Lagrange-Mechanik 2

Andreas Unterreiter

10. November 2020

Inhaltsverzeichnis

1 $\gamma^{\bullet\bullet} + \frac{1}{m} \cdot \Phi'(\gamma) = 0$ und Energiegleichung

1.1 A priori

Satz

V1. $0 < m \in \mathbb{R}$.

V2. $0 \neq O \subseteq \mathbb{R}$ offen.

V3. $\Phi \in \mathtt{C}^1(O : \mathbb{R})$.

V4. γ ist 2-Kurve in $\mathbb{R}$.

V5. $\mathsf{ran}\,\gamma \subseteq O$.

V6. $\forall t : t \in \mathsf{dom}\,\gamma \quad \Rightarrow \quad \gamma^{\bullet\bullet}(t) + \frac{1}{m} \cdot \Phi'(\gamma(t)) = 0$.

$\Rightarrow \quad \exists E_\circ : E_\circ \in \mathbb{R} \wedge \forall t : t \in \mathsf{dom}\,\gamma$

$$\Rightarrow \quad |\gamma^\bullet(t)|^2 + \frac{2}{m} \cdot \Phi(\gamma(t)) = \frac{2 \cdot E_\circ}{m}.$$

<u>Beweis</u> Für alle $t \in \mathsf{dom}\,(\gamma)$ gilt

$$2 \cdot \gamma^\bullet(t) \cdot \left(\gamma^{\bullet\bullet}(t) + \frac{1}{m} \cdot \Phi'(\gamma(t))\right) = 0,$$

so dass

$$2 \cdot \gamma^{\bullet\bullet}(t) \cdot \gamma^\bullet(t) + \frac{2}{m} \cdot \Phi'(\gamma(t)) \cdot \gamma^\bullet(t) = 0,$$

also auch

$$\left(|\gamma^\bullet|^2\right)^\bullet(t) + \frac{2}{m} \cdot (\Phi \circ \gamma)^\bullet(t) = 0,$$

und somit

$$\left(|\gamma^\bullet|^2. + .\frac{2}{m} \cdot (\Phi \circ \gamma)\right)^\bullet(t) = 0.$$

Hieraus und aus der Tatsache, dass $\mathsf{dom}\,\gamma$ ein echtes reelles Intervall ist folgt, dass es eine Zahl $E_\circ \in \mathbb{R}$ geben muss, so dass $\forall t : t \in \mathsf{dom}\,\gamma \quad \Rightarrow$

$$|\gamma^\bullet(t)|^2 + \frac{2}{m} \cdot \Phi(\gamma(t)) = \frac{2 \cdot E_\circ}{m}.$$

□

1.2 A posteriori

Satz

`V1.` $0 < m \in \mathbb{R}$.

`V2.` $0 \neq O \subseteq \mathbb{R}$ offen.

`V3.` $\Phi \in \mathtt{C}^1(O : \mathbb{R})$.

`V4.` γ ist 2-Kurve in $\mathbb{R}$.

`V5.` $\mathsf{ran}\,\gamma \subseteq O$.

`V6.` $E_\circ \in \mathbb{R}$.

`V7.` $\forall t : t \in \mathsf{dom}\,\gamma \quad \Rightarrow \quad |\gamma^\bullet(t)|^2 + \frac{2}{m} \cdot \Phi(\gamma(t)) = \frac{2 \cdot E_\circ}{m}$.

`V8.` $\{s : s \in \mathsf{dom}\,\gamma \wedge 0 \neq \gamma^\bullet(s)\}$ ist dicht in $\mathsf{dom}\,\gamma$.

$\Rightarrow$

$$\forall t : t \in \mathsf{dom}\,\gamma \quad \Rightarrow \quad \gamma^{\bullet\bullet}(t) + \frac{1}{m} \cdot \Phi'(\gamma(t)) = 0.$$

<u>Beweis</u> Für alle $t \in \mathsf{dom}\,\gamma$ gilt

$$\left(|\gamma^\bullet|^2. + .\frac{2}{m} \cdot (\Phi \circ \gamma)\right)^\bullet (t) = 0,$$

so dass

$$2 \cdot \gamma^\bullet(t) \cdot \gamma^{\bullet\bullet}(t) + \frac{2}{m} \cdot \Phi'(\gamma(t)) \cdot \gamma^\bullet(t) = 0,$$

und somit

$$2 \cdot \gamma^\bullet(t) \cdot \left(\gamma^{\bullet\bullet}(t) + \frac{1}{m} \cdot \Phi'(\gamma(t))\right) = 0.$$

Hieraus folgt

$$\gamma^{\bullet\bullet}(t) + \frac{1}{m} \cdot \Phi'(\gamma(t)) = 0 = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\,\gamma}(t),$$

für alle $t \in \{s : s \in \mathsf{dom}\,\gamma \wedge 0 \neq \gamma^\bullet(s)\}$, wobei

$$\mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\,\gamma} : \mathsf{dom}\,\gamma \to \mathbb{R}, \quad \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\,\gamma}(t) = 0.$$

Da die Funktionen

$$\gamma^{\bullet\bullet}. + .\frac{1}{m} \cdot (\Phi' \circ \gamma)$$

und $\mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\,\gamma}$ stetig auf $\mathsf{dom}\,\gamma$ sind und $\{s : s \in \mathsf{dom}\,\gamma \wedge 0 \neq \gamma^\bullet(s)\}$ dicht in $\mathsf{dom}\,\gamma$ ist, folgt

$$\gamma^{\bullet\bullet} + \frac{1}{m} \cdot (\Phi' \circ \gamma) = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\,\gamma},$$

auf $\mathsf{dom}\,\gamma$ und somit für alle $t \in \mathsf{dom}\,\gamma$,

$$\gamma^{\bullet\bullet}(t) + \frac{1}{m} \cdot \Phi'(\gamma(t)) = 0.$$

□

1.3 lf stnd-1-$m/\Phi(x)$ (+1)

Satz

V1. $0 < m \in \mathbb{R}$.

V2. $0 \neq O \subseteq \mathbb{R}$ offen.

V3. $\Phi \in \mathtt{C}^1(O : \mathbb{R})$.

V4. $L : (\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$L(((t, x), v)) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot |v|^2 - \Phi(x).$$

V5. γ ist 2-Kurve in $\mathbb{R}$.

V6. $\mathsf{ran}\,\gamma \subseteq O$.

V7. $E_\circ \in \mathbb{R}$.

V8. $\forall t : t \in \mathsf{dom}\,\gamma \quad \Rightarrow \quad |\gamma^\bullet(t)|^2 + \dfrac{2}{m} \cdot \Phi(\gamma(t)) = \dfrac{2 \cdot E_\circ}{m}$.

V9. $\{s : s \in \mathsf{dom}\,\gamma \wedge 0 \neq \gamma^\bullet(s)\}$ ist dicht in $\mathsf{dom}\,\gamma$.

$\Rightarrow$

γ ist $1, (\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}$-Zustandskurve von L.

Beweis Es folgt mit Hilfe eines Satzes aus $\gamma^{\bullet\bullet} + \frac{1}{m} \cdot \Phi'(\gamma) = 0$ **und Energiegleichung. A posteriori.**, dass für alle $t \in \mathsf{dom}\,\gamma$,

$$\gamma^{\bullet\bullet}(t) + \frac{1}{m} \cdot \Phi'(\gamma(t)) = 0.$$

Hieraus und aus den weiteren vorausgesetzten Eigenschaften von γ folgt auf Grund vorheriger Resultate aus **lf stnd-1-$m/\Phi(x)$**, dass γ eine $1, (\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}$-Zustandskurve von L ist. □

2 lf stndkin-1-$mT(v)/\Phi(x)$

Satz

V1. $0 < m \in \mathbb{R}$..

V2. $0 \neq O \subseteq \mathbb{R}$ offen.

V3. $\Phi \in \mathtt{C}^1(O : \mathbb{R})$.

V4. $0 < a$ und $0 < b$ und $T \in \mathtt{C}^2(\rbrack -a|b\lbrack : \mathbb{R})$,
so dass auch $a = +\infty$ oder $b = +\infty$ möglich sind.

V5. $L : (\mathbb{R} \times O) \times \rbrack -a|b\lbrack \to \mathbb{R}$,

$$L(((t,x),v)) = m \cdot T(v) - \Phi(x).$$

$\Rightarrow$

a) $\partial_{\mathtt{t}} L : (\mathbb{R} \times O) \times \rbrack -a|b\lbrack \to \mathbb{R}, \quad (\partial_{\mathtt{t}} L)(((t,x),v)) = 0.$

b) $\nabla_{\mathtt{x}} L : (\mathbb{R} \times O) \times \rbrack -a|b\lbrack \to \mathbb{R}, \quad (\nabla_{\mathtt{x}} L)(((t,x),v)) = -\Phi'(x).$

c) $\nabla_{\mathtt{v}} L : (\mathbb{R} \times O) \times \rbrack -a|b\lbrack \to \mathbb{R}, \quad (\nabla_{\mathtt{v}} L)(((t,x),v)) = m \cdot T'(v).$

d) L ist $1, (\mathbb{R} \times O) \times \rbrack -a|b\lbrack$-Lagrange-Funktion.

e) E ist $1, (\mathbb{R} \times O) \times \rbrack -a|b\lbrack$-Energie von $L \quad \Leftrightarrow$

$$E : (\mathbb{R} \times O) \times \rbrack -a|b\lbrack \to \mathbb{R}, \quad E(((t,x),v)) = m \cdot \tilde{T}(v) + \Phi(x),$$

wobei

$$\tilde{T} : \rbrack -a|b\lbrack \to \mathbb{R}, \quad \tilde{T}(v) = v \cdot T'(v) - T(v).$$

f) K kinetische $1, (\mathbb{R} \times O) \times \rbrack -a|b\lbrack$-Energie von $L \quad \Leftrightarrow$

$$K : (\mathbb{R} \times O) \times \rbrack -a|b\lbrack \to \mathbb{R}, \quad K(((t,x),v)) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v \cdot T'(v).$$

g) P potentielle $1, (\mathbb{R} \times O) \times \rbrack -a|b\lbrack$-Energie von $L \quad \Leftrightarrow$

$$P : (\mathbb{R} \times O) \times \rbrack -a|b\lbrack \to \mathbb{R},$$

$$P(((t,x),v)) = m \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot v \cdot T'(v) - T(v)\right) + \Phi(x).$$

h) γ ist $1, (\mathbb{R} \times O) \times \,]-a|b[$-Zustandskurve von L

$$\Leftrightarrow \quad \gamma \text{ ist 2-Kurve in } \mathbb{R} \wedge \mathsf{ran}\,\gamma \subseteq O \wedge -a < \gamma^\bullet < b \text{ auf } \mathsf{dom}\,\gamma$$

$$\wedge \quad \forall t : t \in \mathsf{dom}\,\gamma \quad \Rightarrow \quad T''(\gamma^\bullet(t)) \cdot \gamma^{\bullet\bullet}(t) + \frac{1}{m} \cdot \Phi(\gamma(t)) = 0.$$

i) γ ist $1, (\mathbb{R} \times O) \times \,]-a|b[$-Zustandskurve von $L \wedge t \in \mathsf{dom}\,\gamma$

$$\Rightarrow \quad (E \circ \gamma^*)(t) = m \cdot \tilde{T}(\gamma^\bullet(t)) + \Phi(\gamma(t)), \quad (E \circ \gamma^*)^\bullet(t) = 0.$$

j) γ ist $1, (\mathbb{R} \times O) \times \,]-a|b[$-Zustandskurve von $L \wedge t \in \mathsf{dom}\,\gamma \wedge \tau \in \mathsf{dom}\,\gamma$

$$\Rightarrow \quad m \cdot \tilde{T}(\gamma^\bullet(t))) + \Phi(\gamma(t)) = m \cdot \tilde{T}(\gamma^\bullet(t)) + \Phi(\gamma(\tau)).$$

k) γ ist $1, (\mathbb{R} \times O) \times \,]-a|b[$-Zustandskurve von L

$$\Rightarrow \quad \exists E_\circ : E_\circ \in \mathbb{R} \wedge \forall t : t \in \mathsf{dom}\,\gamma \Rightarrow$$

$$2 \cdot \tilde{T}(\gamma^\bullet(t)) + \frac{2}{m} \cdot \Phi(\gamma(t)) = \frac{2 \cdot E_\circ}{m}.$$

Beweis a) trivial.

Beweis b) trivial.

Beweis c) trivial.

Beweis d) trivial.

Beweis e) Per definitionem für alle $((t,x),v) \in (\mathbb{R} \times O) \times \,]-a|b[$,

$$\begin{aligned} E(((t,x),v)) &= -L(((t,x),v)) + (\nabla_{\mathtt{v}} L)(((t,x),v)) \cdot v \\ &= -m \cdot T(v) + \Phi(x) + m \cdot T'(v) \cdot v = m \cdot (v \cdot T'(v) - T(v)) + \Phi(x) \\ &= m \cdot \tilde{T}(v) + \Phi(x). \end{aligned}$$

Beweis f) Per definitionem für alle $((t,x),v) \in (\mathbb{R} \times O) \times \,]-a|b[$,

$$K(((t,x),v)) = \frac{1}{2} \cdot (\nabla_{\mathtt{v}} L)(((t,x),v)) \cdot v = \frac{1}{2} \cdot m \cdot T'(v) \cdot v = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v \cdot T'(v).$$

Beweis g) Per definitionem für alle $((t,x),v) \in (\mathbb{R} \times O) \times \,]-a|b[$,

$$\begin{aligned} P(((t,x),v)) &= -L(((t,x),v)) + \frac{1}{2} \cdot (\nabla_{\mathtt{v}} L)(((t,x),v)) \cdot v \\ &= -m \cdot T(v) + \Phi(x) + \frac{1}{2} \cdot m \cdot T'(v) \cdot v = m \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot v \cdot T'(v) - T(v)\right) + \Phi(x). \end{aligned}$$

<u>Beweis</u> `h)` Per definitionem ist γ genau dann $1,(\mathbb{R}\times O)\times\,]-a|b[$-Zustandskurve von L, wenn γ eine 2-Kurve in $\mathbb{R}$ mit $\mathsf{ran}\,(\gamma^*)\subseteq(\mathbb{R}\times O)\times\,]-a|b[$ ist, so dass für alle $t\in\mathsf{dom}\,\gamma$,

$$((\nabla_{\mathtt{v}}L)\circ\gamma^*)^\bullet(t)=((\nabla_{\mathtt{x}}L)\circ\gamma^*)(t),$$

gilt. Da auf Grund bereits bewiesener Aussagen für alle $t\in\mathsf{dom}\,\gamma$,

$$((\nabla_{\mathtt{v}}L)\circ\gamma^*)^\bullet(t)=m\cdot(T'\circ\gamma^\bullet)^\bullet(t)=m\cdot T''(\gamma^\bullet(t))\cdot\gamma^{\bullet\bullet}(t),$$

und

$$((\nabla_{\mathtt{x}}L)\circ\gamma^*)(t)=-\Phi'(\gamma(t)),$$

gilt, sind die soeben genannten Bedingungen äquivalent dazu, dass γ eine 2-Kurve in $\mathbb{R}$ ist, für die $\mathsf{ran}\,\gamma\in O$ und $-a<\gamma^\bullet<b$ auf $\mathsf{dom}\,\gamma$ und für alle $t\in\mathsf{dom}\,\gamma$,

$$m\cdot T''(\gamma^\bullet(t))\cdot\gamma^{\bullet\bullet}(t)=-\Phi'(\gamma(t)),$$

oder äquivalenter Weise

$$T''(\gamma^\bullet(t))\cdot\gamma^{\bullet\bullet}(t)+\frac{1}{m}\cdot\Phi'(\gamma(t))=0,$$

gilt.

<u>Beweis</u> `i)` trivial.

<u>Beweis</u> `j)` trivial.

<u>Beweis</u> `k)` trivial. $\square$

2.1 lf stnd-1-$m/\Phi(x)$ (+2)

Satz

V1. $0 < m \in \mathbb{R}$.

V2. $0 \neq O \subseteq \mathbb{R}$ offen.

V3. $\Phi \in \mathtt{C}^1(O : \mathbb{R})$.

V4. $L : (\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$L(((t,x),v)) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot |v|^2 - \Phi(x).$$

V5. $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad T(v) = \dfrac{1}{2} \cdot |v|^2$.

$\Rightarrow$

a) $T \in \mathtt{C}^{+\infty}(]-a|b[: \mathbb{R}$ mit $0 < a = +\infty$ und $0 < b = +\infty$.

b) $L : (\mathbb{R} \times O) \times]-a|b[\to \mathbb{R}$,

$$L(((t,x),v)) = m \cdot T(v) - \Phi(x).$$

c) $T' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad T'(v) = v$.

d) $T'' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad T''(v) = 1$.

e) $\forall v : v \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \tilde{T}(v) = v \cdot T'(v) - T(v) = \frac{1}{2} \cdot |v|^2 = T(v)$.

Beweis trivial. $\square$

2.2 lf stndkin-1-$mT_{rel}(v)/\Phi(x)$

Satz

V1. $0 < m \in \mathbb{R}$..

V2. $0 \neq O \subseteq \mathbb{R}$ offen.

V3. $\Phi \in \mathtt{C}^1(O : \mathbb{R})$.

V4. $0 < c \in \mathbb{R}$.

V5. $L : (\mathbb{R} \times O) \times \,]-c|c[\, \to \mathbb{R}$,

$$L(((t,x),v)) = m \cdot c \cdot \left(c - \sqrt{c^2 - |v|^2}\right) - \Phi(x).$$

V6. $T : \,]-c|c[\, \to \mathbb{R}, \quad T(v) = c \cdot \left(c - \sqrt{c^2 - |v|^2}\right)$.

$\Rightarrow$

a) $T \in \mathtt{C}^{+\infty}(]-c|c[\, : \mathbb{R})$.

b) $L : (\mathbb{R} \times O) \times \,]-c|c[\, \to \mathbb{R}$,

$$L(((t,x),v)) = m \cdot T(v) - \Phi(x).$$

c) $T' \in \mathtt{C}^{+\infty}(]-c|c[\, : \mathbb{R}, \quad T'(v) = \dfrac{c \cdot v}{\sqrt{c^2 - |v|^2}}$.

d) $T'' \in \mathtt{C}^{+\infty}(]-c|c[\, : \mathbb{R}, \quad T''(v) = \dfrac{c^3}{\sqrt{c^2 - |v|^2}^3}$.

e) $\forall v : -a < v < c \quad \Rightarrow \quad \tilde{T}(v) = v \cdot T'(v) - T(v) = c^2 \cdot \left(\dfrac{c}{\sqrt{c^2 - |v|^2}} - 1\right)$.

f) $\partial_{\mathtt{t}} L : (\mathbb{R} \times O) \times \,]-c|c[\, \to \mathbb{R}, \quad (\partial_{\mathtt{t}} L)(((t,x),v)) = 0$.

g) $\nabla_{\mathtt{x}} L : (\mathbb{R} \times O) \times \,]-c|c[\, \to \mathbb{R}, \quad (\nabla_{\mathtt{x}} L)(((t,x),v)) = -\Phi'(x)$.

h) $\nabla_{\mathtt{v}} L : (\mathbb{R} \times O) \times \,]-c|c[\, \to \mathbb{R}, \quad (\nabla_{\mathtt{v}} L)(((t,x),v)) = m \cdot \dfrac{c \cdot v}{\sqrt{c^2 - |v|^2}}$.

i) E ist $1, (\mathbb{R} \times O) \times \,]-c|c[$-Energie von $L \quad \Leftrightarrow$

$E : (\mathbb{R} \times O) \times \,]-c|c[\, \to \mathbb{R}$,

$$E(((t,x),v)) = m \cdot c^2 \cdot \left(\frac{c}{\sqrt{c^2 - |v|^2}} - 1\right) + \Phi(x).$$

j) K kinetische $1,(\mathbb{R}\times O)\times\,]-c|c[$-Energie von L $\quad\Leftrightarrow$

$$K:(\mathbb{R}\times O)\times\,]-c|c[\,\to\mathbb{R},\quad K(((t,x),v))=\frac{1}{2}\cdot m\cdot\frac{c\cdot|v|^2}{\sqrt{c^2-|v|^2}}.$$

k) P potentielle $1,(\mathbb{R}\times O)\times\,]-c|c[$-Energie von L $\quad\Leftrightarrow$

$$P:(\mathbb{R}\times O)\times\,]-c|c[\,\to\mathbb{R},$$

$$P(((t,x),v))=m\cdot c\cdot\left(\frac{2\cdot c^2-|v|^2}{2\cdot\sqrt{c^2-|v|^2}}-c\right)+\Phi(x).$$

l) γ ist $1,(\mathbb{R}\times O)\times\,]-c|c[$-Zustandskurve von L

$\Leftrightarrow\quad\gamma$ ist 2-Kurve in $\mathbb{R}\wedge\operatorname{\mathsf{ran}}\gamma\subseteq O\wedge -c<\gamma^{\bullet}<c$ auf $\operatorname{\mathsf{dom}}\gamma$

$$\wedge\quad\forall t:t\in\operatorname{\mathsf{dom}}\gamma\quad\Rightarrow\quad\frac{c^3}{\sqrt{c^2-|\gamma^{\bullet}(t)|^2}^{\,3}}\cdot\gamma^{\bullet\bullet}(t)+\frac{1}{m}\cdot\Phi(\gamma(t))=0.$$

m) γ ist $1,(\mathbb{R}\times O)\times\,]-c|c[$-Zustandskurve von $L\wedge t\in\operatorname{\mathsf{dom}}\gamma$

$$\Rightarrow\quad(E\circ\gamma^*)(t)=m\cdot c^2\cdot\left(\frac{c}{\sqrt{c^2-|\gamma^{\bullet}(t)|^2}}-1\right)+\Phi(\gamma(t)),$$

$$(E\circ\gamma^*)^{\bullet}(t)=0.$$

n) γ ist $1,(\mathbb{R}\times O)\times\,]-c|c[$-Zustandskurve von $L\wedge t\in\operatorname{\mathsf{dom}}\gamma\wedge\tau\in\operatorname{\mathsf{dom}}\gamma$

$$\Rightarrow\quad m\cdot c^2\cdot\left(\frac{c}{\sqrt{c^2-|\gamma^{\bullet}(t)|^2}}-1\right)+\Phi(\gamma(t))$$

$$=m\cdot c^2\cdot\left(\frac{c}{\sqrt{c^2-|\gamma^{\bullet}(\tau)|^2}}-1\right)+\Phi(\gamma(\tau)).$$

o) γ ist $1,(\mathbb{R}\times O)\times\,]-c|c[$-Zustandskurve von L

$\Rightarrow\quad\exists E_\circ:E_\circ\in\mathbb{R}\wedge\forall t:t\in\operatorname{\mathsf{dom}}\gamma\Rightarrow$

$$2\cdot c^2\cdot\left(\frac{c}{\sqrt{c^2-|\gamma^{\bullet}(t)|^2}}-1\right)+\frac{2}{m}\cdot\Phi(\gamma(t))=\frac{2\cdot E_\circ}{m}.$$

<u>Beweis</u> `a)` trivial.

<u>Beweis</u> `b)` trivial.

<u>Beweis</u> `c)` trivial.

<u>Beweis</u> `d)` trivial.

<u>Beweis</u> `e)` Via `V6.` und `c)` für alle $v \in \,]-c|c[$,

$$\begin{aligned}\tilde{T}(v) = v \cdot T'(v) - T(v) &= \frac{c \cdot |v|^2}{\sqrt{c^2 - |v|^2}} - c \cdot (c - \sqrt{c^2 - |v|^2})\\ &= \frac{1}{\sqrt{c^2 - |v|^2}} \cdot \left(c \cdot |v|^2 - c^2 \cdot \sqrt{c^2 - |v|^2} + c \cdot (c^2 - |v|^2)\right)\\ &= \frac{c^2}{\sqrt{c^2 - |v|^2}} \cdot \left(c - \sqrt{c^2 - |v|^2}\right)\\ &= c^2 \cdot \left(\frac{c}{\sqrt{c^2 - |v|^2}} - 1\right).\end{aligned}$$

<u>Beweis</u> `f)` trivial.

<u>Beweis</u> `g)` trivial.

<u>Beweis</u> `h)` trivial.

<u>Beweis</u> `i)` Via `e)` und **lf stnd-1-**$mT(v)/\Phi(x)$ evident.

<u>Beweis</u> `j)` Via `c)` und **lf-stnd-1-**$mT(v)/\Phi(x)$ evident.

<u>Beweis</u> `k)` Via **lf stnd-1-**$mT(v)/\Phi(x)$ ist P genau dann potentielle $1, (\mathbb{R} \times O) \times \,]-c|c[$-Energie von L, wenn

$$P : (\mathbb{R} \times O) \times \,]-c|c[\, \to \mathbb{R},$$
$$P(((t, x), v)) = m \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot v \cdot T'(v) - T(v)\right) + \Phi(x).$$

Via `V6.` und `c)` für alle $v \in \,]-c|c[$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \cdot v \cdot T'(v) - T(v) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{c \cdot |v|^2}{\sqrt{c^2 - |v|^2}} - c \cdot (c - \sqrt{c^2 - |v|^2})\\ &= \frac{1}{\sqrt{c^2 - |v|^2}} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot c \cdot |v|^2 - c^2 \cdot \sqrt{c^2 - |v|^2} + c \cdot (c^2 - |v|^2)\right)\\ &= \frac{c}{\sqrt{c^2 - |v|^2}} \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot |v|^2 + c^2 - c \cdot \sqrt{c^2 - |v|^2}\right)\\ &= c \cdot \left(\frac{c^2 - \frac{1}{2} \cdot |v|^2}{\sqrt{c^2 - |v|^2}} - c\right). = c \cdot \left(\frac{2 \cdot c^2 - |v|^2}{2 \cdot \sqrt{c^2 - |v|^2}} - c\right).\end{aligned}$$

Beweis `l)` Via `d)` und **lf-stnd-1-**$mT(v)/\Phi(x)$ evident.

Beweis `m)` Via `e)` und **lf-stnd-1-**$mT(v)/\Phi(x)$ evident.

Beweis `n)` trivial.

Beweis `o)` trivial. □

3 $T''(\gamma^\bullet)\cdot\gamma^{\bullet\bullet}+\frac{1}{m}\cdot\Phi'(\gamma)=0$ und Energiegleichung

3.1 A priori

Satz

`V1.` $0<m\in\mathbb{R}$.

`V2.` $0\neq O\subseteq\mathbb{R}$ offen.

`V3.` $\Phi\in\mathtt{C}^1(O:\mathbb{R})$.

`V4.` $0<a$ und $0<b$ und $T\in\mathtt{C}^2(]-a|b[:\mathbb{R})$.

`V5.` γ ist 2-Kurve in $\mathbb{R}$.

`V6.` $\mathsf{ran}\,\gamma\subseteq O$ und $-a<\gamma^\bullet<b$ auf $\mathsf{dom}\,\gamma$.

`V7.` $\forall t:t\in\mathsf{dom}\,\gamma\quad\Rightarrow\quad T''(\gamma^\bullet(t))\cdot\gamma^{\bullet\bullet}(t)+\frac{1}{m}\cdot\Phi'(\gamma(t))=0$.

$\Rightarrow\quad\exists E_\circ:E_\circ\in\mathbb{R}\wedge\forall t:t\in\mathsf{dom}\,\gamma$

$$\Rightarrow\quad 2\cdot\tilde{T}(\gamma^\bullet(t))+\frac{2}{m}\cdot\Phi(\gamma(t))=\frac{2\cdot E_\circ}{m},$$

$$\text{wobei }\tilde{T}:]-a|b[\to\mathbb{R},\quad\tilde{T}(v)=v\cdot T'(v)-T(v).$$

Beweis Für alle $t\in\mathsf{dom}\,\gamma$ gilt

$$2\cdot\gamma^\bullet(t)\cdot\left(T''(\gamma^\bullet(t))\cdot\gamma^{\bullet\bullet}(t)+\frac{1}{m}\cdot\Phi\prime(\gamma(t))\right)=0,$$

so dass

$$2\cdot T''(\gamma^\bullet(t))\cdot\gamma^{\bullet\bullet}(t)\cdot\gamma^\bullet(t)+\frac{2}{m}\cdot\Phi'(\gamma(t))\cdot\gamma^\bullet(t)=0,$$

also auch

$$2\cdot\left(\gamma^{\bullet\bullet}(t)\cdot T'(\gamma^\bullet(t))+T''(\gamma^\bullet(t))\cdot\gamma^{\bullet\bullet}(t)-\gamma^{\bullet\bullet}(t)\cdot T'(\gamma^\bullet(t))\right)$$
$$+\frac{2}{m}\left(\Phi\circ\gamma\right)^\bullet(t)=0,$$

und somit

$$2 \cdot (\gamma^\bullet . \cdot .(T' \circ \gamma^\bullet). - .T \circ \gamma^\bullet)^\bullet (t) + \frac{2}{m} \cdot (\Phi \circ \gamma)^\bullet (t) = 0,$$

und demnach

$$\left(2 \cdot (\tilde{T} \circ \gamma^\bullet). + .\frac{2}{m} \cdot (\Phi \circ \gamma)\right)^\bullet (t) = 0.$$

Hieraus und aus der Tatsache, dass $\mathsf{dom}\,\gamma$ ein echtes, reelles Intervall ist folgt, dass es eine Zahl $E_\circ \in \mathbb{R}$ geben muss, so dass $\forall t : t \in \mathsf{dom}\,\gamma \quad \Rightarrow$

$$2 \cdot \tilde{T}(\gamma^\bullet(t)) + \frac{2}{m} \cdot \Phi(\gamma(t)) = \frac{2 \cdot E_\circ}{m}.$$

□

3.2 A posteriori

Satz

V1. $0 < m \in \mathbb{R}$.

V2. $0 \neq O \subseteq \mathbb{R}$ offen.

V3. $\Phi \in \mathsf{C}^1(O : \mathbb{R})$.

V4. $0 < a$ und $0 < b$ und $T \in \mathsf{C}^2(]-a|b[\ : \mathbb{R})$ und $\tilde{T} :]-a|b[\ \to \mathbb{R}$, $\tilde{T}(v) = v \cdot T'(v) - T(v)$.

V5. γ ist 2-Kurve in $\mathbb{R}$.

V6. $\mathsf{ran}\,\gamma \subseteq O$ und $-a < \gamma^\bullet < b$ auf $\mathsf{dom}\,\gamma$.

V7. $E_\circ \in \mathbb{R}$.

V8. $\forall t : t \in \mathsf{dom}\,\gamma \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot \tilde{T}(\gamma^\bullet(t)) + \frac{2}{m} \cdot \Phi(\gamma(t)) = \frac{2 \cdot E_\circ}{m}$.

V9. $\{s : s \in \mathsf{dom}\,\gamma \wedge 0 \neq \gamma^\bullet(s)\}$ ist dicht in $\mathsf{dom}\,\gamma$.

$\Rightarrow$

$$\forall t : t \in \mathsf{dom}\,\gamma \quad \Rightarrow \quad T''(\gamma^\bullet(t)) \cdot \gamma^{\bullet\bullet}(t) + \frac{1}{m} \cdot \Phi'(\gamma(t)) = 0.$$

Beweis Für alle $t \in \mathsf{dom}\,\gamma$ gilt

$$\left(2 \cdot (\gamma^\bullet . \cdot .(T' \circ \gamma^\bullet) - T \circ \gamma^\bullet) + \frac{2}{m} \cdot (\Phi \cdot \gamma)\right)^\bullet (t) = 0,$$

so dass

$$2 \cdot (\gamma^{\bullet\bullet}(t) \cdot T'(\gamma^{\bullet}(t)) + \gamma^{\bullet}(t) \cdot T''(\gamma^{\bullet}(t)) \cdot \gamma^{\bullet\bullet}(t) - T'(\gamma^{\bullet}(t)) \cdot \gamma^{\bullet\bullet}(t)) \\ + \frac{2}{m} \cdot \Phi'(\gamma(t)) \cdot \gamma^{\bullet}(t) = 0,$$

also auch

$$\gamma^{\bullet}(t) \cdot \left(T''(\gamma^{\bullet}(t)) \cdot \gamma^{\bullet\bullet}(t) + \frac{1}{m} \cdot \Phi'(\gamma(t))\right) = 0.$$

Hieraus folgt

$$T''(\gamma^{\bullet}(t)) \cdot \gamma^{\bullet\bullet}(t) + \frac{1}{m} \cdot \Phi'(t) = 0 = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\,\gamma}(t),$$

für alle $t \in \{s : s \in \mathsf{dom}\,\gamma \wedge 0 \neq \gamma^{\bullet}(s)\}$. Da die Funktionen

$$(T'' \circ \gamma^{\bullet}).\cdot.\gamma^{\bullet\bullet}.+.\frac{1}{m} \cdot (\Phi' \circ \gamma)$$

und $\mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\,\gamma}$ stetig auf $\mathsf{dom}\,\gamma$ sind und $\{s : s \in \mathsf{dom}\,\gamma \wedge 0 \neq \gamma^{\bullet}(s)\}$ dicht in $\mathsf{dom}\,\gamma$ ist, folgt

$$(T'' \circ \gamma^{\bullet}).\cdot.\gamma^{\bullet\bullet}.+.\frac{1}{m} \cdot (\Phi' \circ \gamma) = \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\,\gamma},$$

auf $\mathsf{dom}\,\gamma$ und somit für alle $t \in \mathsf{dom}\,\gamma$,

$$T''(\gamma^{\bullet}(t)) \cdot \gamma^{\bullet\bullet}(t) + \frac{1}{m} \cdot \Phi'(\gamma(t)) = 0.$$

□

3.3 lf stnd-1-$mT(v)/\Phi(x)$ (+1)

Satz

V1. $0 < m \in \mathbb{R}$.

V2. $0 \neq O \subseteq \mathbb{R}$ offen.

V3. $\Phi \in \mathtt{C}^1(O : \mathbb{R})$.

V4. $0 < a$ und $0 < b$ und $T \in \mathtt{C}^2(]-a|b[\ : \mathbb{R})$ und $\tilde{T} :]-a|b[\ \to \mathbb{R}$, $\tilde{T}(v) = v \cdot T'(v) - T(v)$.

V5. $L : (\mathbb{R} \times O) \times]-a|b[\ \to \mathbb{R}$,

$$L(((t,x),v)) = m \cdot T(v) - \Phi(x).$$

V6. γ ist 2-Kurve in $\mathbb{R}$.

V7. $\mathsf{ran}\,\gamma \subseteq O$ und $-a < \gamma^\bullet < b$ auf $\mathsf{dom}\,\gamma$.

V8. $E_\circ \in \mathbb{R}$.

V9. $\forall t : t \in \mathsf{dom}\,\gamma \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot \tilde{T}(v) + \dfrac{2}{m} \cdot \Phi(\gamma(t)) = \dfrac{2 \cdot E_\circ}{m}$.

V10. $\{s : s \in \mathsf{dom}\,\gamma \wedge 0 \neq \gamma^\bullet(s)\}$ ist dicht in $\mathsf{dom}\,\gamma$.

$\Rightarrow$

γ ist $1, (\mathbb{R} \times O) \times]-a|b[$-Zustandskurve von L.

<u>Beweis</u> Es folgt mit Hilfe eines Satzes aus $T''(\gamma^\bullet) \cdot \gamma^{\bullet\bullet} + \frac{1}{m} \cdot \Phi'(\gamma) = 0$ **und Energiegleichung**, dass für alle $t \in \mathsf{dom}\,\gamma$,

$$T''(\gamma^\bullet(t)) \cdot \gamma^{\bullet\bullet}(t) + \frac{1}{m} \cdot \Phi'(\gamma(t)) = 0.$$

Hieraus und aus den weiteren vorausgesetzten Eigenschaften von γ folgt auf Grund vorheriger Resultate aus **lf stnd-**$mT(v)/\Phi(x)$, dass γ eine $1, (\mathbb{R} \times O) \times]-a|b[$-Zustandskurve von L ist. $\square$

4 T konvex und $\tilde{T}$ und $w_{\pm 1}$

Satz

V1. $0 < a$ und $0 < b$ und $T \in \mathtt{C}^2(\,]-a|b[\, : \mathbb{R})$ und $0 = T(0)$ und $0 < T''$ auf $]-a|b[\, \setminus \{0\}$.

V2. $\tilde{T} : \,]-a|b[\, \to \mathbb{R}, \quad \tilde{T}(v) = v \cdot T'(v) - T(v)$.

$\Rightarrow$

a) $\tilde{T} \in \mathtt{C}^1(\,]-a|b[\, : \mathbb{R})$.

b) $\forall v : v \in \,]-a|b[\quad \Rightarrow \quad \tilde{T}'(v) = v \cdot T''(v)$.

c) $0 < \tilde{T}'$ auf $]0|b[$ und $\tilde{T}$ streng wachsend auf $[0|b[$ und $0 < \tilde{T}$ auf $]0|b[$.

d) $\tilde{T}' < 0$ auf $]-a|0[$ und $\tilde{T}$ streng fallend auf $]-a|0]$ und $0 < \tilde{T}$ auf $]-a|0[$.

e) $0 = \tilde{T}(0)$ und $(0 = T(v) \Leftrightarrow 0 = v)$.

f) $\overline{\beta} = \lim\limits_{v \uparrow b} \tilde{T}(v) \in \,]0| + \infty]$ und $\overline{\alpha} = \lim\limits_{v \downarrow -a} \tilde{T}(v) \in \,]0| + \infty]$.

g) $\left(\tilde{T} \downharpoonright [0|b[\right) \in \mathtt{C}^1([0|b[\, : \mathbb{R})$ und $\left(\tilde{T} \downharpoonright [0|b[\right) : [0|b[\, \to [0|\overline{\beta}[$ bijektiv, wobei $\left(\tilde{T} \downharpoonright [0|b[\right)$ die Einschränkung von $\tilde{T}$ auf $[0|b[$ ist.

h) $\left(\tilde{T} \downharpoonright \,]-a|0]\right) \in \mathtt{C}^1(\,]-a|0] : \mathbb{R})$ und $\left(\tilde{T} \downharpoonright \,]-a|0]\right) : \,]-a|0] \to [0|\overline{\alpha}[$ bijektiv, wobei $\left(\tilde{T} \downharpoonright [-a|0[\right)$ die Einschränkung von $\tilde{T}$ auf $[-a|0[$ ist.

i) Falls

$$w_{+1} = \left(\tilde{T} \downharpoonright [0|b[\right)^{-1},$$

dann

$w_{+1} \in \mathtt{C}([0|\overline{\beta}[\, : \mathbb{R})$ und w_{+1} streng wachsend und $0 < w_{+1}$ auf $]0|\overline{\beta}[$ und $w_{+1} : [0|\overline{\beta}[\, \to [0|b[$ bijektiv und $0 = w_{+1}(0)$ und $\lim\limits_{\beta \uparrow \overline{\beta}} w_{+1}(\beta) = b$ und

$$\forall \beta : \beta \in [0|\overline{\beta}[\quad \Rightarrow \quad \tilde{T}(w_{+1}(\beta)) = \beta,$$

$$\forall v : v \in [0|b[\quad \Rightarrow \quad w_{+1}(\tilde{T}(v)) = v,$$

und w_{+1} stetig differenzierbar auf $]0|\overline{\beta}[$ und

$$\forall \beta : \beta \in \,]0|\overline{\beta}[\quad \Rightarrow \quad T''(w_{+1}(\beta)) \cdot w_{+1}(\beta) \cdot w'_{+1}(\beta) = 1,$$

$$\forall v : v \in \,]0|b[\quad \Rightarrow \quad v \cdot T''(v) \cdot w'_{+1}(\tilde{T}(v)) = 1,$$

und $0 < w'_{+1}$ auf $]0|\overline{\beta}[$ und

$$\lim_{\beta \downarrow 0} w'_{+1}(\beta) = +\infty.$$

`j)` Falls

$$w_{-1} = \left(\tilde{T} \downharpoonright \,]-a|0]\right)^{-1},$$

dann

$w_{-1} \in \mathtt{C}([0|\overline{\alpha}[\,:\, \mathbb{R})$ und w_{-1} streng fallend und $w_{-1} < 0$ auf $]0|\overline{\alpha}[$ und $w_{-1} : [0|\underline{\alpha}[\,\to\,]-a|0]$ bijektiv und $0 = w_{-1}(0)$ und $w_{-1} < 0$ auf $]0|\overline{\alpha}[$ und $\lim\limits_{\alpha \uparrow \overline{\alpha}} w_{-1}(\alpha) = -a$ und

$$\forall \alpha : \alpha \in [0|\overline{\alpha}[\quad \Rightarrow \quad \tilde{T}(w_{-1}(\alpha)) = \alpha,$$
$$\forall v : v \in \,]-a|0] \quad \Rightarrow \quad w_{-1}(\tilde{T}(v)) = v,$$

und w_{-1} stetig differenzierbar auf $]0|\overline{\alpha}[$ und

$$\forall \alpha : \alpha \in \,]0|\overline{\alpha}[\quad \Rightarrow \quad T''(w_{-1}(\alpha)) \cdot w_{-1}(\alpha) \cdot w'_{-1}(\alpha) = 1,$$
$$\forall v : v \in \,]-c|0[\quad \Rightarrow \quad v \cdot T''(v) \cdot w'_{-1}(\tilde{T}(v)) = 1,$$

und $w'_{-1} < 0$ auf $]0|\overline{\alpha}[$ und

$$\lim_{\alpha \downarrow 0} w'_{-1}(\alpha) = -\infty.$$

<ins>Beweis</ins> `a)` trivial.

<ins>Beweis</ins> `b)` $\forall v : v \in \,]-a|b[\quad \Rightarrow$

$$\tilde{T}'(v) = (\mathsf{id}_{\mathbb{R}}. \cdot .T'. - .T)'(v) = (1^{on}\mathbb{R}. \cdot .T' + \mathsf{id}_{\mathbb{R}}. \cdot .T''. - .T')(v)$$
$$= T'(v) + v \cdot T''(v) - T'(v) = v \cdot T''(v),$$

wobei

$$1^{on}\mathbb{R} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad 1^{on}\mathbb{R}(x) = 1.$$

<ins>Beweis</ins> `c)` trivial.

<ins>Beweis</ins> `d)` trivial.

<ins>Beweis</ins> `e)` trivial.

<ins>Beweis</ins> `f)` trivial.

<ins>Beweis</ins> `g)` trivial.

<ins>Beweis</ins> `h)` trivial.

<ins>Beweis</ins> `i)` trivial.

<ins>Beweis</ins> `j)` trivial. $\square$

4.1 $d = 1$, $T(v) = \frac{1}{2} \cdot |v|^2$

Satz

`V1.` $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad T(v) = \dfrac{1}{2} \cdot |v|^2.$

`V2.` $\tilde{T} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \tilde{T}(v) = v \cdot T'(v) - T(v).$

`V3.` $a = +\infty$ und $b = +\infty$.

$\Rightarrow$

`a)` $]-a|b[\; = \;]-\infty|+\infty[\; = \mathbb{R}.$

`b)` $0 < a$ und $0 < b$ und $T \in \mathtt{C}^{+\infty}(]-a|b[: \mathbb{R})$ und $0 = T(0)$ und

$$T'' :]-a|b[\to \mathbb{R}, \quad T''(v) = 1,$$

und $0 < T''$ auf $]-a|b[$.

`c)` $\tilde{T} :]-a|b[\to \mathbb{R}, \quad \tilde{T}(v) = v \cdot T'(v) - T(v) = \dfrac{1}{2} \cdot |v|^2.$

`d)` $\forall v : v \in \;]-a|b[\quad \Rightarrow \quad \tilde{T}'(v) = v \cdot T''(v).$

`e)` $0 < \tilde{T}'$ auf $]0|+\infty[$ und $\tilde{T}$ streng wachsend auf $[0|+\infty[$ und $0 < \tilde{T}$ auf $]0|+\infty[$.

`f)` $\tilde{T}' < 0$ auf $]-\infty|0[$ und $\tilde{T}$ streng fallend auf $]-\infty|0]$ und $0 < \tilde{T}$ auf $]-\infty|0[$.

`g)` $0 = \tilde{T}(0)$ und $(0 = \tilde{T}(v) \Leftrightarrow 0 = v)$.

`h)` $\overline{\beta} = \lim\limits_{v \uparrow b} \tilde{T}(v) = \lim\limits_{v \uparrow +\infty} \dfrac{1}{2} \cdot |v|^2 = +\infty \in \;]0|+\infty]$

und $\overline{\alpha} = \lim\limits_{v \downarrow -a} \tilde{T}(v) = \lim\limits_{v \downarrow -\infty} \dfrac{1}{2} \cdot |v|^2 = +\infty.$

`i)` $\left(\tilde{T} \downharpoonright [0|+\infty[\right) \in \mathtt{C}^1([0|+\infty[: \mathbb{R})$ und $\left(\tilde{T} \downharpoonright [0|+\infty[\right) : [0|+\infty[\to [0|+\infty[$ bijektiv.

`j)` $\left(\tilde{T} \downharpoonright]-\infty|0]\right) \in \mathtt{C}^1([0|+\infty[: \mathbb{R})$ und $\left(\tilde{T} \downharpoonright]-\infty|0]\right) :]-\infty|0] \to [0|+\infty[$ bijektiv.

`k)` Falls
$$w_{+1} = \left(\tilde{T} \downharpoonleft [0|+\infty[\right)^{-1},$$
dann
$$w_{+1} : [0|+\infty[\to [0|+\infty[, \quad w_{+1}(\beta) = \sqrt{2\cdot\beta},$$
und $w_{+1} \in \mathtt{C}([0|+\infty[: \mathbb{R})$ und w_{+1} streng wachsend und $0 < w_{+1}$ auf $]0|+\infty[$ und $w_{+1} : [0|+\infty[\to [0|+\infty[$ bijektiv und $0 = w_{+1}(0)$ und $\lim\limits_{\beta\uparrow+\infty} w_{+1}(\beta) = +\infty$ und
$$\forall\beta : \beta \in [0|+\infty[\quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\cdot|w_{+1}(\beta)|^2 = \beta,$$
$$\forall v : v \in [0|+\infty[\quad \Rightarrow \quad w_{+1}\left(\frac{1}{2}\cdot|v|^2\right) = v,$$
und w_{+1} stetig differenzierbar auf $]0|+\infty[$ und
$$\forall\beta : \beta \in]0|+\infty[\quad \Rightarrow \quad w_{+1}(\beta)\cdot w'_{+1}(\beta) = 1,$$
$$\forall v : v \in]0|+\infty[\quad \Rightarrow \quad v\cdot w'_{+1}\left(\frac{1}{2}\cdot|v|^2\right) = 1,$$
und $0 < w'_{+1}$ auf $]0|+\infty[$ und
$$\lim_{\beta\downarrow 0} w'_{+1}(\beta) = +\infty.$$

`l)` Falls
$$w_{-1} = \left(\tilde{T} \downharpoonleft]-\infty|0]\right),$$
dann
$$w_{-1} : [0|+\infty[\to]-\infty|0], \quad w_{-1}(\alpha) = -\sqrt{2\cdot\alpha},$$
und $w_{-1} \in \mathtt{C}^1([0|+\infty[: \mathbb{R})$ und w_{-1} streng fallend und $w_{-1} < 0$ auf $]0|+\infty[$ und $w_{-1} : [0|+\infty[\to]-\infty|0]$ bijektiv und $0 = w_{-1}(0)$ und $w_{-1} < 0$ auf $]0|+\infty[$ und $\lim\limits_{\alpha\uparrow+\infty} w_{-1}(\alpha) = -\infty$ und
$$\forall\alpha : \alpha \in [0|+\infty[\quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\cdot|w_{-1}(\alpha)|^2 = \alpha,$$
$$\forall v : v \in]-\infty|0] \quad \Rightarrow \quad w_{-1}\left(\frac{1}{2}\cdot|v|^2\right) = v,$$
und w_{-1} stetig differenzierbar auf $]0|+\infty[$ und
$$\forall\alpha : \alpha \in]0|+\infty[\quad \Rightarrow \quad w_{-1}(\alpha)\cdot w'_{-1}(\alpha) = 1,$$

$$\forall v : v \in \left]-\infty|0\right[\quad \Rightarrow \quad v \cdot w_{-1}\left(\frac{1}{2} \cdot |v|^2\right) = 1,$$

und $w'_{-1} < 0$ auf $\left]0|+\infty\right[$ und

$$\lim_{\alpha \downarrow 0} w'_{-1}(\alpha) = -\infty.$$

<u>Beweis</u> `a)` trivial.

<u>Beweis</u> `b)` trivial.

<u>Beweis</u> `c)` trivial.

<u>Beweis</u> `d),e),f),g)` Evident via ersten Satzes dieses Kapitels.

<u>Beweis</u> `h)` trivial.

<u>Beweis</u> `i),j))` Evident via ersten Satzes dieses Kapitels.

<u>Beweis</u> `k)` Es gilt für alle $\beta \in \left[0|+\infty\right[$,

$$\tilde{T}(w_{+1}(\beta)) = \beta,$$

mit $w_{+1}(\beta) \in \left[0|+\infty\right[$, so dass

$$\frac{1}{2} \cdot |w_{+1}(\beta)|^2 = \beta,$$

mit $0 \leq w_{+1}(\beta)$. Es folgt $w_{+1}(\beta) = \sqrt{2 \cdot \beta}$. Die restlichen Aussagen sind via ersten Satzes dieses Kapitels evident.

<u>Beweis</u> `l)` Es gilt für alle $\alpha \in \left[0|+\infty\right[$,

$$\tilde{T}(w_{-1}(\alpha)) = \alpha,$$

mit $w_{-1}(\alpha) \in \left]-\infty|0\right]$, so dass

$$\frac{1}{2} \cdot |w_{-1}(\alpha)|^2 = \alpha,$$

mit $w_{-1}(\alpha) \leq 0$. Es folgt $w_{-1}(\alpha) = -\sqrt{2 \cdot \alpha}$. Die restlichen Aussagen sind via ersten Satzes dieses Kapitels evident. $\square$

4.2 $d = 1$, $T(v) = c \cdot \left(c - \sqrt{c^2 - |v|^2}\right)$

Satz

`V1.` $0 < c \in \mathbb{R}$.

`V2.` $T :]-c|c[\to \mathbb{R}, \quad T(v) = c \cdot (c - \sqrt{c^2 - |v|^2})$.

`V3.` $\tilde{T} :]-c|c[\to \mathbb{R}, \quad \tilde{T}(v) = v \cdot T'(v) - T(v)$.

$\Rightarrow$

a) $0 < c$ und $T \in \mathtt{C}^{+\infty}(]-c|c[: \mathbb{R})$ und $0 = T(0)$ und

$$T'' :]-c|c[\to \mathbb{R}, \quad T''(v) = \frac{c^2}{\sqrt{c^2 - |v|^1}^3},$$

und $0 < T''$ auf $]-c|c[$.

b) $\tilde{T} :]-c|c[\to \mathbb{R}, \quad \tilde{T}(v) = c^2 \cdot \left(\frac{c}{\sqrt{c^2 - |v|^2}} - 1\right)$.

c) $\forall v : v \in]-c|c[\quad \Rightarrow \quad \tilde{T}'(v) = v \cdot T''(v)$.

d) $0 < \tilde{T}'$ auf $]0|c[$ und $\tilde{T}$ streng wachsend auf $[0|c[$ und $0 < \tilde{T}$ auf $]0|c[$.

e) $\tilde{T}' < 0$ auf $]-c|0[$ und $\tilde{T}$ streng fallend auf $[-c|0]$ und $\tilde{T} < 0$ auf $]-c|0[$.

f) $0 = \tilde{T}(0)$ und $(0 = \tilde{T}(v) \Leftrightarrow 0 = v)$.

g) $\overline{\beta} = \lim\limits_{v \uparrow c} \tilde{T}(v) = \lim\limits_{v \uparrow c} c^2 \cdot \left(\frac{c}{\sqrt{c^2 - |v|^2}} - 1\right) = +\infty \in]0| + \infty]$,

$$\overline{\alpha} = \lim_{v \downarrow -c} \tilde{T}(v) = \lim_{v \downarrow -c} c^2 \cdot \left(\frac{c}{\sqrt{c^2 - |v|^2}} - 1\right) = +\infty \in]0| + \infty].$$

h) $\left(\tilde{T} \downharpoonright [0|c[\right) \in \mathtt{C}^1([0|c[: \mathbb{R})$ und $\left(\tilde{T} \downharpoonright [0|c[\right) : [0|c[\to [0| + \infty[$ bijektiv.

i) $\left(\tilde{T} \downharpoonright]-c|0]\right) \in \mathtt{C}^1(]-c|0] : \mathbb{R})$ und $\left(\tilde{T} \downharpoonright]-c|0]\right) :]-c|0] \to [0|+\infty[$ bijektiv.

j) Falls

$$w_{+1} = \left(\tilde{T} \downharpoonright [0|c[\right)^{-1},$$

dann

$$w_{+1} : [0| + \infty[\to [0|c[, \quad w_{+1}(\beta) = c \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{1}{1 + \frac{\beta}{c^2}}\right)^2},$$

und $w_{+1} \in \mathtt{C}([0| + \infty[: \mathbb{R})$ und w_{+1} streng wachsend und $0 < w_{+1}$ auf $]0|+\infty[$ und $w_{+1} : [0|+\infty[\to [0|c[$ bijektiv und $0 = w_{+1}(0)$ und $\lim\limits_{\beta \uparrow +\infty} = c$ und

$$\forall \beta : \beta \in [0| + \infty[\quad \Rightarrow \quad c^2 \cdot \left(\frac{c}{\sqrt{c^2 - |w_{+1}(\beta)|^2}} - 1\right) = \beta,$$

$$\forall v : v \in [0|c[\quad \Rightarrow \quad w_{+1}\left(c^2 \cdot \left(\frac{c}{\sqrt{c^2 - |v|^2}} - 1\right)\right) = v,$$

und w_{+1} stetig differenzierbar auf $]0| + \infty[$ und

$$\forall \beta : \beta \in]0| + \infty[\quad \Rightarrow \quad \frac{c^2}{\sqrt{c^2 - |w_{+1}(\beta)|^2}^3} \cdot w_{+1}(\beta) \cdot w'_{+1}(\beta) = 1,$$

$$\forall v : v \in]0|c[\quad \Rightarrow \quad v \cdot \frac{c^2}{\sqrt{c^2 - |v|^2}^3} \cdot w'_{+1}\left(c^2 \cdot \left(\frac{c}{\sqrt{c^2 - |v|^2}} - 1\right)\right) = 1,$$

und $0 < w'_{+1}$ auf $]0| + \infty[$ und

$$\lim_{\beta \downarrow 0} w'_{+1}(\beta) = +\infty.$$

`k)` Falls

$$w_{-1} = \left(\tilde{T} \downharpoonleft] - c|0]\right)^{-1},$$

dann

$$w_{-1} : [0| + \infty[\to] - c|0], \quad w_{-1}(\beta) = -c \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{1}{1 + \frac{\alpha}{c^2}}\right)^2},$$

und $w_{-1} \in \mathtt{C}([0|+\infty[: \mathbb{R})$ und w_{-1} streng fallend und $w_{-1} < 0$ auf $]0|+\infty[$ und $w_{-1} : [0| + \infty[\to] - c|0]$ bijektiv und $0 = w_{-1}(0)$ und $\lim\limits_{\alpha \uparrow +\infty} = -c$ und

$$\forall \alpha : \alpha \in [0| + \infty[\quad \Rightarrow \quad c^2 \cdot \left(\frac{c}{\sqrt{c^2 - |w_{-1}(\alpha)|^2}} - 1\right) = \alpha,$$

$$\forall v : v \in \left]-c|0\right] \quad \Rightarrow \quad w_{-1}\left(c^2 \cdot \left(\frac{c}{\sqrt{c^2 - |v|^2}} - 1\right)\right) = v,$$

und w_{-1} stetig differenzierbar auf $\left]0|+\infty\right[$ und

$$\forall \alpha : \alpha \in \left]0|+\infty\right[\quad \Rightarrow \quad \frac{c^2}{\sqrt{c^2 - |w_{-1}(\alpha)|^2}^3} \cdot w_{-1}(\alpha) \cdot w'_{-1}(\alpha) = 1,$$

$$\forall v : v \in \left]0|c\right[\quad \Rightarrow \quad v \cdot \frac{c^2}{\sqrt{c^2 - |v|^2}^3} \cdot w'_{-1}\left(c^2 \cdot \left(\frac{c}{\sqrt{c^2 - |v|^2}} - 1\right)\right) = 1,$$

und $0 < w'_{-1}$ auf $\left]0|+\infty\right[$ und

$$\lim_{\alpha \downarrow 0} w'_{-1}(\alpha) = -\infty.$$

Beweis `a),b)` Via **lf stndkin-1-**$mT_{rel}(v)/\Phi(x)$ evident.

Beweis `c),d),e),f)` Evident via ersten Satzes dieses Kapitels.

Beweis `g)` trivial.

Beweis `h)`,i) Evident via ersten Satzes dieses Kapitels.

Beweis `j)` Es gilt für alle $\beta \in \left[0|+\infty\right[$,

$$\tilde{T}(w_{+1}(\beta)) = \beta,$$

mit $w_{+1}(\beta) \in \left[0|c\right[$, so dass

$$c^2 \cdot \left(\frac{c}{\sqrt{c^2 - |w_{+1}(\beta)|^2}} - 1\right) = \beta,$$

mit $0 \le w_{+1}(\beta) < c$. Es folgt

$$\frac{c}{\sqrt{c^2 - |w_{+1}(\beta)|^2}} = 1 + \frac{\beta}{c^2},$$

$$\sqrt{c^2 - |w_{+1}(\beta)|^2} = \frac{c}{1 + \frac{\beta}{c^2}} = \frac{c^3}{c^2 + \beta},$$

$$c^2 - \frac{c^6}{(c^2 + \beta)^2} = |w_{+1}(\beta)|^2,$$

$$\begin{aligned} w_{+1}(\beta) &= \sqrt{c^2 - \frac{c^6}{(c^2+\beta)^2}} = c \cdot \sqrt{1 - \frac{c^4}{(c^2+\beta)^2}} \\ &= c \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{c^2}{c^2+\beta}\right)^2} = c \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{1}{1 + \frac{\beta}{c^2}}\right)^2}. \end{aligned}$$

Die restlichen Aussagen sind via ersten Satzes dieses Kapitels evident.

Beweis `k)` Es gilt für alle $\alpha \in [0|+\infty[$,

$$\tilde{T}(w_{-1}(\alpha)) = \alpha,$$

mit $w_{-1}(\alpha) \in]-c|0]$, so dass

$$c^2 \cdot \left(\frac{c}{\sqrt{c^2 - |w_{-1}(\alpha)|^2}} - 1 \right) = \alpha,$$

mit $-c < w_{-1}(\alpha) \leq 0$. Es folgt

$$\frac{c}{\sqrt{c^2 - |w_{-1}(\alpha)|^2}} = 1 + \frac{\alpha}{c^2},$$

$$\sqrt{c^2 - |w_{-1}(\alpha)|^2} = \frac{c}{1 + \frac{\alpha}{c^2}} = \frac{c^3}{c^2 + \alpha},$$

$$c^2 - \frac{c^6}{(c^2+\alpha)^2} = |w_{-1}(\alpha)|^2,$$

$$\begin{aligned} w_{-1}(\alpha) = -\sqrt{c^2 - \frac{c^6}{(c^2+\alpha)^2}} &= -c \cdot \sqrt{1 - \frac{c^4}{(c^2+\alpha)^2}} \\ &= -c \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{c^2}{c^2+\alpha}\right)^2} = -c \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{1}{1+\frac{\alpha}{c^2}}\right)^2}. \end{aligned}$$

Die restlichen Aussagen sind via ersten Satzes dieses Kapitels evident. $\square$

5 $T''(\gamma^\bullet)\cdot\gamma^{\bullet\bullet}+\frac{1}{m}\cdot\Phi'(\gamma)=0$ und Energiegleichung (+1)

5.1 A posteriori

Satz

V1. $0<m\in\mathbb{R}$.

V2. $0\neq O\subseteq\mathbb{R}$ offen.

V3. $\Phi\in\mathtt{C}^1(O:\mathbb{R})$.

V4. $0<a$ und $0<b$ und $T\in\mathtt{C}^2(]-a|b[:\mathbb{R})$ und $0=T(0)$ und $0<T''$ auf $]-a|b[\setminus\{0\}$ und $\tilde{T}:]-a|b[\to\mathbb{R}$, $\tilde{T}(v)=v\cdot T'(v)-T(v)$.

V5. γ ist 1-Kurve in $\mathbb{R}$.

V6. $\mathsf{ran}\,\gamma\subseteq O$ und $-a<\gamma^\bullet<b$ auf $\mathsf{dom}\,\gamma$.

V7. $E_\circ\in\mathbb{R}$.

V8. $\forall t:t\in\mathsf{dom}\,\gamma\quad\Rightarrow\quad 2\cdot\tilde{T}(\gamma^\bullet(t))+\dfrac{2}{m}\cdot\Phi(\gamma(t))=\dfrac{2\cdot E_\circ}{m}$.

$\Rightarrow$

a) $\forall t:t\in\mathsf{dom}\,\gamma\quad\Rightarrow\quad E_\circ\geq\Phi(\gamma(t))$.

b) $\forall t:t\in\mathsf{dom}\,\gamma\quad\Rightarrow\quad(0=\gamma^\bullet(t)\Leftrightarrow E_\circ=\Phi(\gamma(t)))$.

c) Falls $I\subseteq\mathsf{dom}\,\gamma$ und I echtes reelles Intervall und $\forall t:t\in I\Rightarrow E_\circ>\Phi(\gamma(t))$, dann ($0<\gamma^\bullet$ auf I oder $\gamma^\bullet<0$ auf I).

d) Falls $I\subseteq\mathsf{dom}\,\gamma$ und I echtes reelles Intervall und $0<\gamma^\bullet$ auf I, dann ist $\gamma[I]$ echtes reelles Intervall und $\gamma[I]\subseteq O$ und

$$\forall t:t\in I\quad\Rightarrow\quad E_\circ>\Phi(\gamma(t))>E_\circ-m\cdot\overline{\beta},$$

wobei $\overline{\beta}=\lim\limits_{v\uparrow b}\tilde{T}(v)$,

und

$$\forall x:x\in\gamma[I]\quad\Rightarrow\quad 0<\frac{1}{m}\cdot(E_\circ-\Phi(x))<\overline{\beta},$$

und

$$\forall t:t\in I\quad\Rightarrow\quad\gamma^\bullet(t)=w_{+1}\left(\frac{1}{m}\cdot(E_\circ-\Phi(\gamma(t)))\right)\in\,]0|b[,$$

$$\text{wobei } w_{+1} = \left(\tilde{T} \downharpoonright [0|b[\right)^{-1}, \text{ und die Funktion}$$

$$w_{+1}\left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(.))\right) : \gamma[I] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto w_{+1}\left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(x))\right),$$

ist stetig und $\neq 0$ und

$$\forall t, s : t \in I \wedge s \in I \quad \Rightarrow \quad \int_{\gamma(s)}^{\gamma(t)} \frac{dx}{w_{+1}\left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(x))\right)} = t - s.$$

e) Falls $I \subseteq \mathsf{dom}\,\gamma$ und I echtes reelles Intervall und $\gamma^\bullet < 0$ auf I, dann ist $\gamma[I]$ echtes reelles Intervall und $\gamma[I] \subseteq O$ und

$$\forall t : t \in I \quad \Rightarrow \quad E_\circ > \Phi(\gamma(t)) > E_\circ - m \cdot \overline{\alpha},$$

$$\text{wobei } \overline{\alpha} = \lim_{v \downarrow -a} \tilde{T}(v),$$

und

$$\forall x : x \in \gamma[I] \quad \Rightarrow \quad 0 < \frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(x)) < \overline{\alpha},$$

und

$$\forall t : t \in I \quad \Rightarrow \quad \gamma^\bullet(t) = w_{-1}\left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(\gamma(t)))\right) \in]-a|0[,$$

$$\text{wobei } w_{-1} = \left(\tilde{T} \downharpoonright [-a|0[\right)^{-1}, \text{ und die Funktion}$$

$$w_{-1}\left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(.))\right) : \gamma[I] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto w_{-1}\left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(x))\right),$$

ist stetig und $\neq 0$ und

$$\forall t, s : t \in I \wedge s \in I \quad \Rightarrow \quad \int_{\gamma(s)}^{\gamma(t)} \frac{dx}{w_{-1}\left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(x))\right)} = t - s.$$

f) Falls $I \subseteq \mathsf{dom}\,\gamma$ und I echtes reelles Intervall und $\forall t : t \in I \Rightarrow E_\circ > \Phi(\gamma(t))$, dann ist γ zweimal stetig differenzierbar auf I und es gilt

$$\forall t : t \in I \quad \Rightarrow \quad T''(\gamma^\bullet(t)) \cdot \gamma^{\bullet\bullet}(t) + \frac{1}{m} \cdot \Phi'(\gamma(t)) = 0.$$

<u>Beweis</u> `a)` Wie in T **konvex und** $\tilde{T}$ **und** $w_{\pm 1}$ fest gestellt, gilt $0 \leq \tilde{T}$ auf $\left]-a|b\right[$.

<u>Beweis</u> `b)` Offenbar gilt für alle $t \in \mathsf{dom}\,\gamma$, dass $E_\circ = \Phi(\gamma(t))$ genau dann, wenn $0 = \tilde{T}(\gamma^\bullet(t))$ und dies ist via T **konvex und** $\tilde{T}$ **und** $w_{\pm 1}$ genau dann der Fall, wenn $0 = \gamma^\bullet(t)$.

<u>Beweis</u> `c)` Es folgt für alle $t \in I$ die strikte Abschätzung $0 < \tilde{T}(\gamma^\bullet(t))$, so dass insbesondere für alle $t \in I$ die Ungleichung $0 \neq \tilde{T}(\gamma^\bullet(t))$ folgt. Hieraus via T **konvex und** $\tilde{T}$ **und** $w_{\pm 1}$, $0 \neq \gamma^\bullet$ auf I. Da I echtes reelles Interall ist und da γ differenzierbar auf I ist, folgt $0 < \gamma^\bullet$ auf I oder $\gamma^\bullet < 0$ auf I.

<u>Beweis</u> `d)` γ stetig und streng wachsend auf dem echten reellen Intervall I. Also ist $\gamma[I]$ echtes reelles Intervall. Auch gilt $\gamma[I] \subseteq \mathsf{ran}\,\gamma \subseteq O$. Es gilt $0 \neq \gamma^\bullet$ auf I, so dass via `a)` und `b)` $E_\circ > \Phi(\gamma(t))$ für alle $t \in I$. Via T **konvex und** $\tilde{T}$ **und** $w_{\pm 1}$ gilt $\tilde{T}[[0|b[] = [0|\overline{\beta}[$, so dass, da $0 < \gamma^\bullet < b$ auf I, $0 \leq \tilde{T}(\gamma^\bullet(t)) < \overline{\beta}$ für alle $t \in I$ folgt. Hieraus ergibt sich, da $\gamma[I]$ genau aus allen $\gamma(t)$ mit $t \in I$ besteht, die Aussage $\forall x : x \in \gamma[I] \Rightarrow 0 < \frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(x)) < \overline{\beta}$. Für alle $t \in I$ gilt $\tilde{T}(\gamma^\bullet(t)) = \frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(\gamma(t)))$, wobei gemäß Voraussetzungen $0 < \gamma^\bullet(t) < b$. Hieraus folgt via der in T **konvex und** $\tilde{T}$ **und** $w_{\pm 1}$ dargestellten Eigenschaften von w_{+1} für alle $t \in I$,

$$\gamma^\bullet(t) = w_{+1}\left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(\gamma(t)))\right).$$

Da w_{+1} via T **konvex und** $\tilde{T}$ **und** $w_{\pm 1}$ stetig ist und da Φ stetig ist, ist die Funktion $w_{+1}\left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(.))\right) : \gamma[I] \to \mathbb{R}$ stetig und nimmt via obiger Gleichung für $\gamma^\bullet(t)$, $t \in I$, nur Werte in $]0|b[$ an, ist insbesondere $\neq 0$. Somit ist

$$\Lambda : \gamma[I] \to \mathbb{R}, \quad \Lambda(u) = \int_{\gamma(s)}^{u} \frac{dx}{w_{+1}\left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(x))\right)},$$

in $\mathtt{C}^1(\gamma[I] : \mathbb{R})$. Es folgt für alle $t \in I$,

$$(\Lambda \circ \gamma)^\bullet(t) = \gamma^\bullet(t) \cdot \frac{1}{w_{+1}\left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(\gamma(t)))\right)},$$

und dieser Term ist, da für alle $t \in I$ die Aussage

$$\gamma^\bullet(t) = w_{+1}\left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(\gamma(t)))\right) \neq 0$$

gilt, stets $= 1$. Somit gibt es $A \in \mathbb{R}$, so dass

$$\forall t : t \in I \quad \Rightarrow \quad \Lambda(\gamma(t)) = A + t,$$

woraus wegen $\Lambda(\gamma(s)) = 0$ die Gleichung $0 = A + s$ und hieraus $A = -s$ folgt. Konsequenz:

$$\forall t : t \in I \quad \Rightarrow \quad \int_{\gamma(s)}^{\gamma(t)} \frac{dx}{w_{+1}\left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(x))\right)} = \Lambda(\gamma(t)) = t - s.$$

<u>Beweis</u> `e)*` γ stetig und streng fallend auf dem echten reellen Intervall I. Also ist $\gamma[I]$ echtes reelles Intervall. Auch gilt $\gamma[I] \subseteq \mathsf{ran}\,\gamma \subseteq O$. Es gilt $0 \neq \gamma^\bullet$ auf I, so dass via `a)` und `b)` $E_\circ > \Phi(\gamma(t))$ für alle $t \in I$. Via T **konvex und** $\tilde{T}$ **und** $w_{\pm 1}$ gilt $\tilde{T}[\,\llbracket -a|0\llbracket\,] = \llbracket 0|\overline{\alpha}\llbracket$, so dass, da $-a < \gamma^\bullet < 0$ auf I, $0 \leq \tilde{T}(\gamma^\bullet(t)) < \overline{\alpha}$ für alle $t \in I$ folgt. Hieraus ergibt sich, da $\gamma[I]$ genau aus allen $\gamma(t)$ mit $t \in I$ besteht, die Aussage $\forall x : x \in \gamma[I] \Rightarrow 0 < \frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(x)) < \overline{\alpha}$. Für alle $t \in I$ gilt $\tilde{T}(\gamma^\bullet(t)) = \frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(\gamma(t)))$, wobei gemäß Voraussetzungen $-a < \gamma^\bullet(t) < 0$. Hieraus folgt via der in T **konvex und** $\tilde{T}$ **und** $w_{\pm 1}$ dargestellten Eigenschaften von w_{-1} für alle $t \in I$,

$$\gamma^\bullet(t) = w_{-1}\left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(\gamma(t)))\right).$$

Da w_{-1} via T **konvex und** $\tilde{T}$ **und** $w_{\pm 1}$ stetig ist und da Φ stetig ist, ist die Funktion $w_{-1}\left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(.))\right) : \gamma[I] \to \mathbb{R}$ stetig und nimmt via obiger Gleichung für $\gamma^\bullet(t)$, $t \in I$, nur Werte in $\rrbracket -a|0\llbracket$ an, ist insbesondere $\neq 0$. Somit ist

$$\Lambda : \gamma[I] \to \mathbb{R}, \quad \Lambda(u) = \int_{\gamma(s)}^{u} \frac{dx}{w_{-1}\left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(x))\right)},$$

in $\mathtt{C}^1(\gamma[I] : \mathbb{R})$. Es folgt für alle $t \in I$,

$$(\Lambda \circ \gamma)^\bullet(t) = \gamma^\bullet(t) \cdot \frac{1}{w_{-1}\left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(\gamma(t)))\right)},$$

und dieser Term ist, da für alle $t \in I$ die Aussage

$$\gamma^\bullet(t) = w_{-1}\left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(\gamma(t)))\right) \neq 0$$

gilt, stets $= 1$. Somit gibt es $A \in \mathbb{R}$, so dass

$$\forall t : t \in I \quad \Rightarrow \quad \Lambda(\gamma(t)) = A + t,$$

woraus wegen $\Lambda(\gamma(s)) = 0$ die Gleichung $0 = A + s$ und hieraus $A = -s$ folgt. Konsequenz:

$$\forall t : t \in I \quad \Rightarrow \quad \int_{\gamma(s)}^{\gamma(t)} \frac{dx}{w_{-1}\left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(x))\right)} = \Lambda(\gamma(t)) = t - s.$$

<u>Beweis</u> `f)` Es gibt a, b mit $a < b$ und $I = \rrbracket a|b\llbracket$ oder ($I = \llbracket a|b\llbracket$ und $a \in \mathsf{dom}\,\gamma$) oder ($I = \rrbracket a|b\rrbracket$ und $b \in \mathsf{dom}\,\gamma$) oder ($I = \llbracket a|b\rrbracket$ und $a \in \mathsf{dom}\,\gamma$ und $b \in \mathsf{dom}\,\gamma$). Im ersten Fall ist I offen, also auch $\mathsf{dom}\,\gamma$-relativ offen. Im zweiten Fall gibt es, da $E_\circ - \Phi(\gamma(a)) > 0$ gilt und Φ, γ stetig sind, ein ϵ mit $0 < \epsilon \in \mathbb{R}$ und $E_\circ - \Phi \circ \gamma > 0$ auf $(\mathsf{dom}\,\gamma) \cap (\rrbracket a - \epsilon|a + \epsilon\llbracket)$ und $\tilde{I} = (\mathsf{dom}\,\gamma) \cup (\rrbracket a - \epsilon|a + \epsilon\llbracket \cup I)$ ist ein $\mathsf{dom}\,\gamma$-relativ

offenes, echtes reelles Intervall mit $I \subseteq \tilde{I}$ und $E_\circ - \Phi \circ \gamma > 0$ auf $\tilde{I}$. Im dritten Fall gibt es, da $E_\circ - \Phi(\gamma(b)) > 0$ gilt und Φ, γ stetig sind, ein ϵ mit $0 < \epsilon \in \mathbb{R}$ und $E_\circ - \Phi \circ \gamma > 0$ auf $(\mathsf{dom}\,\gamma) \cap (]b-\epsilon|b+\epsilon[)$ und $\tilde{I} = (\mathsf{dom}\,\gamma) \cup (]b-\epsilon|b+\epsilon[\cup I)$ ist ein $\mathsf{dom}\,\gamma$-relativ offenes, echtes reelles Intervall mit $I \subseteq \tilde{I}$ und $E_\circ - \Phi \circ \gamma > 0$ auf $\tilde{I}$. Im vierten Fall gibt es, da $E_\circ - \Phi(\gamma(a)) > 0$ und $E_\circ - \Phi(\gamma(b)) > 0$ gilt und Φ, γ stetig sind, ein ϵ mit $0 < \epsilon \in \mathbb{R}$ und $E_\circ - \Phi \circ \gamma > 0$ auf $(\mathsf{dom}\,\gamma) \cap (]a-\epsilon|a+\epsilon[\cup]b-\epsilon|b+\epsilon[)$ und $\tilde{I} = (\mathsf{dom}\,\gamma) \cup ((]a-\epsilon|a+\epsilon[\cup]b-\epsilon|b+\epsilon[) \cup I)$ ist ein $\mathsf{dom}\,\gamma$-relativ offenes, echtes reelles Intervall mit $I \subseteq \tilde{I}$ und $E_\circ - \Phi \circ \gamma > 0$ auf $\tilde{I}$. In jedem Fall gibt es ein $\mathsf{dom}\,\gamma$-relativ offenes, echtes reelles Intervall $\tilde{I}$ mit $I \subseteq \tilde{I}$ und $E_\circ - \Phi \circ \gamma > 0$ auf $\tilde{I}$. Via `c),d),e)` gibt es je nach Vorzeichen von $\gamma^\bullet$ auf $\tilde{I}$ ein $\lambda \in \{\pm 1\}$ mit

$$\forall t : t \in \tilde{I} \quad \Rightarrow \quad \gamma^\bullet(t) = w_\lambda\left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(\gamma(t))\right).$$

Die stetige Differenzierbarkeit von Φ und γ und die via T **konvex und** $\tilde{T}$ **und** $w_{\pm 1}$ für Argumente$\neq 0$ bestehende stetige Differenzierbarkeit von w_λ impliziert, da $\tilde{I}$ ein $\mathsf{dom}\,\gamma$-relativ offenes, echtes reelles Intervall ist, die stetige Differenzierbarkeit von $\gamma^\bullet$ auf $\tilde{I}$. Es folgt, dass γ zweimal stetig differenzierbar auf $\tilde{I}$ ist und für alle $t \in \tilde{I}$ gilt via T **konvex und** $\tilde{T}$ **und** $w_\pm$,

$$\begin{aligned}
&T''(\gamma^\bullet(t)) \cdot \gamma^{\bullet\bullet}(t) + \frac{1}{m} \cdot \Phi'(\gamma(t)) \\
&= T''(\gamma^\bullet(t)) \cdot w'_\lambda\left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(\gamma(t))\right) \cdot \left(-\frac{1}{m} \cdot \Phi'(\gamma(t))\right) \cdot \gamma^\bullet(t) + \frac{1}{m} \cdot \Phi'(\gamma(t)) \\
&\qquad = T''(\gamma^\bullet(t)) \cdot w'_\lambda\left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(\gamma(t))\right) \cdot \left(-\frac{1}{m} \cdot \Phi'(\gamma(t))\right) \cdot \\
&\qquad\qquad w_\lambda\left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(\gamma(t))\right) + \frac{1}{m} \cdot \Phi'(\gamma(t)) \\
&\qquad = T''\left(w_\lambda\left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(\gamma(t))\right)\right) \cdot w_\lambda\left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(\gamma(t))\right) \\
&\qquad \cdot w'_\lambda\left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(\gamma(t))\right) \cdot \left(-\frac{1}{m} \cdot \Phi'(\gamma(t))\right) + \frac{1}{m} \cdot \Phi'(\gamma(t)) \\
&\qquad\qquad\qquad = 1 \cdot \left(-\frac{1}{m} \cdot \Phi'(\gamma(t))\right) + \frac{1}{m} \cdot \Phi'(\gamma(t)) = 0,
\end{aligned}$$

und diese Aussagen treffen wegen $I \subseteq \tilde{I}$ auch auf alle $t \in I$ zu. □

⋆

Satz

V1. $0 < m \in \mathbb{R}$.

V2. $0 \neq O \subseteq \mathbb{R}$ offen.

V3. $\Phi \in \mathtt{C}^1(O : \mathbb{R})$.

V4. $J \subseteq O$. J echtes reelles Intervall.

V5. $0 < a$ und $0 < b$ und $T \in \mathtt{C}^2(]-a|b[: \mathbb{R})$ und $0 = T(0)$ und $0 < T''$ auf $]-a|b[\setminus \{0\}$ und $\tilde{T} :]-a|b[\to \mathbb{R}$, $\tilde{T}(v) = v \cdot T'(v) - T(v)$.

V6. $E_\circ \in \mathbb{R}$.

V7. $\forall x : x \in J \quad \Rightarrow \quad E_\circ > \Phi(x) > E_\circ - m \cdot \overline{\beta}$, wobei $\overline{\beta} = \lim_{v \uparrow b} \tilde{T}$.

V8. Λ Stammfunktion von $\dfrac{1}{w_{+1}\left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(.))\right)}$ auf J,

wobei $w_{+1} = \left(\tilde{T} \downharpoonright [0|b[\right)^{-1}$.

V9. $\gamma = \Lambda^{-1}$.

$\Rightarrow$

a) γ ist 2-Kurve in $\mathbb{R}$ und γ streng wachsend und $J = \mathsf{ran}\, \gamma$.

b) $\forall t : t \in \mathsf{dom}\, \gamma \quad \Rightarrow \quad \gamma^\bullet(t) = w_{+1}\left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(\gamma(t))\right) \in]0|b[$.

c) $\forall t : t \in \mathsf{dom}\, \gamma \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot \tilde{T}(\gamma^\bullet(t)) + \dfrac{2}{m} \cdot \Phi(\gamma(t)) = \dfrac{2 \cdot E_\circ}{m}$.

d) $\forall t : t \in \mathsf{dom}\, \gamma \quad \Rightarrow \quad T''(\gamma^\bullet(t)) \cdot \gamma^{\bullet\bullet}(t) + \dfrac{1}{m} \cdot \Phi'(\gamma(t)) = 0$.

e) $\forall t, s : t \in \mathsf{dom}\, \gamma \wedge s \in \mathsf{dom}\, \gamma$

$$\Rightarrow \quad \int_{\gamma(s)}^{\gamma(t)} \frac{dx}{w_{+1}\left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(x))\right)} = t - s.$$

<u>Beweis</u> a) Wie in T **konvex und** $\tilde{T}$ **und** $w_{\pm 1}$ festgestellt, ist $w_{+1} : [0|\overline{\beta}[\to [0|b[$ bijektiv, streng wachsend und positiv auf $]0|\overline{\beta}[$ und auf $]0|\overline{\beta}[$ stetig differenzierbar. Somit ist $\dfrac{1}{w_{+1}\left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(.))\right)}$ auf J stetig differenzierbar und positiv. Also ist Λ zweimal stetig differenzierbar, streng wachsend mit positiver Ableitung. Demnach ist $\mathsf{ran}\, \Lambda = \mathsf{dom}\, \gamma$ ein echtes reelles Intervall und $\gamma = \Lambda^{-1} : \mathsf{ran}\, \Lambda \to J$ bijektiv ist streng wachsend und zweimal stetig differenzierbar.

Beweis b) Für alle $t \in \mathsf{dom}\,\gamma$ gilt $\Lambda(\gamma(t)) = \Lambda(\Lambda^{-1}(t)) = t$, so dass wegen der stetigen Differenzierbarkeit der involvierten Funktionen für alle $t \in \mathsf{dom}\,\gamma$,

$$1 = \Lambda'(\gamma(t)) \cdot \gamma^\bullet(t) = \frac{1}{w_{+1}\left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(\gamma(t)))\right)} \cdot \gamma^\bullet(t),$$

gilt. Da für alle $t \in \mathsf{dom}\,\gamma$ die Aussage $\gamma(t) \in J$ gilt, gilt für diese t auch

$$0 \neq w_{+1}\left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(\gamma(t))\right).$$

Es folgt

$$\forall t : t \in \mathsf{dom}\,\gamma \quad \Rightarrow \quad \gamma^\bullet(t) = w_{+1}\left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(\gamma(t))\right).$$

Gemäss Voraussetzung und nach Konstruktion gilt für alle $t \in \mathsf{dom}\,\gamma$ die Aussage $E_\circ > \Phi(\gamma(t)) > m \cdot \overline{\beta}$, so dass für diese t auch $0 < \dfrac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(\gamma(t))) < \overline{\beta}$ gilt. Via T **konvex und** $\tilde{T}$ **und** $w_{\pm 1}$ ergibt sich hieraus via des soeben Bewiesenen für alle $t \in \mathsf{dom}\,\gamma$ die Aussage $\gamma^\bullet(t) \in \,]0|b[$.

Beweis c) Nach Konstruktion gilt $0 < \dfrac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(\gamma(t))) < \overline{\beta}$ für alle $t \in \mathsf{dom}\,\gamma$. Hieraus und aus b) folgt via T **konvex und** $\tilde{T}$ **und** $w_{\pm 1}$ für alle $t \in \mathsf{dom}\,\gamma$ die Aussage

$$\tilde{T}(\gamma^\bullet(t)) = \tilde{T}\left(w_{+1}\left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(\gamma(t))\right)\right) = \frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(\gamma(t))).$$

Beweis d) Aus b) folgt, dass $\gamma^\bullet$ keine Nullstellen in $\mathsf{dom}\,\gamma$ hat. Nun folgt die zu beweisende Aussage via $T''(\gamma^\bullet(t)) \cdot \gamma^{\bullet\bullet}(t) + \frac{1}{m} \cdot \Phi'(\gamma(t)) = 0$ **und Energiegleichung. A posteriori** aus c).

Beweis e) Wie im Beweis von b) gezeigt gilt für alle $t, s \in \mathsf{dom}\,\gamma$,

$$\Lambda(\gamma(t)) = t, \quad \Lambda(\gamma(s)) = s,$$

so dass

$$\Lambda(\gamma(t)) - \Lambda(\gamma(s)) = \int_{\gamma(s)}^{\gamma(t)} \frac{dx}{w_{+1}\left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(x))\right)} = t - s.$$

$\square$

$\star$

Satz*

V1. $0 < m \in \mathbb{R}$.

V2. $0 \neq O \subseteq \mathbb{R}$ offen.

V3. $\Phi \in \mathtt{C}^1(O : \mathbb{R})$.

V4. $J \subseteq O$. J echtes reelles Intervall.

V5. $0 < a$ und $0 < b$ und $T \in \mathtt{C}^2(]-a|b[: \mathbb{R})$ und $0 = T(0)$ und $0 < T''$ auf $]-a|b[\setminus \{0\}$ und $\tilde{T} :]-a|b[\to \mathbb{R}$, $\tilde{T}(v) = v \cdot T'(v) - T(v)$.

V6. $E_\circ \in \mathbb{R}$.

V7. $\forall x : x \in J \quad \Rightarrow \quad E_\circ > \Phi(x) > E_\circ - m \cdot \overline{\alpha}$, wobei $\overline{\alpha} = \lim\limits_{v \downarrow -a} \tilde{T}$.

V8. Λ Stammfunktion von $\dfrac{1}{w_{-1}\left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(.))\right)}$ auf J,

wobei $w_{-1} = \left(\tilde{T} \downharpoonright]-a|0]\right)^{-1}$.

V9. $\gamma = \Lambda^{-1}$.

$\Rightarrow$

a) γ ist 2-Kurve in $\mathbb{R}$ und γ streng fallend und $J = \mathsf{ran}\,\gamma$.

b) $\forall t : t \in \mathsf{dom}\,\gamma \quad \Rightarrow \quad \gamma^\bullet(t) = w_{-1}\left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(\gamma(t))\right) \in]-a|0[$.

c) $\forall t : t \in \mathsf{dom}\,\gamma \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot \tilde{T}(\gamma^\bullet(t)) + \dfrac{2}{m} \cdot \Phi(\gamma(t)) = \dfrac{2 \cdot E_\circ}{m}$.

d) $\forall t : t \in \mathsf{dom}\,\gamma \quad \Rightarrow \quad T''(\gamma^\bullet(t)) \cdot \gamma^{\bullet\bullet}(t) + \dfrac{1}{m} \cdot \Phi'(\gamma(t)) = 0$.

e) $\forall t, s : t \in \mathsf{dom}\,\gamma \wedge s \in \mathsf{dom}\,\gamma$

$$\Rightarrow \quad \int_{\gamma(s)}^{\gamma(t)} \frac{dx}{w_{-1}\left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(x))\right)} = t - s.$$

Beweis* a) Wie in T **konvex und** $\tilde{T}$ **und** $w_{\pm 1}$ festgestellt, ist $w_{-1} : [0|\overline{\alpha}[\to]-a|0]$ bijektiv, streng fallend und negativ auf $]0|\overline{\alpha}[$ und auf $]0|\overline{\alpha}[$ stetig differenzierbar. Somit ist $\dfrac{1}{w_{-1}\left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(.))\right)}$ auf J stetig differenzierbar und negativ. Also ist Λ zweimal stetig differenzierbar, streng fallend mit negativer Ableitung. Demnach ist $\mathsf{ran}\,\Lambda = \mathsf{dom}\,\gamma$ ein echtes reelles Intervall und $\gamma = \Lambda^{-1} : \mathsf{ran}\,\Lambda \to J$ bijektiv ist streng fallend und zweimal stetig differenzierbar.

Beweis* `b)` Für alle $t \in \mathsf{dom}\,\gamma$ gilt $\Lambda(\gamma(t)) = \Lambda(\Lambda^{-1}(t)) = t$, so dass wegen der stetigen Differenzierbarkeit der involvierten Funktionen für alle $t \in \mathsf{dom}\,\gamma$,

$$1 = \Lambda'(\gamma(t)) \cdot \gamma^\bullet(t) = \frac{1}{w_{-1}\left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(\gamma(t)))\right)} \cdot \gamma^\bullet(t),$$

gilt. Da für alle $t \in \mathsf{dom}\,\gamma$ die Aussage $\gamma(t) \in J$ gilt, gilt für diese t auch

$$0 \neq w_{-1}\left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(\gamma(t))\right).$$

Es folgt

$$\forall t : t \in \mathsf{dom}\,\gamma \quad \Rightarrow \quad \gamma^\bullet(t) = w_{-1}\left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(\gamma(t))\right).$$

Gemäss Voraussetzung und nach Konstruktion gilt für alle $t \in \mathsf{dom}\,\gamma$ die Aussage $E_\circ > \Phi(\gamma(t)) > m \cdot \overline{\alpha}$, so dass für diese t auch $0 < \dfrac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(\gamma(t))) < \overline{\alpha}$ gilt. Via T **konvex und** $\tilde{T}$ **und** $w_{\pm 1}$ ergibt sich hieraus via des soeben Bewiesenen für alle $t \in \mathsf{dom}\,\gamma$ die Aussage $\gamma^\bullet(t) \in \,]-a|0[$.

Beweis* `c)` Nach Konstruktion gilt $0 < \dfrac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(\gamma(t))) < \overline{\alpha}$ für alle $t \in \mathsf{dom}\,\gamma$. Hieraus und aus `b)` folgt via T **konvex und** $\tilde{T}$ **und** $w_{\pm 1}$ für alle $t \in \mathsf{dom}\,\gamma$ die Aussage

$$\tilde{T}(\gamma^\bullet(t)) = \tilde{T}\left(w_{-1}\left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(\gamma(t))\right)\right) \frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(\gamma(t))).$$

Beweis* `d)` Aus `b)` folgt, dass $\gamma^\bullet$ keine Nullstellen in $\mathsf{dom}\,\gamma$ hat. Nun folgt die zu beweisende Aussage via $T''(\gamma^\bullet(t)) \cdot \gamma^{\bullet\bullet}(t) + \frac{1}{m} \cdot \Phi'(\gamma(t)) = 0$ **und Energiegleichung. A posteriori** aus `c)`.

Beweis* `e)` Wie im Beweis von `b)` gezeigt gilt für alle $t, s \in \mathsf{dom}\,\gamma$,

$$\Lambda(\gamma(t)) = t, \quad \Lambda(\gamma(s)) = s,$$

so dass

$$\Lambda(\gamma(t)) - \Lambda(\gamma(s)) = \int_{\gamma(s)}^{\gamma(t)} \frac{dx}{w_{-1}\left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(x))\right)} = t - s.$$

$\square$

5.2 Energieerhaltung und Eindeutigkeit

HilfsSatz

`V1.` $0 < m \in \mathbb{R}$.

`V2.` $0 \neq O \subseteq \mathbb{R}$ offen.

`V3.` $\Phi \in \mathtt{C}^1(O : \mathbb{R})$.

`V4.` $0 < a$ und $0 < b$ und $T \in \mathtt{C}^2(]-a|b[\, : \mathbb{R})$ und $0 = T(0)$ und $0 < T''$ auf $]-a|b[\, \setminus \{0\}$ und $\tilde{T} :]-a|b[\, \to \mathbb{R}$, $\tilde{T}(v) = v \cdot T'(v) - T(v)$.

`V5.` γ ist 1-Kurve in $\mathbb{R}$ und $\overline{\gamma}$ ist 1-Kurve in $\mathbb{R}$.

`V6.` $\mathsf{ran}\,\gamma \subseteq O$ und $-a < \gamma^\bullet < b$ auf $\mathsf{dom}\,\gamma$
und $\mathsf{ran}\,\overline{\gamma} \subseteq O$ umd $-a < \overline{\gamma}^\bullet < b$ auf $\mathsf{dom}\,\overline{\gamma}$.

`V7.` $E_\circ \in \mathbb{R}$ und $\overline{E}_\circ \in \mathbb{R}$.

`V8.` $\forall t : t \in \mathsf{dom}\,\gamma \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot \tilde{T}(\gamma^\bullet(t)) + \dfrac{2}{m} \cdot \Phi(\gamma(t)) = \dfrac{2 \cdot E_\circ}{m}$
und $\forall t : t \in \mathsf{dom}\,\overline{\gamma} \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot \tilde{T}(\overline{\gamma}^\bullet(t)) + \dfrac{2}{m} \cdot \Phi(\overline{\gamma}(t)) = \dfrac{2 \cdot \overline{E}_\circ}{m}$.

`V9.` $I \subseteq \mathsf{dom}\,\gamma$ und I echtes reelles Intervall und

$$\forall t : t \in I \quad \Rightarrow \quad E_\circ > \Phi(\gamma(t)).$$

`V10.` $s \in I \cap \mathsf{dom}\,\overline{\gamma}$ und $\gamma(s) = \overline{\gamma}(s)$ und $0 < \gamma^\bullet(s) = \overline{\gamma}^\bullet(s)$.

$\Rightarrow$

`a)` $E_\circ = \overline{E_\circ}$.

`b)` $\forall t : t \in I \cap \mathsf{dom}\,\overline{\gamma} \quad \Rightarrow \quad \overline{\gamma}(t) = \gamma(t)$ und $\overline{\gamma}^\bullet(t) = \gamma^\bullet(t)$.

<u>Beweis</u> `a)` Wegen $s \in I \subseteq \mathsf{dom}\,\gamma$ gilt

$$2 \cdot \tilde{T}(\gamma^\bullet(s)) + \frac{2}{m} \cdot \Phi(\gamma(s)) = \frac{2 \cdot E_\circ}{m},$$

und wegen $s \in \mathsf{dom}\,\overline{\gamma}$ gilt

$$2 \cdot \tilde{T}(\overline{\gamma}^\bullet(s)) + \frac{2}{m} \cdot \Phi(\overline{\gamma}(s)) = \frac{2 \cdot \overline{E}_\circ}{m},$$

und wegen $\gamma(s) = \overline{\gamma}(s)$ und $\gamma^\bullet(s) = \overline{\gamma}^\bullet(s)$ gilt

$$2 \cdot \tilde{T}(\gamma^\bullet(s)) + \frac{2}{m} \cdot \Phi(\gamma(s)) = 2 \cdot \tilde{T}(\overline{\gamma}^\bullet(s)) + \frac{2}{m} \cdot \Phi(\overline{\gamma}(s)).$$

so dass $\dfrac{2\cdot E_\circ}{m}=\dfrac{2\cdot\overline{E_\circ}}{m}$, woraus wegen $0\neq m\in\mathbb{R}$ die Gleichung $E_\circ=\overline{E_\circ}$ folgt.

<u>Beweis</u> b) $I\cap\mathsf{dom}\,\overline{\gamma}$ ist ein reelles Intervall. Im Fall $\{s\}=I\cap\mathsf{dom}\,\overline{\gamma}$ ist wegen $\gamma(s)=\overline{\gamma}(s)$ und $\gamma^\bullet(s)=\overline{\gamma}^\bullet(s)$ nichts weiter zu beweisen. Andernfalls ist $I\cap\mathsf{dom}\,\overline{\gamma}$ ein echtes reelles Intervall. Seien

$$J=\bigcup\{\omega:\gamma(s)\in\omega\subseteq O\wedge\omega\text{ reelles Intervall}\wedge E_\circ>\Phi>E_\circ-m\cdot\overline{\beta}\text{ auf }\omega\},$$

und

$$\overline{J}=\bigcup\{\omega:\overline{\gamma}(s)\in\omega\subseteq O\wedge\omega\text{ reelles Intervall}\wedge\overline{E_\circ}>\Phi>\overline{E_\circ}-m\cdot\overline{\beta}\text{ auf }\omega\},$$

wobei $\overline{\beta}=\lim\limits_{v\uparrow b}\tilde{T}(v)$. Wegen $\gamma(s)=\overline{\gamma}(s)$ und a) gilt $J=\overline{J}$. Aus $E_\circ>\Phi(\gamma(s))$ und $0<\gamma^\bullet(s)$ folgen via $T''(\gamma^\bullet)\cdot\gamma^{\bullet\bullet}+\frac{1}{m}\cdot\Phi'(\gamma)=0$ **und Energiegleichung (+1). A posteriori** die Abschätzungen $E_\circ>\Phi\circ\gamma>E_\circ-m\cdot\overline{\beta}$ und $0<\gamma^\bullet$ auf I. Damit ist $\gamma[I]$ ein echtes reelles Intervall. Via $s\in I\cap\mathsf{dom}\,\overline{\gamma}\subseteq I$ und $\gamma[I]\subseteq\mathsf{ran}\,\gamma\subseteq O$ folgt hieraus $\gamma[I]\subseteq J$ und damit ist J ein echtes reelles Intervall$\subseteq O$ mit $\gamma(s)\in J$. Es gilt

$$\forall x:x\in J\quad\Rightarrow\quad 0<\frac{1}{m}\cdot(E_\circ-\Phi(x))<\overline{\beta},$$

so dass, wie in T **konvex und** $\tilde{T}$ **und** $w_{\pm1}$ dargelegt,

$$\forall x:x\in J\quad\Rightarrow\quad 0<w_{+1}\left(\frac{1}{m}\cdot(E_\circ-\Phi(x))\right)<b,$$

und es via der Stetigkeit von w_{+1} eine Stammfunktion Λ von

$$\frac{1}{w_{+1}\left(\frac{1}{m}\cdot(E_\circ-\Phi(.))\right)}:J\to\mathbb{R},\quad x\mapsto\frac{1}{w_{+1}\left(\frac{1}{m}\cdot(E_\circ-\Phi(x))\right)},$$

mit $\Lambda(\gamma(s))=0$ gibt. Es gilt $\Lambda\in\mathsf{C}^1(J:\mathbb{R})$ mit $0<\Lambda^\bullet$ auf J und

$$\Lambda:J\to\mathbb{R},\quad\Lambda(u)=\int_{\gamma(s)}^{u}\frac{dx}{w_{+1}\left(\frac{1}{m}\cdot(E_\circ-\Phi(x))\right)}.$$

Via $\gamma[I]\subseteq J$ und $\gamma[I]$ echtes reelles Intervall ist Λ Stammfunktion von $\frac{1}{w_{+1}\left(\frac{1}{m}\cdot(E_\circ-\Phi(.))\right)}$ auf $\gamma[I]$ und via $T''(\gamma^\bullet)\cdot\gamma^{\bullet\bullet}+\frac{1}{m}\cdot\Phi'(\gamma)=0$ **und Energiegleichung (+1). A posteriori** folgt

$$\forall t:t\in I\quad\Rightarrow\quad\Lambda(\gamma(t))=t-s.$$

Sei

$$\overline{I}=\bigcup\left\{\omega:s\in\omega\subseteq I\cap\mathsf{dom}\,\overline{\gamma}\wedge\omega\text{ reelles Intervall}\wedge\overline{E_\circ}>\Phi\circ\overline{\gamma}\text{ auf }\omega\right\}.$$

Da $s \in I \cap \mathsf{dom}\,\overline{\gamma}$ und da via `a)` und nach Voraussetzung

$$\overline{E_\circ} = E_\circ > \Phi(\gamma(s)) = \Phi(\overline{\gamma}(s)),$$

gilt und da Φ und $\overline{\gamma}$ stetig sind, ist $\overline{I}$ ein echtes reelles Intervall mit $s \in \overline{I} \subseteq I \cap \mathsf{dom}\,\overline{\gamma}$. Aus $E_\circ > \Phi(\overline{\gamma}(s))$ und $0 < \gamma^\bullet(s) = \overline{\gamma}^\bullet(s)$ folgen via $T''(\gamma^\bullet) \cdot \gamma^{\bullet\bullet} + \frac{1}{m} \cdot \Phi'(\gamma) = 0$ **und Energiegleichung (+1). A posteriori** die Abschätzungen $\overline{E_\circ} > \Phi \circ \overline{\gamma} > \overline{E_\circ} - m \cdot \overline{\beta}$ und $0 < \overline{\gamma}^\bullet$ auf $\overline{I}$. Damit ist $\overline{\gamma}[\overline{I}]$ ein echtes reelles Intervall. Es gilt $\overline{\gamma}(s) \in \overline{\gamma}[\overline{I}]$ und $\overline{\gamma}[\overline{I}]$ ist reelles Intervall. Aus mengentheoretischen Gründen muss auch für alle $t \in \overline{I}$ die Aussage $\overline{\gamma}(t) \in \mathsf{dom}\,\Phi = O$ gelten. Es folgt $\overline{\gamma}[\overline{I}] \subseteq O$ und hiermit $\overline{\gamma}[\overline{I}] \subseteq \overline{J}$. Wegen $J = \overline{J}$ ist $\overline{J}$ ein echtes reelles Intervall$\subseteq O$ mit $\overline{\gamma}(s) \in \overline{J}$. Es gilt

$$\forall x : x \in \overline{J} \quad \Rightarrow \quad 0 < \frac{1}{m} \cdot (\overline{E_\circ} - \Phi(x)) < \overline{\beta},$$

so dass, wie in T **konvex und** $\tilde{T}$ **und** $w_{\pm 1}$ dargelegt,

$$\forall x : x \in J \quad \Rightarrow \quad 0 < w_{+1}\left(\frac{1}{m} \cdot (\overline{E_\circ} - \Phi(x))\right) < b,$$

und es via der Stetigkeit von w_{+1} eine Stammfunktion $\overline{\Lambda}$ von

$$\frac{1}{w_{+1}\left(\frac{1}{m} \cdot (\overline{E_\circ} - \Phi(.))\right)} : \overline{J} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{w_{+1}\left(\frac{1}{m} \cdot (\overline{E_\circ} - \Phi(x))\right)},$$

mit $\overline{\Lambda}(\overline{\gamma}(s)) = 0$ gibt. Es gilt $\overline{\Lambda} \in \mathsf{C}^1(J : \mathbb{R})$ mit $0 < \overline{\Lambda}^\bullet$ auf $\overline{J}$ und

$$\overline{\Lambda} : \overline{J} \to \mathbb{R}, \quad \overline{\Lambda}(u) = \int_{\overline{\gamma}(s)}^{u} \frac{dx}{w_{+1}\left(\frac{1}{m} \cdot (\overline{E_\circ} - \Phi(x))\right)}.$$

Wie oben gezeigt, gilt $\overline{\gamma}[\overline{I}] \subseteq \overline{J}$ und $\overline{\gamma}[\overline{I}]$ ist ein echtes reelles Intervall. Somit ist $\overline{\Lambda}$ Stammfunktion von $\frac{1}{w_{+1}\left(\frac{1}{m} \cdot (\overline{E_\circ} - \Phi(.))\right)}$ auf $\overline{\gamma}[\overline{I}]$ und via $T''(\gamma^\bullet) \cdot \gamma^{\bullet\bullet} + \frac{1}{m} \cdot \Phi'(\gamma) = 0$ **und Energiegleichung (+1). A posteriori** folgt

$$\forall t : t \in \overline{I} \quad \Rightarrow \quad \overline{\Lambda}(\overline{\gamma}(t)) = t - s.$$

Aus $\overline{I} \subseteq I \cap \mathsf{dom}\,\overline{\gamma} \subseteq I$ und aus `a)` und aus $\gamma(s) = \overline{\gamma}(s)$ folgt $\Lambda = \overline{\Lambda}$ auf $\overline{I}$ und somit

$$\forall t : t \in \overline{I} \quad \Rightarrow \quad \Lambda(\overline{\gamma}(t)) = \overline{\Lambda}(\overline{\gamma}(t)) = t - s = \Lambda(\gamma(t)).$$

Da für alle $t \in \overline{I}$ die Aussagen $\overline{\gamma}(t) \in \overline{\gamma}[\overline{I}] \subseteq \overline{J} = J$ und $\gamma(t) \in \gamma[I] \subseteq J$ gelten und da Λ auf J wegen positiver Ableitung streng monoton ist, folgt

$$\forall t : t \in \overline{I} \quad \Rightarrow \quad \overline{\gamma}(t) = \gamma(t).$$

Aus $\overline{I} \subseteq I \cap \mathsf{dom}\,\overline{\gamma}$ folgt $\overline{I} = I \cap \mathsf{dom}\,\overline{\gamma}$ oder $I \subset I \cap \mathsf{dom}\,\overline{\gamma}$. Im zweiten Fall gibt es, da $\overline{I}$ und $I \cap \mathsf{dom}\,\overline{\gamma}$ echte reelle Intervalle sind, einen Häufungspunkt τ von $\overline{I}$ mit $\tau \in I \cap \mathsf{dom}\,\overline{\gamma}$ und $\tau \notin \overline{I}$. Aus $\tau \in I \cap \mathsf{dom}\,\overline{\gamma}$ folgt $\tau \in I$ und somit $E_\circ > \Phi(\gamma(\tau)) > E_\circ - m \cdot \overline{\beta}$. Da τ ein Häufungspunkt von $\overline{I}$ ist, gibt es eine Folge $\sigma : \mathbb{N} \to \overline{I}$ mit $\lim\limits_{n\uparrow+\infty} \sigma_n = \tau$. Wegen $\overline{\gamma} = \gamma$ auf $\overline{I}$ und wegen $\tau \in I \subseteq \mathsf{dom}\,\gamma$ und wegen der Stetigkeit von Φ und γ gilt

$$\lim_{n\uparrow+\infty} \Phi(\overline{\gamma}(\sigma_n)) = \lim_{n\uparrow+\infty} \Phi(\gamma(\sigma_n)) = \Phi(\gamma(\tau)),$$

und wegen der Stetigkeit von $\overline{\gamma}$ und $\tau \in \mathsf{dom}\,\overline{\gamma}$ folgt

$$\overline{\gamma}(\tau) = \lim_{n\uparrow+\infty} \overline{\gamma}(\sigma_n) = \lim_{n\uparrow+\infty} \gamma(\sigma_n) = \gamma(\tau),$$

so dass via obigem

$$E_\circ > \Phi(\overline{\gamma}(\tau)),$$

also via `a)` auch

$$\overline{E_\circ} > \Phi(\overline{\gamma}(\tau)),$$

folgt. Da τ ein Häufungspunkt von $\overline{I}$ ist und da $\overline{I}$ ein reelles Intervall ist, ist $\{\tau\} \cup \overline{I}$ ein reelles Intervall und aus $\tau \in I \cap \mathsf{dom}\,\overline{\gamma}$ und $\overline{I} \subseteq I \cap \mathsf{dom}\,\overline{\gamma}$ folgt $\{\tau\} \cup \overline{I} \subseteq I \cap \mathsf{dom}\,\overline{\gamma}$ und wegen $s \in \overline{I} \subseteq \{\tau\} \cup \overline{I}$ und $\overline{E_\circ} > \Phi \circ \overline{\gamma}$ auf $\overline{I}$ und obigem ergibt sich

$$\{\tau\} \cup \overline{I} \in \left\{\omega : s \in \omega \subseteq I \cap \mathsf{dom}\,\overline{\gamma} \wedge \omega \text{ reelles Intervall} \wedge \overline{E_\circ} > \Phi \circ \overline{\gamma} \text{ auf } \omega\right\},$$

und somit

$$\{\tau\} \cup \overline{I} \subseteq \bigcup \Big\{\omega : s \in \omega \subseteq I \cap \mathsf{dom}\,\overline{\gamma} \wedge \omega \text{ reelles Intervall} \\ \wedge\, \overline{E_\circ} > \Phi \circ \overline{\gamma} \text{ auf } \omega\Big\} = \overline{I},$$

woraus $\tau \in \overline{I}$ folgt.

Konsequenz: $\overline{I} = I \cap \mathsf{dom}\,\overline{\gamma}$ und damit

$$\forall t : t \in I \cap \mathsf{dom}\,\overline{\gamma} \quad \Rightarrow \quad \overline{\gamma}(t) = \gamma(t),$$

woraus wegen der Differenzierbarkeit von $\overline{\gamma}$ und von γ und der Tatsache, dass $I \cap \mathsf{dom}\,\overline{\gamma}$ ein echtes reelles Intervall ist, die Aussage

$$\forall t : t \in I \cap \mathsf{dom}\,\overline{\gamma} \quad \Rightarrow \quad \overline{\gamma}^\bullet(t) = \gamma^\bullet(t),$$

folgt. $\square$

$\star$

HilfsSatz*

V1. $0 < m \in \mathbb{R}$.

V2. $0 \neq O \subseteq \mathbb{R}$ offen.

V3. $\Phi \in \mathtt{C}^1(O : \mathbb{R})$.

V4. $0 < a$ und $0 < b$ und $T \in \mathtt{C}^2(]-a|b[: \mathbb{R})$ und $0 = T(0)$ und $0 < T''$ auf $]-a|b[\setminus \{0\}$ und $\tilde{T} :]-a|b[\to \mathbb{R}$, $\tilde{T}(v) = v \cdot T'(v) - T(v)$.

V5. γ ist 1-Kurve in $\mathbb{R}$ und $\overline{\gamma}$ ist 1-Kurve in $\mathbb{R}$.

V6. $\mathsf{ran}\,\gamma \subseteq O$ und $-a < \gamma^\bullet < b$ auf $\mathsf{dom}\,\gamma$
und $\mathsf{ran}\,\overline{\gamma} \subseteq O$ umd $-a < \overline{\gamma}^\bullet < b$ auf $\mathsf{dom}\,\overline{\gamma}$.

V7. $E_\circ \in \mathbb{R}$ und $\overline{E}_\circ \in \mathbb{R}$.

V8. $\forall t : t \in \mathsf{dom}\,\gamma \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot \tilde{T}(\gamma^\bullet(t)) + \dfrac{2}{m} \cdot \Phi(\gamma(t)) = \dfrac{2 \cdot E_\circ}{m}$
und $\forall t : t \in \mathsf{dom}\,\overline{\gamma} \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot \tilde{T}(\overline{\gamma}^\bullet(t)) + \dfrac{2}{m} \cdot \Phi(\overline{\gamma}(t)) = \dfrac{2 \cdot \overline{E}_\circ}{m}$.

V9. $I \subseteq \mathsf{dom}\,\gamma$ und I echtes reelles Intervall und

$$\forall t : t \in I \quad \Rightarrow \quad E_\circ > \Phi(\gamma(t)).$$

V10. $s \in I \cap \mathsf{dom}\,\overline{\gamma}$ und $\gamma(s) = \overline{\gamma}(s)$ und $\overline{\gamma}^\bullet(s) = \gamma^\bullet(s) < 0$.

$\Rightarrow$

a) $E_\circ = \overline{E}_\circ$.

b) $\forall t : t \in I \cap \mathsf{dom}\,\overline{\gamma} \quad \Rightarrow \quad \overline{\gamma}(t) = \gamma(t)$ und $\overline{\gamma}^\bullet(t) = \gamma^\bullet(t)$.

<u>Beweis*</u> a) Wegen $s \in I \subseteq \mathsf{dom}\,\gamma$ gilt

$$2 \cdot \tilde{T}(\gamma^\bullet(s)) + \frac{2}{m} \cdot \Phi(\gamma(s)) = \frac{2 \cdot E_\circ}{m},$$

und wegen $s \in \mathsf{dom}\,\overline{\gamma}$ gilt

$$2 \cdot \tilde{T}(\overline{\gamma}^\bullet(s)) + \frac{2}{m} \cdot \Phi(\overline{\gamma}(s)) = \frac{2 \cdot \overline{E}_\circ}{m},$$

und wegen $\gamma(s) = \overline{\gamma}(s)$ und $\gamma^\bullet(s) = \overline{\gamma}^\bullet(s)$ gilt

$$2 \cdot \tilde{T}(\gamma^\bullet(s)) + \frac{2}{m} \cdot \Phi(\gamma(s)) = 2 \cdot \tilde{T}(\overline{\gamma}^\bullet(s)) + \frac{2}{m} \cdot \Phi(\overline{\gamma}(s)).$$

so dass $\dfrac{2\cdot E_\circ}{m}=\dfrac{2\cdot\overline{E_\circ}}{m}$, woraus wegen $0\neq m\in\mathbb{R}$ die Gleichung $E_\circ=\overline{E_\circ}$ folgt.

<u>Beweis*</u> `b)` $I\cap\mathsf{dom}\,\overline{\gamma}$ ist ein reelles Intervall. Im Fall $\{s\}=I\cap\mathsf{dom}\,\overline{\gamma}$ ist wegen $\gamma(s)=\overline{\gamma}(s)$ und $\gamma^\bullet(s)=\overline{\gamma}^\bullet(s)$ nichts weiter zu beweisen. Andernfalls ist $I\cap\mathsf{dom}\,\overline{\gamma}$ ein echtes reelles Intervall. Seien

$$J=\bigcup\{\omega:\gamma(s)\in\omega\subseteq O\wedge\omega\text{ reelles Intervall}\wedge E_\circ>\Phi>E_\circ-m\cdot\overline{\alpha}\text{ auf }\omega\},$$

und

$$\overline{J}=\bigcup\{\omega:\overline{\gamma}(s)\in\omega\subseteq O\wedge\omega\text{ reelles Intervall}\wedge \overline{E_\circ}>\Phi>\overline{E_\circ}-m\cdot\overline{\alpha}\text{ auf }\omega\},$$

wobei $\overline{\alpha}=\lim\limits_{v\downarrow-a}\tilde{T}(v)$. Wegen $\gamma(s)=\overline{\gamma}(s)$ und `a)` gilt $J=\overline{J}$. Aus $E_\circ>\Phi(\gamma(s))$ und $\gamma^\bullet(s)<0$ folgen via $T''(\gamma^\bullet)\cdot\gamma^{\bullet\bullet}+\frac{1}{m}\cdot\Phi'(\gamma)=0$ **und Energiegleichung (+1). A posteriori** die Abschätzungen $E_\circ>\Phi\circ\gamma>E_\circ-m\cdot\overline{\alpha}$ und $\gamma^\bullet<0$ auf I. Damit ist $\gamma[I]$ ein echtes reelles Intervall. Via $s\in I\cap\mathsf{dom}\,\overline{\gamma}\subseteq I$ und $\gamma[I]\subseteq\mathsf{ran}\,\gamma\subseteq O$ folgt hieraus $\gamma[I]\subseteq J$ und damit ist J ein echtes reelles Intervall$\subseteq O$ mit $\gamma(s)\in J$. Es gilt

$$\forall x:x\in J\quad\Rightarrow\quad 0<\frac{1}{m}\cdot(E_\circ-\Phi(x))<\overline{\alpha},$$

so dass, wie in T **konvex und** $\tilde{T}$ **und** $w_{\pm1}$ dargelegt,

$$\forall x:x\in J\quad\Rightarrow\quad -a<w_{-1}\left(\frac{1}{m}\cdot(E_\circ-\Phi(x))\right)<0,$$

und es via der Stetigkeit von w_{-1} eine Stammfunktion Λ von

$$\frac{1}{w_{-1}\left(\frac{1}{m}\cdot(E_\circ-\Phi(.))\right)}:J\to\mathbb{R},\quad x\mapsto\frac{1}{w_{-1}\left(\frac{1}{m}\cdot(E_\circ-\Phi(x))\right)},$$

mit $\Lambda(\gamma(s))=0$ gibt. Es gilt $\Lambda\in\mathsf{C}^1(J:\mathbb{R})$ mit $\Lambda^\bullet<0$ auf J und

$$\Lambda:J\to\mathbb{R},\quad\Lambda(u)=\int_{\gamma(s)}^{u}\frac{dx}{w_{-1}\left(\frac{1}{m}\cdot(E_\circ-\Phi(x))\right)}.$$

Via $\gamma[I]\subseteq J$ und $\gamma[I]$ echtes reelles Intervall ist Λ Stammfunktion von $\frac{1}{w_{-1}\left(\frac{1}{m}\cdot(E_\circ-\Phi(.))\right)}$ auf $\gamma[I]$ und via $T''(\gamma^\bullet)\cdot\gamma^{\bullet\bullet}+\frac{1}{m}\cdot\Phi'(\gamma)=0$ **und Energiegleichung (+1). A posteriori** folgt

$$\forall t:t\in I\quad\Rightarrow\quad\Lambda(\gamma(t))=t-s.$$

Sei

$$\overline{I}=\bigcup\left\{\omega:s\in\omega\subseteq I\cap\mathsf{dom}\,\overline{\gamma}\wedge\omega\text{ reelles Intervall}\wedge\overline{E_\circ}>\Phi\circ\overline{\gamma}\text{ auf }\omega\right\}.$$

Da $s \in I \cap \mathsf{dom}\,\overline{\gamma}$ und da via $\mathtt{a)}$ und nach Voraussetzung

$$\overline{E_\circ} = E_\circ > \Phi(\gamma(s)) = \Phi(\overline{\gamma}(s)),$$

gilt und da Φ und $\overline{\gamma}$ stetig sind, ist $\overline{I}$ ein echtes reelles Intervall mit $s \in \overline{I} \subseteq I \cap \mathsf{dom}\,\overline{\gamma}$. Aus $E_\circ > \Phi(\overline{\gamma}(s))$ und $\gamma^\bullet(s) = \overline{\gamma}^\bullet(s) < 0$ folgen via $T''(\gamma^\bullet)\cdot\gamma^{\bullet\bullet} + \frac{1}{m}\cdot\Phi'(\gamma) = 0$ **und Energiegleichung (+1). A posteriori** die Abschätzungen $\overline{E_\circ} > \Phi\circ\overline{\gamma} > \overline{E_\circ} - m\cdot\overline{\alpha}$ und $\overline{\gamma}^\bullet < 0$ auf $\overline{I}$. Damit ist $\overline{\gamma}[\overline{I}]$ echtes reelles Intervall. Es gilt $\overline{\gamma}(s) \in \overline{\gamma}[\overline{I}]$ und $\overline{\gamma}[\overline{I}]$ ist reelles Intervall. Aus mengentheoretischen Gründen muss auch für alle $t \in \overline{I}$ die Aussage $\overline{\gamma}(t) \in \mathsf{dom}\,\Phi = O$ gelten. Es folgt $\overline{\gamma}[\overline{I}] \subseteq O$ und hiermit $\overline{\gamma}[\overline{I}] \subseteq \overline{J}$. Wegen $J = \overline{J}$ ist $\overline{J}$ ein echtes reelles Intervall$\subseteq O$ mit $\overline{\gamma}(s) \in \overline{J}$. Es gilt

$$\forall x : x \in \overline{J} \quad\Rightarrow\quad 0 < \frac{1}{m}\cdot(\overline{E_\circ} - \Phi(x)) < \overline{\alpha},$$

so dass, wie in T **konvex und** $\tilde{T}$ **und** $w_{\pm 1}$ dargelegt,

$$\forall x : x \in J \quad\Rightarrow\quad -a < w_{-1}\left(\frac{1}{m}\cdot(\overline{E_\circ} - \Phi(x))\right) < 0,$$

und es via der Stetigkeit von w_{+1} eine Stammfunktion $\overline{\Lambda}$ von

$$\frac{1}{w_{-1}\left(\frac{1}{m}\cdot(\overline{E_\circ} - \Phi(.))\right)} : \overline{J} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{w_{-1}\left(\frac{1}{m}\cdot(\overline{E_\circ} - \Phi(x))\right)},$$

mit $\overline{\Lambda}(\overline{\gamma}(s)) = 0$ gibt. Es gilt $\overline{\Lambda} \in \mathtt{C}^1(J : \mathbb{R})$ mit $0 < \overline{\Lambda}^\bullet$ auf $\overline{J}$ und

$$\overline{\Lambda} : \overline{J} \to \mathbb{R}, \quad \overline{\Lambda}(u) = \int_{\overline{\gamma}(s)}^{u} \frac{dx}{w_{-1}\left(\frac{1}{m}\cdot(\overline{E_\circ} - \Phi(x))\right)}.$$

Wie oben gezeigt, gilt $\overline{\gamma}[\overline{I}] \subseteq \overline{J}$ und $\overline{\gamma}[\overline{I}]$ ist echtes reelles Intervall. Somit ist $\overline{\Lambda}$ Stammfunktion von $\frac{1}{w_{+1}\left(\frac{1}{m}\cdot(\overline{E_\circ} - \Phi(.))\right)}$ auf $\overline{\gamma}[\overline{I}]$ und via $T''(\gamma^\bullet)\cdot\gamma^{\bullet\bullet} + \frac{1}{m}\cdot\Phi'(\gamma) = 0$ **und Energiegleichung (+1). A posteriori** folgt

$$\forall t : t \in \overline{I} \quad\Rightarrow\quad \overline{\Lambda}(\overline{\gamma}(t)) = t - s.$$

Aus $\overline{I} \subseteq I \cap \mathsf{dom}\,\overline{\gamma} \subseteq I$ und aus $\mathtt{a)}$ und aus $\gamma(s) = \overline{\gamma}(s)$ folgt $\Lambda = \overline{\Lambda}$ auf $\overline{I}$ und somit

$$\forall t : t \in \overline{I} \quad\Rightarrow\quad \Lambda(\overline{\gamma}(t)) = \overline{\Lambda}(\overline{\gamma}(t)) = t - s = \Lambda(\gamma(t)).$$

Da für alle $t \in \overline{I}$ die Aussagen $\overline{\gamma}(t) \in \overline{\gamma}[\overline{I}] \subseteq \overline{J} = J$ und $\gamma(t) \in \gamma[I] \subseteq J$ gelten und da Λ auf J wegen positiver Ableitung streng monoton ist, folgt

$$\forall t : t \in \overline{I} \quad\Rightarrow\quad \overline{\gamma}(t) = \gamma(t).$$

Aus $\overline{I} \subseteq I \cap \mathsf{dom}\,\overline{\gamma}$ folgt $\overline{I} = I \cap \mathsf{dom}\,\overline{\gamma}$ oder $I \subset I \cap \mathsf{dom}\,\overline{\gamma}$. Im zweiten Fall gibt es, da $\overline{I}$ und $I \cap \mathsf{dom}\,\overline{\gamma}$ echte reelle Intervalle sind, einen Häufungspunkt τ von $\overline{I}$ mit $\tau \in I \cap \mathsf{dom}\,\overline{\gamma}$ und $\tau \notin \overline{I}$. Aus $\tau \in I \cap \mathsf{dom}\,\overline{\gamma}$ folgt $\tau \in I$ und somit $E_\circ > \Phi(\gamma(\tau)) > E_\circ - m \cdot \overline{\beta}$. Da τ ein Häufungspunkt von $\overline{I}$ ist, gibt es eine Folge $\sigma : \mathbb{N} \to \overline{I}$ mit $\lim\limits_{n\uparrow+\infty} \sigma_n = \tau$. Wegen $\overline{\gamma} = \gamma$ auf $\overline{I}$ und wegen $\tau \in I \subseteq \mathsf{dom}\,\gamma$ und wegen der Stetigkeit von Φ und γ gilt

$$\lim_{n\uparrow+\infty} \Phi(\overline{\gamma}(\sigma_n)) = \lim_{n\uparrow+\infty} \Phi(\gamma(\sigma_n)) = \Phi(\gamma(\tau)),$$

und wegen der Stetigkeit von $\overline{\gamma}$ und $\tau \in \mathsf{dom}\,\overline{\gamma}$ folgt

$$\overline{\gamma}(\tau) = \lim_{n\uparrow+\infty} \overline{\gamma}(\sigma_n) = \lim_{n\uparrow+\infty} \gamma(\sigma_n) = \gamma(\tau),$$

so dass via obigem

$$E_\circ > \Phi(\overline{\gamma}(\tau)),$$

also via `a)` auch

$$\overline{E_\circ} > \Phi(\overline{\gamma}(\tau)),$$

folgt. Da τ ein Häufungspunkt von $\overline{I}$ ist und da $\overline{I}$ ein reelles Intervall ist, ist $\{\tau\} \cup \overline{I}$ ein reelles Intervall und aus $\tau \in I \cap \mathsf{dom}\,\overline{\gamma}$ und $\overline{I} \subseteq I \cap \mathsf{dom}\,\overline{\gamma}$ folgt $\{\tau\} \cup \overline{I} \subseteq I \cap \mathsf{dom}\,\overline{\gamma}$ und wegen $s \in \overline{I} \subseteq \{\tau\} \cup \overline{I}$ und $\overline{E_\circ} > \Phi \circ \overline{\gamma}$ auf $\overline{I}$ und obigem ergibt sich

$$\{\tau\} \cup \overline{I} \in \left\{\omega : s \in \omega \subseteq I \cap \mathsf{dom}\,\overline{\gamma} \wedge \omega \text{ reelles Intervall} \wedge \overline{E_\circ} > \Phi \circ \overline{\gamma} \text{ auf } \omega\right\},$$

und somit

$$\{\tau\} \cup \overline{I} \subseteq \bigcup \{\omega : s \in \omega \subseteq I \cap \mathsf{dom}\,\overline{\gamma} \wedge \omega \text{ reelles Intervall} \\ \wedge\, \overline{E_\circ} > \Phi \circ \overline{\gamma} \text{ auf } \omega\big\} = \overline{I},$$

woraus $\tau \in \overline{I}$ folgt.

Konsequenz: $\overline{I} = I \cap \mathsf{dom}\,\overline{\gamma}$ und damit

$$\forall t : t \in I \cap \mathsf{dom}\,\overline{\gamma} \quad \Rightarrow \quad \overline{\gamma}(t) = \gamma(t),$$

woraus wegen der Differenzierbarkeit von $\overline{\gamma}$ und von γ und der Tatsache, dass $I \cap \mathsf{dom}\,\overline{\gamma}$ ein echtes reelles Intervall ist, die Aussage

$$\forall t : t \in I \cap \mathsf{dom}\,\overline{\gamma} \quad \Rightarrow \quad \overline{\gamma}^\bullet(t) = \gamma^\bullet(t),$$

folgt. $\square$

⋆

Satz

V1. $0 < m \in \mathbb{R}$.

V2. $0 \neq O \subseteq \mathbb{R}$ offen.

V3. $\Phi \in \mathtt{C}^1(O : \mathbb{R})$.

V4. $0 < a$ und $0 < b$ und $T \in \mathtt{C}^2(]-a|b[: \mathbb{R})$ und $0 = T(0)$ und $0 < T''$ auf $]-a|b[\setminus \{0\}$ und $\tilde{T} :]-a|b[\to \mathbb{R}$, $\tilde{T}(v) = v \cdot T'(v) - T(v)$.

V5. γ ist 1-Kurve in $\mathbb{R}$ und $\overline{\gamma}$ ist 1-Kurve in $\mathbb{R}$.

V6. $\mathsf{ran}\,\gamma \subseteq O$ und $-a < \gamma^\bullet < b$ auf $\mathsf{dom}\,\gamma$
und $\mathsf{ran}\,\overline{\gamma} \subseteq O$ umd $-a < \overline{\gamma}^\bullet < b$ auf $\mathsf{dom}\,\overline{\gamma}$.

V7. $E_\circ \in \mathbb{R}$ und $\overline{E}_\circ \in \mathbb{R}$.

V8. $\forall t : t \in \mathsf{dom}\,\gamma \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot \tilde{T}(\gamma^\bullet(t)) + \dfrac{2}{m} \cdot \Phi(\gamma(t)) = \dfrac{2 \cdot E_\circ}{m}$
und $\forall t : t \in \mathsf{dom}\,\overline{\gamma} \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot \tilde{T}(\overline{\gamma}^\bullet(t)) + \dfrac{2}{m} \cdot \Phi(\overline{\gamma}(t)) = \dfrac{2 \cdot \overline{E}_\circ}{m}$.

V9. $I \subseteq \mathsf{dom}\,\gamma$ und I echtes reelles Intervall und

$$\forall t : t \in I \quad \Rightarrow \quad E_\circ > \Phi(\gamma(t)).$$

V10. $s \in I \cap \mathsf{dom}\,\overline{\gamma}$ und $\gamma(s) = \overline{\gamma}(s)$ und $\gamma^\bullet(t) = \overline{\gamma}^\bullet(s)$.

$\Rightarrow$

a) $E_\circ = \overline{E_\circ}$.

b) $\forall t : t \in I \cap \mathsf{dom}\,\overline{\gamma} \quad \Rightarrow \quad \overline{\gamma}(t) = \gamma(t)$ und $\overline{\gamma}^\bullet(t) = \gamma^\bullet(t)$.

<u>Beweis</u> Via $T''(\gamma^\bullet) \cdot \gamma^{\bullet\bullet} + \frac{1}{m} \cdot \Phi'(\gamma) = 0$ **und Energiegleichung (+1). A posteriori** folgt $0 < \gamma^\bullet(s)$ oder $\gamma^\bullet(s) < 0$. In jedem Fall folgen a) und b) aus einem der beiden vorherigen HilfsSätze. $\square$

5.3 A priori

V1. $0 < m \in \mathbb{R}$.

V2. $0 \neq O \subseteq \mathbb{R}$ offen.

V3. $\Phi \in \mathtt{C}^1(O : \mathbb{R})$.

V4. $0 < a$ und $0 < b$ und $T \in \mathtt{C}^2(]-a|b[: \mathbb{R})$ und $0 = T(0)$ und $0 < T''$ auf $]-a|b[\setminus \{0\}$.

V5. γ ist 2-Kurve in $\mathbb{R}$ und $\overline{\gamma}$ ist 2-Kurve in $\mathbb{R}$.

V6. $\mathsf{ran}\,\gamma \subseteq O$ und $-a < \gamma^\bullet < b$ auf $\mathsf{dom}\,\gamma$
und $\mathsf{ran}\,\overline{\gamma} \subseteq O$ umd $-a < \overline{\gamma}^\bullet < b$ auf $\mathsf{dom}\,\overline{\gamma}$.

V7. $\forall t : t \in \mathsf{dom}\,\gamma \quad \Rightarrow \quad T''(\gamma^\bullet(t)) \cdot \gamma^{\bullet\bullet}(t) + \Phi'(\gamma(t)) = 0$
und $\forall t : t \in \mathsf{dom}\,\overline{\gamma} \quad \Rightarrow \quad T''(\overline{\gamma}^\bullet(t)) \cdot \overline{\gamma}^{\bullet\bullet}(t) + \Phi'(\overline{\gamma}(t)) = 0.$

V8. $I \subseteq \mathsf{dom}\,\gamma$ und I echtes reelles Intervall und

$$\forall t : t \in I \quad \Rightarrow \quad 0 \neq \gamma^\bullet(t).$$

V9. $s \in I \cap \mathsf{dom}\,\overline{\gamma}$ und $\gamma(s) = \overline{\gamma}(s)$ und $\gamma^\bullet(s) = \overline{\gamma}^\bullet(s)$.

$\Rightarrow$

$$\forall t : t \in I \cap \mathsf{dom}\,\overline{\gamma} \quad \Rightarrow \quad \overline{\gamma}(t) = \gamma(t) \quad \text{und} \quad \overline{\gamma}^\bullet(t) = \gamma^\bullet(t).$$

Beweis Via $T''(\gamma^\bullet) \cdot \gamma^{\bullet\bullet} + \frac{1}{m} \cdot \Phi'(\gamma) = 0$ **und Energiegleichung** gibt es $E_\circ \in \mathbb{R}$ und $\overline{E_\circ} \in \mathbb{R}$, so dass

$$\forall t : t \in \mathsf{dom}\,\gamma \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot \tilde{T}(\gamma^\bullet(t)) + \frac{2}{m} \cdot \Phi(\gamma(t)) = \frac{2 \cdot E_\circ}{m},$$

und

$$\forall t : t \in \mathsf{dom}\,\overline{\gamma} \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot \tilde{T}(\overline{\gamma}^\bullet(t)) + \frac{2}{m} \cdot \Phi(\overline{\gamma}(t)) = \frac{2 \cdot \overline{E_\circ}}{m},$$

wobei

$$\tilde{T} :]-a|b[\to \mathbb{R}, \quad \tilde{T}(v) = v \cdot T'(v) - T(v).$$

Nun folgt via $T''(\gamma^\bullet) \cdot \gamma^{\bullet\bullet} + \frac{1}{m} \cdot \Phi'(\gamma) = 0$ **und Energiegleichung (+1). A posteriori**,

$$\forall t : t \in I \quad \Rightarrow \quad E_\circ > \Phi(\gamma(t)),$$

woraus sich via $T''(\gamma^\bullet) \cdot \gamma^{\bullet\bullet} + \frac{1}{m} \cdot \Phi'(\gamma) = 0$ **und Energiegleichung. Energiegleichung und Eindeutigkeit** die Aussage

$$\forall t : t \in I \cap \mathsf{dom}\,\overline{\gamma} \quad \Rightarrow \quad \overline{\gamma}(t) = \gamma(t) \quad \text{und} \quad \overline{\gamma}^\bullet(t) = \gamma^\bullet(t),$$

ergibt. $\square$