ungleichung von Cauchy-Schwarz,

$$\forall \mathfrak{x}, \mathfrak{y} : \mathfrak{x} \in \mathbb{R}^n \wedge \mathfrak{y} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow |\left\langle \mathfrak{x}|\mathfrak{y} \right\rangle| \leq |\mathfrak{x}| \cdot |\mathfrak{y}|,$$

so dass

$$\forall \mathfrak{x}, \mathfrak{y} : \mathfrak{x} \in \mathbb{R}^n \wedge \mathfrak{y} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \exists \phi : \phi \in [0|\pi] : \langle \mathfrak{x}|\mathfrak{y} \rangle = |\mathfrak{x}| \cdot |\mathfrak{y}| \cdot \cos\phi,$$

wobei für $(0, \ldots, 0) \neq \mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ die hier auftretende Zahl ϕ eindeutig durch die Bestimmungsgleichung fest gelegt ist und eine geometrische Interpretation zulässt: ϕ ist der kleinere der beiden Winkel, die $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ miteinander einschliessen. Falls $2 \leq n \in \mathbb{N}$ und $(0, \ldots, 0) = \mathfrak{x}$ oder $(0, \ldots, 0) = \mathfrak{y}$, so erfüllt jede Zahl $\phi \in [-\pi|\pi]$ obige Gleichung und man sagt, dass in diesem Fall der Winkel zwischen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ unbestimmt ist.

$\star$

Sind $2 \leq n \in \mathbb{N}$ und $\mathfrak{x} \in \mathbb{R}^n$ mit $(0, \ldots, 0) \neq \mathfrak{x}$, so ist die Punktmenge

$$\mathsf{g}(\mathfrak{x}) = \{t \cdot \mathfrak{x} : t \in \mathbb{R}\}$$

die durch $\mathfrak{x}$ erzeugte Gerade. Ist $\mathfrak{y}$ ein weiterer Vektor aus dem $\mathbb{R}^n$, so stellt sich Frage, welcher Punkt auf $\mathsf{g}(\mathfrak{x})$ von $\mathfrak{y}$ den kleinstmöglichen Abstand ist. Gesucht ist demnach jener Punkt $\mathfrak{p} \in \mathsf{g}(\mathfrak{x})$ mit

$$\forall \mathfrak{z} : \mathfrak{z} \in \mathsf{g}(\mathfrak{x}) \Rightarrow |\mathfrak{y} - \mathfrak{p}| \leq |\mathfrak{y} - \mathfrak{z}|.$$

$\mathfrak{p}$ ist der Lotpunkt von $\mathfrak{y}$ auf $\mathsf{g}(\mathfrak{x})$ und es muss ein $t^* \in \mathbb{R}$ geben, so dass

$$\mathfrak{p} = t^* \cdot \mathfrak{x} \quad \wedge \quad \forall t : t \in \mathbb{R} \Rightarrow |\mathfrak{y} - t^* \cdot \mathfrak{x}| \leq |\mathfrak{y} - t \cdot \mathfrak{x}|,$$

oder auch

$$\mathfrak{p} = t^* \cdot \mathfrak{x} \quad \wedge \quad \forall t : t \in \mathbb{R} \Rightarrow |\mathfrak{y} - t^* \cdot \mathfrak{x}|^2 \leq |\mathfrak{y} - t \cdot \mathfrak{x}|^2.$$

Diese Formulierung führt mit Hilfe des Euklidischen Skalarproduktes auf die Aufgabe, nach dem Minimum eines quadratischen Polynoms zu suchen. Nach einfacher Rechnung ergibt sich

$$t^* = \frac{\langle \mathfrak{x}|\mathfrak{y} \rangle}{|\mathfrak{x}|^2} \wedge \mathfrak{p} = \frac{\langle \mathfrak{x}|\mathfrak{y} \rangle}{|\mathfrak{x}|} \cdot \left(\frac{1}{|\mathfrak{x}|} \cdot \mathfrak{x} \right) \wedge |\mathfrak{p}| \cdot |\mathfrak{x}| = |\left\langle \mathfrak{x}|\mathfrak{y} \right\rangle|.$$

Der (minimale) Abstand von $\mathfrak{y}$ und $\mathsf{g}(\mathfrak{x})$ ist gleich

$$\frac{1}{|\mathfrak{x}|} \cdot \sqrt{|\mathfrak{x}|^2 \cdot |\mathfrak{y}|^2 - \langle \mathfrak{x}|\mathfrak{y} \rangle^2} = |\mathfrak{y}| \cdot \sin\phi,$$

wobei ϕ der oben definierte Winkel $\phi \in \left[0|\pi\right]$ zwischen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ ist.

$\star$

Jeder Vektor $\mathfrak{x} \in \mathbb{R}^n$, $2 \leq n \in \mathbb{R}$, mit $(0, \ldots, 0) \neq \mathfrak{x}$ legt eine Dreiteilung des $\mathbb{R}^n$ in zwei Halb“räume”

$$\mathtt{E}^+(\mathfrak{x}) = \{\mathfrak{y} : 0 < \langle\mathfrak{x}|\mathfrak{y}\rangle\} \subseteq \mathbb{R}^n,$$

$$\mathtt{E}^-(\mathfrak{x}) = \{\mathfrak{y} : \langle\mathfrak{x}|\mathfrak{y}\rangle < 0\} \subseteq \mathbb{R}^n,$$

und eine Hyper“ebene”

$$\mathtt{HR}(\mathfrak{x}) = \{\mathfrak{y} : 0 = \langle\mathfrak{x}|\mathfrak{y}\rangle\} \subseteq \mathbb{R}^n,$$

fest.

$\mathtt{E}^+(\mathfrak{x})$ besteht genau aus jenen Vektoren $\mathfrak{y} \in \mathbb{R}^n$, die mit $\mathfrak{x}$ ein positives Euklidisches Skalarprodkt haben. Der Lotpunkt jedes dieser Vektoren $\mathfrak{y}$ auf die von $\mathfrak{x}$ erzeugte Gerade ist, wie bereits bekannt, gleich

$$\frac{\langle\mathfrak{x}|\mathfrak{y}\rangle}{|\mathfrak{x}|} \cdot \left(\frac{1}{|\mathfrak{x}|} \cdot \mathfrak{x}\right),$$

hat also die Form

$$t^*(\mathfrak{y}) \cdot \mathfrak{x},$$

mit $0 < t^*(\mathfrak{y})$. In diesem Sinn deuten diese Vektoren $\mathfrak{y}$ in die Richtung von $\mathfrak{x}$.

$\mathtt{E}^-(\mathfrak{x})$ besteht genau aus jenen Vektoren $\mathfrak{y} \in \mathbb{R}^n$, die mit $\mathfrak{x}$ ein negatives Euklidisches Skalarprodkt haben. Der Lotpunkt jedes dieser Vektoren $\mathfrak{y}$ auf die von $\mathfrak{x}$ erzeugte Gerade ist, wie bereits bekannt, gleich

$$\frac{\langle\mathfrak{x}|\mathfrak{y}\rangle}{|\mathfrak{x}|} \cdot \left(\frac{1}{|\mathfrak{x}|} \cdot \mathfrak{x}\right),$$

hat also die Form

$$t^*(\mathfrak{y}) \cdot \mathfrak{x},$$

mit $t^*(\mathfrak{y}) < 0$. In diesem Sinn deuten diese Vektoren $\mathfrak{y}$ in die Richtung *entgegengesetzt* zu $\mathfrak{x}$.

$\mathtt{H}(\mathfrak{x})$ besteht genau aus jenen Vektoren $\mathfrak{y}$, deren Euklidisches Skalarprodukt mit $\mathfrak{x}$ gleich 0 ist. Im Speziellen gilt $(0, \ldots, 0) \in \mathtt{H}(\mathfrak{x})$. Der Lotpunkt jedes dieser Vektoren $\mathfrak{y}$ auf die von $\mathfrak{x}$ erzeugte Gerade ist gleich $(0, \ldots, 0)$. $\mathtt{H}(\mathfrak{x})$ besteht genau aus den Vektoren von $\mathbb{R}^n$, die orthogonal (senkrecht) zu $\mathfrak{x}$ sind. Interessantner Weise gilt

$$\forall \lambda, \mu, \mathfrak{y}, \mathfrak{z} : \lambda \in \mathbb{R} \wedge \mu \in \mathbb{R} \wedge \mathfrak{y} \in \mathtt{H}(\mathfrak{x}) \wedge \mathfrak{z} \in \mathtt{H}(\mathfrak{x}) \Rightarrow \lambda \cdot \mathfrak{y} + \mu \cdot \mathfrak{z} \in \mathtt{H}(\mathfrak{x}),$$

wobei der Nachweis unter Verwendung der Eigenschaften des Euklidischen Skalarprodukts gelingt.

⋆

Mit Hilfe des Euklidischen Skalarprodukts erscheint die lineare Gleichung

$$\mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{x}_1 + \mathfrak{a}_2 \cdot \mathfrak{x}_2 = b,$$

wobei $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, b \in \mathbb{R}$ gegeben und $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2 \in \mathbb{R}$ gesucht sind, in neuem Licht. Es soll $(0,0) \neq (\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2)$ gelten. Setzt man

$$\mathfrak{a} = (\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2) \quad \wedge \quad \mathfrak{x} = (\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2),$$

so nimmt die lineare Gleichung die Form

$$\langle \mathfrak{a} | \mathfrak{x} \rangle = b,$$

an, wobei hier mit $\langle . | . \rangle$ das Euklidische Skalarprodukt im $\mathbb{R}^2$ ist. Wie bereits bekannt gilt

$$\{\mathfrak{x} : \mathfrak{x} \in \mathbb{R}^2 \wedge \langle \mathfrak{a} | \mathfrak{x} \rangle = b\} = \{\mathfrak{p} + t \cdot \mathfrak{q} : t \in \mathbb{R}\},$$

wobei $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \mathbb{R}^2$, so dass

$$\langle \mathfrak{a} | \mathfrak{p} \rangle = b \quad \wedge \quad \langle \mathfrak{a} | \mathfrak{q} \rangle = 0.$$

Mit Hilfe der vorhin vorgestellten Hyper“ebene” , die im $\mathbb{R}^2$ eine Gerade ist,

$$\mathtt{H}(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{n} : 0 = \langle \mathfrak{a} | \mathfrak{n} \rangle\},$$

gilt auch

$$\{\mathfrak{x} : \mathfrak{x} \in \mathbb{R}^2 \wedge \langle \mathfrak{a} | \mathfrak{x} \rangle = b\} = \{\mathfrak{p} + \mathfrak{n} : \mathfrak{n} \in \mathtt{H}(\mathfrak{a})\}.$$

Interessanter Weise kann ein $\mathfrak{p} \in \mathbb{R}^2$ mit $\langle \mathfrak{a} | \mathfrak{p} \rangle = b$ einfach angegeben werden:

$$\mathfrak{p} = \frac{b}{|\mathfrak{a}|} \cdot \left(\frac{1}{|\mathfrak{a}|} \cdot \mathfrak{a} \right),$$

da

$$\left\langle \mathfrak{a} \middle| \frac{b}{|\mathfrak{a}|} \cdot \left(\frac{1}{|\mathfrak{a}|} \cdot \mathfrak{a} \right) \right\rangle = \frac{b}{|\mathfrak{a}|} \cdot \left\langle \mathfrak{a} \middle| \left(\frac{1}{|\mathfrak{a}|} \cdot \mathfrak{a} \right) \right\rangle = \frac{b}{|\mathfrak{a}|} \cdot \frac{1}{|\mathfrak{a}|} \cdot \langle \mathfrak{a} | \mathfrak{a} \rangle = \frac{b}{|\mathfrak{a}|^2} \cdot |\mathfrak{a}|^2 = b.$$

Es folgt

$$\{\mathfrak{x} : \mathfrak{x} \in \mathbb{R}^2 \wedge \langle \mathfrak{a} | \mathfrak{x} \rangle = b\} = \left\{ \frac{b}{|\mathfrak{a}|} \cdot \left(\frac{1}{|\mathfrak{a}|} \cdot \mathfrak{a} \right) + \mathfrak{n} : \mathfrak{n} \in \mathtt{H}(\mathfrak{a}) \right\},$$

so dass sich die Lösungsmenge als Gerade darstellt, die in Richtung vom normierten Vektor

$$\frac{1}{|\mathfrak{a}|} \cdot \mathfrak{a},$$

im *orientierten* Abstand

$$\frac{b}{|\mathfrak{a}|},$$

- also in Richtung $\mathfrak{a}$, wenn b positiv und entgegengesetzt zu $\mathfrak{a}$, wenn b negativ - verläuft und die senkrecht zu $\mathfrak{a}$ ist. Da $\mathtt{H}(\mathfrak{a})$ eine Gerade ist, gibt es (mindestens) einen (in der Tat sind es zwei) Vektoren $\mathfrak{q} \in \mathtt{H}(\mathfrak{a})$, so dass

$$\mathtt{H}(\mathfrak{a}) = \{t \cdot \mathfrak{q} : t \in \mathbb{R}\},$$

gilt. Es folgt die nun wieder an lineare Gleichungssysteme erinnernde Darstellung

$$\{\mathfrak{x} : \mathfrak{x} \in \mathbb{R}^2 \wedge \langle \mathfrak{a}|\mathfrak{x}\rangle = b\} = \left\{\frac{b}{|\mathfrak{a}|} \cdot \left(\frac{1}{|\mathfrak{a}|} \cdot \mathfrak{a}\right) + t \cdot \mathfrak{q} : t \in \mathbb{R}\right\}.$$

Die beiden Möglichkeiten, $\mathfrak{q}$ zu wählen sind

$$\mathfrak{q} = (-\mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_1) \quad \text{oder} \quad \mathfrak{q} = (\mathfrak{a}_2, -\mathfrak{a}_1),$$

da sowohl

$$\langle \mathfrak{a}|(-\mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_1)\rangle = \mathfrak{a}_1 \cdot (-\mathfrak{a}_2) + \mathfrak{a}_2 \cdot \mathfrak{a}_1 = 0,$$

als auch

$$\langle \mathfrak{a}|(\mathfrak{a}_2, -\mathfrak{a}_1)\rangle = \mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{a}_2 + \mathfrak{a}_2 \cdot (-\mathfrak{a}_1) = 0,$$

gilt.

⋆

Mit Hilfe des Euklidischen Skalarprodukts erscheint die lineare Gleichung

$$\mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{x}_1 + \mathfrak{a}_2 \cdot \mathfrak{x}_2 + \mathfrak{a}_3 \cdot \mathfrak{x}_3 = b,$$

wobei $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, b \in \mathbb{R}$ gegeben und $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3 \in \mathbb{R}$ gesucht sind, in neuem Licht. Es soll $(0,0,0) \neq (\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3)$ gelten. Setzt man

$$\mathfrak{a} = (\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3) \quad \wedge \quad \mathfrak{x} = (\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3),$$

so nimmt die lineare Gleichung die Form

$$\langle \mathfrak{a}|\mathfrak{x}\rangle = b,$$

an, wobei hier mit $\langle .|. \rangle$ das Euklidische Skalarprodukt im $\mathbb{R}^3$ ist. Wie bereits bekannt gilt

$$\{\mathfrak{x} : \mathfrak{x} \in \mathbb{R}^3 \wedge \langle \mathfrak{a}|\mathfrak{x}\rangle = b\} = \{\mathfrak{p} + t \cdot \mathfrak{q} + s \cdot \mathfrak{r} : t \in \mathbb{R} \wedge s \in \mathbb{R}\},$$

wobei $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r} \in \mathbb{R}^3$ mit

$$\langle \mathfrak{a}|\mathfrak{p}\rangle = b \quad \wedge \quad \langle \mathfrak{a}|\mathfrak{q}\rangle = 0 \quad \wedge \quad \langle \mathfrak{a}|\mathfrak{q}\rangle = 0.$$

Mit Hilfe der vorhin vorgestellten Hyper“ebene” , die im $\mathbb{R}^3$ tatsčhlich eine Ebene ist,

$$\mathtt{H}(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{n} : 0 = \langle \mathfrak{a} | \mathfrak{n} \rangle\},$$

gilt auch

$$\{\mathfrak{x} : \mathfrak{x} \in \mathbb{R}^3 \wedge \langle \mathfrak{a} | \mathfrak{x} \rangle = b\} = \{\mathfrak{p} + \mathfrak{n} : \mathfrak{n} \in \mathtt{H}(\mathfrak{a})\}.$$

Interessanter Weise kann ein $\mathfrak{p} \in \mathbb{R}^3$ mit $\langle \mathfrak{a} | \mathfrak{p} \rangle = b$ einfach - und ähnlich wie im $\mathbb{R}^2$ - angegeben werden:

$$\mathfrak{p} = \frac{b}{|\mathfrak{a}|} \cdot \left(\frac{1}{|\mathfrak{a}|} \cdot \mathfrak{a} \right),$$

da

$$\left\langle \mathfrak{a} \middle| \frac{b}{|\mathfrak{a}|} \cdot \left(\frac{1}{|\mathfrak{a}|} \cdot \mathfrak{a} \right) \right\rangle = \frac{b}{|\mathfrak{a}|} \cdot \left\langle \mathfrak{a} \middle| \left(\frac{1}{|\mathfrak{a}|} \cdot \mathfrak{a} \right) \right\rangle = \frac{b}{|\mathfrak{a}|} \cdot \frac{1}{|\mathfrak{a}|} \cdot \langle \mathfrak{a} | \mathfrak{a} \rangle = \frac{b}{|\mathfrak{a}|^2} \cdot |\mathfrak{a}|^2 = b.$$

Es folgt

$$\{\mathfrak{x} : \mathfrak{x} \in \mathbb{R}^n \wedge \langle \mathfrak{a} | \mathfrak{x} \rangle = b\} = \left\{ \frac{b}{|\mathfrak{a}|} \cdot \left(\frac{1}{|\mathfrak{a}|} \cdot \mathfrak{a} \right) + \mathfrak{n} : \mathfrak{n} \in \mathtt{H}(\mathfrak{a}) \right\},$$

so dass sich die Lösungsmenge als Ebene darstellt, die in Richtung vom normierten Vektor

$$\frac{1}{|\mathfrak{a}|} \cdot \mathfrak{a},$$

im *orientierten* Abstand

$$\frac{b}{|\mathfrak{a}|},$$

- also in Richtung $\mathfrak{a}$, wenn b positiv und entgegengesetzt zu $\mathfrak{a}$, wenn b negativ - verläuft und die senkrecht zu $\mathfrak{a}$ ist. Da $\mathtt{H}(\mathfrak{a})$ eine Ebene ist, gibt es zwei Vektoren $\mathfrak{q}, \mathfrak{r} \in \mathtt{H}(\mathfrak{a})$, so dass

$$\mathtt{H}(\mathfrak{a}) = \{t \cdot \mathfrak{q} + s \cdot \mathfrak{r} : t \in \mathbb{R} \wedge s \in \mathbb{R}\},$$

gilt. Es folgt die nun wieder an lineare Gleichungssysteme erinnernde Darstellung

$$\{\mathfrak{x} : \mathfrak{x} \in \mathbb{R}^3 \wedge \langle \mathfrak{a} | \mathfrak{x} \rangle = b\} = \left\{ \frac{b}{|\mathfrak{a}|} \cdot \left(\frac{1}{|\mathfrak{a}|} \cdot \mathfrak{a} \right) + t \cdot \mathfrak{q} + s \cdot \mathfrak{r} : t \in \mathbb{R} \wedge s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Es gibt *unendlich* viele Möglichkeiten, die Vektoren $\mathfrak{q}, \mathfrak{r} \in \mathtt{H}(\mathfrak{a})$ zu wählen, dass diese Darstellung zutrifft.

Eine Möglichkeit, bei gegebenem $\mathfrak{a} \in \mathbb{R}^3$ mit $(0, \ldots, 0) \neq \mathfrak{a}$ zwei Vektoren $\mathfrak{q}, \mathfrak{r} \in \mathbb{R}^3$ so zu finden, dass

$$\mathtt{H}(\mathfrak{a}) = \{t \cdot \mathfrak{q} + s \cdot \mathfrak{r} : t \in \mathbb{R} \wedge s \in \mathbb{R}\},$$

gilt, wird hier mit Hilfe der bereits bekannten Funktion `wnkl` präsentiert.

Setze
$$\theta = \mathtt{wnkl}(\sqrt{\mathfrak{a}_1^2 + \mathfrak{a}_2^2}, \mathfrak{a}_3) \quad \wedge \quad \phi = \mathtt{wnkl}(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2).$$

Dann folgt
$$(\sqrt{\mathfrak{a}_1^2 + \mathfrak{a}_2^2}, \mathfrak{a}_3) = |\mathfrak{a}| \cdot (\cos\theta, \sin\theta) \quad \wedge \quad (\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2) = |\mathfrak{a}| \cdot \cos\theta \cdot (\cos\phi, \sin\phi),$$

und somit
$$\mathfrak{a} = |\mathfrak{a}| \cdot ((\cos\theta) \cdot (\cos\phi), (\cos\theta) \cdot (\sin\phi), \sin\theta).$$

Setzt man nun
$$\mathfrak{q} = (-(\sin\theta) \cdot (\cos\phi), -(\sin\theta) \cdot (\sin\phi), \cos\theta),$$

$$\mathfrak{r} = (-\sin\phi, \cos\phi, 0),$$

so gilt einerseits
$$\begin{aligned}
&\langle \mathfrak{a} | \mathfrak{q} \rangle \\
&\quad = |\mathfrak{a}| \cdot \Big(- (\cos\theta) \cdot (\cos\phi) \cdot (\sin\theta) \cdot (\cos\phi) - (\cos\theta) \cdot (\sin\phi) \cdot (\sin\theta) \cdot (\sin\phi) \\
&\qquad\qquad + (\sin\theta) \cdot (\cos\theta) \Big) \\
&= |\mathfrak{a}| \cdot \Big(- (\cos\theta) \cdot (\sin\theta) \cdot (\cos^2\phi) - (\cos\theta) \cdot (\sin\theta) \cdot (\sin^2\phi) + (\sin\theta) \cdot (\cos\theta) \Big) \\
&\qquad = |\mathfrak{a}| \cdot \Big(- (\cos\theta) \cdot (\sin\theta) + (\sin\theta) \cdot (\cos\theta) \Big) = 0,
\end{aligned}$$

andererseits
$$\begin{aligned}
&\langle \mathfrak{a} | \mathfrak{r} \rangle \\
&\quad = |\mathfrak{a}| \cdot \Big(- (\cos\theta) \cdot (\cos\phi) \cdot (\sin\phi) + (\cos\theta) \cdot (\sin\phi) \cdot (\cos\phi) + (\sin\theta) \cdot 0 \Big) \\
&\qquad = 0,
\end{aligned}$$

und schliesslich gilt (ohne Beweis)
$$\mathtt{H}(\mathfrak{a}) = \{ t \cdot \mathfrak{q} + s \cdot \mathfrak{r} : t \in \mathbb{R} \wedge s \in \mathbb{R} \}.$$

2 Vektorprodukt im $\mathbb{R}^3$

Für $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in \mathbb{R}^3$ ist

$$\mathfrak{x} \otimes \mathfrak{y} = (\mathfrak{x}_2 \cdot \mathfrak{y}_3 - \mathfrak{x}_3 \cdot \mathfrak{y}_2, \mathfrak{x}_3 \cdot \mathfrak{y}_1 - \mathfrak{x}_1 \cdot \mathfrak{y}_3, \mathfrak{x}_1 \cdot \mathfrak{y}_2 - \mathfrak{x}_2 \cdot \mathfrak{y}_1),$$

das Vektorprodukt von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$. Mit funktionaler Abstraktion gilt

$$(.\otimes .) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad (.\otimes .)((\mathfrak{x}, \mathfrak{y})) = \mathfrak{x} \otimes \mathfrak{y}.$$

Durch Nachrechnen stellt man

$$\forall \mathfrak{x}, \mathfrak{y} : \mathfrak{x} \in \mathbb{R}^3 \wedge \mathfrak{y} \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow 0 = \langle \mathfrak{x} | \mathfrak{x} \otimes \mathfrak{y} \rangle \wedge 0 = \langle \mathfrak{y} | \mathfrak{x} \otimes \mathfrak{y} \rangle,$$

fest, so dass $\mathfrak{x} \otimes \mathfrak{y}$ stets senkrecht zu $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ ist. Bekannter Maßen gilt

$$\forall \mathfrak{x}, \mathfrak{y} : \mathfrak{x} \in \mathbb{R}^3 \wedge \mathfrak{y} \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow \exists \phi : \phi \in [0|\pi] \wedge \langle \mathfrak{x} | \mathfrak{y} \rangle = |\mathfrak{x}| \cdot |\mathfrak{y}| \cdot \cos \phi,$$

und mit genau diesem ϕ gilt auch

$$|\mathfrak{x} \otimes \mathfrak{y}| = |\mathfrak{x}| \cdot |\mathfrak{y}| \cdot \sin \phi,$$

so dass sich nun

$$\forall \mathfrak{x}, \mathfrak{y} : \mathfrak{x} \in \mathbb{R}^3 \wedge \mathfrak{y} \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow |\langle \mathfrak{x} | \mathfrak{y} \rangle|^2 + |\mathfrak{x} \otimes \mathfrak{y}|^2 = |\mathfrak{x}|^2 \cdot |\mathfrak{y}|^2,$$

ergibt. Aus obiger Formel folgt die geometrische Interpretation von $\mathfrak{x} \otimes \mathfrak{y}$:

$\forall \mathfrak{x}, \mathfrak{y} : \mathfrak{x} \in \mathbb{R}^3 \wedge \mathfrak{y} \in \mathbb{R}^3 \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{x} \otimes \mathfrak{y}$ ist ein Vektor$\in \mathbb{R}^3$ senkrecht zu $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$, dessen Länge gleich der Fläche des von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ im $\mathbb{R}^3$ aufgespannten Parallelogramms ist.

Als direkte Folgerung ergibt sich auch

$\forall \mathfrak{x}, \mathfrak{y} : \mathfrak{x} \in \mathbb{R}^3 \wedge \mathfrak{y} \in \mathbb{R}^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} \cdot |\mathfrak{x} \otimes \mathfrak{y}|$ ist gleich der Fläche des von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ im $\mathbb{R}^3$ aufgespannten Dreiecks.

Beispiel Wie groß ist der Flächeninhalt des Dreiecks$\subseteq \mathbb{R}^3$ mit den Eckpunkten

$$(1,2,0), (0.1,2), (-1,1,2) \quad ?$$

Mit

$$\mathfrak{x} = (0,1,2) - (1,2,0) = (-1,-1,2), \quad \mathfrak{y} = (-1,1,2) - (1,2,0) = (-2,-1,2),$$

ist die gesuchte Fläche gleich

$$\frac{1}{2} \cdot |\mathfrak{x} \otimes \mathfrak{y}| = \frac{1}{2} \cdot |(-1,-1,2) \otimes (-2,-1,2)|$$
$$= \frac{1}{2} \cdot |((-1) \cdot 2 - 2 \cdot (-1), 2 \cdot (-2) - (-1) \cdot 2, (-1) \cdot (-1) - (-1) \cdot (-2))|$$
$$= \frac{1}{2} \cdot |(-2+2, -4+2, 1-2)| = \frac{1}{2} \cdot |(0,2,-1)| = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

□(Beispiel)

Weitere Rechenregeln sind:

$$\forall \mathfrak{x} : \mathfrak{x} \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow$$
$$\mathfrak{x} \otimes \mathfrak{x} = (0,0,0) \wedge (0,0,0) \otimes \mathfrak{x} = (0,0,0) \wedge \mathfrak{x} \otimes (0,0,0) = (0,0,0),$$

$$\forall \mathfrak{x}, \mathfrak{y} : \mathfrak{x} \in \mathbb{R}^3 \wedge \mathfrak{y} \in \mathbb{R}^3 \wedge (0,0,0) = \mathfrak{x} \otimes \mathfrak{y}$$
$$\Rightarrow \quad \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \text{ linear abhängig, i.e.}$$
$$\exists \lambda, \mu : \lambda \in \mathbb{R} \wedge \mu \in \mathbb{R} \wedge (0,0) \neq (\lambda, \mu) \wedge (0,0,0) = \lambda \cdot \mathfrak{x} + \mu \cdot \mathfrak{y}.$$

⋆

$$\forall \mathfrak{x}, \mathfrak{y} : \mathfrak{x} \in \mathbb{R}^3 \wedge \mathfrak{y} \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow \mathfrak{x} \otimes \mathfrak{y} = -(\mathfrak{y} \otimes \mathfrak{x}),$$
$$\forall \lambda, \mathfrak{x}, \mathfrak{y} : \lambda \in \mathbb{R} \wedge \mathfrak{x} \in \mathbb{R}^3 \wedge \mathfrak{y} \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow \mathfrak{x} \otimes (\lambda \cdot \mathfrak{y}) = (\lambda \cdot \mathfrak{x}) \otimes \mathfrak{y} = \lambda \cdot (\mathfrak{x} \otimes \mathfrak{y}),$$
$$\forall \mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z} : \mathfrak{x} \in \mathbb{R}^3 \wedge \mathfrak{y} \in \mathbb{R}^3 \wedge \mathfrak{z} \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow \mathfrak{x} \otimes (\mathfrak{y} + \mathfrak{z}) = \mathfrak{x} \otimes \mathfrak{y} + \mathfrak{x} \otimes \mathfrak{z},$$
$$\forall \mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z} : \mathfrak{x} \in \mathbb{R}^3 \wedge \mathfrak{y} \in \mathbb{R}^3 \wedge \mathfrak{z} \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow (\mathfrak{x} + \mathfrak{y}) \otimes \mathfrak{z} = \mathfrak{x} \otimes \mathfrak{z} + \mathfrak{y} \otimes \mathfrak{z},$$
$$\forall \mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z} : \mathfrak{x} \in \mathbb{R}^3 \wedge \mathfrak{y} \in \mathbb{R}^3 \wedge \mathfrak{z} \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow \mathfrak{x} \otimes (\mathfrak{y} \otimes \mathfrak{z}) = \langle \mathfrak{x} | \mathfrak{z} \rangle \cdot \mathfrak{y} - \langle \mathfrak{x} | \mathfrak{y} \rangle \cdot \mathfrak{z}.$$

3 “Vektorprodukt” im $\mathbb{R}^2$

Mit Hilfe des Vektorprodukts im $\mathbb{R}^3$ können die Flächen von Parallelogrammen und Dreiecken im $\mathbb{R}^3$ berechnet werden. Mit einem Kunstgriff kann das Vektorprodukt im $\mathbb{R}^3$ auch zur Berechnung entsprechender Flächen im $\mathbb{R}^2$ verwendet werden.

Seien $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in \mathbb{R}^2$. Es soll die Fläche des von $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ im $\mathbb{R}^2$ aufgespannten Parallelogramms berechnet werden. Das Vektorprodukt im $\mathbb{R}^3$ soll zum Einsatz kommen. Dies ist formal nicht möglich, da die betrachteten Vektoren keine Elemente des $\mathbb{R}^3$ sind. Jedoch kann der $\mathbb{R}^2$ und mit ihm die Vektoren $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ in den $\mathbb{R}^3$ “eingebettet” werden, indem jedem Vektor aus dem $\mathbb{R}^2$ eine weitere Koordinate=

0 hinzugefügt wird. Auf diese Weise wird der $\mathbb{R}^2$ mit der xy-Ebene im $\mathbb{R}^3$ identifiziert. Klarer Weise ist der Fläche des eingebetteten Parallelogramms gleich der Fläche des Parallelogramms$\subseteq \mathbb{R}^2$. Die Fläche ist gleich

$$\frac{1}{2} \cdot |(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2.0) \otimes (\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, 0)| = \frac{1}{2}|(0, 0, \mathfrak{x}_1 \cdot \mathfrak{y}_2 - \mathfrak{x}_2 \cdot \mathfrak{y}_1)| = \frac{|\mathfrak{x}_1 \cdot \mathfrak{y}_2 - \mathfrak{x}_2 \cdot \mathfrak{y}_1|}{2}.$$

Diese Überlegeng legt es nahe ein "Vektorprodukt im $\mathbb{R}^2$" via

$$(.\overset{2}{\otimes}.) : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (.\overset{2}{\otimes}.)((\mathfrak{x}, \mathfrak{y})) = (\mathfrak{x} \overset{2}{\otimes} \mathfrak{y}) = \mathfrak{x}_1 \cdot \mathfrak{y}_2 - \mathfrak{x}_2 \cdot \mathfrak{y}_1,$$

zu definieren. Die Rechenregeln des Vektorprodukts im $\mathbb{R}^3$ übertragen sich sinngemäß auf $(.\overset{2}{\otimes}.)$. *Nach* dem Vorkurs wird $(\mathfrak{x} \overset{2}{\otimes} \mathfrak{y})$ als Determinante von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ bezeichnet.

Beispiel (ohne Beweis) Es soll die Fläche des Vierecks$\subseteq \mathbb{R}^2$ mit den Eckpunkten

$$(0, 0), (1, 2), (-1, 3), (-2, -4),$$

berechnet werden. Das Viereck setzt sich aus zwei Dreiecken mit den Eckpunkten

$$(0, 0), (1, 2), (-1, 3),$$

und

$$(0, 0), (-1, 3), (-2, 4),$$

zusammen. Die Fläche ist die Summe der Flächen dieser beiden Dreiecke. Das erste Dreieck wird

$$(1, 2) - (0, 0) = (1, 2) \wedge (-1, 3) - (0, 0) = (-1, 3)$$

aufgespannt, sein Flächeninhalt ist gleich

$$\frac{1}{2} \cdot |((1, 2) \overset{2}{\otimes} (-1, 3))| = \frac{1}{2} \cdot |1 \cdot 3 - 2 \cdot (-1)| = \frac{1}{2} \cdot |3 + 2| = \frac{5}{2}.$$

das zweite Dreieck wird duch

$$(-1, 3) - (0, 0) = (-1, 3) \wedge (-2, -4) - (0, 0) = (-2, 4),$$

aufgespannt, sein Flächeninhalt ist gleich

$$\frac{1}{2} \cdot |(-1, 3) \overset{2}{\otimes} (-2, -4))| = \frac{1}{2} \cdot |(-1)\dot{(} - 4) - 3 \cdot (-2)| = \frac{1}{2} \cdot |4 + 6| = \frac{10}{2} = 5.$$

Die Fläche des Vierecks ist somit gleich

$$\frac{5}{2} + 5 = \frac{15}{2}.$$

$\square$(Beispiel)

4 Spatprodukt im $\mathbb{R}^3$

Das Spatprodukt im $\mathbb{R}^3$ ist definiert als

$$\mathtt{spat} : \mathbb{R}^3 \times (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}, \quad \mathtt{spat}((\mathfrak{x}, (\mathfrak{y}, \mathfrak{z}))) = \langle \mathfrak{x} | \mathfrak{y} \otimes \mathfrak{z} \rangle \,,$$

so dass

$$\forall \mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z} : \mathfrak{x} \in \mathbb{R}^3 \wedge \mathfrak{y} \in \mathbb{R}^3 \wedge \mathfrak{z} \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow$$
$$\mathtt{spat}((\mathfrak{x}, (\mathfrak{y}, \mathfrak{z}))) = \mathfrak{x}_1 \cdot (\mathfrak{y}_2 \cdot \mathfrak{z}_3 - \mathfrak{y}_3 \cdot \mathfrak{z}_2) + \mathfrak{x}_2 \cdot (\mathfrak{y}_3 \cdot \mathfrak{z}_1 - \mathfrak{y}_1 \cdot \mathfrak{y}_3) + \mathfrak{x}_3 \cdot (\mathfrak{x}_1 \cdot \mathfrak{y}_2 - \mathfrak{x}_2 \cdot \mathfrak{y}_1).$$

Nach dem Vorkurs wird $\mathtt{spat}((\mathfrak{x}, (\mathfrak{y}, \mathfrak{z})))$ als Determiantne von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ bezeichnet. Es gelten die Rechenregeln

$$\forall \mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z} : \mathfrak{x} \in \mathbb{R}^3 \wedge \mathfrak{y} \in \mathbb{R}^3 \wedge \mathfrak{z} \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow$$
$$\mathtt{spat}((\mathfrak{x}, (\mathfrak{y}, \mathfrak{z}))) = \mathtt{spat}((\mathfrak{y}, (\mathfrak{z}, \mathfrak{x}))) = \mathtt{spat}((\mathfrak{z}, (\mathfrak{x}, \mathfrak{y}))),$$

und

$$\forall \mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z} : \mathfrak{x} \in \mathbb{R}^3 \wedge \mathfrak{y} \in \mathbb{R}^3 \wedge \mathfrak{z} \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow$$
$$\mathtt{spat}((\mathfrak{x}, (\mathfrak{y}, \mathfrak{z}))) = -\mathtt{spat}((\mathfrak{x}, (\mathfrak{z}, \mathfrak{y}))) = -\mathtt{spat}((\mathfrak{y}, (\mathfrak{x}, \mathfrak{z}))) = -\mathtt{spat}((\mathfrak{z}, (\mathfrak{y}, \mathfrak{x})))..$$

Man sagt, dass drei Vektoren $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ des $\mathbb{R}^3$ - in dieser Reihenfolge ! - ein *Rechtssystem* bilden, wenn $0 < \mathtt{spat}(\mathfrak{x}, (\mathfrak{y}, \mathfrak{z}))$ und ein *Linkssystem* bilden, wenn $\mathtt{spat}((\mathfrak{x}, (\mathfrak{y}, \mathfrak{z})) < 0$.

Ähnlich wie der Betrag des Vektorprodukts hat auch der Betrag des Spatprodukts im $\mathbb{R}^3$ eine geometrische Bedeuetung:

$\forall \mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z} : \mathfrak{x} \in \mathbb{R}^3 \wedge \mathfrak{y} \in \mathbb{R}^3 \wedge \mathfrak{z} \in \mathbb{R}^3 \quad \Rightarrow \quad |\mathtt{spat}((\mathfrak{x}, (\mathfrak{y}, \mathfrak{z})))|$ ist gleich dem Volumen des von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ im $\mathbb{R}^3$ aufgespannten Parallelepipeds.

Als Folgerung ergibt sich:

$\forall \mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z} : \mathfrak{x} \in \mathbb{R}^3 \wedge \mathfrak{y} \in \mathbb{R}^3 \wedge \mathfrak{z} \in \mathbb{R}^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{6} \cdot |\mathtt{spat}((\mathfrak{x}, (\mathfrak{y}, \mathfrak{z})))|$ ist gleich dem Volumen des von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ im $\mathbb{R}^3$ aufgespannten Tetraeders.

Beispiel (ohne Beweis) Das Volumen des Tetraeders$\subseteq \mathbb{R}^3$ mit den Echkpunkten

$$(0,0,0), (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1),$$

kann ermittelt werden, indem man zuerst drei Vektoren bestimmt, die den Tetraeder aufspannen - dies sind etwa

$$(1,0,0) - (0,0,0) = (1,0,0), (0,1,0) - (0,0,0) = (0,1,0),$$
$$(0,0.1) - (0,0,0) = (0,0,1),$$

- und dann ein Sechstel des Betrags deren Spatprodukts ermittelt:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{6} \cdot |\mathtt{spat}(((1,0,0),((0,1,0),(0,0,1)))| = \frac{1}{6} \cdot \langle (1,0,0) | (0,1,0) \otimes (0,0,1) \rangle \\
&= \frac{1}{6} \cdot \langle (1,0,0) | (1 \cdot 1 - 0 \cdot 0, 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 0 - 1 \cdot 0) \rangle = \frac{1}{6} \cdot \langle (1,0,0) | (1,0,0) \rangle \\
&= \frac{1}{6} \cdot 1 = \frac{1}{6}.
\end{aligned}
$$

□(Beispiel)