Vorkurs Mathematik
11 Beispiele der Kombinatorik

Andreas Unterreiter

5. August 2020

Inhaltsverzeichnis

1 k stelliger Code mit n Zeichen, allgemein

Wieviele 4stelligen PINs gibt es?

Idee:

Erste Stelle: 10 Möglichkeiten $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.
Zweite Stelle: 10 Möglichkeiten $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.
Dritte Stelle: 10 Möglichkeite $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.
Vierte Stelle: 10 Möglichkeiten $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.

Jede vierstellige Auswahl ergibt eine 4stellige PIN.
Unterschiedliche Auswahlen ergeben unterschiedliche PINs.
Jede 4stellige PIN wird so erfasst.

Insgesamt

$$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4 = 10\,000$$

PINs.

⋆

Wieviele kleinbuchstabige “Wörter” mit 5 Buchstaben - ohne Umlaute, ohne “ß” - gibt es?

Idee:

An jeder der 5 Positionen kann einer der 26 Kleinbuchstaben

a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m,n,o,p,q,r,s,t,u,v,w,x,y,z

platziert werden.

Jede fünfstellige Auswahl liefert ein “Wort” entsprechend der Vorgaben.
Unterschiedliche Auswahlen liefern unterschiedliche Wörter.
Jedes “Wort” entsprechend der Vorgaben wird so erfasst.

Dies sind insgesamt

$$26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 26 = 26^5 = 11\,881\,376$$

“Wörter” entsprechend der Vorgaben.

⋆

Allgemein

Die Anzahl der $k$stelligen Codes, die mit n Zeichen gebildet werden können, ist gleich n^k.

$\star$

$\boxed{\text{Funktionsmodell}}$

Für $k \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}$ und

$$F = \{f : \{1, \dots, k\} \to \{1, \dots, n\}\}$$

gilt

$$\#(F) = n^k.$$

Es gibt für $k \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}$ also n^k Funktionen mit $\mathsf{dom}\, f = \{1, \dots, k\}$ und $\mathsf{ran}\, f \subseteq \{1, \dots, n\}$.

$\star$

Allgemeiner: Sind D, B endlich und ist

$$F = \{f : D \to B\},$$

so gilt $\#(F) = (\#(B))^{\#(D)}$.

$\star$

Ähnlich, doch anders: $\boxed{\text{Wieviel 6stellige Zahlen gibt es?}}$

Idee:

Erste Stelle: Da 6stellige Zahlen nicht mit einer 0 beginnen:
9 Möglichkeiten $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.
Zweite Stelle: 10 Möglichkeiten $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.
Dritte Stelle: 10 Möglichkeiten $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.
Vierte Stelle: 10 Möglichkeiten $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.
Fünfte Stelle: 10 Möglichkeiten $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.
Sechste Stelle: 10 Möglichkeiten $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.

Jede sechsstellige Auswahl liefert eine 6stellige Zahl.
Unterschiedliche Auswahlen liefern unterschiedliche Zahlen.
Jede 6stellige Zahl wird so erfasst.

Somit gibt es insgesamt

$$9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9 \cdot 10^5 = 900\,000$$

6stellige Zahlen.

2 k von n Individuen gereiht

> 93 Personen besuchen eine Kinovorstellung. In der ersten Reihe sind 6 nummerierte Sitzplätze. Auf wieviele Arten können diese Sitzplätze komplett mit 6 der 93 Besucher besetzt werden?

Idee:

Sitzplatz 1: 93 Möglichkeiten.
Sitzplatz 2: Alle Personen, ausser der Person auf Sitzplatz 1: 92 Möglichkeiten.
Sitzplatz 3: Alle Personen, ausser der Personen auf den Sitzplätzen 1 oder 2:
91 Möglichkeiten.
Sitzplatz 4: Alle Personen, ausser der Personen auf den Sitzplätzen 1 bis 3:
90 Möglichkeiten.
Sitzplatz 5: Alle Personen, ausser der Personen auf den Sitzplätzen 1 bis 4:
89 Möglichkeiten.
Sitzplatz 6: Alle Personen, ausser der Personen auf den Sitzplätzen 1 bis 5:
88 Möglichkeiten.

Jede sechsstellige Auswahl ergibt eine mögliche Reihung.
Unterschiedliche Auswahlen ergeben unterschiedliche Reihungen.
Jede mögliche Reihung wird auf diese Weise erhalten.

Somit gibt es insgesamt

$$93 \cdot 92 \cdot 91 \cdot 90 \cdot 89 \cdot 88 = 548\,816\,748\,480,$$

Möglichkeiten, die Sitzplätze der ersten Reihe zu besetzen.

⋆

An einem Wettlauf nehmen 23 Läufer teil. Alle kommen mit unterschiedlichen Laufzeiten ins Ziel. In der Siegerliste werden die schnellsten 6 Läufer eingetragen. Wieiviele Siegerlisten sind möglich?

Idee:

Platz 1: 23 Möglichkeiten.
Platz 2: Alle Läufer ausser dem Läufer auf Platz 1. Also 22 Möglichkeiten.
Platz 3: Alle Läufer ausser den Läufern auf Platz 1 oder Platz 2.
Also 21 Möglichkeiten.
Platz 4: Alle Läufer ausser den Läufern auf den Plätzen 1 bis 3.
Also 20 Möglichkeiten.
Platz 5: Alle Läufer ausser den Läufern auf den Plätzen 1 bis 4.
Also 19 Möglichkeiten.
Platz 6: Alle Läufer ausser den Läufern auf den Plätzen 1 bis 5.
Also 17 Möglichkeiten.

Jede sechsstellige Auswahl ergibt eine mögliche Siegerliste.
Unterschiedliche Auswahlen ergeben unterschiedliche Siegerlisten.
Jede mögliche Siegerliste wird auf diese Weise erhalten.

Es gibt also insgesamt

$$23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 = 11\ 881\ 376,$$

mögliche Siegerlisten.

$\star$

Allgemein

Die Anzahl der $k$stelligen Listen, die mit n Individuen gebildet werden können, ist für $k \leq n$ gleich $n \cdot (-1+n) \cdot (-2+n) \cdot \ldots \cdot (1-k+n) = k! \cdot \binom{n}{k}$.

Spezialfall $k = n$:

Die Anzahl der $n$stelligen Listen, die mit n Individuen gebildet werden können, ist gleich $n \cdot (-1+n) \cdot (-2+n) \cdot \ldots \cdot 1 = n! \cdot \binom{n}{n} = n!$.

Spezialfall $k < n$:

Die Anzahl der $k$stelligen Listen, die mit n Individuen gebildet werden können, ist für $n < k$ gleich $0 = k! \cdot \binom{n}{k}$.

$\star$

Funktionsmodell

Für $k \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}$ und

$$\{f : \{1, \ldots, k\} \to \{1, \ldots, n\} : f \text{ injektiv}\},$$

gilt

$$\#(F) = k! \cdot \binom{n}{k}.$$

$\star$

Allgemeiner: Sind D, B endlich und ist

$$F = \{f : D \to B : f \text{ injektiv}\},$$

so gilt $\#(F) = (\#(D))! \cdot \binom{\#(B)}{\#(D)}$.

3 k-elementige Teilmenge n-elementiger Menge

Wieviele 3-elementige Teilmengen der 5-elementigen Menge $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ gibt es?

Idee:

Zunächst werden alle 3-stelligen Listen mit den Elementen von $\{1,2,3,4,5\}$ gebildet. Bekannter Maßen sind dies $5\cdot 4\cdot 3 = 60 = 3!\cdot\binom{5}{3}$ Listen.

123	124	125	132	134	135	142	143	145	152	153	154
213	214	215	231	234	235	241	243	245	251	253	254
312	314	315	321	324	325	341	342	345	351	352	354
412	413	415	421	423	425	431	432	435	451	452	453
512	513	514	521	523	524	531	532	534	541	542	543

Dann werden die Liste auf eine noch unbekannte Anzahl x von Gruppen aufgeteilt, so dass in jeder Gruppe genau jene Listen zusammengefasst sind, die aus gleichen Ziffern a,b,c bestehen. Besteht eine Gruppe aus Listen der Ziffern a,b,c, so stellt diese Gruppe die 3-elementige Menge $\{a,b,c\}$ dar. Es ergeben sich die als Zeilen angeschriebenen Gruppen.

						Menge
123	132	213	231	312	321	$\{1,2,3\}$
124	142	214	241	412	421	$\{1,2,4\}$
125	152	215	251	512	521	$\{1,2,5\}$
134	143	314	341	413	431	$\{1,3,4\}$
135	153	315	351	513	531	$\{1,3,5\}$
145	154	415	451	514	541	$\{1,4,5\}$
234	243	324	342	423	432	$\{2,3,4\}$
235	253	325	352	523	532	$\{2,3,5\}$
245	254	425	452	524	542	$\{2,4,5\}$
345	354	435	453	534	543	$\{3,4,5\}$

Es fällt auf, dass in jede der x Gruppen die gleiche Anzahl von Listen enthält. In der Tat sind dies genau jene Listen, die aus *einer Liste* durch Vertauschung der Reihenfolge der 3 beteiligten Zahlen entstehen. Dies sind bekannter Maßen 3! Listen. Es folgt die Gleichung

$$3!\cdot x = 3!\cdot\binom{5}{3},$$

so dass

$$x = \binom{5}{3} = \frac{5\cdot 4\cdot 3}{3\cdot 2\cdot 1} = \frac{60}{6} = 10.$$

x ist auch gleich der Anzahl der Zeilen obiger Tabelle.

Jede der hier angegegebenen Gruppen entspricht einer 3-elementigen Teilmenge von $\{1,2,3,4,5\}$.
Verschiedene Gruppen entsprechen verschiedenen Teilmengen von $\{1,2,3,4,5\}$.
Jede 3-elementige Teilmenge von $\{1,2,3,4,5\}$ ist durch eine der angegebenen Gruppen erfasst.

Somit gibt es insgesamt

$$x = 10 = \binom{5}{3}$$

3-elementige Teilmengen von $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

$\star$

Allgemein

Die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge ist gleich $\binom{n}{k}$.

Spezialfall $n < k$:

Die Anzahl der k-elementigen Teilmenge einer n-elementigen Menge ist für $n < k$ gleich $0 = \binom{n}{k}$.

$\star$

Funktionsmodell

Für $k \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}$ und

$$F = \{f : \{1, \ldots, k\} \to \{1, \ldots, n\} : f \text{ streng wachsend}\}$$

gilt

$$\#(F) = \binom{n}{k}.$$

Auch gilt: Falls $k \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}$ und

$$\mathfrak{F} = \{f : \{1, \ldots, k\} \to \{1, \ldots, n\} : f \text{ streng fallend}\}$$

so folgt

$$\#(\mathfrak{F}) = \binom{n}{k}.$$

$\star$

Allgemeiner: Falls D, B endliche Teilmengen von $\mathbb{R}$ und falls

$$F = \{f : D \to B : f \text{ streng wachsend}\},$$

so folgt

$$\#(F) = \binom{\#(B)}{\#(D)}.$$

Ähnlich gilt: Falls D, B endliche Teilmengen von $\mathbb{R}$ und falls

$$\mathfrak{F} = \{f : D \to B : f \text{ streng fallend}\},$$

so folgt

$$\#(\mathfrak{F}) = \binom{\#(B)}{\#(D)}.$$

⋆

Zusammenhang 3-elementige Teilmengen von $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ und Funktionsmodell

Ist $\{a, b, c\}$ eine 3-elementige Teilmenge von $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, so sind die drei Zahlen a, b, c *unterschiedlich* und können in von links nach rechts in streng wachsender Weise angeordnet werden. Dies ergibt etwa die Reihung c, a, b, der die streng wachsende Funktion $f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $f(1) = c$, $f(2) = a$, $f(3) = b$ entspricht.

Auf diese Weise wird jeder 3-elementigen Teilmenge von $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ eine streng wachsende Funktion $f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$ zugeordnet.
Unterschiedlichen 3-elementigen Teilmengen von $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ werden auf diese Weies unterschiedliche streng wachsende Funktionen $f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$ zugeordnet.
Umgekehrt gilt: Ist $f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$ eine streng wachsende Funktion, so ist $\{f(1), f(2), f(3)\}$ eine 3-elementige Teilmenge von $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Somit ist die Anzahl der 3-elementigen Teilmengen von $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ gleich der Anzahl der streng wachsenden Funktionen $f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

⋆

Zusammenhang Lottoziehung 6 aus 49 mit 6-elementigen Teilmengen von $\{1, \ldots, 49\}$ und dem Funktionsmodell

Bei der Lottoziehung 6 aus 49 werden 6 Kugeln aus einem Ensemble von 49 Kugeln gezogen. Die Kugeln sind von 1 bis 49 durchnummeriert. Identifiziert man die Kugeln mit den Nummern wird bei jeder Ziehung eine 6-elementige Teilmenge von $\{1, \ldots, 49\}$ bestimmt. Dies ist auf

$$\binom{49}{6} = 13\,983\,816$$

verschiedene Arten möglich.

Die 6 gezogenen Nummern werden in streng wachsender Weise - etwa $\boxed{A}$ $\boxed{B}$ $\boxed{C}$ $\boxed{D}$ $\boxed{E}$ $\boxed{F}$ - veröffentlicht. Diese Liste kann mit der korrespondierenden streng wachsenden Funktion

$$f : \{1, \ldots, 6\} \to \{1, \ldots, 49\},$$

$f(1) = A$, $f(2) = B$, $f(3) = C$, $f(4) = D$, $f(5) = E$, $f(6) = F$ identifiziert werden. Offensichtlich kann auf diese Weise *jede Ziehung*q mit einer streng wachsenden Funktion identifiziert werden, unterschiedliche Ziehungen ergeben unterschiedliche streng wachsende Funktionen und ist $f : \{1, \ldots, 6\} \to \{1, \ldots, 49\}$ streng wachsend, so ist $\boxed{f(1)}\ \boxed{f(2)}\ \boxed{f(3)}\ \boxed{f(4)}\ \boxed{f(5)}\ \boxed{f(6)}$ eine mögliche Ziehung.

Konsequenter Weise ist die Anzahl der möglichen Ziehungen 6 aus 49 gleich der Anzahl der streng wachsenden Funktionen $f : \{1, \ldots, 6\} \to \{1, \ldots, 49\}$.

4 Anzahl Teilmengen n-elementiger Menge

$\boxed{\text{Wieviele Teilmengen hat eine } n\text{-elementige Menge?}}$

Idee:

Jede Teilmenge einer n-elementigen Menge A hat k Elemente,
wobei $k \in \{0, \ldots, n\}$. Für jedes dieser k gilt: Die Anzahl der k-elementigen Teilmengen der n-elementigen Menge ist gleich $\binom{n}{k}$.

Im Detail gilt also:

Anzahl 0-elementiger Teilmengen von A gleich $\binom{n}{0}$.

Anzahl 1-elementiger Teilmengen von A gleich $\binom{n}{1}$.

Anzahl 2-elementiger Teilmengen von A gleich $\binom{n}{2}$.

$\vdots$

Anzahl n-elementiger Teilmengen von A gleich $\binom{n}{n}$.

Dies sind insgesamt

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k},$$

Teilmengen von A.

Umgekehrt gilt: Falls $k \in \{0, \ldots, n\}$, so hat A

$$\binom{n}{k},$$

k-elementige Teilmengen.

Konsequenz:

Jede n-elementige Menge, $n \in \mathbb{N}$, hat $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ Teilmengen.

Damit ist die eingangs gestellte Frage im Prinzip beantwortet. Will man die Anzahl für einige kleine n auf diese Weise berechnen, so stellt man eine Gesetzmäßigkeit fest:

$n = 0$: $\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} = \binom{0}{0} = 1 = 2^0$.

$n = 1$: $\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} = \binom{1}{0} + \binom{1}{1} = 1 + 1 = 2 = 2^1$.

$n = 2$: $\sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} = \binom{2}{0} + \binom{2}{1} + \binom{2}{2} = 1 + 2 + 1 = 4 = 2^2$.

$n = 3$: $\sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} = \binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3} = 1 + 3 + 3 + 1 = 8 = 2^3$.

$n = 4$: $\sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} = \binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 1+4+6+4+1 = 16 = 2^4$.

$n = 5$: $\sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} = \binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5}$

$= 1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32 = 2^5$.

In der Tat gilt

Satz - TMS

$$n \in \mathbb{N} \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Beweis VS $n \in \mathbb{N}$.

1: Aus "$1 \in \mathbb{R}$" und "$1 \in \mathbb{R}$" und aus VS folgt mit der binomischen Formel: $(1+1)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \cdot 1^j \cdot 1^{n-j}$.

2: Aus VS folgt: $j \in \{0, \ldots, n\} \Rightarrow \binom{n}{j} \cdot 1^j \cdot 1^{n-j} = \binom{n}{j}$.

`3`: Aus `1` und aus `2` folgt:
$$(1+1)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}.$$

`4`: Aus `3` folgt:
$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} = 2^n.$$

$\square$

5 $4-4-2$

Ein Fußballkader bestehe aus 23 Spielern: 3 Torhüter, 8 Verteidiger, 8 Mittelfeldspieler, 4 Stürmer. Es soll in einem 4-4-2 System gespielt werden. Wieviele Mannschaftsaufstellungen sind unter bloßer Berücksichtigung der vier erwähnten Positionen möglich?

Idee:

1 Torhüter soll aus 3 Torhütern ausgewählt werden: $\binom{3}{1}$ Möglichkeiten.
4 Verteidiger sollen aus 8 Verteidigern ausgewählt werden: $\binom{8}{4}$ Möglichkeiten.
4 Mittelfeldspieler sollen aus 8 Mittelfeldspielern ausgewählt werden: $\binom{8}{4}$ Möglichkeiten.
2 Stürmer sollen aus 4 Stürmern ausgewählt werden: $\binom{4}{2}$ Möglichkeiten.

Jeder dieser 4-stelligen Auswahlen entspricht einer 4-4-2 Aufstellung.
Unterschiedliche 4-stellige Auswahlen ergeben unterschiedliche 4-4-2 Aufstelllungen.
Jede 4-4-2 Aufstellung wird durch eine derartige 4-stellige Auswahl erhalten.

Somit gibt es

$$\begin{aligned}\binom{3}{1}\cdot\binom{8}{4}\cdot\binom{8}{4}\cdot\binom{4}{2} &= 3\cdot\left(\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\right)^2\cdot\frac{4\cdot 3}{2\cdot 1}\\ &= 3\cdot(7\cdot 2\cdot 5)^2\cdot 2\cdot 3 = 18\cdot 70^2 = 88\,200\end{aligned}$$

Möglichkeiten.

6 k stelliger Code mit n Zeichen, Anzahl / Zeichen fixiert

Wieviele 9-stelligen Zahlen gibt es, die aus genau 4 Vieren, 3 Dreien und 2 Zweien bestehen?

Idee

Die 4 Vieren belegen genau 4 der 9 Stellen. Um diese 4 Stellen auszuwählen, gibt es $\binom{9}{4}$ Möglichkeiten.
Unter den verbleibenden 5 Stellen belegen die 3 Dreien genau 3 Stellen. Es gibt $\binom{5}{3}$ Möglichkeiten, diese 3 Stellen auszuwählen.
Es verbleiben 2 Stellen. Diese werden mit den Zweien besetzt. Um diese zwei Stellen auszuwählen gibt es - natürlich - $\binom{2}{2} = 1$ Möglichkeiten.

Jeder dieser sukzessiven Auswahlen führt auf eine 9-stelligen Zahl gemäß der Vorgaben.
Unterschiedliche sukzessive Auswahlen ergeben unterschiedliche 9-stellige Zahlen.
Jede 9-stellige Zahl, die den Vorgaben genügt, kann durch dieses sukzessive Auswahlverfahren generiert werden.

Somit gibt es

$$\binom{9}{4} \cdot \binom{5}{3} \cdot \binom{2}{2},$$

9-stellige Zahlen, die aus 4 Vieren, 3 Dreien und 2 Zweien bestehen. Bei der Berechnung fällt

$$\binom{9}{4} \cdot \binom{5}{3} \cdot \binom{2}{2} = \frac{9!}{4! \cdot 5!} \cdot \frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot \frac{2!}{2! \cdot 0!} = \frac{9!}{4!} \cdot \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{2! \cdot 1} = \frac{9!}{4! \cdot 3! \cdot 2!}$$

auf. Es folgt

$$\begin{aligned}\binom{9}{4} \cdot \binom{5}{3} \cdot \binom{2}{2} &= \frac{9!}{4! \cdot 3! \cdot 2!} \\ &= \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 5}{2 \cdot 1} \\ &= 9 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 5 = 63 \cdot 20 = 1260.\end{aligned}$$

Also gibt es 1260 9-stellige Zahlen, die aus 4 Vieren, 3 Dreien und 2 Zweien bestehen.

⋆

Allgemein

Gilt $k \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}$ und $x(1), \ldots, x(n) \in \mathbb{N}$ mit

$$x(1) + \ldots + x(n) = k,$$

so ist die Anzahl der $k$stelligen Codes, die mit (höchstens) n Zeichen $a(1), \ldots, a(n)$ unter der Vorgabe, dass für jedes $j \in \{1, \ldots, n\}$ Zeichen $a(j)$ genau $x(j)$-mal vorkommt, gebildet werden können, gleich

$$\binom{k}{x(1)} \cdot \binom{k - x(1)}{x(2)} \cdot \binom{k - x(1) - x(2)}{x(3)} \cdot \ldots \cdot \binom{k - x(1) - x(2) - \ldots - x(-1+n)}{x(n)} = \frac{k!}{x(1)! \cdot x(2)! \cdot \ldots \cdot x(n)!}.$$

Hier können einige der $x(j)$‘s gleich 0 sein. Die hierzu korrespondierenden Zeichen kommen im Code *nicht* vor.

$\star$

Funktionsmodell

Gilt $k \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}$ und $x(1), \ldots, x(n) \in \mathbb{N}$ und

$$x(1) + \ldots + x(n) = k,$$

und

$$F = \left\{ f : \{1, \ldots, k\} \to \{1, \ldots, n\} : j \in \{1, \ldots, n\} \Rightarrow \#(f^{-1}[\{j\}]) = x(j) \right\},$$

dann folgt

$$\#(F) = \binom{k}{x(1)} \cdot \binom{k - x(1)}{x(2)} \cdot \binom{k - x(1) - x(2)}{x(3)} \cdot \ldots \cdot \binom{k - x(1) - x(2) - \ldots - x(-1+n)}{x(n)} = \frac{k!}{x(1)! \cdot x(2)! \cdot \ldots \cdot x(n)!},$$

so dass es

$$\frac{k!}{x(1)! \cdot x(2)! \cdot \ldots \cdot x(n)!},$$

Funktionen $f : \{1, \ldots, k\} \to \{1, \ldots, n\}$ gibt, die $x(1)$-mal den Wert 1, $x(2)$-mal den Wert 2,$\ldots$ $x(n)$-mal den Wert n annehmen.

$\star$

Allgemeiner:

Sind D, B endlich, gilt $k = \#(D)$ und $n = \#(B)$ und sind $x(1), \ldots, x(n) \in \mathbb{N}$ mit

$$x(1) + \ldots + x(n) = k,$$

und gilt

$$b : \{1, \ldots, n\} \to B \quad \text{bijektiv}, ,$$

und ist

$$F = \left\{ f : D \to B : j \in \{1, \ldots, n\} \Rightarrow \#(f^{-1}[\{b(j)\}]) = x(j) \right\},$$

so folgt

$$\begin{aligned}
\#(F) = \binom{k}{x(1)} \cdot \binom{k - x(1)}{x(2)} \cdot \binom{k - x(1) - x(2)}{x(3)} \\
\cdot \ldots \cdot \binom{k - x(1) - x(2) - \ldots - x(-1+n)}{x(n)} \\
= \frac{k!}{x(1)! \cdot x(2)! \cdot \ldots \cdot x(n)!},
\end{aligned}$$

so dass es

$$\frac{k!}{x(1)! \cdot x(2)! \cdot \ldots \cdot x(n)!},$$

Funktionen $f : D \to B$ gibt, die $x(1)$-mal den Wert $b(1)$, $x(2)$-mal den Wert $b(2)$,..., $x(n)$-mal den Wert $b(n)$ annehmen.

7 k stelliger Code mit n Zeichen, Anzahl / Zeichen fixiert und konstant

Wieviele verschiedene 15-teilige Ketten kann man aus 5 roten, 5 blauen und 5 grünen Glaskugeln herstellen?

Idee

Jede Kette entspricht einem 15 stelligen Code mit 3 Zeichen, wobei jedes Zeichen genau 5-mal vorkommt. Entsprechend vorherigen Kapitels ist die Anzahl dieser Codes gleich

$$\frac{15!}{5! \cdot 5! \cdot 5!} = \frac{15!}{(5!)^3},$$

und somit gleich

$$\begin{aligned}
\frac{15!}{5!\cdot 5!\cdot 5!} &= \frac{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\\
&= \frac{3\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 2\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\\
&= \frac{3\cdot 14\cdot 13\cdot 3\cdot 11\cdot 2\cdot 9\cdot 2\cdot 7\cdot 6\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{3\cdot 2\cdot 1\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\\
&= \frac{14\cdot 13\cdot 11\cdot 2\cdot 9\cdot 2\cdot 7\cdot 6\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 1\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 1}\\
&= 14\cdot 13\cdot 11\cdot 9\cdot 7\cdot 6\cdot 1 = 756\,756.
\end{aligned}$$

Allgemein

Gilt $n \in \mathbb{N}$ und $p \in \mathbb{N}$, so ist die Anzahl der $n\cdot p$ stelligen Codes, die mit n Zeichen $a(1), \ldots, a(n)$ unter der Vorgabe, dass für jedes $j \in \{1, \ldots, n\}$ das Zeichen $a(j)$ genau p-mal vorkommt, gebildet werden können, gleich

$$\binom{n\cdot p}{p}\cdot\binom{(-1+n)\cdot p}{p)}\cdot\binom{(-2+n)\cdot p}{p}\cdot\ldots\cdot\binom{p}{p} = \frac{(n\cdot p)!}{p!\cdot p!\cdot\ldots\cdot p!} = \frac{(n\cdot p)!}{(p!)^n}.$$

$\star$

Funktionsmodell

Gilt $n \in \mathbb{N}$ und $p \in \mathbb{N}$ und

$$F = \left\{f : \{1, \ldots, n\cdot p\} \to \{1, \ldots, n\} : j \in \{1, \ldots, n\} \Rightarrow \#(f^{-1}[\{j\}]) = p\right\},$$

dann folgt

$$\#(F) = \binom{n\cdot p}{p}\cdot\binom{(-1+n)\cdot p}{p)}\cdot\binom{(-2+n)\cdot p}{p}\cdot\ldots\cdot\binom{p}{p} = \frac{(n\cdot p)!}{p!\cdot p!\cdot\ldots\cdot p!} = \frac{(n\cdot p)!}{(p!)^n},$$

so dass es

$$\frac{(n\cdot p)!}{p!\cdot p!\cdot\ldots\cdot p!} = \frac{(n\cdot p)!}{(p!)^n},$$

Funktionen $f : \{1, \ldots, k\} \to \{1, \ldots, n\}$ gibt, die jeden Wert von 1 bis n genau p mal annehmen.

$\star$

Allgemeiner:

Sind D, B endlich, gilt $n \cdot p = \#(D)$ und $n = \#(B)$ und gilt

$$b : \{1, \ldots, n\} \to B \quad \text{bijektiv}, ,$$

und ist

$$F = \left\{ f : D \to B : j \in \{1, \ldots, n\} \Rightarrow \#(f^{-1}[\{b(j)\}]) = p \right\},$$

so folgt

$$\#(F) = \binom{n \cdot p}{p} \cdot \binom{(-1+n) \cdot p}{p)} \cdot \binom{(-2+n) \cdot p}{p} \cdot \ldots \cdot \binom{p}{p}$$
$$= \frac{(n \cdot p)!}{p! \cdot p! \cdot \ldots \cdot p!} = \frac{(n \cdot p)!}{(p!)^n},$$

so dass es

$$\frac{(n \cdot p)!}{p! \cdot p! \cdot \ldots \cdot p!} = \frac{(n \cdot p)!}{(p!)^n},$$

Funktionen $f : D \to B$ gibt, die jeden der Funktionswerte $b(1)$ bis $b(n)$ genau p mal annehmen.

8 k-elementige Menge, n Ausprägungen eines Merkmals

Auf einem Obstteller sollen ohne Beachtung der Reihenfolge 9 Früchte angerichtet werden. Es stehen mindestens 9 Äpfel, 9 Birnen, 9 Aprikosen, 9 Pflaumen zur Verfügung. Wie viele verschiedene Zusammenstellungen sind möglich?

Die Fragestellung wird schrittweise bearbeitet. Zunächst wird ein Funktionsmodell entworfen. Dann wird die fragliche Anzahl im Funktionsmodell ohne Beweis präsentiert. Mit Hilfe der Aussage des Funktionsmodells wird die Frage beantwortet.

Idee:

Insgesamt stehen laut Angabe mindestens 36 Objekte - Früchte - zur Verfügung. Die Eigenschaft Obst zu sein ist das Merkmal, die Obstart - Apfel, Birne, Aprikose, Pflaume - ist die Ausprägung dieses Merkmals. Gemäß Aufgabenstellung soll eine 9-elementige Teilmenge der mindestens 36 Objekte gebildet werden. Jedoch geht es bei der Frage nach der Anzahl der Möglichkeiten nicht darum, in der 9-elementigen Teilmenge jede Frucht individuell zu betrachten - dann gäbe es $\binom{36+x}{9}$ Möglichkeiten, wobei $36 + x$ die unbekannte Anzahl aller Früchte ist und die Fragestellung wäre nicht eindeutig zu beanworten - sondern nur die Ausprägung des Merkmals zu berücksichtigen.

Zur Vereinfachung der Sprechweise mögen die Ausprägungen des Merkmals Obst zu sein nicht mehr als “ Apfel, Birne, Aprikose, Pflaume” bezeichnet werden, sondern mit den Zahlen “ $1, 2, 3, 4$” :

$$\begin{aligned} \text{Apfel} &\mapsto 1 \\ \text{Birne} &\mapsto 2 \\ \text{Aprikos} &\mapsto 3 \\ \text{Pflaume} &\mapsto 4 \end{aligned}$$

Wird der Obstteller durch schrittweise Hinzugabe einer Frucht zusammengestellt entsteht entsprechend der Reihenfolge der Zugabe der Früchte eine Funktion

$$f : \{1, \dots, 9\} \to \{1, \dots, 4\},$$

wobei für alle $j \in \{1, \dots, 9\}$ gilt: Im j-ten Schritt wird jene Frucht hinzugefügt, deren Ausprägung gleich $f(j)$ ist.

Wird etwa in dieser Reihenfolge

Apfel, Birne, Pflaume, Pflaume, Aprikose, Birne, Apfel, Apfel, Pflaume

hinzugegeben, so entspricht dies der Funktion

$$f : \{1, \dots, 9\} \to \{1, \dots, 4\},$$

$$f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = 4, f(4) = 4, \\ f(5) = 3, f(6) = 2, f(7) = 1, f(8) = 1, f(9) = 4.$$

Umgekehrt stellt etwa die Funktion

$$g : \{1, \dots, 9\} \to \{1, \dots, 4\}$$

$$g(1) = 1, g(2) = 4, g(3) = 4, g(4) = 3, g(5) = 2, g(6) = 2, \\ g(7) = 1, g(8) = 1, g(9) = 4,$$

die schrittweise Auswahl

Apfel, Pflaume, Pflaume, Aprikose, Birne, Birne, Apfel, Apfel, Pflaume, dar.

Sowohl f als auch g führen zum gleichen Obstteller, der aus 3 Pflaumen, 1 Aprikos, 2 Birnen und 3 Äpfeln besteht.

Damit kann zwar jeder Funktion mit Definitionsbereich= $\{1,\ldots,9\}$ und Bild-Bereich= $\{1,\ldots,4\}$ ein Obstteller zugeordnet werden, doch ergeben unterschiedliche derartige Funktionen nicht immer unterschiedliche Obstteller.

Im Sinne der Fragestellung anders formuliert: Es gibt mehr Funktionen von $\{1,\ldots,9\}$ in $\{1,\ldots,4\}$ - dies sind bekannter Maßen 9^4 - als es Obstteller gemäß der Vorgaben gibt.

Bei der Beschreibung der Obstteller, die durch f oder g hergestellt werden, ist nicht die Reihenfolge der Ablage der Früchte von Bedeutung, sondern lediglich deren Anzahl, im vorliegenden Fall

3 Pflaumen, 1 Aprikose, 2 Birnen, 3 Äpfel.

Ersetzt man hier die Ausprgüngen durch die korrespondierenden Zahlen, so ergibt sich

3 Vieren, 1 Drei, 2 Zweien, 3 Einsen,

oder, nebeneinander geschrieben,

$$4,4,4,3,2,2,1,1,1.$$

Von links nach rechts gelesen ist diese Sequenz mit der *fallenden* Funktion

$$m:\{1,\ldots,9\}\to\{1,\ldots,4\},$$

$$\begin{aligned}&m(1)=4,m(2)=4,m(3)=4,m(4)=3,\\&\qquad m(5)=2,m(6)=2,m(7)=1,m(8)=1,m(9)=1,\end{aligned}$$

identifizierbar.

Offenbar gibt es zu jeder Funktion von $\{1,\ldots,9\}$ in $\{1,\ldots,4\}$ genau eine fallende Funktion von $\{1,\ldots,9\}$ in $\{1,\ldots,4\}$, so dass beide Funktionen jeden Wert aus $\{1,\ldots,4\}$ gleich oft annehmen.

Auf diese Weise kann jedem Obstteller entsprechend der Vorgaben eine fallende Funktion von $\{1,\ldots,9\}$ in $\{1,\ldots,4\}$ zugeordnet werden.
Unterschiedlichen Obsttellern entsprechen unterschiedliche fallende Funktionen von $\{1,\ldots,9\}$ in $\{1,\ldots,4\}$.
Jeder fallenden Funktion von $\{1,\ldots,9\}$ in $\{1,\ldots,4\}$ wird auf die oben vorgestellte ein Obstteller zugeordnet.

Somit gilt:

Anzahl Obsteller
gleich Anzahl fallender Funktionen von $\{1,\ldots,9\}$ in $\{1,\ldots,4\}$.

$\star$

$\boxed{\text{Funktionsmodell}}$

Für $k \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}$ und

$$F = \{f : \{1,\ldots,k\} \to \{1,\ldots,n\} : f \text{ wachsend}\},$$

gilt

$$\#(F) = \binom{n+k-1}{k}.$$

Auch gilt: Falls $k \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}$ und

$$\mathfrak{F} = \{f : \{1,\ldots,k\} \to \{1,\ldots,n\} : f \text{ fallend}\},$$

so folgt

$$\#(\mathfrak{F}) = \binom{n+k-1}{k}.$$

$\star$

Allgemeiner: Falls D, B endliche Teilmengen von $\mathbb{R}$ und falls

$$F = \{f : D \to B : f \text{ wachsend}\},$$

so folgt

$$\#(F) = \binom{\#(B)+\#(D)-1}{\#(D)}.$$

Ähnlich gilt: Falls D, B endliche Teilmengen von $\mathbb{R}$ und falls

$$\mathfrak{F} = \{f : D \to B : f \text{ fallend}\},$$

so folgt

$$\#(\mathfrak{F}) = \binom{\#(B)+\#(D)-1}{\#(D)}.$$

$\star$

$\boxed{\text{Obstteller. Ende.}}$ Die Anzahl der Obstteller gemäß Vorgaben ist gleich der Anzahl der fallenden Funktionen von $\{1,\ldots,9\}$ in $\{1,\ldots,4\}$. Gemäß Funktionsmodell ist deren Anzahl gleich

$$\binom{4+9-1}{9} = \binom{12}{9} = \binom{12}{3} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 2 \cdot 11 \cdot 10 = 220.$$

9 k als gerichtete Summe n natürlicher Zahlen

Wieviele geordnete Quintupel $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ natürlicher Zahlen mit $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10$ gibt es?

Idee:

Rückführung auf eine wachsende Funktion $f : \{1, \ldots, k\} \to \{1, \ldots, n\}$ mit noch zu bestimmenden $k \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}$.

Die Zahl 10 ergibt sich durch zehnmaliges Addieren einer Eins. Jede dieser Additionen wird einer der fünf zur Verfügung stehenden Positionen zugeordnet. Dies ergibt eine Funktion

$$\phi : \{1, \ldots, 10\} \to \{1, \ldots, 5\},$$

etwa

$$\phi(1) = 1, \phi(2) = 1, \phi(3) = 5, \phi(4) = 3, \phi(5) = 3,$$
$$\phi(6) = 3, \phi(7) = 2, \phi(8) = 3, \phi(9) = 4, \phi(10) = 2.$$

Die 1 erscheint zweimal als Funktionswert. Also wird an erster Stelle des Quintupels zweimal addiert. Es wird $x_1 = 2$ gesetzt. Die Zwei erscheint zweimal als Funktionswert. Also wird an zweiter Stelle zweimal addiert. Es wird $x_2 = 2$ gesetzt. Die Drei erscheint erscheint viermal als Funktionswert. Also wird an dritter Stelle viermal addiert. Es wird $x_3 = 4$ gesetzt. Die Vier und Fünf erscheinen jeweils einmal als Funnktionswert. Also wird an vierter und fünfter Stelle jeweils einmal addiert. Es wird $x_4 = x_5 = 1$ gesetzt.

Demnach stellt die Funktion ϕ das Quintupel

$$(2, 2, 4, 1, 1),$$

dar. Nach Konstruktion gilt klarer Weise

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2 + 2 + 4 + 1 + 1 = 10.$$

Das gleiche Quintupel wird auch durch die Funktion

$$\psi : \{1, \ldots, 10\} \to \{1, \ldots, 5\},$$

$$\psi(1) = 5, \psi(2) = 1, \psi(3) = 1, \psi(4) = 4, \psi(5) = 2,$$
$$\psi(6) = 2, \psi(7) = 3, \psi(8) = 3, \psi(9) = 3, \psi(10) = 3,$$

erzeugt. Somit können unterschiedliche Funktionen von $\{1, \ldots, 10\} \to \{1, \ldots, 5\}$ durch die hier vorgestellte Zuordnung gleich geordnete Quintupel erzeugen. In der Tat beinhaltet jede dieser Funktionen nicht nur die Information, welcher der fünf

Summanden an welcher Position steht, sondern auch noch die Reihenfolge, in der die Einsen auf die einzelnen Positionen aufgeteilt werden. Werden die Funktionen ϕ und ψ jeweils als *wachsende* Funktion neu angeordnet so ergibt sich in beiden Fällen

$$f : \{1, \dots, 10\} \to \{1, \dots, 5\},$$

$$\begin{aligned} f(1) = 1, f(2) = 1, f(3) = 2, f(4) = 2,& \\ f(5) = 3, f(6) = 3, f(7) = 3, f(8) = 3, f(9) = 4, f(10) = 5.& \end{aligned}$$

Der Funktion f wird das geordnetes Quintupel

$$(2, 2, 4, 1, 1),$$

zugeordnet, da in dieser Reihenfolge der Funktionswert 1 zweimal, der Funktionswert 2 zweimal, der Funktionswert 3 viermal, der Funktionswert 4 einmal und der Funktionswert 5 einmal angenommen wird.
Nach Konstruktion ist $(2, 2, 4, 1, 1)$ ein geordnetes Quintupel natürlicher Zahlen und die Summe der Koordinaten von $(2, 2, 4, 1, 1)$ ist gleich 10.
Offenbar ergeben sich mit dieser Zuordnung aus verschiedenen wachsenden Funktionen von $\{1, \dots, 10\}$ in $\{1, \dots, 5\}$ verschiedene geordnete Quintupel.
Ist umgekehrt ein geqordnetes Quintupel $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ natürlicher Zahlen mit $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10$ gegeben, so entsteht hieraus eine wachsende Funktion $f : \{1, \dots, 10\} \to \{1, \dots, 5\}$, indem

$$f(1) = \ldots = f(x_1) = 1,$$

$$\begin{aligned} f(1 + x_1) &= \ldots = f(x_1 + x_2) = 2, \\ f(1 + x_1 + x_2) &= \ldots = f(x_1 + x_2 + x_3) = 3, \\ f(1 + x_1 + x_2 + x_3) &= \ldots = f(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = 4, \\ f(1 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4) &= \ldots = f(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) = 5, \end{aligned}$$

gesetzt wird.

Somit gibt es genau so viele geordnete Quintupel natürlicher Zahlen $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ mit $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10$ wie es wachsende Funktionen $f : \{1, \dots, 10\} \to \{1, \dots, 5\}$. Die Anzahl derartiger Funktionen ist gleich

$$\begin{aligned} \binom{5 + 10 - 1}{10} = \binom{14}{10} = \binom{14}{4} &= \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \\ &= \frac{14 \cdot 13 \cdot 11}{2} = 7 \cdot 13 \cdot 11 = 91 \cdot 11 = 1001. \end{aligned}$$

⋆

Allgemein

Sind k, n natürliche Zahlen, so ist die Anzahl der geordneten n-Tupeln $(x_1, \ldots, x_n)$ natürlicher Zahlen mit $x_1 + \ldots + x_n = k$ ist gleich

$$\binom{n+k-1}{k}.$$

10 k als gerichtete Summe n ganzer Zahlen$\geq l$

Wieviele geordnete Quadrupel (x_1, x_2, x_3, x_4) ganzer Zahlen≥ -4 mit $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4$ gibt es?

Idee

Rückführung auf die Frage: eine Zahl $\kappa \in \mathbb{N}$ als Summe $y_1 + y_2 + y_3 + y_4$ mit natürlichen y_1, y_2, y_3, y_4 darstellen.

Falls $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z}$ mit $-4 \leq x_1, x_2, x_3, x_4$ und $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4$, dann $0 \leq 4 + x_1, 4 + x_2, 4 + x_3, 4 + x_4 \in \mathbb{Z}$ - also $4 + x_1, 4 + x_2, 4 + x_3, 4 + x_4 \in \mathbb{N}$ - und $(4+x_1)+(4+x_2)+(4+x_3)+(4+x_4) = 4 \cdot 4 + (x_1+x_2+x_3+x_4) = 16+4 = 20$.
Konsequenz: $(4+x_1, 4+x_2, 4+x_3, 4+x_4)$ geordnetes Quadrupel natürlicher Zahlen mit $(4 + x_1) + (4 + x_2) + (4 + x_3) + (4 + x_4) = 20$.
Umgekehrt gilt: ist (y_1, y_2, y_3, y_4) geordnetes Quadrupel natürlicher Zahlen mit $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 20$, so gilt $-4 \leq -4 + y_1, -4 + y_2, -4 + y_3, -4 + y_4 \in \mathbb{Z}$ mit $(-4 + y_1) + (-4 + y_2) + (-4 + y_3) + (-4 + y_4) = 4 \cdot (-4) + (y_1 + y_2 + y_3 + y_4) = -16 + 20 = 4$.
Auch gilt: Unterschiedliche geordnete Quadrupel ganzer Zahlen≥ -4 werden durch die koordinatenweise Addition einer 4 in unterschiedliche geordnete Quadrupel übergeführt.

Somit gibt es genau so viele geordnete Quadrupel (x_1, x_2, x_3, x_4) ganzer Zahlen≥ -4 mit $x_1+x_2+x_3+x_4 = 4$ wie es geordnete Quadrupel (y_1, y_2, y_3, y_4) natürlicher Zahlen mit $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 20$ gibt. Die letztgenannte Anzahl ist nach den Erkenntnissen letzten Kapitels gleich

$$\binom{4+20-1}{20} = \binom{23}{20} = \binom{23}{3} = \frac{23 \cdot 22 \cdot 21}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 23 \cdot 11 \cdot 7 = 253 \cdot 7 = 1771.$$

⋆

Allgemain

Ist n eine natürliche Zahl und sind $k.l$ ganze Zahlen, so ist die Anzahl der geordneten n-Tupeln $(x_1, \ldots, x_n)$ ganzer Zahlen$\geq l$ mit $x_1+\ldots+x_n = k$ gleich der Anzahl der geordneten n-Tupeln $(y_1, \ldots, y_n)$ natürlicher Zahlen mit $y_1+\ldots+y_n = k-n\cdot l$ und diese Anzahl ist

$$\text{für } k-n\cdot l<0 \text{ gleich } 0$$

und

$$\text{für } 0\leq k-n\cdot l \text{ gleich } \binom{(1-l)\cdot n+k-1}{k-n\cdot l} = \binom{(1-l)\cdot n+k-1}{n-1}.$$

11 Differenz ausgewählter Zahlen$\neq \pm 1$

> Auf wieviele verschiedene Arten können aus $\{1,\ldots,n\}$, $n\in\mathbb{N}$, genau k Zahlen, $k\in\mathbb{N}$, so ausgewählt werden, dass die Differenz ungleich ausgewählter Zahlen$\neq \pm 1$ ist?

Idee

Unbekannte Anzahl mit eigenem Symbol - $x(n,k)$ - bezeichnen, Spezialfälle betrachten und dann Rekursion herleiten.

Offenbar gilt:

$$n\in\mathbb{N} \quad\Rightarrow\quad x(n,0)=1,$$

da auf genau eine Art eine null-elementige Teilmenge - nämlich 0 - ausgewählt werden kann und diese alle Bedingungen, die mit "für alle" formuliert werden, erfüllt. Auch gilt

$$n\in\mathbb{N},\ n \text{ gerade },\frac{n}{2}<k,k\in\mathbb{N} \quad\Rightarrow\quad x(n,k)=0,$$

$$n\in\mathbb{N},\ n \text{ ungerade },\frac{1+n}{2}<k,k\in\mathbb{N} \quad\Rightarrow\quad x(n,k)=0.$$

Klar:

$$n\in\mathbb{N} \quad\Rightarrow\quad x(n,1)=n,$$

und

$$1\leq k\in\mathbb{N} \quad\Rightarrow\quad x(0,k)=0.$$

Rückführung $x(2+n,1+k)$ auf $x(1+n,1+k)$, $x(1+n,k)$:
1.Fall: $1+k$-elementige Teilmengen von $\{1,\ldots,2+n\}$ entsprechend der Anforderungen, die $2+n$ enthalten.
Ist A eine derartige Menge, dann hat $A\setminus\{2+n\}$ genau k Elemente, das grösste muss $\leq n$ sein. Also ist $A\setminus\{2+n\}$ einecp der $x(n,k)$ Mengen entsprechend Vorgaben. Umgekehrt gilt: Ist B eine k-elementige Teilmenge von $\{1,\ldots,n\}$ entsprechend der Anforderungen, so ist $\{2+n\}\cup A$ eine $1+k$-elementige Teilmenge von $\{1,\ldots,2+n\}$ entsprechend der Anforderungen. Somit gibt es genau so viele $1+k$-elementige Teilmengen von $\{1,\ldots,2+n\}$ entsprechend der Anforderungen, die $2+n$ enthalten wie es k-elementige Teilmengen von $\{1,\ldots,n\}$ entsprechend der Anforderungen gibt. Die letztgenannte Anzahl ist gleich $x(n,k)$.

<u>2.Fall</u> $1+k$-elementige Teilmengen von $\{1,\ldots,2+n\}$ entsprechend der Anforderungen, die $2+n$ *nicht* enthalten. Dies sind genau die $1+k$-elementigen Teilmengen von $\{1,\ldots,1+n\}$ entsrpechend der Anforderungen. Die Anzahl derartiger Mengen ist gleich $x(1+n,1+k)$.

Da jede $1+k$-elementige Teilmenge von $\{1,\ldots,2+n\}$ entsprechend der Anforderungen in ausschliessender Weise $2+n$ enthält oder nicht ergibt sich die *zweistellige* Rekursion

$$n \in \mathbb{N} \wedge k \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad x(2+n,1+k) = x(1+n,1+k) + x(n,k).$$

In einigen nicht-trivialen Fällen gilt

$$\begin{aligned}
x(3,2) &= x(2,2) + x(1,1) = 0 + 1 = 1\\
x(4,2) &= x(3,2) + x(2,1) = 1 + 2 = 3\\
x(5,2) &= x(4,2) + x(3,1) = 3 + 3 = 6\\
x(6,2) &= x(5,2) + x(4,1) = 6 + 4 = 10
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x(5,3) &= x(4,3) + x(3,2) = 0 + 1 = 1\\
x(6,3) &= x(5,3) + x(4,2) = 1 + 3 = 4\\
x(7,3) &= x(6,3) + x(5,2) = 4 + 6 = 10\\
x(8,3) &= x(7,3) + x(6,2) = 10 + 10 = 20
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x(7,4) &= x(6,4) + x(5,3) = 0 + 1 = 1\\
x(8,4) &= x(7,4) + x(6,3) = 1 + 4 = 5\\
x(9,4) &= x(8,4) + x(7,3) = 5 + 10 = 15\\
x(10,4) &= x(9,4) + x(8,3) = 15 + 20 = 35
\end{aligned}$$

Ein Vergleich mit Binomialkoeffizienten zeigt

$$\begin{aligned}
x(3,2) &= 1 = \tbinom{2}{0} = \tbinom{3-2+1}{3-4+1}\\
x(4,2) &= 3 = \tbinom{3}{1} = \tbinom{4-2+1}{4-4+1}\\
x(5,2) &= 6 = \tbinom{4}{2} = \tbinom{5-2+1}{5-4+1}\\
x(6,2) &= 10 = \tbinom{5}{3} = \tbinom{6-2+1}{6-4+1}\\
x(5,3) &= 1 = \tbinom{3}{0} = \tbinom{5-3+1}{5-6+1}\\
x(6,3) &= 4 = \tbinom{4}{1} = \tbinom{6-3+1}{6-6+1}\\
x(7,3) &= 10 = \tbinom{5}{2} = \tbinom{7-3+1}{7-6+1}\\
x(8,3) &= 20 = \tbinom{6}{3} = \tbinom{8-3+1}{8-6+1}\\
x(7,4) &= 1 = \tbinom{4}{0} = \tbinom{7-4+1}{7-8+1}\\
x(8,4) &= 5 = \tbinom{5}{1} = \tbinom{8-4+1}{8-8+1}\\
x(9,4) &= 15 = \tbinom{6}{2} = \tbinom{9-4+1}{9-8+1}\\
x(10,4) &= 35 = \tbinom{7}{3} = \tbinom{10-4+1}{10-8+1}
\end{aligned}$$

Es liegt der Verdacht

$$\forall n, k : n \in \mathbb{N} \wedge k \in \mathbb{N} \wedge 2 \cdot k \leq 1 + n \quad \Rightarrow \quad x(n,k) = \binom{n-k+1}{n-2\cdot k+1},$$

nahe. Immerhin würde dann für alle $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$ mit $2 \cdot k \leq 1 + n$,

$$\begin{aligned}
x(2+n, 1+k) = \binom{(2+n)-(1+k)+1}{(2+n)-2\cdot 1+k+1} &= \binom{2+n-k}{n-2\cdot k+1} \\
&= \binom{1+n-k}{n-2\cdot k+1} + \binom{1+n-k}{n-2\cdot k} \\
&= \binom{n-k+1}{n-2\cdot k+1} + \binom{(1+n)-(1+k)+1}{(1+n)-2\cdot(1+k)+1} \\
&= x(n,k) + x(1+n,1+k) = x(1+n,1+k) + x(n,k),
\end{aligned}$$

gelten. In der Tat gilt

$$n \in \mathbb{N} \wedge k \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad x(n,k) = \begin{cases} \binom{n-k+1}{n-2\cdot k+1} & , \quad 2 \cdot k \leq 1 + n \\ 0 & , \quad 1 + n < 2 \cdot k \end{cases}$$

Ohne Beweis.