Vorkurs Mathematik
$<$ und $\leq$

Andreas Unterreiter

1. Juli 2020

Inhaltsverzeichnis

1 $<$ und $\leq$ und $+\infty$ und $-\infty$ und $\mathbb{S}$

Im Vorkurs - und nicht nur hier - ist es gelgentlich von nicht zu unterschätzendem Vorteil, die aus der Schulmathematik bekannte "Kleiner-Relation $<$" und die ebenso bekannte "KleinerGleich-Relation $\leq$" nicht nur für reelle Zahlen, sondern zusätzlich auch für die "uneigentlichen" Zahlen $+\infty$, $-\infty$ zu betrachten.

Vorab sei die "Menge $\mathbb{S}$ der sreellen Zahlen"

$$\mathbb{S} := \{+\infty, \infty\} \cup \mathbb{R},$$

definiert und gleichsam erklärend sei

<u>Satz - $\mathbb{S}$</u>

a) $+\infty$ Menge $\wedge$ $-\infty$ Menge.

b) $\mathbb{S}$ Menge.

c) $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{S} \wedge \mathbb{R} \neq \mathbb{S}$.

d) $+\infty \notin \mathbb{R} \wedge +\infty \in \mathbb{S}$.

e) $-\infty \notin \mathbb{R} \wedge -\infty \in \mathbb{S}$.

f) $x \in \mathbb{S} \quad \Rightarrow \quad x \in \mathbb{R} \vee x = +\infty \vee x = -\infty$.

g) $x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad x \in \mathbb{S} \wedge x \neq +\infty \wedge x \neq -\infty$.

ohne Beweis präsentiert.

Bezüglich $<$ gelten vertraute und erwartete Regeln

Satz - $<$

a) $\neg(x < x)$.

b) $x < y \quad \Rightarrow \quad \neg(x = y) \wedge \neg(y < x)$.

c) $x < y \quad \Rightarrow \quad x \in \mathbb{S} \wedge y \in \mathbb{S} \wedge x \neq +\infty \wedge y \neq -\infty$.

d) $x \in \mathbb{S} \wedge y \in \mathbb{S} \quad \Rightarrow \quad x < y \vee x = y \vee y < x$.

e) $x < y < z \quad \Rightarrow \quad x < z$.

f) $x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad -\infty < x \wedge x < +\infty$.

g) $a < x < b \quad \Rightarrow \quad x \in \mathbb{R}$.

h) $-\infty < +\infty$.

Ohne Beweis.

Von " $<$" gelangt man zu " $\leq$" durch die Definition

$$x \leq y \qquad \Leftrightarrow \qquad x < y \vee (x = y \wedge x \in \mathbb{S}).$$

Es gelten neuerlich vertraute und erwartete Regeln

Satz - $\leq$

a) $x \in \mathbb{S} \quad \Rightarrow \quad x \leq x.$

b) $x \leq y \quad \Rightarrow \quad \neg(y < x).$

c) $x \leq y \quad \Rightarrow \quad x \in \mathbb{S} \wedge y \in \mathbb{S}.$

d) $x \in \mathbb{S} \wedge y \in \mathbb{S} \quad \Rightarrow \quad x \leq y \vee y \leq x.$

e) $x \leq y \wedge y \leq x \quad \Rightarrow \quad x = y.$

f) $x \leq y \wedge y \leq z \quad \Rightarrow \quad x \leq z.$

g) $x \in \mathbb{S} \quad \Rightarrow \quad -\infty \leq x \wedge x \leq +\infty.$

h) $-\infty \leq +\infty \wedge -\infty \leq -\infty \wedge +\infty \leq +\infty.$

i) $a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R} \wedge a \leq x \leq b \quad \Rightarrow \quad x \in \mathbb{R}.$

Ohne Beweis. Auch gibt es einige "gemischte" Regeln mit " $<$" und " $\leq$" .

Satz - $<$ $\leq$

a) $x \in \mathbb{S} \wedge y \in \mathbb{S} \quad \Rightarrow \quad x \leq y \vee y < x.$

b) $x \in \mathbb{S} \wedge y \in \mathbb{S} \quad \Rightarrow \quad x < y \vee y \leq x.$

c) $x < y \wedge y \leq z \quad \Rightarrow \quad x < z.$

d) $x \leq y \wedge y < z \quad \Rightarrow \quad x < z.$

e) $a \in \mathbb{R} \wedge a \leq x < b \quad \Rightarrow \quad x \in \mathbb{R}.$

f) $b \in \mathbb{R} \wedge a < x \leq b \quad \Rightarrow \quad x \in \mathbb{R}.$

Ohne Beweis.

2 Die 2HK-Projektion

2.1 $\phi : \mathbb{S} \to L$.

Es gibt eine recht anschauliche Visualisierung von $\mathbb{S}$ als Linie L in der Ebene. L setzt sich aus zwei Halbkreislinien zusammen. Die Zeichenfolge "2HK" von der Überschrift dieses Abschnitts ist ein Kürzel von "2 Halb-Kreislinien". Die eine Halbkreislinie

$$L_+ = \{(u,v) : 0 \leq u \wedge u \in \mathbb{R} \wedge v \in \mathbb{R} \wedge u^2 + (-1+v)^2 = 1\},$$

ist im ersten Quadranten, die andere Halbkreislinie

$$L_- = \{(u,v) : u \leq 0 \wedge u \in \mathbb{R} \wedge v \in \mathbb{R} \wedge u^2 + (1+v)^2 = 1\},$$

ist im dritten Quadranten. L ist die Vereinigung dieser beiden Punktmengen

$$L = L_+ \cup L_-.$$

Dass sich die beiden Halbkreislinien genau im Ursprung $(0,0)$ "schneiden",

$$L_+ \cap L_- = \{(0,0)\},$$

ist für das Weitere ohne Belang.

Es ist das Ziel, eine Funktion ϕ mit

$$\boxed{\textbf{todo:}} \quad \phi : \mathbb{S} \to L \text{ bijektiv},$$

auf möglichst anschauliche Weise zu konstruieren. Im Speziellen soll durch ϕ jeder Zahl $x \in \mathbb{S}$ genau ein Punkt $(u,v) \in L$ zugeordnet werden.

Die Konstruktion von ϕ beginnt mit den nicht-negativen *reellen* Zahlen x, also mit den Zahlen x mit $0 \leq x \in \mathbb{R}$.

Für x mit $0 \leq x \in \mathbb{R}$ wird jene Gerade $g(x)$ in der Ebene betrachtet, die den "Nordpol "$(0,2)$ von L mit dem Punkt $(x,0)$ der "in $\mathbb{R}^2$ eingebetteten" reellen Achse verbindet. Mit Hilfe der Schulmathematik stellt sich ohne grossen Aufwand

$$\begin{aligned} g(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad g(x)(t) = (x,0) + t \cdot ((0,2) - (x,0)) &= (x,0) + t \cdot (-x,2) \\ &= (x - t \cdot x, 2 \cdot t), \end{aligned}$$

heraus. Im Vorkurs wird zeilenorientiert gerechnet. Es ist anschaulich klar, dass die Gerade $g(x)$ wegen $0 \leq x \in \mathbb{R}$ die Halbkreislinie L_+ in genau zwei Punkten - nämlich in $(0,2)$ und einen noch zu ermittelnden Punkt (u,v) - schneidet.

Rechnerisch sieht das so aus: Es soll die Schnittmenge

$$L_+ \cap g(x),$$

ermittelt werden. Wegen $L_+ \subseteq \mathbb{R}^2$ gilt $w \in L_+ \cap g(x)$ genau dann, wenn es u, v gibt, so dass $u, v \in \mathbb{R}$ und $(u, v) \in L_+$ und $(u, v) \in g(x)$. Aus $(u, v) \in L_+$ folgt per definitionem L_+,

$$u^2 + (-1 + v)^2 = 1. \tag{1}$$ 2hk.1

Um "$(u, v) \in g(x)$" zu verstehen ist es angebracht, $g(x)$ nicht in obiger "Funktionsform" sondern als "Graph" darzustellen. Es gilt nämlich

$$g(x) = \{(x - t \cdot x, 2 \cdot t) : t \in \mathbb{R}\},$$

mathematisch genauer

$$g(x) = \{(u, v) : \exists t : t \in \mathbb{R} \wedge u = x - t \cdot x \wedge v = 2 \cdot t\},$$

so dass aus $(u, v) \in g(x)$ nun ohne Weiteres folgt:

$$\exists t : t \in \mathbb{R} \wedge u = x - t \cdot x \wedge v = 2 \cdot t. \tag{2}$$ 2hk.2

Der Punkt (u, v) muss beide Bedingungen $\overset{\texttt{2hk.1}}{(1)}$, $\overset{\texttt{2hk.2}}{(2)}$ erfüllen. Aus $\overset{\texttt{2hk.2}}{(2)}$ folgt, dass es t mit $t \in \mathbb{R}$ so gibt, dass

$$u = x - t \cdot x \wedge v = 2 \cdot t.$$

Setzt man diese Darstellungen von u und v in $\overset{\texttt{2hk.1}}{(1)}$ ein, so erhält man mit

$$(x - t \cdot x)^2 + (-1 + 2 \cdot t)^2 = 1,$$

eine *quadratische Gleichung in t, die von x abhängt*. Dies ist nicht überraschend. Der Schnittpunkt von $g(x)$ mit L_+ soll und wird ja von x abhängen. Weitere Umformungen ergeben

$$x^2 \cdot (1 - t)^2 + (1 - 4 \cdot t + 4 \cdot t^2) = 1,$$

$$x^2 \cdot (1 - 2 \cdot t + t^2) - 4 \cdot t + 4 \cdot t^2 = 0,$$

$$x^2 - (4 + 2 \cdot x^2) \cdot t + (4 + x^2) \cdot t^2 = 0,$$

woraus sich mit Schulmathematik dank $0 \neq 4 + x^2$,

$$t = \frac{4 + 2 \cdot x^2 \pm \sqrt{(4 + 2 \cdot x^2)^2 - 4 \cdot (4 + x^2) \cdot x^2}}{2 \cdot (4 + x^2)},$$

also

$$
\begin{aligned}
t = \frac{4 + 2 \cdot x^2 \pm \sqrt{(4 + 2 \cdot x^2)^2 - 4 \cdot (4 + x^2) \cdot x^2}}{2 \cdot (4 + x^2)} \\
= \frac{4 + 2 \cdot x^2 \pm \sqrt{16 + 16 \cdot x^2 + 4 \cdot x^4 - (16 + 4 \cdot x^2) \cdot x^2}}{2 \cdot (4 + x^2)} \\
= \frac{4 + 2 \cdot x^2 \pm \sqrt{16 + 16 \cdot x^2 + 4 \cdot x^4 - 16 \cdot x^2 - 4 \cdot x^4}}{2 \cdot (4 + x^2)} \\
= \frac{4 + 2 \cdot x^2 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot (4 + x^2)} = \frac{4 + 2 \cdot x^2 \pm 4}{2 \cdot (4 + x^2)} = \frac{2 \cdot (1 \pm 1) + x^2}{4 + x^2}.
\end{aligned}
$$

ergibt. Es folgt

$$t = 1 \vee t = \frac{x^2}{4 + x^2}.$$

Wegen $g(x)(1) = (0, 2)$ ist

$$t = \frac{x^2}{4 + x^2}$$

offenbar die interessantere der beiden Lösungen. Es folgt

$$u = x - t \cdot x = x \cdot (1 - t) = x \cdot \left(1 - \frac{x^2}{4 + x^2}\right) = x \cdot \frac{4 + x^2 - x^2}{4 + x^2} = \frac{4 \cdot x}{4 + x^2},$$

$$v = 2 \cdot t = \frac{2 \cdot x^2}{4 + x^2}.$$

<u>Intermezzo - Probe</u> Mathematische Bearbeitungen sind nicht automatisch fehlerfrei. Es empfiehlt sich, hin und wieder die Plausibilität von Ergebnissen durch "Proben" zu überprüfen. Es soll dabei getestet werden, ob das aktuelle Ergebnis noch den Anforderungen, unter denen es hergeleitet wurde, genügt. Wird die Probe bestanden, ist dies ein *Indiz, kein Beweis* für die Richtigkeit des Ergebnisses. Nur im Irrtum gibt es Sicherheit: wird die Probe nicht bestanden, liegt ein Fehler vor.

Im vorliegenden Fall empfiehlt sich die Überprüfung, ob der durch Rechnung ermittelte Schnittpunkt

$$(u, v) = \left(\frac{4 \cdot x}{4 + x^2}, \frac{2 \cdot x^2}{4 + x^2}\right),$$

sowohl in L_+ als auch in $g(x)$ liegt, ob also

$$(u, v) \in L_+ \wedge (u, v) \in g(x),$$

gilt. Per definitionem ist, um $(u, v) \in L_+$ A posteriori nachzuweisen, die Wahrheit von

$$\boxed{\textbf{to do:}} \qquad (u,v) \text{ Menge} \quad \wedge \quad u \in \mathbb{R} \wedge v \in \mathbb{R} \quad \wedge \quad u^2 + (-1+v)^2 = 1$$

zu überprüfen. Aus $x \in \mathbb{R}$ folgt ohne Weiteres per definitionem u, v: $u \in \mathbb{R} \wedge v \in \mathbb{R}$. Somit auch $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. Dass (u,v) eine Menge ist folgt aus $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. Bei der Gleichung ist ein wenig zu rechnen:

$$u^2 + (-1+v)^2 = \left(\frac{4 \cdot x}{4+x^2}\right)^2 + \left(-1 + \frac{2 \cdot x^2}{4+x^2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{4 \cdot x}{4+x^2}\right)^2 + \left(\frac{-4 - x^2 + 2 \cdot x^2}{4+x^2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{(4+x^2)^2} \cdot \left((4 \cdot x)^2 + (-4+x^2)^2\right) = \frac{1}{(4+x^2)^2} \cdot \left(16 \cdot x^2 + 16 - 8 \cdot x^2 + x^4\right)$$

$$= \frac{1}{(4+x^2)^2} \cdot \left(16 + 8 \cdot x^2 + x^4\right) = \frac{1}{(4+x^2)^2} \cdot (4+x^2)^2 = 1,$$

wobei im letzten Schritt die wegen "$x \in \mathbb{R}$" gültigen Aussagen $0 \neq 4 + x^2 \in \mathbb{R}$ eingesetzt werden. Somit ist $(u,v) \in L_+$ nachgewiesen.

Der Nachweis von $(u,v) \in g(x)$ verläuft, da $g(x)$ nicht über eine definierende Gleichung, sondern über eine "Parameterdarstellung" dargestellt ist, etwas anders. Per definitionem gilt $(u,v) \in g(x)$ A posteriori, falls

$$\boxed{\textbf{to do:}} \qquad (u,v) \text{ Menge} \quad \wedge \quad \exists t : t \in \mathbb{R} \wedge u = x - t \cdot x \wedge v = 2 \cdot t.$$

Die Aussage "(u,v) Menge" wurde bereits nachgewiesen. Im vorliegenden Fall gilt

$$v = \frac{2 \cdot x^2}{4+x^2},$$

so dass es wegen $v = 2 \cdot t$ naheliegt,

$$t = \frac{x^2}{4+x^2},$$

zu versuchen. Dass dieses t existiert, liegt in der Natur der Mathematik, wegen $x \in \mathbb{R}$ gilt auch $\frac{x^2}{4+x^2} \in \mathbb{R}$ und somit $t \in \mathbb{R}$. Auch ist $v = 2 \cdot t$ wahr. Bleibt noch die Gleichung "$u = x - t \cdot x$" zu überprüfen. Dies gelingt durch Einsetzen:

$$x - t \cdot x = x - \frac{x^2}{4+x^2} \cdot x = \frac{1}{4+x^2} \cdot \left(x \cdot (4+x^2) - x^2 \cdot x\right)$$

$$= \frac{1}{4+x^2} \cdot \left(4 \cdot x + x^3 - x^3\right) = \frac{1}{4+x^2} \cdot (4 \cdot x) = \frac{4 \cdot x}{4+x^2} = u,$$

wobei hier die wegen $x \in \mathbb{R}$ gültigen Gleichungen $4 \cdot x = 4 \cdot x + 0$ und $x^3 - x^3 = 0$ eingesetzt werden. Es wurde also gezeigt: Es gibt t - nämlich $t = \frac{x^2}{4+x^2}$ -, so dass $t \in \mathbb{R}$ und $u = x - t \cdot x$ und $v = 2 \cdot t$ und (u, v) Menge. Also $(u, v) \in g(x)$.

Probe bestanden. <u>Ende Intermezzo - Probe</u>

Die Konstruktion der Funktion "ϕ" erfolgt schrittweise. Für die x mit $0 \leq x \in \mathbb{R}$ soll $\phi(x)$ gleich der soeben gefundene Schnittpunkt von L_+ mit $g(x)$ sein:

$$\forall x : 0 \leq x \wedge x \in \mathbb{R} \Rightarrow \phi(x) = \left(\frac{4 \cdot x}{4 + x^2}, \frac{2 \cdot x^2}{4 + x^2} \right).$$

Für jene x, für die $x \leq 0$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt, führt eine ähnliche Konstruktion, bei der der Schnittpunkt$\neq (0, -2)$ von L_- mit der Geraden durch $(0, -2)$ und $(x, 0)$ ermittelt und gleich $\phi(x)$ gesetzt wird, auf

$$\forall x : x \leq 0 \wedge x \in \mathbb{R} \Rightarrow \phi(x) = \left(\frac{4 \cdot x}{4 + x^2}, -\frac{2 \cdot x^2}{4 + x^2} \right),$$

Die Definitionen sind für $x = 0$ konsistent, da erwarteter Weise $\phi(0) = (0, 0)$ gilt. Bemerkenswerter Weise ist die Fallunterscheidung $0 \leq x$ oder $x \leq 0$ via

$$|x| = \begin{cases} x & , \quad 0 \leq x \wedge x \in \mathbb{R} \\ -x & , \quad x \leq 0 \wedge x \in \mathbb{R} \end{cases},$$

also auch

$$x \cdot |x| = \begin{cases} x^2 & , \quad 0 \leq x \wedge x \in \mathbb{R} \\ -x^2 & , \quad x \leq 0 \wedge x \in \mathbb{R} \end{cases},$$

einfach vermeidbar:

$$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow \phi(x) = \left(\frac{4 \cdot x}{4 + x^2}, \frac{2 \cdot x \cdot |x|}{4 + x^2} \right).$$

Die Konstruktion von ϕ wird durch die Festsetzungen

$$\phi(+\infty) = (0, 2) \quad , \quad \phi(-\infty) = (0, -2),$$

abgeschlossen. ϕ bildet $+\infty$ auf den "Nordpol" $(0, 2)$ von L ab. ϕ bildet $-\infty$ auf den "Südpol" $(0, -2)$ von L ab. ϕ bildet die reellen Zahlen auf die Punkte zwischen Nordpol und Südpol von L ab.

$$\phi : \mathbb{S} \to L, \quad \phi(x) = \begin{cases} (0, 2) & , \quad x = +\infty \\ \left(\frac{4 \cdot x}{4 + x^2}, \frac{2 \cdot x \cdot |x|}{4 + x^2} \right) & , \quad x \in \mathbb{R} \\ (0, -2) & , \quad x = -\infty \end{cases}.$$

<u>Intermezzo - Probe</u> Vielleicht ist es ein wenig überraschend, auch an dieser Stelle eine Probe durchzuführen. Schliesslich wurde soeben ϕ augenscheinlich erfolgreich konstruiert. Dennoch bleibt die Frage offen, inwieweit ϕ die eingangs erwähnte Eigenschaft

$$\boxed{\textbf{to do:}} \qquad \phi : \mathbb{S} \to L \text{ bijektiv}$$

hat. Nur wenn diese Aussage wahr ist kann von einer "Visualiserung" von $\mathbb{S}$ durch L via ϕ gesprochen werden. Ist $\phi : \mathbb{S} \to L$ bijektiv, ordnet ϕ jedem Punkt von $\mathbb{S}$ *genau einen Punkt* von L zu und jeder Punkt von L hat die Eigenschaft, durch ϕ *genau einer* sreellen Zahl zugeordnet zu sein.

Zunächst ist festzustellen, ob ϕ eine *Funktion* ist, die *jedem* x mit $x \in \mathbb{S}$ einen Punkt aus L zuordnet.

Dies ist offensichtlich der Fall.

Auch ist ϕ *nur* für die sreellen Zahlen definiert. Damit ist

$$\phi : \mathbb{S} \to L \tag{3}$$ 2hk.6

nachgewiesen.

Als nächstes ist zu klären, ob ϕ eine *injektive* Funktion ist. Es ist zu überprüfen, ob ϕ unterschiedlichen sreellen Zahlen auch unterschiedliche Punkte aus L zuordnet. Anschaulich-geometrisch ist dies geradezu offensichtlich. Doch kann diese "Offensichtlichkeit" auch bewiesen werden? In der Tat ist der beweisende Weg mühsamer, aber eben auch instruktiv, weswegen er hier beschritten werden soll.

Wir gehen zunächst von reellen x, y mit $x \neq y$ aus. Es ist $\phi(x) \neq \phi(y)$ zu zeigen. Per definitionem ϕ ist also Folgendes zu tun:

$$\boxed{\textbf{to do:}} \quad \forall x, y : x \in \mathbb{R} \land y \in \mathbb{R} \land x \neq y \Rightarrow$$
$$\left(\frac{4 \cdot x}{4 + x^2}, \frac{2 \cdot x \cdot |x|}{4 + x^2} \right) \neq \left(\frac{4 \cdot y}{4 + y^2}, \frac{2 \cdot y \cdot |y|}{4 + y^2} \right).$$

Der Nachweis dieser Aussage ist offensichtlich nicht einfach. Man könnte hier auch versuchen, die "indirekte Version" zu beweisen,

$$\boxed{\textbf{to do:}} \quad \forall x, y : x \in \mathbb{R} \land y \in \mathbb{R} \land \left(\frac{4 \cdot x}{4 + x^2}, \frac{2 \cdot x \cdot |x|}{4 + x^2} \right) = \left(\frac{4 \cdot y}{4 + y^2}, \frac{2 \cdot y \cdot |y|}{4 + y^2} \right)$$
$$\Rightarrow \quad x = y,$$

doch auch dieses Ansinnen erscheint schwierig.

Nimmt man die anschauliche Geometrie zur Hilfe und stellt sich die Frage, wieso man denn so sicher sein kann, dass ϕ unterschiedliche reelle Zahlen x auf unterschiedliche Punkte von L abbildet, so kommt einem bald die Idee, dass je größer x ist, desto "nördlicher" $\phi(x)$ auf L liegt. Doch was heißt hier "nördlicher"? Zwei Antworten erscheinen möglich: 1) Der Abstand in der Ebene von $\phi(x)$ zum Nordpol $(0, 2)$ verringert sich. 2) Der "y-Wert" von $\phi(x)$ nimmt mit wachsendem x zu.

Antwort 2) ist einer direkten Bearbeitung zugänglich. In 2) wird der Verdacht geäußert, dass es sich bei der "zweiten Koordinationfunktion von ϕ", also bei

$$\phi_2 : \mathbb{S} \to \mathbb{R}, \quad \phi_2(x) = \begin{cases} 2 & , \quad x = +\infty \\ \dfrac{2 \cdot x \cdot |x|}{4 + x^2} & , \quad x \in \mathbb{R} \\ -2 & , \quad x = -\infty \end{cases} ,$$

um eine *streng wachsende Funktion* handelt, dass also

$$\forall x, y : x \in \mathbb{S} \wedge y \in \mathbb{S} \wedge x < y \qquad \Rightarrow \qquad \phi_2(x) < \phi_2(y) \quad ? \tag{4}$$ 2hk.todo1

gilt. Dies soll zunächst für reelle Zahlen x, y nachgewiesen. Dazu betrachten wir die *Einschränkung* $(\phi_2 \downharpoonright \mathbb{R})$ *von* ϕ_2 *auf* $\mathbb{R}$, also die Funktion

$$f = (\phi_2 \downharpoonright \mathbb{R}) \, ,$$

für die

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{2 \cdot x \cdot |x|}{4 + x^2},$$

gilt. Mit Hilfe der Schulmathematik und der Nebenrechnung in bedenklicher Notation,

$$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow (x \cdot |x|)' = 2 \cdot |x|,$$

gilt

$$f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f'(x) = \frac{4 \cdot |x| \cdot (4 + x^2) - 2 \cdot x \cdot |x| \cdot 2 \cdot x}{(4 + x^2)^2}$$

$$= \frac{16 \cdot |x| + 4 \cdot |x| \cdot x^2 - 4 \cdot x^2 \cdot |x|}{(4 + x^2)^2} = \frac{16 \cdot |x|}{(4 + x^2)^2},$$

so dass

$$\forall x : 0 \neq x \wedge x \in \mathbb{R} \Rightarrow 0 < f‘(x),$$

woraus tatsächlich

$$f \text{ streng wachsend}, \tag{5}$$ 2hk.3

folgt. Dass hierfür die Abschätzung $0 < f'(x)$ nicht für alle reellen x, sondern nur für alle reellen x mit $x \neq 0$ nachgewiesen werden muss, wird später thematisiert. Hoffentlich wird dadurch die Neugierde auf das Kommende geweckt. Mit Hilfe der Abschätzungen

$$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow 0 \leq x^2 + x \cdot |x|,$$
$$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow 0 \leq x^2 - x \cdot |x|,$$

folgt

$$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow$$
$$0 < \frac{8}{4+x^2} \leq \frac{8 + 2 \cdot (x^2 + x \cdot |x|)}{4+x^2} = \frac{8 + 2 \cdot x^2 + 2 \cdot x \cdot |x|}{4+x^2}$$
$$= \frac{2 \cdot (4 + x^2) + 2 \cdot x \cdot |x|}{4+x^2} = 2 + \frac{2 \cdot x \cdot |x|}{4+x^2},$$

$$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow$$
$$0 < \frac{8}{4+x^2} \leq \frac{8 + 2 \cdot (x^2 - x \cdot |x|)}{4+x^2} = \frac{8 + 2 \cdot x^2 - 2 \cdot x \cdot |x|}{4+x^2}$$
$$= \frac{2 \cdot (4 + x^2) - 2 \cdot x \cdot |x|}{4+x^2} = 2 - \frac{2 \cdot x \cdot |x|}{4+x^2},$$

so dass

$$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow -2 < \frac{2 \cdot x \cdot |x|}{4+x^2} < 2,$$

also

$$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow -2 < f(x) < 2,$$

und somit auch

$$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow -2 < \phi_2(x) < 2.$$

Hieraus, aus (5), aus “$f = (\phi_2 \downharpoonleft \mathbb{R})$, aus $\phi_2(-\infty) = -2$ und $\phi_2(+\infty) = 2$ folgt tatsächlich

$$\phi_2 \text{ streng wachsend.} \tag{6}$$ 2hk.4

Mit (6) ist Frage (4) positiv beantwortet.

Da sich $\phi_2 : \mathbb{S} \to \mathbb{R}$ als streng wachsend herausgestellt hat, ist, wie nun gezeigt wird, ϕ_2 injektiv:

`Thema1` $x \in \mathbb{S} \wedge y \in \mathbb{S} \wedge x \neq y.$

2: Aus Thema1"$x \in \mathbb{S} \wedge y \in \mathbb{S}$" folgt via **Satz -** $<$:
$x < y \vee x = y \vee y < x.$

3: Aus 2 und aus Thema1"$x \neq y$" folgt: $x < y \vee y \leq x.$

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` $x < y.$

4: Aus 3.1.Fall und aus $\overset{\texttt{2hk.4}}{(6)}$ folgt: $\phi_2(x) < \phi_2(y).$

5: Aus 4 folgt via **Satz -** $<$: $\phi_2(x) \neq \phi_2(y).$

`3.2.Fall` $y < x.$

4: Aus 3.1.Fall und aus $\overset{\texttt{2hk.4}}{(6)}$ folgt: $\phi_2(y) < \phi_2(x).$

5: Aus 4 folgt via **Satz -** $<$: $\phi_2(y) \neq \phi_2(x).$

6: Aus 5 folgt: $\phi_2(x) \neq \phi_2(y).$

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$\phi_2(x) \neq \phi_2(y).$

Ergo Thema1: `A1` "$\forall x, y : x \in \mathbb{S} \wedge y \in \mathbb{S} \wedge x \neq y \Rightarrow \phi_2(x) \neq \phi_2(y)$"

Den nächsten Schritt vorbereitend sei

$$\phi_1 : \mathbb{S} \to \mathbb{R}, \quad \phi_1(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x = +\infty \\ \dfrac{4 \cdot x}{4 + x^2} & , \quad x \in \mathbb{R} \\ 0 & , \quad x = -\infty \end{cases},$$

so dass

$$\forall x : x \in \mathbb{S} \Rightarrow \phi(x) = (\phi_1(x), \phi_2(x)). \qquad (7) \quad \boxed{\texttt{2hk.5}}$$

`Thema2` $x \in \mathbb{S} \wedge y \in \mathbb{S} \wedge x \neq y.$

`3:` Aus `Thema2` folgt via `A1`: $\phi_2(x) \neq \phi_2(y).$

`4:` Aus `3` folgt: $(\phi_1(x), \phi_2(x)) \neq (\phi_1(y), \phi_2(y)).$

`5.1:` Aus `Thema1` "$x \in \mathbb{S}$" folgt via (7) `2hk.5`: $\phi(x) = (\phi_1(x), \phi_2(x)).$

`5.2:` Aus `Thema1` "$y \in \mathbb{S}$" folgt via (7) `2hk.5`: $\phi(y) = (\phi_1(y), \phi_2(y)).$

`6:` Aus `4`, `5.1`, `5.2` folgt: $\phi(x) \neq \phi(y).$

Ergo `Thema2`: `A2` "$\forall x, y : x \in \mathbb{S} \wedge y \in \mathbb{S} \wedge x \neq y \Rightarrow \phi(x) \neq \phi(y)$"

Aus (3) `2hk.6` und `A2` folgt:

$$\phi : \mathbb{S} \to L \text{ injektiv.} \tag{8}$$ `2hk.7`

Nun fehlt noch der Nachweis, dass es zu *jedem* (u, v) mit $(u, v) \in L$ (mindestens) ein x mit $x \in \mathbb{S}$ und $\phi(x) = (u, v)$ gibt.

Für $(u, v) = (0, 2)$ gilt $\phi(+\infty) = (u, v)$ mit $+\infty \in \mathbb{S}$. Für $(u, v) = (0, -2)$ gilt $\phi(-\infty) = (0, -2)$.

Es bleibt noch zu zeigen:

todo 2:

$$\forall u, v : (u, v) \in L \wedge (u, v) \neq (0, 2) \wedge (u, v) \neq (0, -2) \Rightarrow$$
$$\exists x : x \in \mathbb{S} \wedge \phi(x) = (u, v). \tag{9}$$ `2hk.todo2`

Dazu betrachten wir zunächst den Fall $(u, v) \in L_+$ und erstellen die Gerade $h(u, v)$ durch $(0, 2)$ und (u, v):

$$h(u, v) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,$$
$$h(u, v)(t) = (u, v) + t \cdot ((0, 2) - (u, v)) = (u, v) + t \cdot (-u, 2 - v)$$
$$= (u - t \cdot u, 2 \cdot t + v - t \cdot v),$$

und bestimmen - wenn möglich - den Schnittpunkt dieser Geraden "mit der $x-$Achse", indem wir jene(s) t^* mit $t^* \in \mathbb{R}$ zu bestimmen suchen, für das die zweite Koordinaten von $h(u, v)$ gleich 0 ist. Dies führt auf die Gleichung

$$2 \cdot t^* + v - t^* \cdot v = 0,$$

woraus wegen $v \neq 2$ - hier werden die Voraussetzungen "$(0,2) \neq (u,v)$" und "$(u,v) \in L$" benötigt -

$$t^* = \frac{v}{v-2}.$$

folgt. Wegen $(u,v) \in L_+$ gilt zusätzlich $0 \leq v$, so dass $t^* \leq 0$. Die erste Koordinate von $h(u,v)(t^*)$ ist die "x-Koordinate" des Schnittpunkts von $h(u,v)$ mit der x-Achse. Es folgt

$$\begin{aligned} h_1(u,v)(t^*) = u - t^* \cdot u = u - u \cdot \frac{v}{v-2} = \frac{u \cdot v - 2 \cdot u - u \cdot v}{2-v} &= \frac{-2 \cdot u}{v-2} \\ &= \frac{2 \cdot u}{2-v}. \qquad (10) \end{aligned}$$ 2hk.8

Aus $(u,v) \in L_+$ und $(u,v) \neq (0,2)$ folgt $0 \leq u \leq 1$ und $0 \leq v < 2$, so dass $0 \leq h_1(u,v)(t^*) \in \mathbb{R}$.

Anschaulich-geometrisch gesprochen muss "$\phi(h_1(u,v)(t*)) = (u,v)$ gelten - doch kann dies auch bewiesen werden? Es ist an der Zeit zu rechnen. Wegen $0 \leq h_1(u,v)(t^*) \in \mathbb{R}$ gilt per definitionem,

$$\begin{aligned} \phi(h_1(u,v)(t^*)) &= \left(\frac{4 \cdot h_1(u,v)(t^*)}{4 + (h_1(u,v)(t^*))^2}, \frac{2 \cdot h_1(u,v)(t^*) \cdot |h_1(u,v)(t^*)|}{4 + (h_1(u,v)(t^*)))^2} \right) \\ &= \left(\frac{4 \cdot h_1(u,v)(t^*)}{4 + (h_1(u,v)(t^*))^2}, \frac{2 \cdot h_1(u,v)(t^*) \cdot h_1(u,v)(t^*)}{4 + (h_1(u,v)(t^*)))^2} \right) \\ &= \left(\frac{4 \cdot h_1(u,v)(t^*)}{4 + (h_1(u,v)(t^*))^2}, \frac{2 \cdot (h_1(u,v)(t^*))^2}{4 + (h_1(u,v)(t^*)))^2} \right) \\ &\overset{\substack{\text{2hk.8} \\ (10)}}{=} \left(\frac{4 \cdot \frac{2 \cdot u}{2-v}}{4 + \left(\frac{2 \cdot u}{2-v}\right) 2}, \frac{2 \cdot \left(\frac{2 \cdot u}{2-v}\right)^2}{4 + \left(\frac{2 \cdot u}{2-v}\right)^2} \right) \\ &\overset{0 \neq 2-v \in \mathbb{R}}{=} \left(\frac{4 \cdot 2 \cdot u \cdot (2-v)}{4 \cdot (2-v)^2 + (2 \cdot u)^2}, \frac{2 \cdot (2 \cdot u)^2}{4 \cdot (2-v)^2 + (2 \cdot u)^2} \right) \\ &= \left(\frac{2 \cdot u \cdot (2-v)}{(2-v)^2 + u^2}, \frac{2 \cdot u^2}{(2-v)^2 + u^2} \right) = (*), \end{aligned}$$

und hier wird es erforderlich, die Voraussetzung "$(u,v) \in L_+$" einfliessen zu lassen, wonach

$$u^2 + (-1+v)^2 = 1,$$

woraus die nun hilfreichen Gleichungen

$$\begin{aligned} (2-v)^2 + u^2 &= (4 - 4 \cdot v + v^2) + 1 - (-1+v)^2 \\ &= 4 - 4 \cdot v + v^2 + 1 - 1 + 2 \cdot v - v^2 = 4 - 2 \cdot v = 2 \cdot (2-v), \qquad (11) \end{aligned}$$ 2hk.9

und

$$u^2 = 1 - (-1 + v)^2 = 1 - 1 + 2 \cdot v - v^2 = v \cdot (2 - v), \tag{12}$$ 2hk.10

folgen. Somit gilt

$$\begin{aligned}
\phi(h_1(u,v)(t^*)) &= (*) \\
&= \left(\frac{2 \cdot u \cdot (2-v)}{(2-v)^2 + u^2}, \frac{2 \cdot u^2}{(2-v)^2 + u^2} \right) \\
&\overset{(11)}{=} \left(\frac{2 \cdot u \cdot (2-v)}{2 \cdot (2-v)}, \frac{2 \cdot u^2}{2 \cdot (2-v)} \right) \overset{(12)}{=} \left(\frac{2 \cdot u \cdot (2-v)}{2 \cdot (2-v)}, \frac{2 \cdot v \cdot (2-v)}{2 \cdot (2-v)} \right) \\
&\overset{0 \neq 2 - \mathrm{v} \in \mathbb{R}}{=} \left(\frac{2 \cdot u}{2}, \frac{2 \cdot v}{2} \right) = (u,v).
\end{aligned}$$

Hiermit ist bewiesen:

$$\forall u, v : (u,v) \in L_+ \wedge (u,v) \neq (0,2) \Rightarrow \exists x : x \in \mathbb{R} \wedge \phi(x) = (u,v). \tag{13}$$ 2hk.todo2/1

Eine ähnliche Vorgehensweise - die hier nicht ausgearbeitet ist - führt zum Nachweis von

$$\forall u, v : (u,v) \in L_- \wedge (u,v) \neq (0,-2) \Rightarrow \exists x : x \in \mathbb{R} \wedge \phi(x) = (u,v). \tag{14}$$ 2hk.todo2/2

Wegen $L = L_+ \cup L_-$ und $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{S}$ kann aus (13), (14) die Aussage (9) gefolgert werden. Damit ist

$$\phi : \mathbb{S} \to L \text{ bijektiv},$$

nachgewiesen. <u>Ende Intermezzo - Probe</u>

Das soeben zu Ende gegangene Intermezzo erscheint manchem vielleicht erstaunlich langwierig. Dies ist der Preis mathematischer Präzision. Genau und kurz kommen selten zusammen. Im Vorkurs erscheint es wenig hilfreich, der Kürze wegen allzu viele Details den Lesern zu überlassen.

Ein Nebenprodukt der Beschäftigung mit der Aussage "$\phi : \mathbb{S} \to L$ bijektiv" ist die Erkenntnis, dass die zweite Koordinatenfunktion ϕ_2 von ϕ,

$$\phi_2 : \mathbb{S} \to \mathbb{R}, \quad \phi_2(x) = \begin{cases} 2 & , \quad x = +\infty \\ \dfrac{2 \cdot x \cdot |x|}{4 + x^2} & , \quad x \in \mathbb{R} \\ -2 & , \quad x = -\infty \end{cases},$$

streng wachsend ist. Dies führt zu einer weiteren, in der Konstruktion gar nicht berücksichtigten Eigenschaft von ϕ. Betrachtet man nämlich zwei Punkte - etwa

(u, v), (p, q) - von L, so kann man nicht nur sicher sein, dass es für diese Punkte sreelle x, y mit $\phi(x) = (u, v)$ und $\phi(y) = (p, q)$ gibt, sondern man kann auch noch etwas über x und y aussagen:

$$v < q \Rightarrow x < y \wedge v = q \Rightarrow x = y \wedge q < v \Rightarrow y < x.$$

In bereits im Intermezzo verwendeten Worten: Je nördlicher ein Punkt auf L liegt, desto grösser ist jene sreelle Zahl, die durch ϕ auf ihn abgebildet wird.

Dank der Eigenschaft von ϕ, streng wachsend zu sein, gilt auch die "inverse Aussage" : je grösser eine sreelle Zahl ist, desto nördlicher liegt ihr Wert unter ϕ auf L.

In diesen Formulierungen kann auch mit dem Attribut "südlicher" gesprochen werden:

Je südlicher ein Punkt auf L liegt, desto kleiner ist jene sreelle Zahl, die durch ϕ auf ihn abgebildet wird.

Je kleiner eine sreelle Zahl ist, desto südlicher liegt ihr Wert unter ϕ auf L.

Bemerkung Mit Hilfe von $(\phi \downharpoonleft \mathbb{R})$ können "Pythagoreische Tripel (k, l, m)" - also $k \in \mathbb{Z}, l \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}$ mit $k^2 + l^2 = m^2$ - erzeugt werden. Dies ist in den "**Exempla 1**" ausgeführt.

2.2 Kurven in $\mathbb{S}$ und L

Es soll zunächst die wenig bemerkenswert erscheinende Funktion

$$\kappa : \{t : 0 \leq t \in \mathbb{R}\} \rightarrow \{t : 0 \leq t \in \mathbb{R}\}, \quad \kappa(t) = \nu \cdot t,$$

mit $0 < \nu \in \mathbb{R}$ betrachtet werden. Bei κ handelt es um den Strahl mit Steigung ν, beginnend bei $(0, 0)$.

In physikalischer Weise wird κ so interpretiert: κ ist die Weltlinie eines Teilchens, das die nicht-negative reelle Achse mit konstanter Geschwindigkeit ν durchläuft und sich zur Zeit $t = 0$ im Ursprung befindet. $\kappa(t)$ ist die Position des Teilchens zur Zeit t, $0 \leq t \in \mathbb{R}$.

Die Weltlinie des Teilchens kann durch die Abbildung

$$(\phi \circ \kappa) : \{0 : 0 \leq t \in \mathbb{R}\} \rightarrow L, \quad (\phi \circ \kappa)(t) = \phi(\kappa(t)),$$

auch in L dargestellt werden. Anders als $\kappa(t) \in \mathbb{R}$ ist $(\phi \circ \kappa)(t) \in \mathbb{R}^2$, so dass es sich bei $(\phi \circ \kappa)$ um eine "ebene Bewegung" handelt. Da für alle t mit $0 \leq t \in \mathbb{R}$ die Aussage $\kappa(t) \in \mathbb{R}$ gilt, kann $(\phi \circ \kappa)$ einfach dargestellt werden:

$$\forall t : 0 \leq t \in \mathbb{R} \Rightarrow (\phi \circ \kappa)(t) = \phi(\kappa(t)) = \left(\frac{4 \cdot \kappa(t)}{4 + (\kappa(t))^2}, \frac{2 \cdot \kappa(t) \cdot |\kappa(t)|}{4 + (\kappa(t))2} \right),$$

so dass wegen $\kappa(t) = |\kappa(t)| = \nu \cdot t$, $0 \leq t \in \mathbb{R}$,

$$\forall t : 0 \leq t \in \mathbb{R} \Rightarrow (\phi \circ \kappa)(t) = \left(\frac{4 \cdot \nu \cdot t}{4 + \nu^2 \cdot t^2}, \frac{2 \cdot \nu^2 \cdot t^2}{4 + \nu^2 \cdot t^2} \right).$$

Wegen

$$\lim_{t \uparrow +\infty} \frac{4 \cdot \nu \cdot t}{4 + \nu^2 \cdot t^2} = 0, \lim_{t \uparrow +\infty} \frac{2 \cdot \nu^2 \cdot t^2}{4 + \nu^2 \cdot t^2} = 2,$$

gilt

$$\lim_{t \uparrow +\infty} (\phi \circ \kappa)(t) = (0, 2),$$

so dass sich $(\phi \circ \kappa)(t)$ in L für $t \uparrow +\infty$ immer mehr dem Nordpol $(0, 2)$ annähert, während sich $\kappa(t)$ für $t \uparrow +\infty$ immer mehr $+\infty$ annähert. Wegen $\phi(+\infty) = (0, 2)$ kann dies auch so geschrieben werden:

$$\lim_{t \uparrow +\infty} (\phi \circ \kappa)(t) = \lim_{t \uparrow +\infty} \phi(\kappa(t)) = (0, 2) = \phi(+\infty) = \phi(\lim_{t \uparrow +\infty} \kappa(t)).$$

Klarer Weise benötigt κ unendlich lange Zeit, um die unendlich lange Strecke von 0 bis $+\infty$ zurückzulegen. Dies ist plausibel. Andererseits erreicht auch $(\phi \circ \kappa)$ den Nordpol $(0, 2)$ erst nach unendlich langer Zeit. Dies erscheint weniger plausibel, legt $(\phi \circ \kappa)$ doch in dieser unendlich langen Zeit nur die Strecke π gleich dem halben Umfang eines Kreises mit Radius 1, zurück.

Dass ein Teilchen unendlich lange Zeit braucht, um eine endlich Strecke zurückzulegen ist vorstellbar, wenn die *Geschwindigkeit* des Teilchens für $t \uparrow +\infty$ gegen $(0, 0)$ - die Geschwindigkeit hat bei ebenen Bewegungen zwei Koordinaten - geht.

In der Tat gilt, wenn die Ableitung nach "t" mit einem Punkt bezeichnet wird,

$$\forall t : 0 \leq t \in \mathbb{R} \Rightarrow \dot{\kappa}(t) = \nu,$$

und mit Schulmathematik,

$$\begin{aligned} \forall t : 0 \leq t \in \mathbb{R} \Rightarrow \quad (\phi \dot{\circ} \kappa)(t) &= \Bigg(\frac{4 \cdot \nu \cdot (4 + \nu^2 \cdot t^2) - 4 \cdot \nu \cdot t \cdot 2 \cdot \nu^2 \cdot t}{(4 + \nu^2 \cdot t^2)^2}, \\ &\qquad \frac{4 \cdot \nu^2 \cdot t \cdot (4 + \nu^2 \cdot t^2) - 2 \cdot \nu^2 \cdot t^2 \cdot 2 \cdot \nu^2 \cdot t}{(4 + \nu^2 \cdot t^2)^2} \Bigg) \\ &= \left(\frac{16 \cdot \nu - 4 \cdot \nu^2 \cdot t^2}{(4 + \nu^2 \cdot t^2)^2}, \frac{16 \cdot \nu^2 \cdot t}{(4 + \nu^2 \cdot t^2)^2} \right), \end{aligned}$$

so dass

$$\lim_{t \uparrow +\infty} (\phi \dot{\circ} \kappa)(t) = (0, 0).$$

Anstelle der “Geschwindigkeit” als vektorieller Grösse ist möglicher Weise der Betrag der Geschwindigkeit, die “Schnelligkeit” als reelle Grösse vertrauter. Es gilt

$$\begin{aligned}
\forall t : 0 \leq t \in \mathbb{R} \Rightarrow \|(\phi \mathbin{\dot{\circ}} \kappa)(t)\| \\
&= \left\| \left(\frac{16 \cdot \nu - 4 \cdot \nu^2 \cdot t^2}{(4 + \nu^2 \cdot t^2)^2}, \frac{16 \cdot \nu^2 \cdot t}{(4 + \nu^2 \cdot t^2)^2} \right) \right\| \\
&= \sqrt{\left(\frac{16 \cdot \nu - 4 \cdot \nu^2 \cdot t^2}{(4 + \nu^2 \cdot t^2)^2} \right)^2 + \left(\frac{16 \cdot \nu^2 \cdot t}{(4 + \nu^2 \cdot t^2)^2} \right)^2} \\
&= \frac{\sqrt{256 \cdot \nu^2 - 128 \cdot \nu^3 \cdot t^2 + 16 \cdot \nu^4 \cdot t^4 + 256 \cdot \nu^4 \cdot t^2}}{(4 + \nu^2 \cdot t^2)^2} \\
&= \frac{4 \cdot \sqrt{16 \cdot \nu^2 + 8 \cdot \nu^3 \cdot (2 \cdot \nu - 1) \cdot t^2 + \nu^4 \cdot t^4}}{(4 + \nu^2 \cdot t^2)^2},
\end{aligned}$$

und somit auch hier wie erwartet

$$\lim_{t \uparrow +\infty} \|(\phi \mathbin{\dot{\circ}} \kappa)(t)\| = 0,$$

so dass die Bewegung längs L für $t \uparrow +\infty$ zum Erliegen kommt.

Bei der soeben betrachteten Funktion κ ist die Geschwindigkeit konstant und die Geschwindigkeit von $\phi \circ \kappa$ kommt für $t \uparrow +\infty$ zum Erliegen. Ob sich daran etwas ändert, wenn an Stelle von κ eine Funktion λ mit $\lim_{t \uparrow +\infty} \dot{\lambda}(t) = +\infty$, etwa

$$\lambda : \{t : 0 \leq t \in \mathbb{R}\} \to \{t : 0 \leq t \in \mathbb{R}\}, \quad \lambda(t) = -1 + \exp(a \cdot t),$$

mit $0 < a \in \mathbb{R}$ betrachtet wird. Dann

$$\lim_{t \uparrow +\infty} \lambda(t) = \lim_{t \uparrow +\infty} \dot{\lambda}(t) = +\infty,$$

und ähnlich wie zuletzt ist

$$(\phi \circ \lambda) : \{t : 0 \leq t \in \mathbb{R}\} \to L, \quad (\phi \circ \lambda)(t) = \left(\frac{4 \cdot \lambda(t)}{4 + (\lambda(t))^2}, \frac{2 \cdot (\lambda(t))^2}{4 + (\lambda(t))^2} \right),$$

mit der wegen $0 \neq \lambda(t)$ für alle t mit $0 < t \in \mathbb{R}$ Darstellung,

$$\forall t : 0 < t \in \mathbb{R} \Rightarrow (\phi \circ \lambda)(t) = \left(\frac{\frac{4}{\lambda(t)}}{1 + \frac{4}{(\lambda(t))^2}}, \frac{2}{1 + \frac{4}{(\lambda(t))^2}} \right),$$

woraus via $\lim_{t \uparrow +\infty} \lambda(t) = +\infty$ unmittlelbar die erwartete Aussage

$$\lim_{t \uparrow +\infty} (\phi \circ \lambda)(t) = (0, 2),$$

folgt. Für die Geschwindigkeit gilt

$$\begin{aligned}
\forall t : t \in \mathbb{R} \Rightarrow (\phi \overset{\cdot}{\circ} \lambda)(t) \\
&= \left(\frac{4 \cdot \dot{\lambda}(t) \cdot (4 + (\lambda(t))^2) - 4 \cdot \lambda(t) \cdot 2 \cdot \lambda(t) \cdot (\dot{\lambda}(t))}{(4 + (\lambda(t))^2)^2}, \right. \\
&\qquad \left. \frac{4 \cdot \lambda(t) \cdot \dot{\lambda}(t) \cdot (4 + (\lambda(t))^2) - 2 \cdot (\lambda(t))^2 \cdot 2 \cdot \lambda(t) \cdot \dot{\lambda}(t)}{(4 + (\lambda(t))^2)^2} \right) \\
&= \left(\frac{4 \cdot \dot{\lambda}(t) \cdot (4 - (\lambda(t))^2)}{(4 + (\lambda(t))^2)^2}, \frac{16 \cdot \lambda(t) \cdot \dot{\lambda}(t)}{(4 + (\lambda(t))^2)^2} \right) \\
&= \left(\dot{\lambda}(t) \cdot \frac{4 \cdot (4 - (\lambda(t))^2)}{(4 + (\lambda(t))^2)^2}, \dot{\lambda}(t) \cdot \frac{16 \cdot \lambda(t)}{(4 + (\lambda(t))^2)^2} \right) \quad (15)
\end{aligned}$$

2hk.g1

Hier kommt es für weitere Untersuchungen auf das Wechselspiel der Limites von λ und $\dot{\lambda}$ für $t \uparrow +\infty$ an - immerhin gilt

$$\lim_{t \uparrow +\infty} \dot{\lambda}(t) = +\infty, \lim_{t \uparrow +\infty} \frac{4 \cdot (4 - (\lambda(t))^2)}{(4 + (\lambda(t))^2)^2} = 0,$$

so dass nicht klar ist wie sich Produkt dieser beiden Terme - das für $t \uparrow +\infty$ gegen $(+\infty) \cdot 0$ strebt - für $t \uparrow +\infty$ verhält. Ähnlich unklar das Verhalten von

$$\dot{\lambda}(t) \cdot \frac{16 \cdot \lambda(t)}{(4 + (\lambda(t))^2)^2},$$

für $t \uparrow +\infty$ wegen

$$\lim_{t \uparrow +\infty} \dot{\lambda}(t) = +\infty, \lim_{t \uparrow +\infty} \frac{16 \cdot \lambda(t)}{(4 + (\lambda(t))^2)^2} = 0,$$

auch gegen $(+\infty) \cdot 0$ strebt.

Glücklicherweise lautet die Aufgabe nicht, $\lim_{t \uparrow +\infty} \phi \overset{\cdot}{\circ} \lambda(t)$ für "allgemeine" differenzierbare Funktionen λ mit $\lim_{t \uparrow +\infty} \dot{\lambda}(t) = +\infty$ zu untersuchen, sondern es geht bei der Diskussion um die spezielle Wahl

$$\forall t : 0 \leq t \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda(t) = \exp(a \cdot t),$$

so dass

$$\forall t : 0 \leq t \in \mathbb{R} \Rightarrow \dot{\lambda}(t) = a \cdot \exp(a \cdot t) = a \cdot \lambda(t),$$

und hiermit folgt aus (2hk.g1 15),

$$\forall t : t \in \mathbb{R} \Rightarrow (\phi \overset{\cdot}{\circ} \lambda)(t) = \left(\frac{4 \cdot a \cdot \lambda(t) \cdot (4 - (\lambda(t))^2)}{(4 + (\lambda(t))^2)^2}, \frac{16 \cdot a \cdot (\lambda(t))^2}{(4 + (\lambda(t))^2)^2} \right), \quad (16)$$

2hk.g2

woraus sich via $\lim_{t \uparrow +\infty} \lambda(t)$ die Aussage

$$\lim_{t \uparrow +\infty} \phi \dot{\circ} \lambda(t) = (0,0),$$

ergibt. Für die Schnelligkeit folgt aus (2hk.g2 16),

$$\begin{aligned}
\forall t : 0 \leq t \in \mathbb{R} \Rightarrow \|\phi \dot{\circ} \lambda(t)\| \\
&= \left\| \left(\frac{4 \cdot a \cdot \lambda(t) \cdot (4 - (\lambda(t))^2)}{(4 + (\lambda(t))^2)^2}, \frac{16 \cdot a \cdot (\lambda(t))^2}{(4 + (\lambda(t))^2)^2} \right) \right\| \\
&= \frac{4 \cdot a}{(4 + (\lambda(t))^2)^2} \cdot \sqrt{(\lambda(t))^2 \cdot (4 - (\lambda(t))^2)^2 + 16 \cdot (\lambda(t))^4} \\
&= \frac{4 \cdot a \cdot |\lambda(t)|}{(4 + (\lambda(t))^2)^2} \cdot \sqrt{(4 - (\lambda(t))^2)^2 + 16 \cdot (\lambda(t))^2} \\
&= \frac{4 \cdot a \cdot |\lambda(t)| \cdot \sqrt{16 + 8 \cdot (\lambda(t))^2 + (\lambda(t))^4}}{(4 + (\lambda(t))^2)^2} \\
&= \frac{4 \cdot a \cdot |\lambda(t)| \cdot \sqrt{(4 + (\lambda(t))^2)^2}}{(4 + (\lambda(t))^2)^2} = \frac{4 \cdot a \cdot |\lambda(t)|}{|4 + (\lambda(t))^2|} \\
&= \frac{4 \cdot a \cdot |\lambda(t)|}{4 + (\lambda(t))^2},
\end{aligned}$$

so dass

$$\lim_{t \uparrow +\infty} \|(\phi \dot{\circ} \lambda)(t)\| = 0.$$

Als Zwischenbilanz kann gesagt werden, dass es nicht ohne Weiteres möglich ist, L_+ mit Hilfe von $\phi \circ \lambda$ und einer Funktion $\lambda : \{t : 0 \leq t \wedge t \in \mathbb{R}\} \to \{t : 0 \leq t \wedge t \in \mathbb{R}\}$ in endlicher Zeit zu durchlaufen.

Andererseits ist es - wenn auch unter Vorgriff auf Kommendes - möglich, bei gegebener "Durchlaufungszeit T" mit $0 < T \in \mathbb{R}$, zwei Funktionen $u, v : \{t : 0 \leq t \leq T\} \to \mathbb{R}$ so zu finden, dass

$$L_+ = \{(u(t), v(t)) : 0 \leq t \leq T\},$$

nämlich

$$\begin{aligned}
u : \{t : 0 \leq t \leq T\} \to \mathbb{R}, &\quad u(t) = \sin((\pi/T) \cdot t), \\
v : \{t : 0 \leq t \leq T\} \to \mathbb{R}, &\quad v(t) = 1 - \cos((\pi/T) \cdot t).
\end{aligned}$$

<u>Intermezzo - Probe</u> Offenbar gilt

$$\forall t : 0 \leq t \leq T \Rightarrow 0 \leq u(t) \leq 1, 0 \leq v(t) \leq 2,$$

sowie

$$(u(0), v(0)) = (0,0), (u(T), v(T)) = (0,2),$$

und

$$\begin{aligned}
\forall t : 0 \leq t \leq T \Rightarrow (u(t))^2 + (-1 + v(t))^2 &= \sin^2((\pi/T)\cdot t) + (-\cos((\pi/T)\cdot t))^2 \\
&= \sin^2((\pi/T)\cdot t) + \cos^2((\pi/T)\cdot t) \\
&= \cos^2((\pi/T)\cdot t) + \sin^2((\pi/T)\cdot t) = 1,
\end{aligned}$$

woraus per definitionem L_+,

$$\forall t : 0 \leq t \leq T \Rightarrow (u(t), v(t)) \in L_+,$$

folgt. <u>Ende Intermezzo - Probe</u>

Da $\phi : \mathbb{S} \to L$ bijektiv, gibt es zu jedem t mit $0 \leq t \leq T$ ein $\lambda(t)$ mit $\lambda(t) \in \mathbb{S}$ und $(u(t), v(t)) = (\phi \circ \lambda)(t) = \phi(\lambda(t))$. Welches? Diese Frage wurde für $0 \neq 2 - v(t)$ - also für $0 \leq t < T$ - bereits im Anschluss an 2hk.8 (10) mit dem Ergebnis

$$\lambda(t) = \frac{2 \cdot u(t)}{2 - v(t)},$$

beantwortet. Hieraus und aus $\phi(+\infty) = (0,2)$ folgt

$$\lambda : \{t : 0 \leq t \leq T\} \to \{t : 0 \leq t \leq +\infty\},$$

$$\lambda(t) = \begin{cases} \dfrac{2 \cdot \sin((\pi/T)\cdot t)}{1 + \cos((\pi/T)\cdot t)} & , \quad 0 \leq t < T \\ +\infty & , \quad t = T \end{cases}.$$

Nicht zuletzt wegen

$$\lim_{t \uparrow T} \lambda(t) = +\infty$$

fällt auf, dass die Werte von λ in endlicher Zeit alle nicht-negativen reellen Zahlen durchlaufen und dies via

$$\forall t : 0 \leq t < T \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
\dot{\lambda}(t) &= \frac{\pi}{T} \cdot \frac{\cos((\pi/T)\cdot t)\cdot(1 + \cos((\pi/T)\cdot t)) + \sin((\pi/T)\cdot t)\cdot \sin((\pi/T)\cdot t)}{(1 + \cos((\pi/T)\cdot t))^2} \\
&= \frac{\pi/T}{1 + \cos((\pi/T)\cdot t)},
\end{aligned}$$

mit zunehmender, für $t \uparrow T$ wegen

$$\lim_{t\uparrow T} \frac{\pi/T}{1+\cos((\pi/T)\cdot t)} = +\infty,$$

mit gegen $+\infty$ strebender Geschwindigkeit $\dot{\lambda}(t)$ tun.

Die Geschwindigkeit von $(\phi \circ \lambda)$ errechnet sich mit Hilfe von u, v,

$$\forall t : 0 \leq t < T \Rightarrow (\phi \dot{\circ} \lambda)(t) = (\dot{u}(t), \dot{v}(t)) = \frac{\pi}{T} \cdot (\cos((\pi/T)\cdot t), \sin((\pi/T)\cdot t)),$$

für die

$$\lim_{t\uparrow T} (\phi \dot{\circ} \lambda)(t) = \frac{\pi}{T} \cdot (-1, 0) = \left(-\frac{\pi}{T}, 0\right),$$

gilt. Die korrespondierende Schnelligkeit ist wegen

$$\forall t : 0 \leq t < T \Rightarrow \|\phi \dot{\circ} \lambda(t)\| = \left\| \frac{\pi}{T} \cdot (\cos((\pi/T)\cdot t), \sin((\pi/T)\cdot t)) \right\|$$

$$= \frac{\pi}{T} \cdot \sqrt{\cos^2((\pi/T)\cdot t) + \sin^2((\pi/T)\cdot t)} = \frac{\pi}{T} \cdot \sqrt{1} = \frac{\pi}{T},$$

für alle t mit $0 \leq t < T$ konstant und stimmt mit der Grenzschnelligkeit für $t \uparrow T$ überein.

2.3 $\phi^* : \mathbb{S} \to \{t : -1 \leq t \leq 1\}$ bijektiv

In den vorherigen beiden Teil-Abschnitten wurde die Funktion ϕ mit $\phi : \mathbb{S} \to L$ bijektiv unter Verwendung einer anschaulich-geometrischen Konstruktion präsentiert. Liest man sich die Ausarbeitungen noch einmal kritisch durch, so fällt einem vielleicht auf, dass die Eigenschaft "bijektiv" nicht nur auf ϕ - mit Bild-Bereich L - sondern auch auf die zweite Koordinatenfunktion ϕ_2 von ϕ zutrifft.

In der Tat gilt - ohne Beweis -

$$\phi_2 : \mathbb{S} \to \{t : -2 \leq t \leq 2\} \text{ bijektiv},$$

wobei

$$\phi_2(x) = \begin{cases} 2 & , \quad x = +\infty \\ \dfrac{2 \cdot x \cdot |x|}{4 + x^2} & , \quad x \in \mathbb{R} \\ -2 & , \quad x = -\infty \end{cases}.$$

"Kürzt" man bei der definierenden Gleichungen von ϕ_2 die "2", so erhält man

$$\phi^* : \mathbb{S} \to \{t : -1 \leq t \leq 1\}, \quad \phi^*(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x = +\infty \\ \dfrac{x \cdot |x|}{4 + x^2} & , \quad x \in \mathbb{R} \\ -1 & , \quad x = -\infty \end{cases}.$$

Es gilt - ohne Beweis -

$$\phi^* : \mathbb{S} \to \{t : -1 \leq t \leq 1\} \text{ bijektiv,}$$

mit $\phi^*(-\infty) = -1$, $\phi^*(+\infty) = 1$,

$$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow -1 < \phi^*(x) < 1,$$

und

$$\forall x, y : x < y \Rightarrow \phi^*(x) < \phi^*(y),$$

sowie

$$\forall s, t, x, y : x \in \mathbb{S} \wedge y \in \mathbb{S} \wedge s = \phi^*(x) \wedge t = \phi^*(y) \wedge s < t \Rightarrow x < y,$$

so dass, wenn $\mathbb{S}$ von $-\infty$ bis $+\infty$ in streng wachsender Weise durchlaufen wird, die Werte von ϕ^* in streng wachsender Weise die Menge $\{t : -1 \leq t \leq 1\}$ durchlaufen. Wird umgekehrt $\{t : -1 \leq t \leq 1\}$ in streng wachsender Weise durchlaufen, so durchlaufen die Werte in $\mathbb{S}$, die durch ϕ^* in $\{t : -1 \leq t \leq 1\}$ abgebildet werden, die Menge $\mathbb{S}$ ebenfalls in streng wachsender Weise.

Die letzten beiden Aussagen bleiben bemerkenswerter Weise wahr,
wenn "wachsend" durch "fallend" ersetzt wird.

Aus $\phi^* : \mathbb{S} \to \{t : -1 \leq t \leq 1\}$ bijektiv folgt, dass $\mathbb{S}$ genau so viele Elemente wie $\{t : -1 \leq t \leq 1\}$ hat. Oder: es gibt genau so viele sreelle Zahlen wie es sreelle Zahlen in $\{t : -1 \leq t \leq 1\}$ gibt - obwohl $\{t : -1 \leq t \leq 1\} \subseteq \mathbb{S}$ und $\{t : -1 \leq t \leq 1\} \neq \mathbb{S}$.

Gemäss Konstruktion von ϕ^* gilt auch: $\mathbb{R}$ hat genau so viele Elemente wie $\{t : -1 < t < 1\}$. Oder: es gibt genau so viele reelle Zahlen wie es reelle Zahlen in $\{t : -1 < t < 1\}$ gibt - obwohl $\{t : -1 < t < 1\} \subseteq \mathbb{R}$ und $\{t : -1 < t < 1\} \neq \mathbb{R}$.

3 Intermezzo - Arithmetik in $\mathbb{R}$

Es sollen für einige vertraute Aussagen der Arithmetik in $\mathbb{R}$ auf die Voraussetzungen, unter denen diese gültig sind, hingewiesen werden.

Unter "der Arithmetik in $\mathbb{R}$" verstehe ich, dass die Grundrechenarten für reelle Zahlen definiert sind, dass - präziser - etwa unter "$+$" eine Abbildung von $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ gemeint ist, dass also "$+$" zwei reellen Zahlen eine reelle Zahl zuordnet und für andere als reelle Summanden gar nicht definiert ist.

Die Angabe der aktuell verwendeten Arithmetik ist notwendig, weil - etwa - die Addition nicht nur für reelle, sondern auch für sreelle, treelle, komplexe Zahlen definiert ist und jedesmal mit dem gleichen Symbol "$+$" bezeichnet wird.

0) Ist das Ergebnis der Arithmetik in $\mathbb{R}$ eine reelle Zahl, so wurde von (einer) reellen Zahl(en) ausgegangen. Das Ergebnis der Arithmetik in $\mathbb{R}$, angewendet auf (eine) reelle Zahl(en) ist reell.

$$x+y\in\mathbb{R} \quad\Leftrightarrow\quad x\in\mathbb{R}\wedge y\in\mathbb{R},$$

$$-x\in\mathbb{R} \quad\Leftrightarrow\quad x\in\mathbb{R},$$

$$x\cdot y\in\mathbb{R} \quad\Leftrightarrow\quad x\in\mathbb{R}\wedge y\in\mathbb{R},$$

$$\frac{1}{x}\in\mathbb{R} \quad\Leftrightarrow\quad x\in\mathbb{R},$$

$$\frac{x}{y}\in\mathbb{R} \quad\Leftrightarrow\quad x\in\mathbb{R}\wedge y\in\mathbb{R},$$

$$|x|\in\mathbb{R} \quad\Leftrightarrow\quad x\in\mathbb{R}.$$

1) Die Aussagen "$x+0=x$" oder "$0+x=x$" sind nicht allgemein gültig, sondern gelten bei der Arithmetik in $\mathbb{R}$ unter der Voraussetzung "$x\in\mathbb{R}$".

$$x\in\mathbb{R} \quad\Rightarrow\quad x+0=0+x=x.$$

2) Aus hier weit entfernt Gründen sind Kommutativ- und Assoziativgesetz allgemein gültig.

$$x+y=y+x, \quad x+(y+z)=(x+y)+z.$$

3) Die Aussagen "$1\cdot x=x$" oder "$x\cdot 1=x$" sind in der Arithmetik in $\mathbb{R}$ nicht allgemein gültig, sondern gelten unter der Voraussetzung "$x\in\mathbb{R}$".

$$x\in\mathbb{R} \quad\Rightarrow\quad 1\cdot x=x\cdot 1=x.$$

4) In der Arithmetik in $\mathbb{R}$ gilt allgemein

$$x \cdot y = y \cdot x, \quad x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z.$$

5) In der Arithmetik in $\mathbb{R}$ gilt allgemein

$$x \cdot (-1) = (-1) \cdot x = -x.$$

6) In der Arithmetik in $\mathbb{R}$ gilt allgemein

$$x - y = x + (-y), \quad -x + y = (-x) + y, \quad -x - y = (-x) + (-y),$$

$$-(x + y) = (-x) + (-y),$$

$$(-x) \cdot y = x \cdot (-y) = -x \cdot y, \quad (-x) \cdot (-y) = x \cdot y.$$

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z, \quad (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z.$$

7) Die Gleichung “$-(-x) = x$” ist in der Arithmetik in $\mathbb{R}$ nicht voraussetzungsfrei gültig.

$$x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad -(-x) = x.$$

8) Auch die Gleichung “$x - x = 0$” bedarf in der reellen Arithmetik einer Voraussetzung.

$$x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad x - x = -x + x = 0.$$

9) Eine oft verwendete Aussage der Arithmetik in $\mathbb{R}$ ist ohne Weiteres gültig,

$$x + y = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -y \land y = -x,$$

und hat noch dazu die - allerdings nicht ganz so voraussetzungsfreie - Verallgemeinerung,

$$x + y = z \land z \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad x = z - y \land y = z - x.$$

10) Mit der nun folgenden Aussage ist eine gewöhnungsbedürftige Formel des Vorkurses präsentiert,

$$x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{0} = 0,$$

die aber unter anderem zu

$$x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x} \in \mathbb{R},$$

führt. Speziellerweise gilt

$$\frac{1}{0} = 0.$$

`11)` Trotz `10)` ist "$x \cdot \frac{1}{x} = 1$" in der Arithmetik in $\mathbb{R}$ nicht voraussetzungsfrei gültig,

$$0 \neq x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad x \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \cdot x = 1.$$

`12)` Vielleicht überraschenderweise ist in der Arithmetik in $\mathbb{R}$ die Gleichung $\frac{1}{\frac{1}{x}} = x$ tatsächlich für alle $x \in \mathbb{R}$, also auch für $x = 0$ richtig.

$$x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\frac{1}{x}} = x.$$

`13)` Allgemein gilt in der Arithmetik in $\mathbb{R}$

$$\frac{1}{-x} = -\frac{1}{x}, \quad \frac{1}{x \cdot y} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y},$$

sowie

$$\frac{x}{y} = x \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{y} \cdot x, \quad \frac{-x}{y} = \frac{x}{-y} = -\frac{x}{y}, \quad \frac{-x}{-y} = \frac{x}{y},$$

und

$$a \cdot \frac{x}{y} = \frac{a \cdot x}{y}, \quad \frac{1}{a} \cdot \frac{x}{y} = \frac{x}{a \cdot y}, \quad \frac{x}{y} \cdot \frac{z}{u} = \frac{x \cdot z}{y \cdot u},$$

und

$$\frac{1}{\frac{x}{y}} = \frac{y}{x},$$

und

$$\frac{x}{\frac{y}{z}} = \frac{x \cdot z}{y}, \quad \frac{\frac{x}{y}}{z} = \frac{x}{y \cdot z}, \quad \frac{\frac{x}{y}}{\frac{z}{u}} = \frac{x \cdot u}{y \cdot z}.$$

`14)` Jedoch ist die Kürzungs- oder Erweiterungsregeln in der Arithmetik in $\mathbb{R}$ trotz `10)` nicht voraussetzungsfrei gültig

$$0 \neq a \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \frac{a \cdot x}{a \cdot y} = \frac{x}{y}.$$

`15)` Allgemein gilt in der Arithmetik in $\mathbb{R}$

$$|-x| = |x|, \quad |x \cdot y| = |x| \cdot |y|, \quad \left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|}, \quad \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}.$$

`16)` Mit `1) - 15)` ist eine Grundauswahl von Regeln der Arithmetik in $\mathbb{R}$ gegeben. Darüber hinaus gehend gelten noch etliche allgemeine Aussagen wie

$$1 \cdot |x| = |x|, \quad (x + y) + 0 = x + y.$$

Der Nachweis dieser und anderer Gleichungen ist weit von den Möglichkeiten des Vorkurses entfernt. Bei Bedarf gibt es entsprechende Hinweise.

4 nan und die Arithmetik in $\mathbb{T}$

Gelegentlich ist es vorteilhaft, nicht nur mit reellen Zahlen, sondern auch mit $+\infty$, $-\infty$ zu rechnen. Sobald dies getan wird, ändert sich die Arithmetik von der "Arithmetik in $\mathbb{R}$" zur "Arithmetik in $\mathbb{T}$", wobei

$$\mathbb{T} := \{\mathsf{nan}\} \cup \mathbb{S},$$

die "Menge der treellen Zahlen" und "nan" eine weitere "uneigentliche Zahl" ist, deren Bezeichnung an "not a number" erinnert. Die Notwendigkeit, neben $+\infty$ und $-\infty$ mit nan eine weitere uneigentliche Zahl einzuführen beruht zu einem guten Teil darauf, dass etwa der Differenz

$$\text{“}(+\infty) - (+\infty)\text{”}$$

auf keine sinnvolle Weise eine sreelle Zahl zugeordnet werden kann.

Kommt im Rahmen des Vorkurses die Arithmetik in $\mathbb{T}$ zum Einsatz, wird dies ausdrücklich festgehalten.

Dies wird bei der Betrachtung von Grenzwerten der Fall sein.

Satz - $\mathbb{T}$

a) nan Menge.

b) $\mathbb{T}$ Menge.

c) $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{T} \wedge \mathbb{S} \neq \mathbb{T}$.

d) $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{T} \wedge \mathbb{R} \neq \mathbb{T}$.

e) $\mathsf{nan} \notin \mathbb{R} \wedge \mathsf{nan} \notin \mathbb{S} \wedge \mathsf{nan} \in \mathbb{T}$.

f) $x \in \mathbb{T} \quad\Rightarrow\quad x = \mathsf{nan} \vee x \in \mathbb{S}$.

g) $x \in \mathbb{T} \quad\Rightarrow\quad x = \mathsf{nan} \vee x = +\infty \vee x = -\infty \vee x \in \mathbb{R}$.

h) $x \in \mathbb{S} \quad\Rightarrow\quad x \in \mathbb{T} \wedge x \neq \mathsf{nan}$.

i) $x \in \mathbb{R} \quad\Rightarrow\quad x \in \mathbb{T} \wedge x \neq \mathsf{nan} \wedge x \neq +\infty \wedge x \neq -\infty$.

j) $\neg(\mathsf{nan} < y) \wedge \neg(\mathsf{nan} \leq y)$.

k) $\neg(x < \mathsf{nan}) \wedge \neg(x \leq \mathsf{nan})$.

Ohne Beweis.

Satz - Addition in $\mathbb{T}$ $\boxed{\text{Arithmetik in } \mathbb{T}}$

0) $x + y \in \mathbb{T} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \mathbb{T} \wedge y \in \mathbb{T}$.

a) $x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty$.

b) $x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty$.

c) $x \in \mathbb{T} \quad \Rightarrow \quad x + \mathsf{nan} = \mathsf{nan} + x = \mathsf{nan}$.

d) $(+\infty) + (+\infty) = +\infty \wedge (-\infty) + (-\infty) = -\infty$.

e) $(+\infty) + (-\infty) = \mathsf{nan} \wedge (-\infty) + (+\infty) = \mathsf{nan}$.

f) $x \in \mathbb{T} \quad \Rightarrow \quad x + 0 = 0 + x = x$.

g) $x + y = y + x$.

h) $x + (y + z) = (x + y) + z$.

Ohne Beweis.

Satz - Vorzeichenwechsel in $\mathbb{T}$ $\boxed{\text{Arithmetik in } \mathbb{T}}$

0) $-x \in \mathbb{T} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \mathbb{T}$.

a) $-(+\infty) = -\infty \wedge -(-\infty) = +\infty \wedge -\mathsf{nan} = \mathsf{nan}$.

b) $x \in \mathbb{T} \quad \Rightarrow \quad -(-x) = x$.

c) $x - y = x + (-y)$.

d) $-x + y = (-x) + y$.

e) $-x - y = (-x) + (-y)$.

f) $-(x + y) = (-x) + (-y)$.

g) $x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad x - x = -x + x = 0$.

h) $x - x = 0 \quad \Rightarrow \quad x \in \mathbb{R}$.

g) $x + y = 0 \quad \Rightarrow \quad x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge x = -y \wedge y = -x$.

Ohne Beweis.

Satz - Multiplikation in $\mathbb{T}$ Arithmetik in $\mathbb{T}$

0) $x \cdot y \in \mathbb{T} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \mathbb{T} \wedge y \in \mathbb{T}$.

a) $0 < x \quad \Rightarrow \quad x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x = +\infty$.

b) $0 < x \quad \Rightarrow \quad x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = -\infty$.

c) $x < 0 \quad \Rightarrow \quad x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x = -\infty$.

d) $x < 0 \quad \Rightarrow \quad x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = +\infty$.

e) $0 \neq x \in \mathbb{T} \quad \Rightarrow \quad x \cdot \mathsf{nan} = \mathsf{nan} \cdot x = \mathsf{nan}$.

f) $0 \cdot \mathsf{nan} = 0 \cdot (+\infty) = 0 \cdot (-\infty) = 0$.

g) $\mathsf{nan} \cdot 0 = (+\infty) \cdot 0 = (-\infty) \cdot 0 = 0$.

h) $x \in \mathbb{T} \quad \Rightarrow \quad x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$.

i) $x \cdot y = y \cdot x$.

j) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.

k) $x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

l) $0 \leq y \wedge 0 \leq z \quad \Rightarrow \quad x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

m) $y \leq 0 \wedge z \leq 0 \quad \Rightarrow \quad x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

n) $(-1) \cdot x = x \cdot (-1) = -x$.

Ohne Beweis.

Die Aussage "$(+\infty)\cdot 0 = 0$" bedeutet *nicht*, dass wenn etwa ein Term für $t \uparrow +\infty$ gegen $(+\infty)\cdot 0$ strebt, dass dann auch der Term gegen 0 strebt. Ein derartiger Fall kam bei (2hk.5 7) vor. Dort war der fragliche Grenzwert tatsächlich$= 0$, doch dies muss nicht immer so sein:

$$\lim_{t\uparrow+\infty} \exp(t) = +\infty, \lim_{t\uparrow+\infty} \exp(-t) = 0,$$

$$\left(\lim_{t\uparrow+\infty} \exp(t)\right)\cdot\left(\lim_{t\uparrow+\infty} \exp(-t)\right) = (+\infty)\cdot 0,$$

$$\lim_{t\uparrow+\infty} (\exp(t))\cdot(\exp(-t)) = \lim_{t\uparrow+\infty} 1 = 1,$$

$$\lim_{t\uparrow+\infty} \exp(2\cdot t) = +\infty, \lim_{t\uparrow+\infty} \exp(-t) = 0,$$

$$\left(\lim_{t\uparrow+\infty} \exp(2\cdot t)\right)\cdot\left(\lim_{t\uparrow+\infty} \exp(-t)\right) = (+\infty)\cdot 0,$$

$$\lim_{t\uparrow+\infty} (\exp(2\cdot t))\cdot(\exp(-t)) = \lim_{t\uparrow+\infty} \exp(t) = +\infty,$$

$$\lim_{t\uparrow+\infty} \exp(t) = +\infty, \lim_{t\uparrow+\infty} \exp(-2\cdot t) = 0,$$

$$\left(\lim_{t\uparrow+\infty} \exp(t)\right)\cdot\left(\lim_{t\uparrow+\infty} \exp(-2\cdot t)\right) = (+\infty)\cdot 0,$$

$$\lim_{t\uparrow+\infty} (\exp(t))\cdot(\exp(-2\cdot t)) = \lim_{t\uparrow+\infty} \exp(-t) = 0,$$

In der Arithmetik in $\mathbb{T}$ ist kein allgemeines Distributivgesetz verfügbar. Es gilt etwa

$$(+\infty)\cdot(1+(-1)) = (+\infty)\cdot 0 = 0 \neq \mathsf{nan}$$
$$= (+\infty) - (+\infty) = (+\infty) + (-\infty) = (+\infty)\cdot 1 + (+\infty)\cdot(-1).$$

Satz - Division in $\mathbb{T}$ | Arithmetik in $\mathbb{T}$ |

0) $\frac{1}{x} \in \mathbb{T} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \mathbb{T}.$

1) $\frac{x}{y} \in \mathbb{T} \quad \Rightarrow \quad x \in \mathbb{T} \wedge y \in \mathbb{T}.$

a) $\frac{1}{\mathsf{nan}} = \mathsf{nan}.$

b) $\frac{1}{+\infty} = \frac{1}{-\infty} = 0.$

c) $x \in \mathbb{T} \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{0} = 0.$

d) $0 \neq x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad x \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \cdot x = 1.$

e) $x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\frac{1}{x}} = x.$

f) $\frac{x}{y} = x \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{y} \cdot x.$

g) $\frac{x}{-y} = \frac{-x}{y} = -\frac{x}{y} \wedge \frac{-x}{-y} = \frac{x}{y}.$

h) $a \cdot \frac{x}{y} = \frac{a \cdot x}{y} \wedge \frac{1}{a} \cdot \frac{x}{y} = \frac{x}{a \cdot y} \wedge \frac{x}{y} \cdot \frac{z}{u} = \frac{x \cdot z}{y \cdot u}.$

i) $\frac{1}{\frac{x}{y}} = \frac{y}{x}.$

j) $\frac{x}{\frac{y}{z}} = \frac{x \cdot z}{y} \wedge \frac{\frac{x}{y}}{z} = \frac{x}{y \cdot z} \wedge \frac{\frac{x}{y}}{\frac{z}{u}} = \frac{x \cdot u}{y \cdot z}.$

k) $0 \neq a \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \frac{a \cdot x}{a \cdot y} = \frac{x}{y} \wedge \frac{a}{a \cdot y} = \frac{1}{y}.$

l) $0 \neq a \in \mathbb{R} \wedge x \in \mathbb{T} \quad \Rightarrow \quad \frac{a \cdot x}{a} = x.$

Ohne Beweis.

Satz - Betrag in $\mathbb{T}$ | Arithmetik in $\mathbb{T}$

0) $|x| \in \mathbb{T} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \mathbb{T}$.

a) $|\mathsf{nan}| = \mathsf{nan}$.

b) $|+\infty| = |-\infty| = +\infty$.

c) $|-x| = |x|$.

d) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.

e) $\left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|}$.

f) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$.

Ohne Beweis.

5 $<$ und Arithmetik in $\mathbb{R}$ und Arithmetik in $\mathbb{T}$

Interessanter Weise sind die Regeln im Umgang mit $<$ für die Arithmetik in $\mathbb{R}$ und Arithmetik in $\mathbb{T}$ in weiten Bereichen identisch.

Satz - $<$ und Arithmetik | Arithmetik in $\mathbb{R}$ | Arithmetik in $\mathbb{T}$

a) $x < y \wedge a \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad a + x < a + y.$

b) $a + x < a + y \quad \Rightarrow \quad x < y \wedge a \in \mathbb{R}.$

c) $x < y \wedge z < u \quad \Rightarrow \quad x + z < y + u.$

d) $x < y \quad \Leftrightarrow \quad -y < -x.$

e) $x < y \wedge 0 < c \wedge c \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad c \cdot x < c \cdot y.$

f) $c \cdot x < c \cdot y \wedge \neg(c < 0) \quad \Rightarrow \quad x < y.$

g) $x < y \wedge c < 0 \wedge c \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad c \cdot y < c \cdot x.$

h) $c \cdot x < c \cdot y \wedge \neg(0 < c) \quad \Rightarrow \quad y < x.$

g) $0 < \frac{1}{x} \quad \Leftrightarrow \quad 0 < x \wedge x \in \mathbb{R}.$

h) $0 < \frac{1}{x} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 < x \wedge x \in \mathbb{R}.$

i) $1 < \frac{1}{x} \quad \Leftrightarrow \quad 0 < x < 1.$

j) $\frac{1}{x} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < 0 \wedge x \in \mathbb{R}.$

k) $-1 < \frac{1}{x} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < -1 \wedge x \in \mathbb{R}.$

l) $\frac{1}{x} < -1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 < x < 0.$

m) $0 < x < y \wedge y \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad 0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}.$

n) $x < y < 0 \wedge x \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{y} < \frac{1}{x} < 0.$

Ohne Beweis.

6 Intervalle

Zuerst werden einige neue Terme und deren Bezeichungen vorgestellt.

Das "abgeschlossene Intervall von a bist b" ist $\boxed{[a|b] := \{x : a \leq x \leq b\}}$.

Das "rechtshalboffene Intervall von a bist b" ist $\boxed{[a|b[:= \{x : a \leq x < b\}}$.

Das "linkshalboffene Intervall von a bist b" ist $\boxed{]a|b] := \{x : a < x \leq b\}}$.

Das "offene Intervall von a bist b" ist $\boxed{]a|b[:= \{x : a < x < b\}}$.

Nun soll gesagt sein, wann eine Klasse I ein "Intervall" ist.

$$\boxed{I \text{ Intervall} \quad \Leftrightarrow \quad \exists a, b : I = [a|b] \vee I = [a|b[\vee I =]a|b] \vee I =]a|b[}.$$

Im Folgenden sind "reelle Intervalle", insbesondere "echte reelle Intervalle" von Interesse.

$$\boxed{I \text{ reelles Intervall} \quad \Leftrightarrow \quad I \text{ Intervall} \wedge I \subseteq \mathbb{R}}.$$

$$\boxed{I \text{ echtes reelles Intervall} \quad \Leftrightarrow \quad I \text{ reelles Intervall} \wedge I \text{ unendlich}}.$$

Die leere Menge kann auf unterschiedliche Weise als Intervall dargestellt werden.

Satz - 0 als Intervall

a) $\neg(a \leq b) \vee b < a \quad \Rightarrow \quad 0 = [a|b]$.

b) $\neg(a < b) \vee b \leq a \quad \Rightarrow \quad 0 = [a|b[$.

c) $\neg(a < b) \vee b \leq a \quad \Rightarrow \quad 0 =]a|b]$.

d) $\neg(a < b) \vee b \leq a \quad \Rightarrow \quad 0 =]a|b[$.

Ohne Beweis.

Klarer Weise folgt in `a)` aus "$b < a$" die Aussage "$\neg(a \leq b)$", so dass "$\neg(a \leq b) \vee b < a$" äquivalent zu "$\neg(a \leq b)$" ist. Jedoch ist zur Auffindung von Beispielen "$b < a$" griffiger. Ähnliches gilt für "$b \leq a$" und "$\neg(a < b)$" in `b)`, `c)`, `d)`.

Satz - Intervalle

a) 0 Intervall $\wedge$ $\mathbb{R}$ Intervall $\wedge$ $\mathbb{S}$ Intervall.

b) $\mathbb{R} =]-\infty|+\infty[\wedge \mathbb{S} = [-\infty|+\infty]$.

c) $x \in \mathbb{S} \quad \Rightarrow \quad [x|x] = \{x\} \wedge \{x\}$ Intervall.

d) $x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \{x\}$ reelles Intervall.

e) I reelles Intervall $\wedge\ x \in I \wedge y \in I \wedge x \neq y$
$\Rightarrow \quad I$ echtes reelles Inetrvall.

f) I reelles Intervall $\quad \Rightarrow \quad I = 0 \vee \exists x : x \in \mathbb{R} \wedge I = \{x\}$
$\vee\ I$ echtes reelles Intervall.

g) $a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R} \wedge a < b \quad \Rightarrow \quad [a|b]$ echtes reelles Intervall.

h) $a \in \mathbb{R} \wedge a < b \quad \Rightarrow \quad [a|b[$ echtes reelles Intervall.

i) $b \in \mathbb{R} \wedge a < b \quad \Rightarrow \quad]a|b]$ echtes reelles Intervall.

j) $a < b \quad \Rightarrow \quad]a|b[$ echtes reelles Intervall.

k) $a \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad [a|+\infty[$ echtes reelles Intervall.

l) $a < +\infty \quad \Rightarrow \quad]a|+\infty[$ echtes reelles Intervall.

m) $b \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad]-\infty|b]$ echtes reelles Intervall.

n) $-\infty < b \quad \Rightarrow \quad]-\infty|b[$ echtes reelles Intervall.

o) $a \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad [a|+\infty[= \{t : a \leq t \wedge t \in \mathbb{R}\}$.

p) $]a|+\infty[= \{t : a < t \wedge t \in \mathbb{R}\}$.

q) $b \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad]-\infty|b] = \{t : t \leq b \wedge t \in \mathbb{R}\}$.

r) $]-\infty|b[= \{t : t < b \wedge t \in \mathbb{R}\}$.

Ohne Beweis.

Reelle Intervalle sind genau die “konvexen” Teilmengen von $\mathbb{R}$, das heisst, Intervalle sind genau jene Teilmengen von $\mathbb{R}$, für welche die in `ii)` angegebene Bedingung gilt:

Satz - reelle Intervalle Arithmetik in $\mathbb{R}$

Die Aussagen `i) - iv)` sind äquivalent:

`i)` I reelles Intervall.

`ii)` $I \subseteq \mathbb{R}$
und $\forall \theta, x, y : \theta \in [0,1] \wedge x \in I \wedge y \in I \Rightarrow \theta \cdot x + (1-\theta) \cdot y \in I$.

`iii)` $I \subseteq \mathbb{R} \wedge \forall x, y : x \in I \wedge y \in I \Rightarrow [x|y] \subseteq I$.

`iv)` $I \subseteq \mathbb{R} \wedge \forall x, u, y : x \in I \wedge y \in I \wedge x \leq u \leq y \Rightarrow u \in I$.

Ohne Beweis.

Falls $x \in \mathbb{S}$ und $y \in \mathbb{S}$, so gibt es genau ein “kleinstes” abgeschlossenes Intervall $[a|b]$ mit $x \in [a|b]$ und $y \in [a|b]$. Dieses Intervall wird mit

$$\mathtt{co}(x, y)$$

bezeichnet und ist anschaulich die “Verbindungsstrecke” von x und y. Gleichsam erklärend gilt

Satz - $\mathtt{co}(x, y)$

`a)` $x \leq y \quad \Rightarrow \quad \mathtt{co}(x, y) = [x|y]$.

`b)` $y \leq x \quad \Rightarrow \quad \mathtt{co}(x, y) = [y|x]$.

`c)` $x \in \mathbb{S} \wedge y \in \mathbb{S} \quad \Rightarrow \quad \mathtt{co}(x, y) = [x|y] \cup [y|x]$.

`d)` $x \in [a|b] \wedge y \in [a|b] \quad \Rightarrow \quad \mathtt{co}(x, y) \subseteq [a|b]$.

`e)` I reelles Intervall
$\Leftrightarrow \quad I \subseteq \mathbb{R} \wedge \forall x, y : x \in I \wedge y \in I \Rightarrow \mathtt{co}(x, y) \subseteq I$.

Ohne Beweis.

Erläuternd zu `c)` kann gesagt werden, dass im Fall $x \neq y$ und $x \in \mathbb{S}$ und $y \in \mathbb{S}$ die Aussage $[x|y] = 0$ oder $[y|x] = 0$ gilt. In `d)` wird weiter beschrieben, was es heisst, “kleinstes” abgeschlossenes Intervall $[a|b]$ mit $x \in [a|b]$ und $y \in [a|b]$ zu sein.

Der binäre Durchschnitt zweier Intervalle ist ein Intervall. Die binäre Vereinigung von Intervallen ist, wenn die beiden Intervalle wenigstens einen Punkt gemeinsam haben, wieder ein Intervall.

Satz - $\cap\cup$ und Intervalle

a) I Intervall $\wedge$ J Intervall $\quad\Rightarrow\quad$ $I \cap J$ Intervall.

b) I Intervall $\wedge$ J Intervall $\wedge$ $x \in I \cap J$ $\quad\Rightarrow\quad$ $I \cup J$ Intervall.

c) I reelles Intervall $\wedge$ J Intervall $\quad\Rightarrow\quad$ $I \cap J$ reelles Intervall.

d) I Intervall $\wedge$ J reelles Intervall $\quad\Rightarrow\quad$ $I \cap J$ reelles Intervall.

e) I reelles Intervall $\wedge$ J reelles Intervall $\wedge$ $x \in I \cap J$
$\Rightarrow\quad$ $I \cup J$ reelles Intervall.

f) I echtes reelles Intervall $\wedge$ J reelles Intervall $\wedge$ $x \in I \cap J$
$\Rightarrow\quad$ $I \cup J$ echtes reelles Intervall.

g) I reelles Intervall $\wedge$ J echtes reelles Intervall $\wedge$ $x \in I \cap J$
$\Rightarrow\quad$ $I \cup J$ echtes reelles Intervall.

Ohne Beweis.

Beispiel (ohne Beweis)

Es gelte $I = [0|1]$ und $J =]1|2]$. Dann folgt: I echtes reelles Intervall $\wedge$ J echtes reelles Intervall $\wedge$ $0 = I \cap J$ $\wedge$ $I \cup J = [0|2]$ $\wedge$ $I \cup J$ echtes reelles Intervall.

Interpretation: Die binäre Vereinigung von Intervallen kann ein Intervall sein, obwohl die beiden Intervalle keinen gemeinsamen Punkt haben.

Beispiel (ohne Beweis)

Es gelte: $I = [0|1]$ und $J = [2|4]$. Dann folgt: I echtes reelles Intervall $\wedge$ J echtes reelles Intervall $\wedge$ $0 = I \cap J$ $\wedge$ $\neg(I \cup J$ Intervall$)$.

Interpretation: Es gibt Intervalle, die keinen gemeinsamen Punkt haben und deren binäre Vereinigung kein Intervall ist.

Punkte echter reeller Intervalle haben eine bemerkenswerte Approximationseigenschaft. Dies ist das erste Mal, dass im Vorkurs ein Limes erscheint. Die genaue Festlegung des Limes ist - schweren Herzens, doch erfahrungsbedingt - nicht Gegenstand des Vorkurses. Statt dessen wird auf den Umgang mit dieser Menge - auch der Limes ist eine Menge ! - Wert gelegt.

Satz - $\lim$ **und Intervalle**

I echtes reelles Intervall

$\wedge \quad x \in I$

$\Rightarrow$

$\exists f :$

$f : \mathbb{N} \to I$

$\wedge \quad \forall n : n \in \mathbb{N} \Rightarrow x \neq f(n)$

$\wedge \quad \lim\limits_{n \uparrow +\infty} f(n) = x.$

Ohne Beweis.

Beispiel (ohne Beweis)

Es gelte: $I = \,]-1|1[\, \wedge x = 0$. Dann folgt: I echtes reelles Intervall $\wedge\, x \in I$. Nach **Satz -** $\lim$ **und Intervalle** gibt es f mit $f : \mathbb{N} \to \,]-1|1[$ mit $\forall n : n \in \mathbb{N} \Rightarrow 0 \neq f(n)$ und $\lim\limits_{n \uparrow +\infty} f(n) = 0$. In der Tat kann ein derartiges f leicht angegeben werden, indem man etwa

$$f : \mathbb{N} \to \,]-1|1[, \quad f(n) = \frac{(-1)^n}{3 + 4 \cdot n},$$

wählt.

Beispiel (ohne Beweis)

Es gelte: $I = [2|4[\, \wedge x = 2$. Dann folgt: I echtes reelles Intervall $\wedge\, x \in I$. Nach **Satz -** $\lim$ **und Intervalle** gibt es f mit $f : \mathbb{N} \to [2|4[$ mit $\forall n : n \in \mathbb{N} \Rightarrow 2 \neq f(n)$ und $\lim\limits_{n \uparrow +\infty} f(n) = 2$. In der Tat kann ein derartiges f leicht angegeben werden, indem man etwa

$$f : \mathbb{N} \to [2|4[, \quad f(n) = 2 + \frac{1}{1 + n},$$

wählt.

7 Obere Schranke. Untere Schranke.

In Technik und Naturwissenschaften ist es gelegentlich von Vorteil, angeben zu können, "wie groß höchstens" oder "wie klein mindestens" der Wert einer Messgröße sein kann. Vielleicht die prominentesten Beispiele sind "jede Geschwindigkeit ist kleiner gleich der Lichtgeschwindigkeit" und "jede Messung der Temperatur in Kelvin ergibt ein Resultat größer als Null" .

Die hierzu passenden Begriffe der Mathematik sind

"obere Schranke" und "untere Schranke" .

Bei den Schranken geht es nicht darum, ob der Wert einer Messung tatsächlich gleich der oberen oder unteren Schranke wird, es geht darum, dass der Wert der Messung *garantiert* unter der oberen und *garantiert* über der unteren Schranke bleibt.

$$\text{“}o \text{ obere Schranke von } E\text{”} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{o \in \mathbb{S} \wedge \forall \lambda : \lambda \in E \Rightarrow \lambda \leq o},$$

$$\text{“}u \text{ untere Schranke von } E\text{”} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{u \in \mathbb{S} \wedge \forall \lambda : \lambda \in E \Rightarrow u \leq \lambda}.$$

Satz - mnsosus | Arithmetik in $\mathbb{R}$ | Arithmetik in $\mathbb{T}$

a) o obere Schranke von E
$\Rightarrow \quad -o$ untere Schranke von $\{-\omega : \omega \in E\}$.

b) o obere Schranke von $\{-\omega : \omega \in E\}$
$\Rightarrow \quad -o$ untere Schranke von E.

c) u untere Schranke von E
$\Rightarrow \quad -u$ obere Schranke von $\{-\omega : \omega \in E\}$.

d) u untere Schranke von $\{-\omega : \omega \in E\}$
$\Rightarrow \quad -u$ obere Schranke von E.

Ohne Beweis.

Satz - Schranken - 1

a) $E \subseteq \mathbb{S} \quad \Rightarrow \quad +\infty$ obere Schranke von E.

b) $E \subseteq \mathbb{S} \quad \Rightarrow \quad -\infty$ untere Schranke von E.

c) $o \in \mathbb{S} \quad \Rightarrow \quad o$ obere Schranke von 0.

d) $u \in \mathbb{S} \quad \Rightarrow \quad u$ untere Schranke von 0.

e) o obere Schranke von $E \quad \Rightarrow \quad E \subseteq \mathbb{S}$.

f) u untere Schranke von $E \quad \Rightarrow \quad E \subseteq \mathbb{S}$.

g) $D \subseteq E \wedge o$ obere Schranke von E
$\Rightarrow \quad o$ obere Schranke von D.

h) $D \subseteq E \wedge u$ obere Schranke von E
$\Rightarrow \quad u$ obere Schranke von D.

i) $0 \neq E \wedge o$ obere Schranke von $E \wedge u$ untere Schranke von E
$\Rightarrow \quad u \leq o$.

j) o obere Schranke von $E \wedge u$ untere Schranke von E
$\Rightarrow \quad E \subseteq [u|o]$.

k) $o \in \mathbb{S} \wedge u \in \mathbb{S} \wedge E \subseteq [u|o]$
$\Rightarrow \quad o$ obere Schranke von $E \wedge u$ untere Schranke von E.

a), b), d) - k) ohne Beweis.

Der Beweis von c) beruht auf der Tatsache, dass die Aussage "$\forall \lambda : \lambda \in 0 \Rightarrow \lambda \leq o$" *auf jeden Fall wahr ist, weil die Prämisse stets falsch ist.* Logisch explizit gilt per definitionem "leere Menge 0",

$$\forall \lambda : \lambda \notin 0,$$

also auch

$$\forall \lambda : (\lambda \notin 0) \vee (\lambda \leq o),$$

re-formuliert,

$$\forall \lambda : \neg(\lambda \in 0) \vee (\lambda \leq o),$$

ist und dies ist logisch äquivalent zu

$$\forall \lambda : (\lambda \in 0) \Rightarrow (\lambda \leq o).$$

Satz - Schranken - 2

a) $b \leq o \quad \Rightarrow \quad o$ obere Schranke von $[a|b]$.

b) $b \leq o \quad \Rightarrow \quad o$ obere Schranke von $[a|b[$.

c) $b \leq o \quad \Rightarrow \quad o$ obere Schranke von $]a|b]$.

d) $b \leq o \quad \Rightarrow \quad o$ obere Schranke von $]a|b[$.

e) $b \in \mathbb{S} \quad \Rightarrow \quad b$ obere Scharnke von $[a|b]$.

f) $b \in \mathbb{S} \quad \Rightarrow \quad b$ obere Scharnke von $[a|b[$.

g) $b \in \mathbb{S} \quad \Rightarrow \quad b$ obere Scharnke von $]a|b]$.

h) $b \in \mathbb{S} \quad \Rightarrow \quad b$ obere Scharnke von $]a|b[$.

Ohne Beweis.

Satz - Schranken - 3

a) $u \leq a \quad \Rightarrow \quad u$ untere Schranke von $[a|b]$.

b) $u \leq a \quad \Rightarrow \quad u$ untere Schranke von $[a|b[$.

c) $u \leq a \quad \Rightarrow \quad u$ untere Schranke von $]a|b]$.

d) $u \leq a \quad \Rightarrow \quad u$ untere Schranke von $]a|b[$.

e) $a \in \mathbb{S} \quad \Rightarrow \quad a$ untere Schranke von $[a|b]$.

f) $a \in \mathbb{S} \quad \Rightarrow \quad a$ untere Schranke von $[a|b[$.

g) $a \in \mathbb{S} \quad \Rightarrow \quad a$ untere Schranke von $]a|b]$.

h) $a \in \mathbb{S} \quad \Rightarrow \quad a$ untere Schranke von $]a|b[$.

Ohne Beweis.

Eine gutes Intermezzo ist der Beweis von

Satz - $\leq$ und ± 1 $\boxed{\text{Arithmetik in } \mathbb{T}}$

a) $x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad x < 1 + x.$

b) $x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad -1 + x < x.$

c) $x \in \mathbb{S} \quad \Rightarrow \quad x \leq 1 + x.$

d) $x \in \mathbb{S} \quad \Rightarrow \quad -1 + x \leq x.$

Beweis a) VS $x \in \mathbb{R}$.

1: Aus "$0 < 1$" und aus VS
folgt via **Satz - $<$ und Arithmetik**: $x + 0 < x + 1.$

2: Aus VS folgt: $x + 0 = x.$

3: Aus 2 und aus 1 folgt: $x < x + 1.$

4: Aus 3 und aus "$x + 1 = 1 + x$" folgt: $x < 1 + x.$

b) VS $x \in \mathbb{R}$.

1: Aus "$-1 < 0$" und aus VS
folgt via **Satz - $<$ und Arithmetik**: $x + (-1) < x + 0.$

2: Aus VS folgt: $x + 0 = x.$

3: Aus 2 und aus 1 folgt: $x + (-1) < x.$

4: Aus 3 und aus "$x + (-1) = -1 + x$" folgt: $-1 + x < x.$

`c)` VS $x \in \mathbb{S}$.

`1:` Aus VS folgt via **Satz - $\mathbb{S}$**: $x \in \mathbb{R} \vee x = +\infty \vee x = -\infty$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x \in \mathbb{R}$.

`2:` Aus `1.1.Fall` folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $x < 1 + x$.

`3:` Aus `2` folgt: $x \leq 1 + x$.

`1.2.Fall` $x = +\infty$.

`2.1:` Aus **Satz - $\mathbb{S}$**"$+\infty \in \mathbb{S}$" folgt via **Satz - $\leq$**: $+\infty \leq +\infty$.

`2.2:` Aus "$1 \in \mathbb{R}$" folgt via **Satz - Addition in $\mathbb{T}$**: $1 + (+\infty) = +\infty$.

`3:` Aus `2.1` und aus `2.2` folgt: $+\infty \leq 1 + (+\infty)$.

`4:` Aus `3` und aus `1.2.Fall` folgt: $x \leq 1 + x$.

`1.3.Fall` $x = -\infty$.

`2.1:` Aus **Satz - $\mathbb{S}$**"$-\infty \in \mathbb{S}$" folgt via **Satz - $\leq$**: $-\infty \leq -\infty$.

`2.2:` Aus "$1 \in \mathbb{R}$" folgt via **Satz - Addition in $\mathbb{T}$**: $1 + (-\infty) = -\infty$.

`3:` Aus `2.1` und aus `2.2` folgt: $-\infty \leq 1 + (-\infty)$.

`4:` Aus `3` und aus `1.3.Fall` folgt: $x \leq 1 + x$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $x \leq 1 + x$.

`d)` VS $x \in \mathbb{S}$.

`1:` Aus VS folgt via **Satz - $\mathbb{S}$**: $x \in \mathbb{R} \vee x = +\infty \vee x = -\infty$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x \in \mathbb{R}$.

`2:` Aus `1.1.Fall` folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $-1 + x < x$.

`3:` Aus `2` folgt: $-1 + x \leq x$.

`1.2.Fall` $x = +\infty$.

`2.1:` Aus **Satz - $\mathbb{S}$**"$+\infty \in \mathbb{S}$" folgt via **Satz - $\leq$**: $+\infty \leq +\infty$.

`2.2:` Aus "$-1 \in \mathbb{R}$" folgt via **Satz - Addition in $\mathbb{T}$**: $-1 + (+\infty) = +\infty$.

`3:` Aus `2.1` und aus `2.2` folgt: $-1 + (+\infty) \leq +\infty$.

`4:` Aus `3` und aus `1.2.Fall` folgt: $-1 + x \leq x$.

`1.3.Fall` $x = -\infty$.

`2.1:` Aus **Satz - $\mathbb{S}$**"$-\infty \in \mathbb{S}$" folgt via **Satz - $\leq$**: $-\infty \leq -\infty$.

`2.2:` Aus "$-1 \in \mathbb{R}$" folgt via **Satz - Addition in $\mathbb{T}$**: $-1 + (-\infty) = -\infty$.

`3:` Aus `2.1` und aus `2.2` folgt: $-1 + (-\infty) \leq 1 + (-\infty)$.

`4:` Aus `3` und aus `1.3.Fall` folgt: $-1 + x \leq x$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $-1 + x \leq x$.

$\square$

Aus **Satz - Schranken - 2**, **Satz - Schranken - 3** und **Satz - $\leq$ und** ± 1 folgt ohne allzu viel Aufwand

Satz - Schranken - 4

a) $b \in \mathbb{S} \quad \Rightarrow \quad 1 + b$ obere Schranke von $[a|b]$.

b) $b \in \mathbb{S} \quad \Rightarrow \quad 1 + b$ obere Schranke von $[a|b[$.

c) $b \in \mathbb{S} \quad \Rightarrow \quad 1 + b$ obere Schranke von $]a|b]$.

d) $b \in \mathbb{S} \quad \Rightarrow \quad 1 + b$ obere Schranke von $]a|b[$.

e) $a \in \mathbb{S} \quad \Rightarrow \quad -1 + a$ untere Schranke von $[a|b]$.

f) $a \in \mathbb{S} \quad \Rightarrow \quad -1 + a$ untere Schranke von $[a|b[$.

g) $a \in \mathbb{S} \quad \Rightarrow \quad -1 + a$ untere Schranke von $]a|b]$.

h) $a \in \mathbb{S} \quad \Rightarrow \quad -1 + a$ untere Schranke von $]a|b[$.

Ohne Beweis.

8 Supremum und Infimum

Falls o obere Schranke von E ist und falls $o \in \mathbb{R}$, dann ist offenbar auch jede sreelle Zahl x mit $o \leq x$ obere Schranke von E. Also gibt es in derlei Fällen *unendlich viele* obere Schranken von E. In Anwendungen sind die meisten dieser Schranken uninteressant. Wenn bereits bekannt ist, dass die Lichtgeschwindigkeit nicht überschritten werden kann, so ist es nur selten von Belang, dass auch die hundertfache Lichtgeschwindikgeit nicht überschritten werden kann.

Ähnliche Bemerkungen treffen auch auf untere Schranken zu.

Wenn man etwa $E = [0|2]$ betrachtet und nach oberen Schranken von E sucht, so werden die meisten "2" angeben. Vermutlich, weil schon per definitionem für alle x mit $x \in [0|2]$ gilt: $x \leq 2$. Jedoch ist "2" eine sehr spezielle obere Schranke von E. E ist nämlich die *kleinstmögliche* obere Schranke von E. Präziser gesprochen: Falls o eine obere Schranke von E ist, folgt $2 \leq o$. Dies ist einfach zu sehen. Falls o eine obere Schranke von E ist, gilt $x \leq o$ für alle x mit $x \in E$. Wegen $2 \in E$ muss diese Abschätzung auch für $x = 2$ gelten. Es folgt $2 \leq o$.

Die kleinste obere Schranke heisst "Supremum", die größte untere Schranke heisst "Infimum".

"s Supremum von E" $\Leftrightarrow$ $\boxed{\begin{array}{r} s \text{ obere Schranke von } E \\ \wedge\ \forall o : o \text{ obere Schranke von } E \Rightarrow s \leq o \end{array}}$

"i Infimum von E" $\Leftrightarrow$ $\boxed{\begin{array}{r} i \text{ untere Schranke von } E \\ \wedge\ \forall u : u \text{ untere Schranke von } E \Rightarrow u \leq i \end{array}}$

Wie gleich gesagt sein wird, hat jede TeilKlasse von $\mathbb{S}$ genau ein Supremum und genau ein Infimum.

Satz - mnsSupInf | Arithmetik in $\mathbb{R}$ | Arithmetik in $\mathbb{T}$

a) s Supremum von E $\Rightarrow$ $-s$ Infimum von $\{-\omega : \omega \in E\}$.

b) s Supremum von $\{-\omega : \omega \in E\}$ $\Rightarrow$ $-s$ Infimum von E.

c) i Infimum von E $\Rightarrow$ $-i$ Supremum von $\{-\omega : \omega \in E\}$.

d) i Infimum von $\{-\omega : \omega \in E\}$ $\Rightarrow$ $-i$ Supremum von E.

Satz - sup inf

a) $E \subseteq \mathbb{S} \quad \Rightarrow \quad \exists s : s$ Supremum von E.

b) $E \subseteq \mathbb{S} \quad \Rightarrow \quad \exists i : i$ Supremum von E.

c) $-\infty$ Supremum von $0 \wedge +\infty$ Infimum von 0.

d) s Supremum von $E \wedge \sigma$ Supremum von $E \quad \Rightarrow \quad s = \sigma$.

e) i Infimum von $E \wedge \iota$ Infimum von $E \quad \Rightarrow \quad i = \iota$.

f) $E \subseteq D \wedge s$ Supremum von $E \wedge y$ Supremum von D
$\Rightarrow \quad s \leq y$.

g) $E \subseteq D \wedge i$ Infimum von $E \wedge x$ Infimum von $D \quad \Rightarrow \quad x \leq i$.

h) s Supremum von $E \wedge x < s$
$\Rightarrow \quad \neg(x$ obere Schranke von $E)$.

i) i Supremum von $E \wedge i < y$
$\Rightarrow \quad \neg(y$ untere Schranke von $E)$.

Ohne Beweis.

Eine instruktive Aufgabe ist es, das Supremum von $[0|2[$ zu bestimmen. Zum Vergleich: 2 ist Element von $[0|2]$. Das erlaubt, wie oben dargelegt, einen einfachen Nachweis von “2 Supremum von $[0|2]$”. Nun gilt aber $2 \notin [0|2[$. Das macht die Sache schwieriger. Zunächst ist 2 sicher eine obere Schranke von $[0|2[$ - 2 ist eine sreelle Zahl und falls $\lambda \in [0|2[$, dann per definitionem $0 \leq \lambda < 2$, also $\lambda < 2$, also $\lambda \leq 2$.

Doch ist 2 die kleinstmögliche obere Schranke von $[0|2[$?

Zur Klärung dieser Frage sei vorbereitend der anschaulich klare

Satz - $\frac{a+b}{2}$ $\boxed{\text{Arithmetik in } \mathbb{R}}$

$$a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R} \wedge a < b \quad \Rightarrow \quad a < \frac{a+b}{2} < b.$$

formuliert, dessen Beweis eine gute Übung ist.

Nun zum eigentlichen Thema, in dessen Bearbeitung eine INDIREKTE Argumentation verborgen ist.

Arithmetik in $\mathbb{R}$

`Thema1` o obere Schranke von $[0|2[$.

`2.1`: Aus `Thema1` folgt per definitionem: $o \in \mathbb{S}$.

`2.2`: Aus `Thema1` folgt per definitionem: $\forall \lambda : \lambda \in [0|2[\Rightarrow \lambda \leq o$.

`3`: Aus "$1 \in [0|2[$" und aus `2.2` folgt: $1 \leq o$.

`4`: Aus `2.1` und aus "$2 \in \mathbb{S}$" folgt via **Satz -** $<$ $\leq$: $o < 2 \vee 2 \leq o$.

`Fallunterscheidung`

`4.1.Fall` $o < 2$.

`5`: Aus `3` und aus `4.1.Fall` folgt: $o \in \mathbb{R}$.

`6`: Aus `5`, aus "$2 \in \mathbb{R}$" und aus `4.1.Fall` folgt via **Satz -** $\dfrac{a+b}{2}$: $o < \dfrac{o+2}{2} < 2$.

`7`: Aus `3` und aus `6` folgt: $1 \leq \dfrac{o+2}{2}$.

`8`: Aus "$0 \leq 1$", aus `7` und aus `6`"$\dfrac{o+2}{2} < 2$" folgt: $0 \leq \frac{o+2}{2} < 2$.

`9`: Aus `8` folgt per definitionem: $\frac{o+2}{2} \in [0|2[$.

`10`: Aus `9` und aus `Thema1` folgt per definitionem: $\frac{o+2}{2} \leq o$.

`11`: Aus `10` und aus "$0 < 2 \in \mathbb{R}$" folgt via **Satz -** $<$ **und Arithmetik**: $2 \cdot \frac{o+2}{2} \leq 2 \cdot o$.

`12`: Aus `5` und aus "$2 \in \mathbb{R}$" folgt: $o + 2 \in \mathbb{R}$.

`13`: Aus `12` folgt: $2 \cdot \frac{o+2}{2} = o + 2$.

`14`: Aus `11` und aus `13` folgt: $o + 2 \leq 2 \cdot o$.

`15`: Aus `14` und aus `5` folgt: $2 \leq o$.

`4.2.Fall` $2 \leq o$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $2 \leq o$

Ergo `Thema1`: `A1` | "$\forall o : o$ obere Schranke von $[0|2[\quad \Rightarrow \quad 2 \leq o$"

Da, wie bereits oben festgestellt, 2 eine obere Schranke von $[0|2[$ ist und da `A1` gilt, folgt: 2 Supremum von $[0|2[$.

Die Argumentation trifft nicht nur auf $[0|2[$, sondern auf viele Intervalle zu.

Satz - sup inf - Intervalle

a) $a \leq b \quad \Rightarrow \quad a$ Infimum von $[a|b] \wedge b$ Supremum von $[a|b]$.

b) $a < b \quad \Rightarrow \quad a$ Infimum von $[a|b[\wedge b$ Supremum von $[a|b[$.

c) $a < b \quad \Rightarrow \quad a$ Infimum von $]a|b] \wedge b$ Supremum von $]a|b]$.

d) $a < b \quad \Rightarrow \quad a$ Infimum von $]a|b[\wedge b$ Supremum von $]a|b[$.

Ohne Beweis.

Eine mathematisch genauere Untersuchung unserer Überlegungen bringt Folgendes zu Tage:

Satz - sup inf - epilog

a) $x \in \mathbb{S} \wedge y \in \mathbb{S} \wedge \forall \lambda : \lambda \in \mathbb{R} \wedge \lambda < x \Rightarrow \lambda \leq y \quad \Rightarrow \quad x \leq y$.

b) $x \in \mathbb{S} \wedge y \in \mathbb{S} \wedge \forall \lambda : \lambda \in \mathbb{R} \wedge y < \lambda \Rightarrow x \leq \lambda \quad \Rightarrow \quad x \leq y$.

c) $E \neq 0 \wedge s$ Supremum von $E \wedge s \notin E \quad \Rightarrow \quad E$ unendlich.

d) $E \neq 0 \wedge i$ Infimum von $E \wedge i \notin E \quad \Rightarrow \quad E$ unendlich.

e) $x \in \mathbb{S} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge \forall \lambda : \lambda \in \mathbb{R} \wedge \lambda < y \Rightarrow x \leq \lambda \quad \Rightarrow \quad x = -\infty$.

f) $x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{S} \wedge \forall \lambda : \lambda \in \mathbb{R} \wedge x < \lambda \Rightarrow \lambda \leq y \quad \Rightarrow \quad y = +\infty$.

Ohne Beweis.

9 Maximum und Minimum

Wie im Abschnitt **Supremum und Infimum** an Hand der speziellen Mengen $[0|2]$ und $[0|2]$ dargelegt, kann das Supremum zur betrachteten Menge gehören, muss es aber nicht. Ähnliches gilt für Infima. Ist das Supremum von E ein Element von E, so ist es das "Maximum von E". Ist das Infimum von E ein Element von E, so ist es das "Minimum von E".

Mathematisch präzise geht man folgender Maßen vor.

$$\text{"}M\text{ Maximum von }E\text{"} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{M\text{ obere Schranke von }E \wedge M \in E}.$$

$$\text{"}m\text{ Minimum von }E\text{"} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{m\text{ untere Schrannke von }E \wedge m \in E}.$$

Wie gleich gesagt, hat jede Klasse E *höchstens* ein Maximum und *höchstens* ein Minimum. Nicht jede TeilKlasse von $\mathbb{S}$ hat ein Maximum oder ein Minimum.

Satz - mnsMaxMin	Arithmetik in $\mathbb{R}$	Arithmetik in $\mathbb{T}$

a) M Maximum von $E \quad \Rightarrow \quad -M$ Minimum von $\{-\omega : \omega \in E\}$.

b) M Maximum von $\{-\omega : \omega \in E\} \quad \Rightarrow \quad -M$ Minimum von E.

c) m Minimum von $E \quad \Rightarrow \quad -m$ Maximum von $\{-\omega : \omega \in E\}$.

d) m Minimum von $\{-\omega : \omega \in E\} \quad \Rightarrow \quad -m$ Maximum von E.

<u>Satz - MaxMin</u>

a) M Maximum von $E \quad \Rightarrow \quad E \neq 0$.

b) m Minimum von $E \quad \Rightarrow \quad E \neq 0$.

c) M Maximum von $E \quad \Rightarrow \quad M$ Supremum von E.

d) m Minimum von $E \quad \Rightarrow \quad m$ Infimum von E.

e) M Supremum von $E \wedge M \in E \quad \Rightarrow \quad M$ Maximum von E.

f) m Infimum von $E \wedge m \in E \quad \Rightarrow \quad m$ Minimum von E.

g) M Maximum von $E \wedge \mu$ Maximum von $E \quad \Rightarrow \quad M = \mu$.

h) m Minimum von $E \wedge \eta$ Minimum von $E \quad \Rightarrow \quad m = \eta$.

i) $\neg(y$ Maximum von $\mathbb{R})$.

j) $\neg(x$ Minimum von $\mathbb{R})$.

k) $+\infty$ Maximum von $\mathbb{S}$.

l) $-\infty$ Minimum von $\mathbb{S}$.

a) - h) ohne Beweis. Beweis i) - l) als Übung oder in "**UE -** $<$ **und** $\leq$" oder als Folgerung nachfolgenden Satzes.

TeilKlassen von $\mathbb{S}$ können, müssen aber kein Maximum oder Minimum haben. Dies wird bei Betrachtung spezieller Intervalle deutlich.

Satz - MaxMin - Intervalle

a) $a \leq b \quad \Rightarrow \quad a$ Minimum von $[a|b] \wedge b$ Maximum von $[a|b]$.

b) $a < b \quad \Rightarrow \quad a$ Minimum von $[a|b[$.

c) $a < b \quad \Rightarrow \quad b$ Maximum von $]a|b]$.

d) $\neg(y$ Maximum von $[a|b[)$.

e) $\neg(x$ Minimum von $]a|b])$.

f) $\neg(y$ Maximum von $]a|b[)$.

g) $\neg(x$ Minmum von $]a|b[)$.

Ohne Beweis.

Im weiteren Verlauf des Vorkurses ist es gelegentlich von Vorteil, Funktionen zur Verfügung zu haben, die - falls jeweils vorhanden - einer TeilKlasse von $\mathbb{S}$ das Maximum oder das Minimum zuordnen. Diese Funktionen sollen mit eigenen Bezeichnungen versehen werden. Die Beschreibung der jeweiligen Definitionsbereiche ist etwas mühsam.

$$\texttt{hmax} := \{\omega : \exists M : M \text{ Maximum von } \omega\},$$

$$\texttt{hmin} = \{\omega : \exists m : m \text{ Minimum von } \omega\}.$$

“**hmax**” soll an “hat Maximum” und “**hmin**” soll an “hat Minimum” erinnern. Beide Klassen sind Mengen und Parameter der Mathematik. Beide Mengen sind nur durch ihre definierenden Aussagen einfach zu beschreiben. Gleichwertige, doch anschaulichere Aussagen scheine schwierig bis unmöglich auffindbar. So wird es das Ziel sein, von möglichst vielen “interessanten” Menge fest zu stellen, ob sie zu `hmax` oder `hmin` gehören oder nicht. Einige bekannte Ergebnisse seien hier kurz zusammengefasst.

Satz - $\texttt{hmaxhmin}$ - Intervalle

0) $0 \notin \texttt{hmax}$. $0 \notin \texttt{hmin}$.

a) $\mathbb{R} \notin \texttt{hmax}$. $\mathbb{R} \notin \texttt{hmin}$.

b) $\mathbb{S} \in \texttt{hmax}$. $\mathbb{S} \in \texttt{hmin}$.

c) $a \leq b \quad \Rightarrow \quad [a|b] \in \texttt{hmax} \wedge [a|b] \in \texttt{hmin}$.

d) $a < b \quad \Rightarrow \quad [a|b[\in \texttt{hmin} \wedge]a|b] \in \texttt{hmax}$.

e) $[a|b[\notin \texttt{hmax} \wedge]a|b] \notin \texttt{hmin} \wedge]a|b[\notin \texttt{hmax} \wedge]a|b[\notin \texttt{hmin}$.

Ohne Beweis.

$\texttt{hmax}$, $\texttt{hmin}$ sind die Definitionsbereiche der *Funktionen* $\max, \min$, die jeder Menge, die ein Maximum oder Minimum hat, dieses Maximum oder Minimum zuordnet:

$$\max : \texttt{hmax} \to \mathbb{S},$$

$$\forall E : E \in \texttt{hmax} \quad \Rightarrow \quad \max(E) \text{ Maximum von } E,$$

$$\min : \texttt{hmin} \to \mathbb{S},$$

$$\forall E : E \in \texttt{hmin} \quad \Rightarrow \quad \min(E) \text{ Minimum von } E.$$

Eine mathematisch präzisere Definition von max oder min ist außerhalb der Ansprüche des Vorkurses.

max und min sind Parameter der Mathematik. Sie sind Mengen.

Satz - $\mathsf{mns}\max\min$

a) $E \in \mathtt{hmax} \quad \Rightarrow \quad \{-\omega : \omega \in E\} \in \mathtt{hmin}$
$\wedge -\max(E) = \min(\{-\omega : \omega \in E\})$.

b) $\{-\omega : \omega \in E\} \in \mathtt{hmax} \quad \Rightarrow \quad E \in \mathtt{hmin}$
$\wedge \max(\{-\omega : \omega \in E\}) = -\min E$.

c) $E \in \mathtt{hmin} \quad \Rightarrow \quad \{-\omega : \omega \in E\} \in \mathtt{hmax}$
$\wedge -\min(E) = \max(\{-\omega : \omega \in E\})$.

d) $\{-\omega : \omega \in E\} \in \mathtt{hmin} \quad \Rightarrow \quad E \in \mathtt{hmax}$
$\wedge \min(\{-\omega : \omega \in E\}) = -\max E$.

Ohne Beweis.

Satz - $\max\min$ - Intervalle

a) $\max(\mathbb{S}) = +\infty$. $\min(\mathbb{S}) = -\infty$.

b) $a \leq b \quad \Rightarrow \quad \max([a|b]) = b \wedge \min([a|b]) = a$.

c) $a < b \quad \Rightarrow \quad \min([a|b[) = a \wedge \max(]a|b]) = b$.

Ohne Beweis.

Jede nichtleere, endliche TeilKlasse von $\mathbb{S}$ hat sowohl Maximum als auch Minimum.

Satz - $\max\min$ - endlich

a) $E \neq 0 \wedge E \subseteq \mathbb{S} \wedge E$ endlich $\Rightarrow$ $E \in \mathtt{hmax} \wedge E \in \mathtt{hmin}$.

b) $x \in \mathbb{S}$ $\Rightarrow$ $\{x\} \in \mathtt{hmax} \wedge \{x\} \in \mathtt{hmin}$.

c) $x \in \mathbb{S}$ $\Rightarrow$ $\max(\{x\}) = x \wedge \min(\{y\}) = y$.

d) $x \in \mathbb{S} \wedge y \in \mathbb{S}$ $\Rightarrow$ $\{x, y\} \in \mathtt{hmax} \wedge \{x, y\} \in \mathtt{hmin}$.

e) $x \leq y$ $\Rightarrow$ $y = \max(\{x, y\}) \wedge x = \min(\{x, y\})$.

f) $x < y$ $\Rightarrow$ $y = \max(\{x, y\}) \wedge x = \min(\{x, y\})$.

Ohne Beweis.

Die vielleicht prominenteste *unendliche* Menge mit Minimum ist $\mathbb{N}$. Darüber hinaus hat auch jede nichtleere TeilKlasse von $\mathbb{N}$ ein Minimum. Bezüglich Maximum von TeilKlassen von $\mathbb{N}$ gilt Erwartetes.

Satz - $\max\min$ - $\mathbb{N}$

a) $\mathbb{N} \in \mathtt{hmin}$. $\min(\mathbb{N}) = 0$.

b) $E \neq 0 \wedge E \subseteq \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ $E \in \mathtt{hmin}$.

c) $\mathbb{N} \notin \mathtt{hmax}$.

d) $E \neq 0 \wedge E \subseteq \mathbb{N} \wedge o$ obere Schranke von $E \wedge o \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow$ $E \in \mathtt{hmax} \wedge \max(E) \leq o$.

Ohne Beweis.

Auch $\mathbb{Z}$ hat, ohne selbst Maximum oder Minimum zu besitzen, einige unendliche TeilKlassen mit Maximum oder Minimum. Wiederholend oder vorbereitend seien

$$\{a,\ldots\} = \{\omega : a \leq \omega \wedge \omega \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z} \cap [a|+\infty],$$

$$\{\ldots,b\} := \{\omega : \omega \leq b \wedge \omega \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z} \cap [-\infty|b],$$

$$\{a,\ldots,b\} := \{\omega : a \leq \omega \leq b \wedge \omega \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z} \cap [a|b].$$

Satz - $\max\min$ **-** $\mathbb{Z}$

a) $\mathbb{Z} \notin$ `hmax`. $\mathbb{Z} \notin$ `hmin`.

b) $E \neq 0 \wedge E \subseteq \mathbb{Z} \wedge o$ obere Schranke von $E \wedge o \in \mathbb{R}$
$$\Rightarrow \quad E \in \texttt{hmax} \wedge \max(E) \leq o.$$

c) $E \neq 0 \wedge E \subseteq \mathbb{Z} \wedge u$ untere Schranke von $E \wedge u \in \mathbb{R}$
$$\Rightarrow \quad E \in \texttt{hmin} \wedge u \leq \min(E).$$

d) $a \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \{a,\ldots\} \in \texttt{hmin} \wedge a \leq \min(\{a,\ldots\})$.

e) $b \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \{\ldots,b\} \in \texttt{hmax} \wedge \max(\{\ldots,b\}) \leq b$.

f) $a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R} \wedge 0 \neq \{a,\ldots,b\}$
$$\Rightarrow \quad \{a,\ldots,b\} \in \texttt{hmax} \wedge \{a,\ldots,b\} \in \texttt{hmin}$$
$$\wedge\, a \leq \min(\{a,\ldots,b\}) \wedge \max(\{a,\ldots,b\}) \leq b.$$

Ohne Beweis.

10 UE - $<$ und $\leq$

10.1 $a < \frac{a+b}{2} < b$

Satz - $\frac{a+b}{2}$ $\boxed{\text{Arithmetik in } \mathbb{R}}$

$$a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R} \wedge a < b \qquad \Rightarrow \qquad a < \frac{a+b}{2} < b.$$

Beweis VS $a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R} \wedge a < b$.

`1.1`: Aus VS $a < b$ und aus VS $a \in \mathbb{R}$ folgt via **Satz - $<$ und Arithmetik**: $a + a < a + b$.

`1.2`: Aus VS $a < b$ und aus VS $b \in \mathbb{R}$ folgt via **Satz - $<$ und Arithmetik**: $b + a < b + b$.

`2.1`: Aus "$a + a = 2 \cdot a$" und aus `1.1` folgt: $2 \cdot a < a + b$.

`2.2`: Aus "$b + b = 2 \cdot b$" und aus `1.2` folgt: $b + a < 2 \cdot b$.

`3.1`: Aus VS $a \in \mathbb{R}$ folgt: $\frac{1}{2} \cdot (2 \cdot a) = a$.

`3.2`: Aus "$b + a = a + b$" und aus `2.2` folgt: $a + b < 2 \cdot b$.

`3.3`: Aus `2.1` und aus "$0 < \frac{1}{2}$" folgt via **Satz - $<$ und Arithmetik**: $\frac{1}{2} \cdot (2 \cdot a) < \frac{1}{2} \cdot (a + b)$.

`4.1`: Aus `3.2` und aus "$0 < \frac{1}{2}$" folgt via **Satz - $<$ und Arithmetik**: $\frac{1}{2} \cdot (a + b) < \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot b)$.

`4.2`: Aus VS $b \in \mathbb{R}$ folgt: $\frac{1}{2} \cdot (2 \cdot b) = b$.

`4.3`: Aus `3.1` und aus `3.3` folgt: $a < \frac{1}{2} \cdot (a + b)$.

`5.1`: Aus `4.3` folgt: $a < \dfrac{a+b}{2}$.

`5.2`: Aus `4.1` und aus `4.2` folgt: $\frac{1}{2} \cdot (a + b) < b$.

`6`: Aus `5.2` folgt: $\dfrac{a+b}{2} < b$.

$\square$

10.2 $\neg(y$ Maximum von $\mathbb{R})$

Die Aussage "$\neg(y$ Maximum von $\mathbb{R})$" wird INDIREKT bewiesen.

Satz - supmax$\mathbb{R}$

a) $+\infty$ Supremum von $\mathbb{R}$.

b) y Maximum von $\mathbb{R}$ $\quad\Rightarrow\quad$ $y = +\infty$.

c) $\neg(y$ Maximum von $\mathbb{R})$.

Beweis a)

1: Via **Satz - Intervalle** gilt: $\mathbb{R} = \,]-\infty|+\infty[$.

2: Aus **Satz - $<$**"$-\infty < +\infty$" und aus 1 folgt via **Satz - sup inf - Intervalle**:
$+\infty$ Supremum von $]-\infty|+\infty[$.

3: Aus 2 und aus 1 folgt: $+\infty$ Supremum von $\mathbb{R}$.

Beweis b) VS y Maximum von $\mathbb{R}$.

1: Aus VS folgt via **Satz - MaxMin**: y Supremum von $\mathbb{R}$.

2: Via des bereits bewiesenen a) gilt: $+\infty$ Supremum von $\mathbb{R}$.

3: Aus 1 und aus 2 folgt via **Satz - sup inf**: $y = +\infty$.

<u>Beweis</u> `c)` INDIREKT.

`1:` Logisch äquivalent zum bereits bewiesenen `b)` ist:
$$(\neg(y \text{ Maximum von } \mathbb{R})) \vee (y = +\infty).$$

`2:` Per definitionem gilt: $(y \text{ Maximum von } \mathbb{R}) \Rightarrow (y \in \mathbb{R}).$

`3:` Logisch äquivalent zu `2` ist: $(\neg(y \text{ Maximum von } \mathbb{R})) \vee (y \in \mathbb{R}).$

`4:` Aus `3` und aus `1` folgt: $(\neg(y \text{ Maximum von } \mathbb{R}) \vee (y \in \mathbb{R} \wedge y = +\infty).$

`5:` Via **Satz -** $\mathbb{S}$ gilt: $y \in \mathbb{R} \Rightarrow y \neq +\infty.$

`6:` Logisch äquivalent zu `5` ist: $(\neg(y \in \mathbb{R})) \vee (y \neq +\infty).$

`7:` Logisch äquivalent zu `6` ist: $(\neg(y \in \mathbb{R})) \vee (\neg(y = +\infty)).$

`8:` Logisch äquivalent zu `7` ist: $\neg(y \in \mathbb{R} \wedge y = +\infty).$

`9:` Aus `4` und aus `8` folgt: $\neg(y \text{ Maximum von } \mathbb{R}).$

$\square$

10.3 $\neg(x$ Minimum von $\mathbb{R})$

Die Aussage "$\neg(x$ Minimum von $\mathbb{R})$" wird INDIREKT bewiesen.

Satz - infmin$\mathbb{R}$

a) $-\infty$ Infimum von $\mathbb{R}$.

b) x Minimum von $\mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad x = -\infty$.

c) $\neg(x$ Minimum von $\mathbb{R})$.

Beweis a)

1: Via **Satz - Intervalle** gilt: $\mathbb{R} =]-\infty|+\infty[$.

2: Aus **Satz - <**"$-\infty < +\infty$" und aus 1 folgt via **Satz - sup inf - Intervalle**: $-\infty$ Infimum von $]-\infty|+\infty[$.

3: Aus 2 und aus 1 folgt: $-\infty$ Infmum von $\mathbb{R}$.

Beweis b) VS x Minimum von $\mathbb{R}$.

1: Aus VS folgt via **Satz - MaxMin**: x Infimum von $\mathbb{R}$.

2: Via des bereits bewiesenen a) gilt: $-\infty$ Infimum von $\mathbb{R}$.

3: Aus 1 und aus 2 folgt via **Satz - sup inf**: $x = -\infty$.

Beweis c) INDIREKT.

1: Logisch äquivalent zum bereits bewiesenen b) ist: $(\neg(x$ Minimum von $\mathbb{R})) \vee (x = -\infty)$.

2: Per definitionem gilt: $(x$ Minimum von $\mathbb{R}) \Rightarrow (x \in \mathbb{R})$.

3: Logisch äquivalent zu 2 ist: $(\neg(x$ Minimum von $\mathbb{R})) \vee (x \in \mathbb{R})$.

4: Aus 3 und aus 1 folgt: $(\neg(x$ Minimum von $\mathbb{R}) \vee (x \in \mathbb{R} \wedge x = -\infty)$.

5: Via **Satz - $\mathbb{S}$** gilt: $x \in \mathbb{R} \Rightarrow x \neq -\infty$.

6: Logisch äquivalent zu 5 ist: $\neg(x \in \mathbb{R} \wedge x = -\infty)$.

7: Aus 4 und aus 6 folgt: $\neg(x$ Minimum von $\mathbb{R})$.

$\square$

10.4 $+\infty$ Maximum von $\mathbb{S}$

Satz - supmax$\mathbb{S}$

a) $+\infty$ Supremum von $\mathbb{S}$.

b) $+\infty$ Maximum von $\mathbb{S}$.

Beweis a)

1: Via **Satz - Intervalle** gilt: $\mathbb{S} = [-\infty|+\infty]$.

2: Aus **Satz - $\leq$"$-\infty \leq +\infty$"** und aus 1
folgt via **Satz - sup inf - Intervalle**: $+\infty$ Supremum von $[-\infty|+\infty]$.

3: Aus 2 und aus 1 folgt: $+\infty$ Supremum von $\mathbb{S}$.

Beweis b)

1: Via des bereits bewiesenen a) gilt: $+\infty$ Supremum von $\mathbb{S}$.

2: Aus 1 und aus **Satz - $\mathbb{S}$"$+\infty \in \mathbb{S}$"**
folgt via **Satz - MaxMin**: $+\infty$ Maximum von $\mathbb{S}$.

$\square$

10.5 $-\infty$ Minimum von $\mathbb{S}$

<u>**Satz - infmin$\mathbb{S}$**</u>

a) $-\infty$ Infimum von $\mathbb{S}$.

b) $-\infty$ Minimum von $\mathbb{S}$.

<u>Beweis</u> a)

1: Via **Satz - Intervalle** gilt: $\mathbb{S} = [\,-\infty|+\infty\,]$.

2: Aus **Satz - $\leq$“$-\infty \leq +\infty$”** und aus 1
folgt via **Satz - sup inf - Intervalle**: $-\infty$ Infimum von $[\,-\infty|+\infty\,]$.

3: Aus 2 und aus 1 folgt: $-\infty$ Infimum von $\mathbb{S}$.

<u>Beweis</u> b)

1: Via des bereits bewiesenen a) gilt: $-\infty$ Infimum von $\mathbb{S}$.

2: Aus 1 und aus **Satz - $\mathbb{S}$“$-\infty \in \mathbb{S}$”**
folgt via **Satz - MaxMin**: $-\infty$ Minimum von $\mathbb{S}$.

$\square$

10.6 $\binom{x}{k} = 0$ - A priori

Satz - binom - 2 `a)`

$$x \in \mathbb{R} \wedge k \in \mathbb{N} \wedge \binom{x}{k} = 0 \quad \Rightarrow \quad x \in \mathbb{N} \wedge x < k.$$

Beweis VS $x \in \mathbb{R} \wedge k \in \mathbb{N} \wedge \binom{x}{k} = 0$.

`1.1:` Es gilt: $\exists E : E = \{\omega : \omega \in \mathbb{N} \wedge \binom{x}{\omega} = 0\}$.

`1.2:` Aus VS $k \in \mathbb{N}$ folgt: k Menge.

`2.1:` Per definitionem E gilt offenbar: $E \subseteq \mathbb{N}$.

`2.2:` Aus `1.2`, aus VS $k \in \mathbb{N}$ und aus VS $\binom{x}{k} = 0$ folgt per definitionem E: $k \in E$.

`3:` Aus `2.2` folgt: $E \neq 0$.

`4:` Aus `2.1` und aus `3` folgt via **Satz -** max min: $E \in$ **`hmin`**.

`5:` Aus `4` folgt per definitionem "min" : $\min(E)$ Minimum von E.

`6:` Aus `5` per definitionem "Minimum" : $\min(E) \in E$.

`7:` Aus `6` folgt per definitionem E: $\min(E) \in \mathbb{N} \wedge \binom{x}{\min(E)} = 0$.

`Thema8`	$\min(E) = 0$.
Aus `Thema8` und aus `7` folgt:	$\binom{x}{0} = 0$.

Ergo `Thema8`: `A1` | "$\min(E) = 0 \Rightarrow \binom{x}{0} = 0$"

`9:` `A1` ist logisch äquivalent zu: $(\neg(\min(E) = 0)) \vee \binom{x}{0} = 0$.

`10:` Via Kapitel "**Binomialkoeffizient**" gilt: $\binom{x}{0} = 1$.

`11:` Aus `10` und aus "$1 \neq 0$" folgt: $\neg(\binom{x}{0} = 0)$.

`12:` Aus `9` und aus `11` folgt: $\neg(\min(E) = 0)$.

`13:` Aus `7`"$\min(E) \in \mathbb{N}$" und aus `12` folgt: $\exists n : n \in \mathbb{N} \wedge \min(E) = 1 + n$.

...

Thema14	$\binom{x}{n} = 0.$
15: Aus 13"$n \in \mathbb{N}$" folgt:	n Menge.
16: Aus 15, aus 13"$n \in \mathbb{N}$" und aus Thema14 folgt per definitionem E:	$n \in E.$
17: Aus 5 und aus 16 folgt via Definition "Minimum" :	$\min(E) \leq n.$
18: Aus 13"$n \in \mathbb{N}$" folgt:	$n < 1 + n.$
19: Aus 17 und aus 18 folgt:	$\min(E) < 1 + n.$
20: Aus 19 folgt:	$\min(E) \neq 1 + n.$

Ergo Thema14: A2 | "$\binom{x}{n} = 0 \Rightarrow \min(E) \neq 1 + n$"

15: Aus A2 und aus 13"$\min(E) = 1 + n$" folgt: $\neg(\binom{x}{n} = 0).$

16: Aus VS $x \in \mathbb{R}$ und aus 13"$n \in \mathbb{N}$"
folgt via Kapitel "**Binomialkoeffizient**" : $\binom{x}{1+n} = \binom{x}{n} \cdot \frac{x-n}{1+k}.$

17: Aus 16 und aus 13"$\min(E) = 1 + n$" folgt: $\binom{x}{\min(E)} = \binom{x}{n} \cdot \frac{x-n}{1+k}.$

18: Aus 17 und aus 7"$\binom{x}{\min(E)} = 0$" folgt: $0 = \binom{x}{n} \cdot \frac{x-n}{1+k}.$

19: Aus 18 und aus 15 folgt: $\frac{x-n}{1+k} = 0.$

20: Aus 19, aus VS $x \in \mathbb{R}$, aus 13"$n \in \mathbb{N}$" und aus VS $k \in \mathbb{N}$
folgt: $x - n = 0.$

21: Aus 20 folgt: $x = n.$

22: Aus 21 und aus 13"$n \in \mathbb{N}$" folgt: $x \in \mathbb{N}.$

23: Aus 5 und aus 2.2
folgt per definitionem "Minimum" : $\min(E) \leq k.$

24: Aus 13"$\min(E) = 1 + n$" und aus 23 folgt: $1 + n \leq k.$

25: Aus 13"$n \in \mathbb{N}$" folgt: $n < 1 + n.$

26: Aus 25 und aus 24 folgt: $n < k.$

27: Aus 21 und aus 26 folgt: $x < k.$

□