Vorkurs Mathematik
Reelle Funktionen - 2
9 elementare Funktionen

Andreas Unterreiter

9. August 2020

Inhaltsverzeichnis

1 Liste der Eigenschaften

Die reellen Funktionen in diesem und auch in anderen Kapiteln sollen durch eine Liste möglicher oder tatsächlicher Eigenschaften beschrieben und so den Studierenden näher gebracht werden. Die Eigenschaften werden zumeist ohne Beweis präsentiert. Das vorliegende Kapitel wird dadurch zum Lernstoff-Kapitel.

In

<u>dom ran</u>

werden Definitions- und Bild-Bereich der jeweiligen Funktion angegeben. Eine reelle Funktion kann, muss aber nicht ungerade oder gerade sein. Dies wird in

<u>(un-)gerade</u>

besprochen. Ob eine Funktion T periodisch - oder nicht - ist wird in

<u>Periodizität</u>

angegeben. In

<u>Monotonie</u>

wird untersucht, auf welchen Teilmengen - zumeist sind es echte reelle Intervalle - die jeweilige Funktion (streng) wachsend oder (streng) fallend ist. Ähnlich werden in

<u>konvex/konkav</u>

Teilmengen des Definitions-Bereichs angegeben, auf denen die Funktion konvex oder konkav hat. Hier werden auch Wendepunkte - falls vorhanden - angegeben. In

<u>Extrema</u>

geht es hauptsächlich um *globale* Maxima und *globale* Minima. Nicht alle hier vorgestellten Funktionen sind stetig oder differenzierbar. Auf welchen echten reellen Intervallen, die Teilmenge des Definitions-Bereichs sind, die jeweilige Eigenschaft vorliegt, wird in

<u>Stetigkeit</u>

und

<u>Differenzierbarkeit</u>

besprochen. Unter dem zweitgenannten Thema wird auch die erste und zweite Ableitungsfunktion angegeben. Falls $+\infty$ oder $-\infty$ Supremum oder Infimum des Definitions-Bereichs der betrachteten Funktion sind, wird das Verhalten dieser Funktion und ihrer ersten und zweiten Ableitung - falls vorhanden - bei Annäherung an $+\infty$ oder $-\infty$ in

Verhalten bei $\pm\infty$

angegeben. Falls Supremum oder Infimum des Definitions-Bereichs eine reelle Zahl ist, erfolgt eine ähnliche Untersuchung in

Verhalten am Rand

In manchen Stellen zeigt eine Funktion besonderes Verhalten. Dies wird in

spezielle Stellen

besprochen. Weitere erwähnenswerte Eigenschaften wie "Formeln" sind in

spezielle Eigenschaften

zu finden.

2 $\mathsf{zo}_{\mathbb{R}}$

$\mathsf{zo}_{\mathbb{R}}$ ist die reelle Nullfunktion. Es gilt

$$\mathsf{zo}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \mathsf{zo}_{\mathbb{R}}(x) = 0.$$

<u>dom ran</u>
$\mathsf{dom}\,(\mathsf{zo}_{\mathbb{R}}) = \mathbb{R}$.
$\mathsf{ran}\,(\mathsf{zo}_{\mathbb{R}}) = \{0\}$.

<u>(un-)gerade</u>
$\mathsf{zo}_{\mathbb{R}}$ gerade.
$\mathsf{zo}_{\mathbb{R}}$ ungerade.

<u>Periodizität</u>
$0 < T \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \mathsf{zo}_{\mathbb{R}}$ ist T periodisch.

<u>Monotonie</u>
$\mathsf{zo}_{\mathbb{R}}$ wachsend.
$\neg(\mathsf{zo}_{\mathbb{R}}$ streng wachsend auf $E)$.

$\mathsf{zo}_{\mathbb{R}}$ fallend.
$\neg(\mathsf{zo}_{\mathbb{R}}$ streng fallend auf $E)$.

<u>konvex/konkav</u>
$\mathsf{zo}_{\mathbb{R}}$ konvex.
$\mathsf{zo}_{\mathbb{R}}$ konkav.

$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow x$ ist $\pm$-Wendepunkt von $\mathsf{zo}_{\mathbb{R}}$.
$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow x$ ist $\mp$-Wendepunkt von $\mathsf{zo}_{\mathbb{R}}$.

<u>Extrema</u>
$\forall x : x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \mathsf{zo}_{\mathbb{R}}$ hat in x globales Maximum $\wedge\ \mathsf{zo}_{\mathbb{R}}(x) = 0$.
$\neg(\mathsf{zo}_{\mathbb{R}}$ hat in x striktes globales Maximum).

$\forall x : x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \mathsf{zo}_{\mathbb{R}}$ hat in x globales Minimum $\wedge\ \mathsf{zo}_{\mathbb{R}}(x) = 0$.
$\neg(\mathsf{zo}_{\mathbb{R}}$ hat in x striktes globales Minimum).

<u>Stetigkeit</u>
$\mathsf{zo}_{\mathbb{R}}$ stetig.

<u>Differenzierbarkeit</u>
$\mathsf{zo}_{\mathbb{R}}$ beliebig auf differenzierbar.
$\mathsf{zo}'_{\mathbb{R}} = \mathsf{zo}_{\mathbb{R}}$.
$\mathsf{zo}''_{\mathbb{R}} = \mathsf{zo}_{\mathbb{R}}$.

<u>Verhalten bei $\pm\infty$</u>

$$\lim_{x\uparrow+\infty} \mathsf{zo}_{\mathbb{R}}(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x\uparrow+\infty} \mathsf{zo}'_{\mathbb{R}}(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x\uparrow+\infty} \mathsf{zo}''_{\mathbb{R}}(x) = 0,$$

$$\lim_{x\downarrow-\infty} \mathsf{zo}_{\mathbb{R}}(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x\downarrow-\infty} \mathsf{zo}'_{\mathbb{R}}(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x\downarrow-\infty} \mathsf{zo}''_{\mathbb{R}}(x) = 0.$$

<u>Verhalten am Rand</u> - <u>spezielle Stellen</u> -

<u>spezielle Eigenschaften</u>

$\mathsf{zo}_{\mathbb{R}} \circ \mathsf{zo}_{\mathbb{R}} = \mathsf{zo}_{\mathbb{R}}$.

$\mathsf{zo}_{\mathbb{R}}$ ist sowohl gerade als auch ungerade.

$\mathsf{zo}_{\mathbb{R}}$ ist mit jeder Periode $T \in \,]0| + \infty[\,$ T periodisch.

$\mathsf{zo}_{\mathbb{R}}$ ist sowohl wachsend als auch fallend.

$\mathsf{zo}_{\mathbb{R}}$ ist sowohl konvex als auch konkav.

$\mathsf{zo}_{\mathbb{R}}$ hat unendlich viele $\pm$-Wendepunkte.
$\mathsf{zo}_{\mathbb{R}}$ hat unendlich viele $\mp$-Wendepunkte.

$\mathsf{zo}_{\mathbb{R}}$ hat in unendlich vielen Punkten globales Maximum.
$\mathsf{zo}_{\mathbb{R}}$ hat in unendlich vielen Punkten globales Minimum.

3 $c^{on}\mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$

$c^{on}\mathbb{R}$ ist die konstante Funktion mit Wert c auf $\mathbb{R}$. Für $c \in \mathbb{R}$ gilt

$$c^{on}\mathbb{R} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad c^{on}\mathbb{R}(x) = c.$$

Im Fall $c \in \mathbb{R}$ gilt weiterhin:

<u>dom ran</u>
$\mathsf{dom}\,(c^{on}\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
$\mathsf{ran}\,(c^{on}\mathbb{R}) = \{c\}$.

<u>(un-)gerade</u>
$c^{on}\mathbb{R}$ gerade.

Falls $c \neq 0$: $\neg(c^{on}\mathbb{R}$ ungerade).
Falls $c = 0$: $c^{on}\mathbb{R}$ ungerade.

<u>Periodizität</u>
$0 < T \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad c^{on}\mathbb{R}$ ist T periodisch.

<u>Monotonie</u>
$c^{on}\mathbb{R}$ wachsend.
$\neg(c^{on}\mathbb{R}$ streng wachsend auf E).

$c^{on}\mathbb{R}$ fallend.
$\neg(c^{on}\mathbb{R}$ streng fallend auf E).

<u>konvex/konkav</u>
$c^{on}\mathbb{R}$ konvex.
$c^{on}\mathbb{R}$ konkav.

$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ ist $\pm$-Wendepunkt von $c^{on}\mathbb{R}$.
$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow x$ ist $\mp$-Wendepunkt von $c^{on}\mathbb{R}$.

<u>Extrema</u>
$\forall x : x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad c^{on}\mathbb{R}$ hat in x globales Maximum $\wedge$ $c^{on}\mathbb{R}(x) = c$.
$\neg(c^{on}\mathbb{R}$ hat in x striktes globales Maximum).

$\forall x : x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad c^{on}\mathbb{R}$ hat in x globales Minimum $\wedge$ $c^{on}\mathbb{R}(x) = c$.
$\neg(c^{on}\mathbb{R}$ hat in x striktes globales Minimum).

<u>Stetigkeit</u>
$c^{on}\mathbb{R}$ stetig.

<u>Differenzierbarkeit</u>
$c^{on}\mathbb{R}$ beliebig auf differenzierbar.
$c^{on}\mathbb{R}' = \mathsf{zo}_{\mathbb{R}}$.
$c^{on}\mathbb{R}'' = \mathsf{zo}_{\mathbb{R}}$.

Verhalten bei $\pm\infty$

$$\lim_{x\uparrow+\infty} c^{on}\mathbb{R}(x) = c \quad \text{und} \quad \lim_{x\uparrow+\infty} c^{on}\mathbb{R}'(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x\uparrow+\infty} c^{on}\mathbb{R}''(x) = 0,$$

$$\lim_{x\downarrow-\infty} c^{on}\mathbb{R}(x) = c \quad \text{und} \quad \lim_{x\downarrow-\infty} c^{on}\mathbb{R}'(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x\downarrow-\infty} c^{on}\mathbb{R}''(x) = 0.$$

Verhalten am Rand -spezielle Stellen -

spezielle Eigenschaften

$0^{on}\mathbb{R} = \mathsf{zo}_{\mathbb{R}}$.

$c^{on}\mathbb{R} \circ c^{on}\mathbb{R} = c^{on}\mathbb{R}$.

$c^{on}\mathbb{R}$ ist mit jeder Periode $T \in \,]0| + \infty[\,$ T periodisch.

$c^{on}\mathbb{R}$ ist sowohl wachsend als auch fallend.

$c^{on}\mathbb{R}$ ist sowohl konvex als auch konkav.

$c^{on}\mathbb{R}$ hat unendlich viele $\pm$-Wendepunkte.
$c^{on}\mathbb{R}$ hat unendlich viele $\mp$-Wendepunkte.

$c^{on}\mathbb{R}$ hat in unendlich vielen Punkten globales Maximum.
$c^{on}\mathbb{R}$ hat in unendlich vielen Punkten globales Minimum.

4 $\mathsf{id}_{\mathbb{R}}$

$\mathsf{id}_{\mathbb{R}}$ ist die Identität auf $\mathbb{R}$. Es gilt

$$\mathsf{id}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \mathsf{id}_{\mathbb{R}}(x) = x.$$

<u>dom ran</u>
$\mathsf{dom}\,(\mathsf{id}_{\mathbb{R}}) = \mathbb{R}$.
$\mathsf{ran}\,(\mathsf{id}_{\mathbb{R}}) = \mathbb{R}$.

<u>(un-)gerade</u>
$\mathsf{id}_{\mathbb{R}}$ ungerade.

<u>Periodizität</u>
$\neg(\mathsf{id}_{\mathbb{R}}$ ist T periodisch).

<u>Monotonie</u>
$\mathsf{id}_{\mathbb{R}}$ streng wachsend.

<u>konvex/konkav</u>
$\mathsf{id}_{\mathbb{R}}$ konvex.
$\mathsf{id}_{\mathbb{R}}$ konkav.

$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow x$ ist $\pm$-Wendepunkt von $\mathsf{id}_{\mathbb{R}}$.
$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow x$ ist $\mp$-Wendepunkt von $\mathsf{id}_{\mathbb{R}}$.

<u>Extrema</u>
$\neg(\mathsf{id}_{\mathbb{R}}$ hat in x globales Maximum).
$\neg(\mathsf{id}_{\mathbb{R}}$ hat in x globales Minimum).

<u>Stetigkeit</u>
$\mathsf{id}_{\mathbb{R}}$ stetig.

<u>Differenzierbarkeit</u>
$\mathsf{id}_{\mathbb{R}}$ beliebig oft differenzierbar.
$\mathsf{id}'_{\mathbb{R}} = 1^{on}\mathbb{R}$.
$\mathsf{id}''_{\mathbb{R}} = \mathsf{zo}_{\mathbb{R}}$.

<u>Verhalten bei $\pm\infty$</u>

$$\lim_{x\uparrow+\infty} \mathsf{id}_{\mathbb{R}}(x) = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\uparrow+\infty} \mathsf{id}'_{\mathbb{R}}(x) = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{x\uparrow+\infty} \mathsf{id}''_{\mathbb{R}}(x) = 0,$$

$$\lim_{x\downarrow-\infty} \mathsf{id}_{\mathbb{R}}(x) = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\downarrow-\infty} \mathsf{id}'_{\mathbb{R}}(x) = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{x\downarrow-\infty} \mathsf{id}''_{\mathbb{R}}(x) = 0.$$

Verhalten am Rand - spezielle Stellen -

spezielle Eigenschaften

$\mathsf{id}_{\mathbb{R}} \circ \mathsf{id}_{\mathbb{R}} = \mathsf{id}_{\mathbb{R}}$.

$\mathsf{id}_{\mathbb{R}}^{-1} = \mathsf{id}_{\mathbb{R}}$.

$\mathsf{id}_{\mathbb{R}}$ ist sowohl konvex als auch konkav.

$\mathsf{id}_{\mathbb{R}}$ hat unendlich viele $\pm$-Wendepunkte.
$\mathsf{id}_{\mathbb{R}}$ hat unendlich viele $\mp$-Wendepunkte.

5 $|.|$

$|.|$ ist die reelle Betragsfunktion. Es gilt

$$|.| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad |.|(x) = |x| = \begin{cases} x & , \quad 0 < x \\ 0 & , \quad x = 0 \\ -x & , \quad x < 0 \end{cases} .$$

<u>dom ran</u>
dom $(|.|) = \mathbb{R}$.
ran $(|.|) = [0| + \infty[$.

<u>(un-)gerade</u>
$|.|$ gerade.

<u>Periodizität</u>
$\neg(|.|$ ist T periodisch).

<u>Monotonie</u>
$\neg(|.|$ wachsend).
$|.|$ streng wachsend auf $[0| + \infty[$.

$\neg(|.|$ fallend).
$|.|$ streng fallend auf $]-\infty|0]$.

<u>konvex/konkav</u>
Für $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$(\mathtt{dq}|.|)(x) : \mathbb{R} \setminus \{x\} \to \mathbb{R}, \quad (\mathtt{dq}|.|)(x)(t) = \frac{|t| - |x|}{t - x} = \begin{cases} \dfrac{|t| - x}{t - x} & , \quad 0 < x \\ \dfrac{|t|}{t} & , \quad x = 0 \\ \dfrac{|t| + x}{t - x} & , \quad x < 0 \end{cases} ,$$

so dass für $0 < x$,

$$(\mathtt{dq}|.|)(x)(t) = \begin{cases} 1 & , \quad x < t \\ 1 & , \quad 0 \le t < x \\ -\dfrac{t + x}{t - x} = -1 + \dfrac{2 \cdot x}{x - t} & , \quad t < 0, \end{cases} ,$$

wachsend ist und für $x = 0$,

$$(\mathtt{dq}|.|)(x)(t) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 < t \\ -1 & , \quad t < 0 \end{cases} ,$$

wachsend ist und für $x < 0$,

$$(\mathtt{dq}|.|)(x)(t) = \begin{cases} \dfrac{t+x}{t-x} = 1 + \dfrac{2\cdot x}{t-x} = 1 - \dfrac{2\cdot|x|}{t+|x|} & , \quad 0 \le t \\ -1 & , \quad x < t < 0 \\ -1 & , \quad t < x \end{cases} ,$$

wachsend ist. Es folgt:

$|.|$ konvex.

$\neg(|.|$ konkav).
$|.|$ konkav auf $[0|+\infty[$.
$|.|$ konkav auf $]-\infty|0]$.

$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow x$ ist $\pm$-Wendepunkt von $|.|$.
$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow x$ ist $\mp$-Wendepunkt von $|.|$.

<u>Extrema</u>
$\neg(|.|$ hat in x globales Maximum).

$|.|$ hat in 0 striktes globales Minimum $\wedge\ |0| = 0$.
$|.|$ hat in x globales Minimum $\quad\Rightarrow\quad x = 0 \wedge |x| = 0$.

<u>Stetigkeit</u>
$|.|$ stetig.

<u>Differenzierbarkeit</u>
$|.|$ nicht differenzierbar in 0, da

$$\lim_{t\uparrow 0} \frac{|t| - |0}{t-0} = \lim_{t\uparrow 0} \frac{|t|}{t} = \lim_{t\uparrow 0} \frac{-t}{t} = -1 \neq 1 = \lim_{t\downarrow 0} \frac{t}{t} = \lim_{t\downarrow 0} \frac{|t|}{t} = \lim_{t\downarrow 0} \frac{|t| - |0|}{t-0}.$$

$\neg(|.|$ ist differenzierbar).

$|.|$ beliebig oft differenzierbar auf $]-\infty|0[$.
$|.|$ beliebig oft differenzierbar auf $]0|+\infty[$.

$$|.|' : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}, \quad |.|'(x) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 < x \\ -1 & , \quad x < 0 \end{cases} ,$$

$$|.|'' : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}, \quad |.|''(x) = 0.$$

<u>Verhalten bei $\pm\infty$</u>

$$\lim_{x\uparrow+\infty} |x| = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\uparrow+\infty} |.|'(x) = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{x\uparrow+\infty} |.|''(x) = 0,$$

$$\lim_{x\downarrow-\infty} |x| = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\downarrow-\infty} |.|'(x) = -1 \quad \text{und} \quad \lim_{x\downarrow-\infty} |.|''(x) = 0.$$

<u>Verhalten am Rand</u> -

<u>spezielle Stellen</u>
0 ist eine spezielle Stelle von $|.|$.

$\lim_{x\to 0} |x| = 0 = |0|$.

$\lim_{x\uparrow 0} \frac{|x|-|0|}{x-0} = -1$ und $\lim_{x\uparrow 0} |.|'(x) = -1$.
$\lim_{x\downarrow 0} \frac{|x|-|0|}{x-0} = 1$ und $\lim_{x\downarrow 0} |.|'(x) = 1$.

$\lim_{x\uparrow 0} |.|''(x) = 0$ und $\lim_{x\downarrow 0} |.|''(x) = 0$.

<u>spezielle Eigenschaften</u>

$|.|$ ist konvex, $|.|$ ist nicht konkav, doch jedes $x \in \mathbb{R}$ ist Wendepunkt von $|.|$.

$|.| \circ |.| = |.|$.

$\forall x, y : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad ||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$.
$\forall x, y : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad ||x| - |y|| \leq |x - y| \leq |x| + |y|$.
"Dreiecksungleichung(en)" .

$\forall x : x \in \mathbb{R} \wedge x = |x| \Rightarrow 0 \leq x$.
$\forall x : x \in \mathbb{R} \wedge x = -|x| \Rightarrow x \leq 0$.

$\forall x : x \in \mathbb{R} \wedge |x| = x \Rightarrow 0 \leq x$.
$\forall x : x \in \mathbb{R} \wedge |x| = -x \Rightarrow x \leq 0$.

$\forall x : x \in \mathbb{R} \wedge 0 \leq x \Rightarrow x = |x| \wedge |x| = x$.
$\forall x : x \in \mathbb{R} \wedge x \leq 0 \Rightarrow x = -|x| \wedge |x| = -x$.

$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow |x| = \sqrt{x^2}$.

$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow |x| = \max\{x, -x\}$.

$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow |x| = [x]^+ + [x]^-$.

$\forall x, y : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge |x| \leq y \quad \Rightarrow \quad 0 \leq y \wedge -y \leq |x| \leq y$.

$\forall x, y : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge -y \leq x \leq y \quad \Rightarrow \quad 0 \leq y \wedge |x| \leq y$.

6 $[.]^+$

$[.]^+$ ist die reelle Positivfunktion. Es gilt

$$[.]^+ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad [.]^+(x) = [x]^+ = \begin{cases} x & , \quad 0 \leq x \\ 0 & , \quad x \leq 0 \end{cases} .$$

$\underline{\mathsf{dom}\ \mathsf{ran}}$
$\mathsf{dom}\,([.]^+) = \mathbb{R}$.
$\mathsf{ran}\,([.]^+) = [0| + \infty[$.

(un-)gerade
$\neg([.]^+$ gerade).
$\neg([.]^+$ ungerade).

Periodizität
$\neg([.]^+$ ist T periodisch).

Monotonie
$[.]^+$ wachsend.
$[.]^+$ streng wachsend auf $[0| + \infty[$.

$\neg([.]^+$ fallend).
$[.]^+$ fallend auf $]-\infty|0]$.

konvex/konkav
Für $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$(\mathtt{dq}[.]^+)(x) : \mathbb{R} \setminus \{x\} \to \mathbb{R},$$

$$(\mathtt{dq}[.]^+)(x)(t) = \frac{[t]^+ - [x]^+}{t - x} = \begin{cases} \dfrac{[t]^+ - x}{t - x} & , \quad 0 \leq x \\[2ex] \dfrac{[t]^+}{t - x} & , \quad x \leq 0 \end{cases} ,$$

so dass für $0 \leq x$,

$$(\mathtt{dq}[.]^+)(x)(t) = \begin{cases} 1 & , \quad x < t \\ 1 & , \quad 0 \leq t < x \\ -\dfrac{x}{t - x} = \dfrac{x}{x - t} & , \quad t \leq 0, \end{cases} ,$$

wachsend ist und für $x \leq 0$,

$$(\mathtt{dq}[.]^+)(x)(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{t - x} = \dfrac{t}{t + |x|} & , \quad 0 \leq t \\ 0 & , \quad x < t \leq 0 \\ 0 & , \quad t < x \end{cases} ,$$

wachsend ist. Es folgt:

$[.]^+$ konvex.

$\neg([.]^+$ konkav).
$[.]^+$ konkav auf $[0|+\infty[$.
$[.]^+$ konkav auf $]-\infty|0]$.

$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow x$ ist $\pm$-Wendepunkt von $[.]^+$.
$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow x$ ist $\mp$-Wendepunkt von $|.|^+$.

Extrema
$\neg([.]^+$ hat in x globales Maximum).

$\forall x : x \in]-\infty|0] \Rightarrow [.]^+$ hat in 0 globales Minimum $\wedge\ [x]^+ = 0$.
$[.]^+$ hat in x globales Minimum $\quad\Rightarrow\quad x \leq 0 \wedge [x]^+ = 0$.
$\neg([.]^+$ hat in x striktes globales Minimum).

Stetigkeit
$[.]^+$ stetig.

Differenzierbarkeit
$[.]^+$ nicht differenzierbar in 0, da

$$\lim_{t\uparrow 0}\frac{[t]^+-[0]^+}{t-0}=\lim_{t\uparrow 0}\frac{0}{t}=0\neq 1=\lim_{t\downarrow 0}\frac{t}{t}=\lim_{t\downarrow 0}\frac{[t]^+}{t}=\lim_{t\downarrow 0}\frac{[t]^+-[0]^+}{t-0}.$$

$\neg([.]^+$ differenzierbar).

$[.]^+$ beliebig oft differenzierbar auf $]-\infty|0[$.
$[.]^+$ beliebig oft differenzierbar auf $]0|+\infty[$.

$$([.]^+)' : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}, \quad ([.]^+)'(x) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 < x \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases},$$

$$([.]^+)'' : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}, \quad ([.]^+)''(x) = 0.$$

Verhalten bei $\pm\infty$

$$\lim_{x\uparrow+\infty}[x]^+ = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\uparrow+\infty}([.]^+)'(x) = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{x\uparrow+\infty}([.]^+)''(x) = 0,$$

$$\lim_{x\downarrow-\infty}[x]^+ = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x\downarrow-\infty}([.]^+)'(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x\downarrow-\infty}([.]^+)''(x) = 0.$$

Verhalten am Rand -

<u>spezielle Stellen</u>
0 ist eine spezielle Stelle von $[.]^+$.

$\lim\limits_{x \to 0} [x]^+ = 0 = [0]^+$.

$\lim\limits_{x \uparrow 0} \dfrac{[x]^+ - [0]^+}{x - 0} = 0$ und $\lim\limits_{x \uparrow 0} ([.]^+)'(x) = 0$.
$\lim\limits_{x \downarrow 0} \dfrac{[x]^+ - [0]^+}{x - 0} = 1$ und $\lim\limits_{x \downarrow 0} ([.]^+)'(x) = 1$.

$\lim\limits_{x \uparrow 0} ([.]^+)''(x) = 0$ und $\lim\limits_{x \downarrow 0} ([.]^+)''(x) = 0$.

<u>spezielle Eigenschaften</u>

$[.]^+$ ist konvex, $[.]^+$ ist nicht konkav, doch jedes $x \in \mathbb{R}$ ist Wendepunkt von $[.]^+$.

$[.]^+ \circ [.]^+ = [.]^+$.
$[.]^+ \circ [.]^- = [.]^-$.
$[.]^- \circ [.]^+ = \mathsf{zo}_{\mathbb{R}}$.

$\forall x, y : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad [x + y]^+ \leq [x]^+ + [y]^+$.

$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow x = [x]^+ - [x]^-$.
$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow |x| = [x]^+ + [x]^-$.
$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow [x]^+ = \frac{|x|+x}{2}$.
$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow [x]^+ \cdot [x]^- = 0$.

$\forall x : x \in \mathbb{R} \wedge x = [x]^+ \Rightarrow 0 \leq x$.
$\forall x : x \in \mathbb{R} \wedge x = -[x]^+ \Rightarrow x = 0$.

$\forall x : x \in \mathbb{R} \wedge [x]^+ = x \Rightarrow 0 \leq x$.
$\forall x : x \in \mathbb{R} \wedge [x]^+ = -x \Rightarrow x = 0$.

$\forall x : x \in \mathbb{R} \wedge 0 \leq x \Rightarrow x = [x]^+ \wedge [x]^+ = x$.

$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow [x]^+ = \max\{x, 0\}$.

7 $[.]^-$

$[.]^-$ ist die reelle Negativfunktion. Es gilt

$$[.]^- : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad [.]^-(x) = [x]^- = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq x \\ -x & , \quad x \leq 0 \end{cases} .$$

<u>dom ran</u>
$\mathsf{dom}\,([.]^-) = \mathbb{R}$.
$\mathsf{ran}\,([.]^-) = [0| + \infty[$.

<u>(un-)gerade</u>
$\neg([.]^-$ gerade).
$\neg([.]^-$ ungerade).

<u>Periodizität</u>
$\neg([.]^-$ ist T periodisch).

<u>Monotonie</u>
$\neg([.]^-$ wachsend).
$[.]^-$ wachsend auf $[0| + \infty[$.

$[.]^-$ fallend.
$[.]^-$ streng fallend auf $]-\infty|0]$.

<u>konvex/konkav</u>
Für $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$(\mathtt{dq}[.]^-)(x) : \mathbb{R} \setminus \{x\} \to \mathbb{R},$$

$$(\mathtt{dq}[.]^-)(x)(t) = \frac{[t]^- - [x]^-}{t-x} = \begin{cases} \dfrac{[t]^-}{t-x} & , \quad 0 \leq x \\ \dfrac{[t]^- + x}{t-x} & , \quad x \leq 0 \end{cases} ,$$

so dass für $0 \leq x$,

$$(\mathtt{dq}[.]^-)(x)(t) = \begin{cases} 0 & , \quad x < t \\ 0 & , \quad 0 \leq t < x \\ \dfrac{-t}{t-x} = -\dfrac{|t|}{x+|t|} & , \quad t \leq 0, \end{cases} ,$$

wachsend ist und für $x \leq 0$,

$$(\mathtt{dq}[.]^-)(x)(t) = \begin{cases} \dfrac{x}{t-x} = -\dfrac{|x|}{t+|x|} & , \quad 0 \leq t \\ -1 & , \quad x < t \leq 0 \\ -1 & , \quad t < x \end{cases} ,$$

wachsend ist. Es folgt:

$[.]^-$ konvex.

$\neg([.]^-$ konkav$)$.
$[.]^-$ konkav auf $[0|+\infty[$.
$[.]^-$ konkav auf $]-\infty|0]$.

$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow x$ ist $\pm$-Wendepunkt von $[.]^-$.
$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow x$ ist $\mp$-Wendepunkt von $|.|^-$.

Extrema
$\neg([.]^-$ hat in x globales Maximum$)$.

$\forall x : x \in [0|+\infty[\;\Rightarrow [.]^-$ hat in x globales Minimum $\wedge\ [x]^- = 0$.
$[.]^-$ hat in x globales Minimum $\quad\Rightarrow\quad 0 \leq x \wedge [x]^- = 0$.
$\neg([.|]^-$ hat in x striktes globales Minimum$)$.

Stetigkeit
$[.]^-$ stetig.

Differenzierbarkeit
$[.]^-$ nicht differenzierbar in 0, da

$$\lim_{t\uparrow 0}\frac{[t]^- - [0]^-}{t-0} = \lim_{t\uparrow 0}\frac{-t}{t} = -1 \neq 0 = \lim_{t\downarrow 0}\frac{0}{t} = \lim_{t\downarrow 0}\frac{[t]^-}{t} = \lim_{t\downarrow 0}\frac{[t]^- - [0]^-}{t-0}.$$

$\neg([.]^-$ differenzierbar$)$.

$[.]^-$ beliebig oft differenzierbar auf $]-\infty|0[$.
$[.]^-$ beliebig oft differenzierbar auf $]0|+\infty[$.

$$([.]^-)' : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}, \quad ([.]^-)'(x) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 < x \\ -1 & , \quad x < 0 \end{cases},$$

$$([.]^-)'' : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}, \quad ([.]^-)''(x) = 0.$$

Verhalten bei $\pm\infty$
$\lim\limits_{x\uparrow+\infty}[x]^- = 0$. $\lim\limits_{x\uparrow+\infty}([.]^-)'(x) = 0$. $\lim\limits_{x\uparrow+\infty}([.]^-)''(x) = 0$.
$\lim\limits_{x\downarrow-\infty}[x]^- = +\infty$. $\lim\limits_{x\downarrow-\infty}([.]^-)'(x) = -1$. $\lim\limits_{x\downarrow-\infty}([.]^-)''(x) = 0$.

Verhalten am Rand -

<u>spezielle Stellen</u>

0 ist eine spezielle Stelle von $[.]^-$.

$\lim_{x\to 0}[x]^- = 0 = [0]^-$.

$\lim_{x\uparrow 0}\dfrac{[x]^- - [0]^+}{x-0} = -1$ und $\lim_{x\uparrow 0}([.]^-)'(x) = -1$.
$\lim_{x\downarrow 0}\dfrac{[x]^- - [0]^+}{x-0} = 0$ und $\lim_{x\downarrow 0}([.]^-)'(x) = 0$.

$\lim_{x\uparrow 0}([.]^-)''(x) = 0$ und $\lim_{x\downarrow 0}([.]^-)''(x) = 0$.

<u>spezielle Eigenschaften</u>

$[.]^-$ ist konvex, $[.]^-$ ist nicht konkav, doch jedes $x \in \mathbb{R}$ ist Wendepunkt von $[.]^-$.

$[.]^- \circ [.]^- = \mathsf{zo}_{\mathbb{R}}$.
$[.]^- \circ [.]^+ = \mathsf{zo}_{\mathbb{R}}$.
$[.]^+ \circ [.]^- = [.]^-$.

$\forall x, y : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad [x+y]^- \leq [x]^- + [y]^-$.

$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow x = [x]^+ - [x]^-$.
$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow |x| = [x]^+ + [x]^-$.
$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow [x]^- = \frac{|x|-x}{2}$.
$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow [x]^+ \cdot [x]^- = 0$.

$\forall x : x \in \mathbb{R} \wedge x = [x]^- \Rightarrow x = 0$.
$\forall x : x \in \mathbb{R} \wedge x = -[x]^- \Rightarrow x \leq 0$.

$\forall x : x \in \mathbb{R} \wedge [x]^- = x \Rightarrow x = 0$.
$\forall x : x \in \mathbb{R} \wedge [x]^- = -x \Rightarrow x \leq 0$.

$\forall x : x \in \mathbb{R} \wedge x \leq 0 \Rightarrow x = -[x]^- \wedge [x]^- = -x$.

$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow [x]^- = \max\{0, -x\}$.

8 sgn

sgn ist die reelle Vorzeichenfunktion. Es gilt

$$\mathsf{sgn}\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \mathsf{sgn}\,(x) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 < x \\ 0 & . \quad x = 0 \\ -1 & , \quad x < 0 \end{cases}$$

dom ran
dom (sgn) $= \mathbb{R}$.
ran (sgn) $= \{-1, 0, 1\}$.

(un-)gerade
sgn ungerade.

Periodizität
$\neg$(sgn ist T periodisch).

Monotonie
sgn wachsend.
$\neg$(sgn streng wachsend).

$\neg$(sgn fallend).
sgn fallend auf $]-\infty|0[$.
sgn fallend auf $]0|+\infty[$.

konvex/konkav
Für $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$(\mathsf{dqsgn}\,)(x) : \mathbb{R} \setminus \{x\} \to \mathbb{R},$$

$$(\mathsf{dqsgn}\,)(x)(t) = \frac{\mathsf{sgn}\,(t) - \mathsf{sgn}\,(x)}{t - x} = \begin{cases} \frac{\mathsf{sgn}\,(t)-1}{t-x} & , \quad 0 < x \\ \frac{\mathsf{sgn}\,(t)}{t-x} & , \quad x = 0 \\ \frac{\mathsf{sgn}\,(t)+1}{t-x} & , \quad x < 0 \end{cases},$$

so dass für $0 < x$,

$$(\mathsf{dqsgn}\,)(x)(t) = \begin{cases} 0 & , \quad x < t \\ 0 & , \quad 0 < t < x \\ \frac{1}{x} & , \quad t = 0 \\ \frac{2}{x+|t|} & , \quad t < 0 \end{cases},$$

fallend auf $[0|+\infty[\, \setminus \{x\}$ und wachsend auf $]-\infty|0[$ ist und für $x = 0$,

$$(\mathsf{dqsgn}\,)(x)(t) = \begin{cases} \frac{1}{t} & , \quad 0 < t \\ -\frac{1}{t} & , \quad t < 0, \end{cases},$$

fallend auf $]0|+\infty[$ und wachsend auf $]-\infty|0[$ ist und für $x<0$,

$$(\mathsf{dqsgn}\,)(x)(t) = \begin{cases} \frac{2}{t-x} = \frac{2}{t+|x|} & , \quad 0<t \\ \frac{1}{|x|} & , \quad t=0, \\ 0 & , \quad x<t<0 \\ 0 & , \quad t<x \end{cases},$$

fallend auf $]0|+\infty[$ und wachsend auf $]-\infty|0] \setminus \{x\}$. Es folgt:

$\neg(\mathsf{sgn}$ konvex$)$.
sgn konvex auf $]0|+\infty[$.
sgn konvex auf $]-\infty|0]$.

$\neg(\mathsf{sgn}$ konkav$)$.
sgn konkav auf $[0|+\infty[$.
sgn konkav auf $]-\infty|0[$.

$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow x$ ist $\pm$-Wendepunkt von sgn.
$\forall x : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow x$ ist $\mp$-Wendepunkt von sgn.

Extrema
$\forall x : x \in]0|+\infty[\Rightarrow \mathsf{sgn}$ hat in x globales Maximum $\wedge\ \mathsf{sgn}\,(x)=1$.
sgn hat in x globales Maximum $\quad\Rightarrow\quad 0<x \wedge \mathsf{sgn}\,(x)=1$.
$\neg(\mathsf{sgn}$ hat in x striktes globales Maximum$)$.

$\forall x : x \in]-\infty|0[\Rightarrow \mathsf{sgn}$ hat in x globales Minimum $\wedge\ \mathsf{sgn}\,(x)=-1$.
sgn hat in x globales Minimum $\quad\Rightarrow\quad x<0 \wedge \mathsf{sgn}\,(x)=-1$.
$\neg(\mathsf{sgn}$ hat in x striktes globales Minimum$)$.

Stetigkeit
sgn unstetig in 0, da

$$\lim_{t\uparrow 0} \mathsf{sgn}\,(t) = -1 \neq 1 = \lim_{t\downarrow 0} \mathsf{sgn}\,(t) = 1.$$

$\neg(\mathsf{sgn}$ stetig$)$.

sgn stetig auf $]0|+\infty[$.
sgn stetig auf $]-\infty|0[$.

Differenzierbarkeit
sgn nicht differenzierbar in 0, da sgn nicht stetig in 0.

$\neg(\mathsf{sgn}$ differenzierbar).

sgn beliebig oft differenzierbar auf $]0|+\infty[$.
sgn beliebig oft differenzierbar auf $]-\infty|0[$.

$$\mathsf{sgn}' : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad \mathsf{sgn}'(x) = 0,$$

$$\mathsf{sgn}'' : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad \mathsf{sgn}''(x) = 0.$$

Verhalten bei $\pm\infty$

$$\lim_{t\uparrow+\infty} \mathsf{sgn}(t) = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{t\uparrow+\infty} \mathsf{sgn}'(t) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{t\uparrow+\infty} \mathsf{sgn}''(t) = 0,$$

$$\lim_{t\downarrow-\infty} \mathsf{sgn}(t) = -1 \quad \text{und} \quad \lim_{t\downarrow-\infty} \mathsf{sgn}'(t) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{t\downarrow+\infty} \mathsf{sgn}''(t) = 0.$$

Verhalten am Rand -

spezielle Stellen
0 ist eine spezielle Stelle von sgn.

$$\lim_{t\uparrow0} \mathsf{sgn}(t) = -1 \neq 0 = \mathsf{sgn}(0) \quad \text{und} \quad \lim_{t\uparrow0} \mathsf{sgn}(t) = -1 \neq 1 = \lim_{t\downarrow0} \mathsf{sgn}(t).$$

$$\lim_{t\downarrow0} \mathsf{sgn}(t) = 1 \neq 0 = \mathsf{sgn}(0) \quad \text{und} \quad \lim_{t\downarrow0} \mathsf{sgn}(t) = 1 \neq -1 = \lim_{t\uparrow0} \mathsf{sgn}(t).$$

$$\lim_{t\uparrow0} \frac{\mathsf{sgn}(t) - \mathsf{sgn}(0)}{t-0} = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{t\uparrow0} \mathsf{sgn}'(t) = 0.$$

$$\lim_{t\downarrow0} \frac{\mathsf{sgn}(t) - \mathsf{sgn}(0)}{t-0} = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{t\downarrow0} \mathsf{sgn}'(t) = 0.$$

$$\lim_{t\uparrow0} \mathsf{sgn}''(t) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{t\downarrow0} \mathsf{sgn}''(t) = 0.$$

spezielle Eigenschaften

$\mathsf{sgn} \circ \mathsf{sgn} = \mathsf{sgn}$.

$\forall x : 0 \neq x \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathsf{sgn}^2(x) = 1$.

$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathsf{sgn}(x) = \frac{1}{\mathsf{sgn}(x)}$.

$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow |x| = \mathsf{sgn}(x) \cdot x \wedge |x| = \frac{x}{\mathsf{sgn}(x)}$.

$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow x = \mathsf{sgn}(x) \cdot |x| \wedge x = \frac{|x|}{\mathsf{sgn}(x)}$.

sgn hat unendlich viele $\pm$-Wendepunkte.
sgn hat unendlich viele $\mp$-Wendepunkte.

$\forall x : x \in \mathsf{dom}(\mathsf{sgn}') \Rightarrow \mathsf{sgn}'(x) = 0$.
Dennoch ist sgn keine konstante Funktion.

9 vzw

vzw ist die reelle Vorzeichenwechselfunktion. Es gilt

$$\mathsf{vzw} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \mathsf{vzw}(x) = -x.$$

dom ran
dom (vzw) $= \mathbb{R}$.
ran (vzw) $= \mathbb{R}$.

(un-)gerade
vzw ungerade.

Periodizität
$\neg$(vzw ist T periodisch).

Monotonie
vzw streng fallend.

konvex/konkav
vzw konvex.
vzw konkav.

$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow x$ ist $\pm$-Wendepunkt von vzw.
$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow x$ ist $\mp$-Wendepunkt von vzw.

Extrema
$\neg$(vzw hat in x globales Maximum).
$\neg$(vzw hat in x globales Minimum).

Stetigkeit
vzw stetig.

Differenzierbarkeit
vzw beliebig oft differenzierbar.
$\mathsf{vzw}' = (-1)^{on}\mathbb{R}$.
$\mathsf{vzw}'' = \mathsf{zo}_{\mathbb{R}}$.

Verhalten bei $\pm\infty$

$$\lim_{t \uparrow +\infty} \mathsf{vzw}(t) = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{t \uparrow +\infty} \mathsf{vzw}'(t) = -1 \quad \text{und} \quad \lim_{t \uparrow +\infty} \mathsf{vzw}''(t) = 0.$$

$$\lim_{t \downarrow -\infty} \mathsf{vzw}(t) = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{t \downarrow -\infty} \mathsf{vzw}'(t) = -1 \quad \text{und} \quad \lim_{t \downarrow -\infty} \mathsf{vzw}''(t) = 0.$$

Verhalten am Rand - spezielle Stellen -

<u>spezielle Eigenschaften</u>

$\mathsf{vzw} \circ \mathsf{vzw} = \mathsf{id}$

$\mathsf{vzw}^{-1} = \mathsf{vzw}$.

vzw ist sowohl konvex als auch konkav.

vzw hat unendlich viele $\pm$-Wendepunkte.
vzw hat unendlich viele $\mp$-Wendepunkte.

10 rez

rez ist die reelle Reziproksfunktion. Es gilt

$$\mathsf{rez}:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad \mathsf{rez}(x)=\frac{1}{x},$$

insbesondere

$$\mathsf{rez}(0)=\frac{1}{0}=0.$$

<u>dom ran</u>
$\mathsf{dom}\,(\mathsf{rez})=\mathbb{R}$.
$\mathsf{ran}\,(\mathsf{rez})=\mathbb{R}$.

<u>(un-)gerade</u>
rez ungerade.

<u>Periodizität</u>
$\neg(\mathsf{rez}$ ist T periodisch).

<u>Monotonie</u>
$\neg(\mathsf{rez}$ wachsend).

$\neg(\mathsf{rez}$ fallend).
rez streng fallend auf $]0|+\infty[$.
rez streng fallend auf $]-\infty|0[$.

<u>konvex/konkav</u>
Für $x\in\mathbb{R}$ gilt

$$(\mathsf{dqrez})(x):\mathbb{R}\setminus\{x\}\to\mathbb{R},$$

$$(\mathsf{dqrez})(x)(t)=\frac{\mathsf{rez}(t)-\mathsf{rez}(x)}{t-x}=\begin{cases}\frac{\frac{1}{t}-\frac{1}{x}}{t-x} & ,\quad x\neq 0\\ \frac{1}{t^2} & ,\quad x=0\end{cases}$$

so dass für $x\neq 0$,

$$(\mathsf{dgrez})(x)(t)=\begin{cases}-\frac{1}{t\cdot x} & ,\quad 0\neq t\neq x\\ -\frac{1}{x^2} & ,\quad t=0,\end{cases},$$

wachsend für $0<x$ auf $]0|+\infty[\setminus\{x\}$, wachsend für $0<x$ auf $]-\infty|0[$, fallend für $x<0$ auf $]0|+\infty[$, fallend für $x<0$ auf $]-\infty|0[\setminus\{x\}$ und für $x=0$,

$$(\mathsf{dqrez})(x)(t)=\frac{1}{t^2},\quad 0\neq t,$$

fallend auf $]0|+\infty[$ und wachsend auf $]-\infty|0[$. Es folgt

$\neg(\mathsf{rez}$ konvex).
$\neg(\mathsf{rez}$ konvex auf $[0|+\infty[)$.
rez konvex auf $]0|+\infty[$.

$\neg(\mathsf{rez}$ konkav).
$\neg(\mathsf{rez}$ konkav auf $]-\infty|0])$.
rez konkav auf $]-\infty|0[$.

$\neg(x$ ist Wendepunkt von $\mathsf{rez})$.

Extrema
$\neg(\mathsf{rez}$ hat in x globales Maximum).
$\neg(\mathsf{rez}$ hat in x globales Minimum).

Stetigkeit
rez unstetig in 0, da

$$\lim_{t\uparrow 0} \mathsf{rez}(t) = -\infty.$$

$\neg(\mathsf{rez}$ stetig).

rez stetig auf $]0|+\infty[$.
rez stetig auf $]-\infty|0[$.

Differenzierbarkeit
rez nicht differenzierbar in 0, da rez unstetig in 0.

$\neg(\mathsf{rez}$ differenzierbar).

rez beliebig oft differenzierbar auf $]0|+\infty[$.
rez beliebig oft differenzierbar auf $]-\infty|0[$.

$$\mathsf{rez}' : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}, \quad \mathsf{rez}'(x) = -\frac{1}{x^2},$$

$$\mathsf{rez}'' : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R} \quad \mathsf{rez}''(x) = \frac{2}{x^3}.$$

Verhalten bei $\pm\infty$

$$\lim_{t\uparrow+\infty} \mathsf{rez}(t) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{t\uparrow+\infty} \mathsf{rez}'(t) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{t\uparrow+\infty} \mathsf{rez}''(t) = 0,$$

$$\lim_{t\downarrow+-\infty} \mathsf{rez}(t) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{t\downarrow-\infty} \mathsf{rez}'(t) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{t\downarrow-\infty} \mathsf{rez}''(t) = 0,$$

Verhalten am Rand -

spezielle Stellen
0 ist eine spezielle Stelle von rez.

$$\lim_{t\uparrow 0}\mathsf{rez}(t) = -\infty \neq 0 = \mathsf{rez}(0) \quad \text{und} \quad \lim_{t\uparrow 0}\mathsf{rez}(t) = -\infty \neq +\infty = \lim_{t\downarrow 0}\mathsf{rez}(t).$$

$$\lim_{t\downarrow 0}\mathsf{rez}(t) = +\infty \neq 0 = \mathsf{rez}(0) \quad \text{und} \quad \lim_{t\downarrow 0}\mathsf{rez}(t) = +\infty \neq -\infty = \lim_{t\uparrow 0}\mathsf{rez}(t).$$

$$\lim_{t\uparrow 0}\frac{\mathsf{rez}(t) - \mathsf{rez}(0)}{t - 0} = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{t\uparrow 0}\mathsf{rez}'(t) = -\infty.$$

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{\mathsf{rez}(t) - \mathsf{rez}(0)}{t - 0} = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{t\downarrow 0}\mathsf{rez}'(t) = -\infty.$$

$$\lim_{t\uparrow 0}\mathsf{rez}''(t) = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{t\downarrow 0}\mathsf{rez}''(t) = +\infty.$$

spezielle Eigenschaften

$\mathsf{rez} \circ \mathsf{rez} = \mathsf{id}_{\mathbb{R}}$.

$\mathsf{rez}^{-1} = \mathsf{rez}$.

$\forall x : x \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{rez}') \Rightarrow \mathsf{rez}'(x) < 0$.
Dennoch ist rez nicht fallend oder streng fallend.