Brachystochronen

Andreas Unterreiter

8. Februar 2021

Inhaltsverzeichnis

1 L-Durchlaufungsdauer Kurve im $\mathbb{R}^3$

1.1 Prolog S

Satz - SQw

`V1.` $c \in]0|+\infty]$ und $S \in \mathtt{C}^2([0|c^2[: \mathbb{R})$ und $0 = S(0)$.

`V2.` $\forall z : z \in]0|c^2[\quad \Rightarrow \quad 0 < S'(z) + 2 \cdot z \cdot S''(z)$.

`V3.` $Q = \{(z, 2 \cdot z \cdot S'(z) - S(z)) : z \in [0|c^2[\}$ und $\overline{Q} = \sup(\mathsf{ran}\, Q)$.

`V4.` $w = Q^{-1}$.

$\Rightarrow$

`a)` $Q \in \mathtt{C}^1([0|c^2[: \mathbb{R})$

$$\text{und} \quad Q : [0|c^2[\to \mathbb{R}, \quad Q(z) = 2 \cdot z \cdot S'(z) - S(z),$$

und $0 = Q(0)$ und $Q' \in \mathtt{C}([0|c^2[: \mathbb{R})$

$$\text{und} \quad Q' : [0|c^2[\to \mathbb{R}, \quad Q'(z) = S'(z) + 2 \cdot z \cdot S''(z),$$

und $0 < Q'$ auf $]0|c^2[$ und $Q'(0) = S'(0)$ und Q streng wachsend

$$\text{und} \quad \overline{Q} = \lim_{z \uparrow c^2} Q(z) \in]0|+\infty],$$

und $\mathsf{ran}\, Q = [0|\overline{Q}[$.

`b)` $w \in \mathtt{C}([0|\overline{Q}[: \mathbb{R})$ und $w : [0|\overline{Q}[\to [0|c^2[$ bijektiv und $0 = w(0)$

$$\text{und} \quad c^2 = \lim_{u \uparrow \overline{Q}} w(u),$$

$$\text{und} \quad \forall u : u \in [0|\overline{Q}[\quad \Rightarrow \quad Q(w(u)) = u,$$

$$\text{und} \quad \forall z : z \in [0|c^2[\quad \Rightarrow \quad w(Q(z)) = z,$$

und $\left(w \text{ stetig differenzierbar und } 0 < w'\right)$ auf $]0|\overline{Q}[$

$$\text{und} \quad \forall u : u \in [0|\overline{Q}[\quad \Rightarrow \quad Q'(w(u)) \cdot w'(u) = 1,$$

$$\text{und} \quad \forall z : z \in [0|c^2[\quad \Rightarrow \quad w'(Q(z)) \cdot Q'(z) = 1.$$

c) Falls
$$\frac{1}{\sqrt{.w}} = \left\{\left(u, \frac{1}{\sqrt{w(u)}}\right) : u \in [0|\overline{Q}[\right\},$$
dann
$$\frac{1}{\sqrt{.w}} : [0|\overline{Q}[\to \mathbb{R}, \quad \frac{1}{\sqrt{.w}}(u) = \frac{1}{\sqrt{w(u)}},$$
und $\left(\frac{1}{\sqrt{.w}}\right.$ ist stetig differenzierbar und $\left.\left(\frac{1}{\sqrt{.w}}\right)' < 0\right)$ auf $]0|\overline{Q}[$.

Beweis trivial. □

⋆

Satz - klSQw

V1. $c = +\infty$.

V2. $S = \left\{\left(z, \frac{1}{2} \cdot z\right) : z \in [0| + \infty[\right\}$.

V3. $Q, \overline{Q}, w$ wie in **Satz - SQw**.

$\Rightarrow$

a) $c \in]0| + \infty]$ und $c^2 = +\infty$.

b) $S : [0| + \infty[\to \mathbb{R}$, $S(z) = \frac{1}{2} \cdot z$ und $0 = S(0)$.

c) $S \in \mathtt{C}^{+\infty}([0| + \infty[: \mathbb{R})$
$$\text{und} \quad \forall z : z \in]0| + \infty[\Rightarrow 0 < \frac{1}{2} = S'(z) + 2 \cdot z \cdot S''(z).$$

d) $Q = S$ und $+\infty = \overline{Q}$.

e) $w : [0| + \infty[\to \mathbb{R}$ bijektiv
$$\text{und} \quad \forall u : u \in [0| + \infty[\Rightarrow w(u) = 2 \cdot u,$$
und $w \in \mathtt{C}^{+\infty}([0| + \infty[: \mathbb{R})$.

Beweis trivial. □

Satz - relSQw

V1. $0 < c \in \mathbb{R}$.

V2. $S = \left\{ \left(z, c \cdot \left(c - \sqrt{c^2 - z} \right) \right) : 0 \leq z < c^2 \right\}$.

V3. $Q, \overline{Q}, w$ wie in **Satz - SQw**.

$\Rightarrow$

a) $c \in \,]0| + \infty]$.

b) $S : [0|c^2[\to \mathbb{R}, \quad S(z) = c \cdot \left(c - \sqrt{c^2 - z} \right)$.

c) $S \in \mathtt{C}^{+\infty}([0|c^2[: \mathbb{R})$

$$\text{und} \quad \forall z : z \in [0|c^2[\Rightarrow 0 < \frac{c^3}{2 \cdot (\sqrt{c^2 - z})^3} = S'(z) + 2 \cdot z \cdot S''(z).$$

d) $Q : [0|c^2[\to \mathbb{R}, Q(z) = c^2 \cdot \left(\frac{c}{\sqrt{c^2 - z}} - 1 \right)$ und $\overline{Q} = +\infty$.

e) $Q \in \mathtt{C}^{+\infty}([0|c^2[: \mathbb{R})$.

f) $w : [0| + \infty[\to [0|c^2[$ bijektiv

$$\text{und} \quad \forall u : u \in [0| + \infty[\Rightarrow w(u) = c^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{u}{c^2} \right)^2} \right),$$

und $w \in \mathtt{C}^{+\infty}([0| + \infty[: \mathbb{R})$.

Beweis a), b) trivial.

Beweis c), d) Rechnung.

Beweis e) trivial.

Beweis f) Rechnung. $\square$

1.2 lf - kurvreg-1-via$mS\Phi$

Satz - kurvmSPhi

V1. $0 \neq O \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und $\Phi \in \mathtt{C}^1(O : \mathbb{R})$.

V2. $c \in]0|+\infty]$ und $S \in \mathtt{C}^2([0|c^2[: \mathbb{R})$ und $0 = S(0)$.

V3. $\forall z : z \in]0|c^2[\quad \Rightarrow \quad 0 < S'(z) + 2 \cdot z \cdot S''(z)$.

V4. $\Omega = (\mathbb{R} \times O) \times \{v : v \in \mathbb{R}^3 \wedge |v|^2 < c^2\}$.

V5. $0 < m \in \mathbb{R}$.

V6. $L = \big\{\big(((t,x),v), m \cdot S(|v|^2) - \Phi(x)\big) : t \in \mathbb{R} \wedge x \in O \wedge v \in \mathbb{R}^3 \wedge |v| < c\big\}$.

V7. $0 \neq W$ offenes reelles Intervall und $\Psi \in \mathtt{C}^2(W : \mathbb{R}^3)$ und $\mathsf{ran}\,\Psi \subseteq O$.

V8. $L_\Psi = L \circ \Psi^{\mathtt{gg}}$ und $\Omega_\Psi = (\Psi^{\mathtt{gg}})^{-1}[\Omega]$.

$\Rightarrow$

a) $L \in \mathtt{C}^1(\Omega : \mathbb{R})$ und

$$L : \Omega \to \mathbb{R}, \quad L(((t,x),v)) = m \cdot S(|v|^2) - \Phi(x).$$

b) L ist $3, \Omega$-Lagrange-Funktion.

c) $\Psi^{\mathtt{gg}} : (\mathbb{R} \times W) \times \mathbb{R} \to (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3) \times \mathbb{R}^3, \quad \Psi^{\mathtt{gg}}(((t,\sigma),\hat{\sigma})) = ((t, \Psi(\sigma)), \hat{\sigma} \cdot \Psi'(\sigma))$.

d) $\Omega_\Psi = \{(((t,\sigma),\hat{\sigma})) : t \in \mathbb{R} \wedge \sigma \in W \wedge \hat{\sigma} \in \mathbb{R} \wedge |\hat{\sigma} \cdot \Psi'(\sigma)| < c\}$.

e) $0 \neq \Omega_\Psi \subseteq (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ offen.

f) $L_\Psi \in \mathtt{C}^1(\Omega_\Psi : \mathbb{R})$ und

$$L_\Psi : \Omega_\Psi \to \mathbb{R}, \quad L_\Psi(((t,\sigma),\hat{\sigma})) = m \cdot S(|\hat{\sigma}|^2 \cdot |\Psi'(\sigma)|^2) - \Phi(\Psi(\sigma)).$$

g) L_Ψ ist $1, \Omega_\Psi$-Lagrange-Funktion.

h) Falls $Q, \overline{Q}, w$ wie in **Satz - SQw** und falls γ eine $1, \Omega_\Psi$-Zustandskurve von L_Ψ ist, dann

$$\begin{aligned} &\forall t : t \in \mathsf{dom}\,\gamma \\ &\Rightarrow \quad 2 \cdot m \cdot Q'\left(|\gamma^\bullet|^2 \cdot |\Psi'(\gamma)|^2\right) \cdot \left(\gamma^{\bullet\bullet} \cdot |\Psi' \circ \gamma|^2 + |\gamma^\bullet|^2 \cdot \langle \Psi' | \Psi'' \rangle \circ \gamma\right)(t) \\ &\qquad\qquad = -(\langle (\nabla\Phi) \circ \Psi | \Psi' \rangle \circ \gamma)(t), \end{aligned}$$

und es gibt $E_\circ \in \mathbb{R}$, so dass

$$\forall t : t \in \mathsf{dom}\,\gamma$$
$$\Rightarrow \quad 2 \cdot Q\left(|\gamma^\bullet|^2 \cdot |\Psi' \circ \gamma|^2\right)(t) + \frac{2}{m} \cdot ((\Phi \circ \Psi) \circ \gamma)(t) = \frac{2 \cdot E_\circ}{m},$$

und

$$\forall t : t \in \mathsf{dom}\,\gamma \quad \Rightarrow \quad E_\circ - m \cdot \overline{Q} < ((\Phi \circ \Psi) \circ \gamma)(t) \leq E_\circ,$$

und

$$\forall t : t \in \mathsf{dom}\,\gamma$$
$$\Rightarrow \quad |\gamma^\bullet|^2(t) \cdot |\Psi' \circ \gamma|^2(t) = w\left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - ((\Phi \circ \Psi) \circ \gamma)(t))\right),$$

und falls $(\Phi \circ \Psi) \circ \gamma < E_\circ$ auf $\mathsf{dom}\,\gamma$, dann $0 \neq |\Psi'|$ auf $\mathsf{ran}\,\gamma$ und $(0 < \gamma^\bullet$ oder $\gamma^\bullet < 0)$ auf $\mathsf{dom}\,\gamma$ und

$$\forall t : t \in \mathsf{dom}\,\gamma \quad \Rightarrow \quad |\gamma^\bullet(t)| = \frac{\sqrt{w\left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - ((\Phi \circ \Psi) \circ \gamma)(t))\right)}}{|\Psi' \circ \gamma|(t)},$$

und

$$\forall t, s : t, s \in \mathsf{dom}\,\gamma$$
$$\Rightarrow \quad \int_{\gamma(s)}^{\gamma(t)} \frac{|\Psi'|}{\sqrt{w\left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - .(\Phi \circ \Psi))\right)}} = \mathsf{sgn}\,(\gamma^\bullet(s)) \cdot (t - s).$$

`i)` Falls $Q, \overline{Q}, w$ wie in **Satz - SQw**, falls $0 \neq |\Psi'|$ auf W, falls

$$\forall \sigma : \sigma \in W \quad \Rightarrow \quad E_\circ - m \cdot \overline{Q} < (\Phi \circ \Psi)(\sigma) < E_\circ,$$

falls Λ eine Stammfunktion von $\dfrac{|\Psi'|}{\sqrt{w\left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - .\Phi \circ \Psi)\right)}}$ auf W ist und falls $\gamma = \Lambda^{-1}$, dann gilt $\gamma : \mathsf{ran}\,\Lambda \to W$ bijektiv, wobei $\mathsf{ran}\,\Lambda$ ein offenes, echtes relles Intervall ist, und $\gamma \in \mathsf{C}^2(\mathsf{ran}\,\Lambda : \mathbb{R})$ und $0 < \gamma^\bullet$ und γ streng wachsend und $0 < |\gamma^\bullet|^2 \cdot |\Psi' \circ \gamma|^2 < c^2$ auf $\mathsf{ran}\,\Lambda$ und

$$\forall t : t \in \mathsf{ran}\,\Lambda \quad \Rightarrow \quad \gamma^\bullet(t) = \frac{\sqrt{w\left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - ((\Phi \circ \Psi) \circ \gamma)(t))\right)}}{|\Psi'(\gamma(t))|},$$

und

$$\lim_{t \downarrow \inf(\mathsf{ran}\,\Lambda)} \gamma(t) = \inf W, \qquad \lim_{t \uparrow \sup(\mathsf{ran}\,\Lambda)} \gamma(t) = \sup W,$$

und

$$\forall t, s : t, s \in \mathsf{ran}\,\Lambda$$
$$\Rightarrow \quad \Lambda(\gamma(t)) - \Lambda(\gamma(s)) = \int_{\gamma(s)}^{\gamma(t)} \frac{|\Psi'|}{\sqrt{w\left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - .\Phi \circ \Psi)\right)}} = t - s,$$

und γ ist $1, \Omega_\Psi$-Zustandskurve von L_Ψ.

Beweis `a), b), c), d), e), f), g)` trivial.

Beweis `h), i)` Rechnung. □

⋆

Bemerkung Unter den Voraussetzungen und mit den Bezeichungen von `h)` ist

$$\int_{\inf W}^{\sup W} \frac{|\Psi'|}{\sqrt{w\left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - .\Phi \circ \Psi)\right)}},$$

die L-Durchlaufungsdauer der Kurve Ψ mit Energie $E_\circ$. Diese Zahl ist positiv und kann gleich $+\infty$ sein.

2 lf - brchymSPhi

Satz

V1. $0 \neq O \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und $\Phi \in \mathtt{C}^1(O : \mathbb{R})$.

V2. $c \in \,]0| + \infty]$ und $S \in \mathtt{C}^2([0|c^2[\, : \mathbb{R})$ und $0 = S(0)$.

V3. $\forall z : z \in \,]0|c^2[\quad \Rightarrow \quad 0 < S'(z) + 2 \cdot z \cdot S''(z)$.

V4. $Q, \overline{Q}, w, \dfrac{1}{\sqrt{.w}}$ wie in **Satz - SQw**.

V5. $0 < m \in \mathbb{R}$ und $E_\circ \in \mathbb{R}$.

V6. $0 \neq \Omega = \{((t,x),v) :$
$t \in \mathbb{R} \wedge E_\circ - m \cdot \overline{Q} < \Phi(x) < E_\circ \wedge x \in O \wedge \mathfrak{o}^3 \neq v \in \mathbb{R}^3\}$.

V7. $L = \left\{ \left(((t,x),v), \dfrac{|v|}{\sqrt{w\left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(x))\right)}} \right) : ((t,x),v) \in \Omega \right\}$.

$\Rightarrow$

a) $L : \Omega \to \mathbb{R}, \quad L(((t,x),v)) = \dfrac{|v|}{\sqrt{w\left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(x))\right)}}$.

b) $L \in \mathtt{C}^1(\Omega : \mathbb{R})$

und $\nabla_{\mathtt{x}} L : \Omega \to \mathbb{R}$,

$$(\nabla_{\mathtt{x}} L)(((t,x),v)) = -\frac{|v|}{m} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{.w}}\right)' \left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(x))\right) \cdot (\nabla\Phi)(x),$$

und $\nabla_{\mathtt{v}} L : \Omega \to \mathbb{R}$,

$$(\nabla_{\mathtt{v}} L)(((t,x),v)) = \left(\frac{1}{\sqrt{.w}}\right) \left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(x))\right) \cdot \frac{v}{|v|}.$$

c) L ist $3, \Omega$-Lagrange-Funktion.

d) E ist $3, \Omega$-Energie von $L \quad \Leftrightarrow \quad E = \mathsf{zo}_\Omega$.

e) Falls γ eine $3,\Omega$-Zustandskurve von L ist, dann

$$\begin{aligned}
&\forall t : t \in \mathsf{dom}\,\gamma \\
&\qquad\Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{.w}}\right)\left(\frac{1}{m}\cdot(E_\circ - \Phi\circ\gamma)\right)\cdot\left(\frac{\gamma^\bullet}{|\gamma^\bullet|}\right)^\bullet(t) \\
&- \frac{1}{m}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{.w}}\right)'\left(\frac{1}{m}\cdot(E_\circ - \Phi\circ\gamma)\right)\cdot\langle(\nabla\Phi)\circ\gamma|\gamma^\bullet\rangle\cdot\frac{\gamma^\bullet}{|\gamma^\bullet|}(t) \\
&\qquad = -\frac{|\gamma^\bullet|}{m}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{.w}}\right)'\left(\frac{1}{m}\cdot(E_\circ - \Phi\circ\gamma)\right)\cdot((\nabla\Phi)\circ\gamma)(t)
\end{aligned}$$

f) Falls γ eine 2-Kurve in $\mathbb{R}^3$ ist, falls $\mathsf{ran}\,\gamma \subseteq O$, falls

$$\forall t : t \in \mathsf{dom}\,\gamma \quad\Rightarrow\quad E_\circ - m\cdot\overline{Q} < \Phi(\gamma(t)) < E_\circ \wedge \mathfrak{o}^3 \neq \gamma^\bullet(t),$$

und falls

$$\begin{aligned}
&\forall t : t \in \mathsf{dom}\,\gamma \\
&\qquad\Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{.w}}\right)\left(\frac{1}{m}\cdot(E_\circ - \Phi\circ\gamma)\right)\cdot\left(\frac{\gamma^\bullet}{|\gamma^\bullet|}\right)^\bullet(t) \\
&- \frac{1}{m}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{.w}}\right)'\left(\frac{1}{m}\cdot(E_\circ - \Phi\circ\gamma)\right)\cdot\langle(\nabla\Phi)\circ\gamma|\gamma^\bullet\rangle\cdot\frac{\gamma^\bullet}{|\gamma^\bullet|}(t) \\
&\qquad = -\frac{|\gamma^\bullet|}{m}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{.w}}\right)'\left(\frac{1}{m}\cdot(E_\circ - \Phi\circ\gamma)\right)\cdot((\nabla\Phi)\circ\gamma)(t),
\end{aligned}$$

dann ist γ eine $3,\Omega$-Zustandskurve von L.

Beweis trivial. □

⋆

Bemerkung γ ist genau dann eine S,Φ-Brachystochrone von $\mathfrak{a}$ nach $\mathfrak{b}$ mit Energie $E_\circ$, wenn γ eine $3,\Omega$-Zustandskurve von L mit dem hier definierten L und $\mathsf{dom}\,\gamma$ offen und

$$\lim_{t\downarrow\inf\gamma}\gamma(t) = \mathfrak{a} \quad\wedge\quad \lim_{t\uparrow\sup\gamma}\gamma(t) = \mathfrak{b},$$

ist. Hier gilt implizit $\mathfrak{a},\mathfrak{b} \in \mathbb{R}^3$.

3 Intermezzo: Erhaltung Drehimpuls $\mathbb{R}^3$

Satz

`V1.` L ist $3, \Omega$-Lagrange-Funktion.

`V2.` $\mathfrak{e}, \mathfrak{f}, \mathfrak{g}$ ONB $\mathbb{R}^3$.

`V3.` $\mathfrak{m} \in \mathbb{R}^3$.

`V4.` $\forall \alpha, z$: $\alpha \in \mathbb{R} \wedge z \in \mathbb{R}^3$

$$\Rightarrow \quad D(\alpha)(z) = \langle z|\mathfrak{e}\rangle \cdot \mathfrak{e} + ((\cos\alpha) \cdot \langle z|\mathfrak{f}\rangle + (\sin\alpha) \cdot \langle z|\mathfrak{g}\rangle) \cdot \mathfrak{f} \\ + (-(\sin\alpha) \cdot \langle z|\mathfrak{f}\rangle + (\cos\alpha) \cdot \langle z|\mathfrak{g}\rangle) \cdot \mathfrak{g}$$

`V5.` $\forall z$: $z \in \mathbb{R}^3 \quad \Rightarrow \quad \tilde{D}(z) = \langle z|\mathfrak{g}\rangle \cdot \mathfrak{f} - \langle z|\mathfrak{f}\rangle \cdot \mathfrak{g}$.

`V6.` $\forall \alpha, t, x, v : \alpha \in \mathbb{R} \wedge t \in \mathbb{R} \wedge x, v \in \mathbb{R}^3 \wedge ((t, x), v) \in \Omega$

$$\Rightarrow \quad ((t, \mathfrak{m} + D(\alpha)(x - \mathfrak{m})), D(\alpha)(v)) \in \Omega \\ \wedge \quad L(((t, x), v)) = L(((t, \mathfrak{m} + D(\alpha)(x - \mathfrak{m})), D(\alpha)(v))).$$

$\Rightarrow$

`a)` $\forall t, x, v : t \in \mathbb{R} \wedge x, v \in \mathbb{R}^3 \wedge ((t, x), v) \in \Omega$

$$\Rightarrow \quad 0 = \langle (\nabla_{\mathtt{x}} L)(((t, x), v))|\tilde{D}(x - \mathfrak{m})\rangle + \langle (\nabla_{\mathtt{v}} L)(((t, x), v))|\tilde{D}(v)\rangle.$$

`b)` Falls γ eine $3, \Omega$-Zustandskurve von L ist, dann gibt es $I_\circ \in \mathbb{R}$, so dass

$$\forall t : t \in \mathsf{dom}\,\gamma \quad \Rightarrow \quad \langle (\nabla_{\mathtt{v}} L) \circ \gamma^* | \tilde{D} \circ (\gamma. - \mathfrak{m})\rangle(t) = I_\circ,$$

wobei

$$\tilde{D} = \{(z, \tilde{D}(z)) : z \in \mathbb{R}^3\}.$$

<u>Beweis</u> `a)` Nach Voraussetzung gilt für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ und alle $t \in \mathbb{R}$, $x, v \in \mathbb{R}^3$ mit $((t, x), v) \in \Omega$,

$$0 = \frac{L(((t, \mathfrak{m} + D(\alpha)(x - \mathfrak{m})), D(\alpha)(v))) - L(((t, x), v))}{\alpha},$$

so dass

$$0 = \lim_{\alpha \to 0} \frac{L(((t, \mathfrak{m} + D(\alpha)(x - \mathfrak{m})), D(\alpha)(v))) - L(((t, x), v))}{\alpha}.$$

Offenbar gilt für alle $\alpha \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{m} + D(\alpha)(z-\mathfrak{m})) - z &= D(\alpha)(z-\mathfrak{m}) - (z-\mathfrak{m}) \\
&= \langle z-\mathfrak{m}|\mathfrak{e}\rangle \cdot \mathfrak{e} + ((\cos\alpha)\cdot\langle z-\mathfrak{m}|\mathfrak{f}\rangle + (\sin\alpha)\cdot\langle z-\mathfrak{m}|\mathfrak{g}\rangle)\cdot\mathfrak{f} \\
&\quad + (-(\sin\alpha)\cdot\langle z-\mathfrak{m}|\mathfrak{f}\rangle + (\cos\alpha)\cdot\langle z-\mathfrak{m}|\mathfrak{g}\rangle)\cdot\mathfrak{g} \\
&\quad - \langle z-\mathfrak{m}|\mathfrak{e}\rangle\cdot\mathfrak{e} - \langle z-\mathfrak{m}|\mathfrak{f}\rangle\cdot\mathfrak{f} - \langle z-\mathfrak{m}|\mathfrak{g}\rangle\cdot\mathfrak{g} \\
&= (((\cos\alpha)-1)\cdot\langle z-\mathfrak{m}|\mathfrak{f}\rangle + (\sin\alpha)\cdot\langle z-\mathfrak{m}|\mathfrak{g}\rangle)\cdot\mathfrak{f} \\
&\quad + (-(\sin\alpha)\cdot\langle z-\mathfrak{m}|\mathfrak{f}\rangle + ((\cos\alpha)-1)\cdot\langle z-\mathfrak{m}|\mathfrak{g}\rangle)\cdot\mathfrak{g},
\end{aligned}$$

so dass für alle $z \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned}
\lim_{\alpha\to 0}\frac{(\mathfrak{m} + D(\alpha)(z-\mathfrak{m})) - z}{\alpha} &= \lim_{\alpha\to 0}\frac{D(\alpha)(z-\mathfrak{m}) - (z-\mathfrak{m})}{\alpha} \\
&= \lim_{\alpha\to 0}\left(\left(\frac{(\cos\alpha)-1}{\alpha}\cdot\langle z-\mathfrak{m}|\mathfrak{f}\rangle + \frac{\sin\alpha}{\alpha}\cdot\langle z-\mathfrak{m}|\mathfrak{g}\rangle\right)\cdot\mathfrak{f}\right. \\
&\quad \left. + \left(-\frac{\sin\alpha}{\alpha}\cdot\langle z-\mathfrak{m}|\mathfrak{f}\rangle + \frac{(\cos\alpha)-1}{\alpha}\cdot\langle z-\mathfrak{m}|\mathfrak{g}\rangle\right)\right)\cdot\mathfrak{g} \\
&= \langle z-\mathfrak{m}|\mathfrak{g}\rangle\cdot\mathfrak{f} - \langle z-\mathfrak{m}|\mathfrak{f}\rangle\cdot\mathfrak{g} = \tilde{D}(z-\mathfrak{m}),
\end{aligned}$$

und ähnlich

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{D(\alpha)(z) - z}{\alpha} = \langle z|\mathfrak{g}\rangle\cdot\mathfrak{f} - \langle z|\mathfrak{f}\rangle\cdot\mathfrak{g} = \tilde{D}(z),$$

Konsequenter Weise für alle t, x, v mit $t \in \mathbb{R}, x, v \in \mathbb{R}^3$ und $((t,x),v) \in \Omega$,

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{\alpha\to 0}\frac{L(((t, \mathfrak{m} + D(\alpha)(x-\mathfrak{m})), D(\alpha)(v))) - L(((t,x),v))}{\alpha} \\
&= \langle(\nabla_{\mathtt{x}}L)(((t,x),v))|\lim_{\alpha\to 0}\frac{(\mathfrak{m} + D(\alpha)(x-\mathfrak{m})) - x}{\alpha}\rangle \\
&\quad + \langle(\nabla_{\mathtt{v}}L)(((t,x),v))|\lim_{\alpha\to 0}\frac{D(\alpha)(v) - v}{\alpha}\rangle \\
&= \langle(\nabla_{\mathtt{x}}L)(((t,x),v))|\tilde{D}(x-\mathfrak{m})\rangle + \langle(\nabla_{\mathtt{v}}L)(((t,x),v))|\tilde{D}(v)\rangle.
\end{aligned}$$

<u>Beweis</u> `b)` Via `a)` gilt für alle $t \in \mathsf{dom}\,\gamma$,

$$
\begin{aligned}
0 &= \langle (\nabla_{\mathtt{x}} L)\circ\gamma^* | \tilde{D}\circ(\gamma. - \mathfrak{m})\rangle(t) + \langle (\nabla_{\mathtt{v}} L)\circ\gamma^* | \tilde{D}\circ\gamma^\bullet\rangle(t) \\
&= \langle (\nabla_{\mathtt{x}} L)\circ\gamma^* | \tilde{D}\circ(\gamma. - \mathfrak{m})\rangle(t) + \langle (\nabla_{\mathtt{v}} L)\circ\gamma^* | \tilde{D}\circ(\gamma. - \mathfrak{m})^\bullet\rangle(t) \\
&= \langle (\nabla_{\mathtt{x}} L)\circ\gamma^* | \tilde{D}\circ(\gamma. - \mathfrak{m})\rangle(t) \\
&\quad + \Big(\langle (\nabla_{\mathtt{v}} L)\circ\gamma^* | \tilde{D}\circ(\gamma. - \mathfrak{m})\rangle\Big)^\bullet(t) - \langle ((\nabla_{\mathtt{v}} L)\circ\gamma^*)^\bullet | \tilde{D}\circ(\gamma. - \mathfrak{m})\rangle(t) \\
&= \langle (\nabla_{\mathtt{x}} L)\circ\gamma^* - ((\nabla_{\mathtt{v}} L)\circ\gamma^*)^\bullet | \tilde{D}\circ(\gamma. - \mathfrak{m})\rangle(t) \\
&\quad + \Big(\langle (\nabla_{\mathtt{v}} L)\circ\gamma^* | \tilde{D}\circ(\gamma. - \mathfrak{m})\rangle\Big)^\bullet(t) \\
&= \langle \mathsf{zo}_{\mathsf{dom}\,\gamma} || \tilde{D}\circ(\gamma. - \mathfrak{m})\rangle(t) + \Big(\langle (\nabla_{\mathtt{v}} L)\circ\gamma^* | \tilde{D}\circ(\gamma. - \mathfrak{m})\rangle\Big)^\bullet(t) \\
&= \Big(\langle (\nabla_{\mathtt{v}} L)\circ\gamma^* | \tilde{D}\circ(\gamma. - \mathfrak{m})\rangle\Big)^\bullet(t).
\end{aligned}
$$

□

⋆

<u>Bemerkung</u> Die Funktion

$$I : \Omega \to \mathbb{R}, \quad I(((t,x),v)) = \langle (\nabla_{\mathtt{v}} L)(((t,x),v)) | \tilde{D}(x - \mathfrak{m})\rangle,$$

ist der $\mathfrak{f}, \mathfrak{g}$-Drehimpuls von L bezüglich $\mathfrak{m}$.

4 lf - brchymSPhi, kK oder NWt

4.1 $\Phi(x) = -m \cdot g \cdot \langle x|\mathfrak{e}\rangle$

Satz - brchmSkK.1

`V1.` $\mathfrak{e}, \mathfrak{f}, \mathfrak{g}$ ONB $\mathbb{R}^3$.

`V2.` $0 < m, g \in \mathbb{R}$.

`V3.` $\Phi = \{(x, -m \cdot g \cdot \langle x|\mathfrak{e}\rangle) : x \in \mathbb{R}^3\}$.

`V4.` $c \in]0| + \infty]$ und $S \in \mathtt{C}^2([0|c^2[: \mathbb{R})$ und $0 = S(0)$.

`V5.` $\forall z : z \in]0|c^2[\quad \Rightarrow \quad 0 < S'(z) + 2 \cdot z \cdot S''(z)$.

`V6.` $Q, \overline{Q}, w, \dfrac{1}{\sqrt{.w}}$ wie in **Satz - SQw**.

`V7.` $E_\circ \in \mathbb{R}$ und $O = \{x : x \in \mathbb{R}^3 \wedge E_\circ - m \cdot \overline{Q} < -m \cdot g \cdot \langle x|\mathfrak{e}\rangle < E_\circ\}$.

`V8.` $\Omega = (\mathbb{R} \times O) \times \{v : \mathfrak{o}^3 \neq v \in \mathbb{R}^3\}$.

`V9.` $L = \left\{\left(((t,x),v), \dfrac{|v|}{\sqrt{w\left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot \langle x|\mathfrak{e}\rangle\right)}}\right) : t \in \mathbb{R} \wedge x \in O \wedge \mathfrak{o}^3 \neq v \in \mathbb{R}^3\right\}$.

$\Rightarrow$

`a)` $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\Phi(x) = -m \cdot g \cdot \langle x|\mathfrak{e}\rangle$ und $\Phi \in \mathtt{C}^{+\infty}(\mathbb{R}^3 : \mathbb{R})$.

`b)` $0 \neq \Omega \subseteq (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3) \times \mathbb{R}^3$ offen.

`c)` $L : \Omega \to \mathbb{R}$, $L(((t,x),v)) = \dfrac{|v|}{\sqrt{w\left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot \langle x|\mathfrak{e}\rangle\right)}}$

und $\quad L = \left\{\left(((t,x),v), \dfrac{|v|}{\sqrt{w\left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(x))\right)}}\right) : t \in \mathbb{R} \wedge x \in O \wedge \mathfrak{o}^3 \neq v \in \mathbb{R}^3\right\}$.

`d)` E ist $3, \Omega$-Energie von $L \quad \Leftrightarrow \quad E = \mathsf{zo}_\Omega$.

`e)` Falls $\forall \alpha, u$: $\alpha \in \mathbb{R} \wedge u \in \mathbb{R}^3$

$$\Rightarrow \quad D(\alpha)(u) = \langle u|\mathfrak{e}\rangle \cdot \mathfrak{e} + ((\cos\alpha) \cdot \langle u|\mathfrak{f}\rangle + (\sin\alpha) \cdot \langle u|\mathfrak{g}\rangle) \cdot \mathfrak{f} + (-(\sin\alpha) \cdot \langle u|\mathfrak{f}\rangle + (\cos\alpha) \cdot \langle u|\mathfrak{g}\rangle) \cdot \mathfrak{g},$$

dann $\forall t, x, v : t \in \mathbb{R} \wedge x, v \in \mathbb{R}^3 \wedge ((t,x),v) \in \Omega$

$$\Rightarrow \quad ((t, D(\alpha)(x)), D(\alpha)(v)) \in \Omega \wedge L(((t, D(\alpha)(x)), D(\alpha)(v))) = L(((t,x),v)).$$

`f)` Falls γ eine $3,\Omega$-Zustandskurve von L ist, dann $\exists I_\circ : I_\circ \in \mathbb{R}$ und

$$\forall t : t \in I \quad \Rightarrow \quad \left(\langle\gamma^\bullet|\mathfrak{f}\rangle \cdot \langle\gamma|\mathfrak{g}\rangle - \langle\gamma^\bullet|\mathfrak{g}\rangle \cdot \langle\gamma|\mathfrak{f}\rangle\right)(t) = I_\circ \cdot |\gamma^\bullet| \cdot \sqrt{w\left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot \langle\gamma(t)|\mathfrak{e}\rangle\right)}.$$

`g)` Falls γ eine $3,\Omega$-Zustandskurve von L ist und falls

$$\gamma_1 = \langle\gamma|\mathfrak{e}\rangle, \gamma_2 = \langle\gamma|\mathfrak{f}\rangle, \gamma_3 = \langle\gamma|\mathfrak{g}\rangle,$$

dann

$$\forall t : t \in \mathsf{dom}\,\gamma \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\gamma_1^\bullet}{|\gamma^\bullet|} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{.w}}\right)\left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot \gamma_1\right)\right)^\bullet(t) = g \cdot |\gamma^\bullet| \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{.w}}\right)'\left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot \gamma_1\right)(t),$$

und $\exists I_\circ, I_2, I_3 \in \mathbb{R}$, so dass

$$\gamma_2^\bullet = I_2 \cdot |\gamma^\bullet| \cdot \sqrt{w\left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot \gamma_1\right)} \quad \text{auf} \quad \mathsf{dom}\,\gamma,$$

$$\gamma_3^\bullet = I_3 \cdot |\gamma^\bullet| \cdot \sqrt{w\left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot \gamma_1\right)} \quad \text{auf} \quad \mathsf{dom}\,\gamma,$$

$$0 = I_3 \cdot \gamma_2^\bullet - I_2 \cdot \gamma_3^\bullet, \quad I_\circ = I_3 \cdot \gamma_2 - I_2 \cdot \gamma_3 \quad \text{auf} \quad \mathsf{dom}\,\gamma.$$

`h)` Falls γ eine $3,\Omega$-Zustandskurve von L ist, falls

$$\gamma_1 = \langle\gamma|\mathfrak{e}\rangle, \gamma_2 = \langle\gamma|\mathfrak{f}\rangle, \gamma_3 = \langle\gamma|\mathfrak{g}\rangle,$$

und falls $0 = \gamma_2^\bullet = \gamma_3^\bullet$ auf $\mathsf{dom}\,\gamma$, dann ($0 < \gamma_1^\bullet$ oder $\gamma_1^\bullet < 0$) auf $\mathsf{dom}\,\gamma$ und es gibt λ_2, λ_3 mit $\lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, so dass

$$\forall t : t \in \mathsf{dom}\,\gamma \quad \Rightarrow \quad \gamma(t) = \gamma_1(t) \cdot \mathfrak{e} + \lambda_2 \cdot \mathfrak{f} + \lambda_3 \cdot \mathfrak{g}.$$

i) Falls γ eine $3,\Omega$-Zustandskurve von L ist, falls

$$\gamma_1 = \langle\gamma|\mathfrak{e}\rangle, \gamma_2 = \langle\gamma|\mathfrak{f}\rangle, \gamma_3 = \langle\gamma|\mathfrak{g}\rangle,$$

falls $I_2, I_3 \in \mathbb{R}$ mit $0 \neq \sqrt{I_2^2 + I_3^2}$, falls

$$0 = I_3 \cdot \gamma_2^\bullet - I_2 \cdot \gamma_3^\bullet \quad \text{auf} \quad \mathsf{dom}\,\gamma,$$

falls

$$\mathfrak{f}^* = \frac{1}{\sqrt{I_2^2 + I_3^2}} \cdot (I_3 \cdot \mathfrak{f} - I_2 \cdot \mathfrak{g}), \quad \mathfrak{g}^* = \frac{1}{\sqrt{I_2^2 + I_3^2}} \cdot (I_2 \cdot \mathfrak{f} + I_3 \cdot \mathfrak{g}),$$

und falls

$$\gamma_2^* = \langle\gamma|\mathfrak{f}^*\rangle, \gamma_3^* = \langle\gamma|\mathfrak{g}^*\rangle,$$

dann ist $\mathfrak{e}, \mathfrak{f}^*, \mathfrak{g}^*$ ONB $\mathbb{R}^3$ und

$$\forall t : t \in \mathsf{dom}\,\gamma \quad \Rightarrow \quad 0 = (\gamma_2^*)^\bullet(t)$$
$$\wedge \quad 0 < (\gamma_3^*)^\bullet(t) = \sqrt{I_2^2 + I_3^2} \cdot |\gamma^\bullet(t)| \cdot \sqrt{w\left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot \gamma_1(t)\right)}.$$

j) Falls γ eine $3,\Omega$-Zustandskurve von L ist, falls

$$\gamma_1 = \langle\gamma|\mathfrak{e}\rangle, \gamma_2 = \langle\gamma|\mathfrak{f}\rangle, \gamma_3 = \langle\gamma|\mathfrak{g}\rangle,$$

falls $I, I_2, I_3 \in \mathbb{R}$ mit $0 \neq \sqrt{I_2^2 + I_3^2} = I$ und falls

$$\gamma_2^\bullet = I_2 \cdot |\gamma^\bullet| \cdot \sqrt{w\left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot \gamma_1\right)} \quad \text{auf} \quad \mathsf{dom}\,\gamma,$$

$$\gamma_3^\bullet = I_3 \cdot |\gamma^\bullet| \cdot \sqrt{w\left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot \gamma_1\right)} \quad \text{auf} \quad \mathsf{dom}\,\gamma,$$

dann

$$0 < (\gamma_2^\bullet)^2 + (\gamma_3^\bullet)^2 \quad \text{auf} \quad \mathsf{dom}\,\gamma,$$

und

$$I^2 \cdot w\left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot \gamma_1\right) \leq 1 \quad \text{auf} \quad \mathsf{dom}\,\gamma,$$

und

(

$0 < \gamma_1^\bullet$ auf $\mathsf{dom}\,\gamma$ und $0 < 1 - I^2 \cdot w\left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot \gamma_1\right)$ auf $\mathsf{dom}\,\gamma$

und $\quad \forall t : t \in \mathsf{dom}\,\gamma$

$$\Rightarrow \quad \gamma_1^\bullet(t) \cdot \sqrt{\frac{I^2 \cdot w}{1 - I^2 \cdot w}} \left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot \gamma_1\right) = \sqrt{(\gamma_2^\bullet)^2 + (\gamma_3^\bullet)^2}(t),$$

oder

$\gamma_1^\bullet < 0$ auf $\mathsf{dom}\,\gamma$ und $0 < 1 - I^2 \cdot w\left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot \gamma_1\right)$ auf $\mathsf{dom}\,\gamma$

und $\quad \forall t : t \in \mathsf{dom}\,\gamma$

$$\Rightarrow \quad \gamma_1^\bullet(t) \cdot \sqrt{\frac{I^2 \cdot w}{1 - I^2 \cdot w}} \left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot \gamma_1\right) = -\sqrt{(\gamma_2^\bullet)^2 + (\gamma_3^\bullet)^2}(t),$$

oder

$\gamma_1^\bullet$ hat genau eine Nullstelle t_0 und $0 < \gamma_1^\bullet$ auf $(\mathsf{dom}\,\gamma) \cap]-\infty|t_0[$ und $\gamma_1^\bullet < 0$ auf $(\mathsf{dom}\,\gamma) \cap]t_0| + \infty[$ und $0 < 1 - I^2 \cdot w\left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot \gamma_1\right)$ auf $(\mathsf{dom}\,\gamma) \setminus \{t_0\}$

und $\quad \forall t : t \in (\mathsf{dom}\,\gamma) \setminus \{t_0\}$

$$\Rightarrow \quad \gamma_1^\bullet(t) \cdot \sqrt{\frac{I^2 \cdot w}{1 - I^2 \cdot w}} \left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot \gamma_1\right) = \mathsf{sgn}\,(\gamma_1^\bullet(t)) \cdot \sqrt{(\gamma_2^\bullet)^2 + (\gamma_3^\bullet)^2}(t),$$

).

`k)` Falls γ eine $3, \Omega$-Zustandskurve von L ist, falls

$$\gamma_1 = \langle \gamma | \mathfrak{e} \rangle, \gamma_2 = \langle \gamma | \mathfrak{f} \rangle, \gamma_3 = \langle \gamma | \mathfrak{g} \rangle,$$

falls $I, I_2, I_3 \in \mathbb{R}$ mit $0 \neq \sqrt{I_2^2 + I_3^2} = I$, falls

$$\gamma_2^\bullet = I_2 \cdot |\gamma^\bullet| \cdot \sqrt{w\left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot \gamma_1\right)} \quad \text{auf} \quad \mathsf{dom}\,\gamma,$$

$$\gamma_3^\bullet = I_3 \cdot |\gamma^\bullet| \cdot \sqrt{w\left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot \gamma_1\right)} \quad \text{auf} \quad \mathsf{dom}\,\gamma,$$

und falls $\alpha \in \mathbb{R}$ mit

$$\cos\alpha = \frac{I_2}{\sqrt{I_2^3 + I_3^2}}, \quad \sin\alpha = \frac{I_3}{\sqrt{I_2^2 + I_3^2}},$$

dann $\forall t : t \in \mathsf{dom}\,\gamma \quad \Rightarrow \quad 0 = \gamma_1^\bullet(t)$ *oder*

$$\gamma_2^\bullet(t) = \cos\alpha \cdot |\gamma_1^\bullet| \cdot \sqrt{\frac{I^2 \cdot w}{1 - I^2 \cdot w}} \left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot \gamma_1\right)(t),$$

$$\gamma_3^\bullet(t) = \sin\alpha \cdot |\gamma_1^\bullet| \cdot \sqrt{\frac{I^2 \cdot w}{1 - I^2 \cdot w}} \left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot \gamma_1\right)(t).$$

`1)` Falls γ eine $3, \Omega$-Zustandskurve von L ist, falls

$$\gamma_1 = \langle \gamma | \mathfrak{e} \rangle, \gamma_2 = \langle \gamma | \mathfrak{f} \rangle, \gamma_3 = \langle \gamma | \mathfrak{g} \rangle,$$

falls $I, I_2, I_3 \in \mathbb{R}$ mit $0 \neq \sqrt{I_2^2 + I_3^2} = I$, falls

$$\gamma_2^\bullet = I_2 \cdot |\gamma^\bullet| \cdot \sqrt{w\left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot \gamma_1\right)} \quad \text{auf} \quad \mathsf{dom}\,\gamma,$$

$$\gamma_3^\bullet = I_3 \cdot |\gamma^\bullet| \cdot \sqrt{w\left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot \gamma_1\right)} \quad \text{auf} \quad \mathsf{dom}\,\gamma,$$

falls $\alpha \in \mathbb{R}$ mit

$$\cos\alpha = \frac{I_2}{\sqrt{I_2^3 + I_3^2}}, \quad \sin\alpha = \frac{I_3}{\sqrt{I_2^2 + I_3^2}},$$

und falls $t_\circ \in \mathsf{dom}\,\gamma$, $\delta_\circ \in \mathbb{R}$,

$$\delta = \left\{ \left(t, \delta_\circ + \int_{t_\circ}^{t} \sqrt{(\gamma_2^\bullet)^2 + (\gamma_3^\bullet)^2} \right) : t \in \mathsf{dom}\,\gamma \right\},$$

$$\xi = \delta^{-1}, \quad \overline{\gamma_1} = \gamma_1 \circ \xi, \quad \overline{\gamma_2} = \gamma_2 \circ \xi, \quad \overline{\gamma_3} = \gamma_1 \circ \xi, \quad \overline{\gamma} = \gamma \circ \xi$$

dann $\delta \in \mathsf{C}^2(\mathsf{dom}\,\gamma : \mathbb{R})$, $0 < \delta^\bullet$ auf $\mathsf{dom}\,\gamma$, δ streng wachsend, $\mathsf{ran}\,\delta$ echtes reelles Intervall, $\xi \in \mathsf{C}^2(\mathsf{ran}\,\delta : \mathbb{R})$, $\xi : \mathsf{ran}\,\delta \to \mathsf{dom}\,\gamma$ bijektiv, $0 < \xi^\bullet$ auf $\mathsf{ran}\,\delta$, ξ streng wachsend und

$$\overline{\gamma_1}, \overline{\gamma_2}, \overline{\gamma_3} \in \mathsf{C}^2(\mathsf{ran}\,\delta : \mathbb{R}), \quad \overline{\gamma} \in \mathsf{C}^2(\mathsf{ran}\,\delta : \mathbb{R}^3),$$

und

$$E_\circ - m \cdot \overline{Q} < -m \cdot g \cdot \overline{\gamma_1} < E_\circ \quad \text{auf} \quad \mathsf{ran}\,\delta,$$

und

$$\forall \tau : \tau \in \mathsf{ran}\,\delta \quad \Rightarrow \quad (\overline{\gamma_1})^\bullet(\tau) = \frac{\gamma_1^\bullet(\xi(\tau))}{\sqrt{(\gamma_2^\bullet)^2 + (\gamma_3^\bullet)^2(\xi(\tau))}},$$

$$(\overline{\gamma_2})^\bullet(\tau) = \frac{\gamma_2^\bullet(\xi(\tau))}{\sqrt{(\gamma_2^\bullet)^2 + (\gamma_3^\bullet)^2(\xi(\tau))}}, \quad (\overline{\gamma_3})^\bullet(\tau) = \frac{\gamma_3^\bullet(\xi(\tau))}{\sqrt{(\gamma_2^\bullet)^2 + (\gamma_3^\bullet)^2(\xi(\tau))}},$$

$$(\overline{\gamma})^\bullet(\tau) = \frac{1}{\sqrt{(\gamma_2^\bullet)^2 + (\gamma_3^\bullet)^2(\xi(\tau))}} \cdot \gamma^\bullet(\xi(\tau)),$$

und

$$\forall \tau : \tau \in \mathsf{ran}\,\delta \quad \Rightarrow \quad \mathsf{sgn}\,((\overline{\gamma_1})^\bullet(\tau)) = \mathsf{sgn}\,(\gamma_1^\bullet(\xi(\tau)),$$

und ($0 < (\overline{\gamma_1})^\bullet$ *oder* $(\overline{\gamma_1})^\bullet < 0$) auf $\operatorname{\mathsf{ran}} \delta$ *oder* $(\overline{\gamma_1})^\bullet$ hat genau eine Nullstelle $\tau_\circ$ und $0 < (\overline{\gamma_1})^\bullet$ auf $(\operatorname{\mathsf{ran}} \delta) \cap]-\infty|\tau_\circ[$ und $(\overline{\gamma_1})^\bullet < 0$ auf $(\operatorname{\mathsf{ran}} \delta) \cap]\tau_\circ|+\infty[$) und

$$\forall \tau : \tau \in \operatorname{\mathsf{ran}} \delta \wedge 0 \neq (\overline{\gamma_1})^\bullet(\tau)$$
$$\Rightarrow \quad (\overline{\gamma_1})^\bullet(\tau) \cdot \sqrt{\frac{I^2 \cdot w}{1 - I^2 \cdot w}} \left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot \overline{\gamma_1}(\tau) \right) = \operatorname{\mathsf{sgn}}\left((\overline{\gamma_1})^\bullet(\tau)\right),$$

und

$$(\overline{\gamma_2})^\bullet = I_2 \cdot |(\overline{\gamma})^\bullet| \cdot \sqrt{w \left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot \overline{\gamma_1} \right)} \quad \text{auf} \quad \operatorname{\mathsf{ran}} \delta,$$

und

$$(\overline{\gamma_3})^\bullet = I_3 \cdot |(\overline{\gamma})^\bullet| \cdot \sqrt{w \left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot \overline{\gamma_1} \right)} \quad \text{auf} \quad \operatorname{\mathsf{ran}} \delta,$$

`m)` Falls γ eine 2-Kurve in $\mathbb{R}^3$ ist, falls

$$\forall t : t \in \operatorname{\mathsf{dom}} \gamma \quad \Rightarrow \quad E_\circ - m \cdot \overline{Q} < -m \cdot g \cdot \langle \gamma | \mathfrak{e} \rangle(t) < E_\circ \quad \wedge \quad 0 \neq |\gamma^\bullet(t)|,$$

und falls

$$\forall t : t \in \operatorname{\mathsf{dom}} \gamma \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\gamma^\bullet}{|\gamma^\bullet|} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{.w}} \right) \left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot \langle \gamma | \mathfrak{e} \rangle \right) \right)^\bullet (t)$$
$$= g \cdot |\gamma^\bullet| \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{.w}} \right)' \left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot \langle \gamma | \mathfrak{e} \rangle \right) (t) \cdot \mathfrak{e},$$

dann ist γ eine $3, \Omega$-Zustandskurve von L.

Beweis `a), b), c), d)` trivial.

Beweis `e), f), g)` Rechnung.

Beweis `h)` Rechnung inclusive Informationsleere der ODE.

Beweis `i)` Rechnung.

Beweis `j)` Offenbar gilt

$$0 < (\gamma_2^\bullet)^2 + (\gamma_3^\bullet)^2 \quad \text{auf} \quad \operatorname{\mathsf{dom}} \gamma$$

Auch gilt

$$|\gamma^\bullet|^2 = (\gamma_1^\bullet)^2 + (\gamma_2^\bullet)^2 + (\gamma_3^\bullet)^2 = (\gamma_1^\bullet)^2 + I^2 \cdot |\gamma^\bullet|^2 \cdot w \left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot \gamma_1 \right) \quad \text{auf} \quad \operatorname{\mathsf{dom}} \gamma,$$

woraus

$$0 \leq |\gamma_1^\bullet|^2 = |\gamma^\bullet|^2 \cdot \left(1 - I^2 \cdot w\left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot \gamma_1\right)\right) \quad \text{auf} \quad \mathsf{dom}\,\gamma,$$

folgt. Via $0 \neq |\gamma^\bullet|$ auf $\mathsf{dom}\,\gamma$ folgt hieraus

$$I^2 \cdot w\left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot \gamma_1\right) \leq 1 \quad \text{auf} \quad \mathsf{dom}\,\gamma.$$

<u>1.Fall</u> $0 < \gamma_1^\bullet$ auf $\mathsf{dom}\,\gamma$.
Dann $1 \neq I^2 \cdot w\left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot \gamma_1\right)$ auf $\mathsf{dom}\,\gamma$ und

$$\frac{\gamma_1^\bullet}{\sqrt{1 - I^2 \cdot w\left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot \gamma_1\right)}} = |\gamma^\bullet| \quad \text{auf} \quad \mathsf{dom}\,\gamma,$$

und hieraus

$$\begin{aligned}(\gamma_2^\bullet)^2 + (\gamma_3^\bullet)^2 &= I^2 \cdot |\gamma^\bullet|^2 \cdot w\left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot \gamma_1\right) \\ &= I^2 \cdot \frac{(\gamma_1^\bullet)^2}{1 - I^2 \cdot w\left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot \gamma_1\right)} \cdot w\left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot \gamma_1\right) \quad \text{auf} \quad \mathsf{dom}\,\gamma,\end{aligned}$$

so dass

$$\gamma_1^\bullet \cdot \sqrt{\frac{I^2 \cdot w}{1 - I^2 \cdot w}}\left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot \gamma_1\right) = \sqrt{(\gamma_2^\bullet)^2 + (\gamma_3^\bullet)^2} \quad \text{auf} \quad \mathsf{dom}\,\gamma,$$

folgt.
Die ODE von $\mathsf{g)}$ ist hier informationsleer, denn via

$$\gamma_1^\bullet = |\gamma^\bullet| \cdot \sqrt{1 - I^2 \cdot w}\left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot \gamma_1\right) \quad \text{auf} \quad \mathsf{dom}\,\gamma,$$

folgt

$$\begin{aligned}&\left(\left(\sqrt{1 - I^2 \cdot w} \cdot \cdot \cdot \frac{1}{\sqrt{.w}}\right)\left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot \gamma_1\right)\right)^\bullet \\ &\qquad = g \cdot |\gamma^\bullet| \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{.w}}\right)'\left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot \gamma_1\right) \\ &= g \cdot \frac{\gamma_1^\bullet}{\sqrt{1 - I^2 \cdot w\left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot \gamma_1\right)}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{.w}}\right)'\left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot \gamma_1\right) \\ &= g \cdot \gamma_1^\bullet \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 - I^2 \cdot w}} \cdot \cdot \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{.w}}\right)'\right)\left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot \gamma_1\right) \quad \text{auf} \quad \mathsf{dom}\,\gamma,\end{aligned}$$

also

$$\left(\frac{-I^2\cdot w'}{2\cdot\sqrt{1-I^2\cdot w}}\cdot\cdot\cdot\frac{1}{\sqrt{.w}}+\sqrt{1-I^2\cdot w}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{.w}}\right)'\right)\left(\frac{E_\circ}{m}+g\cdot\gamma_1\right)\cdot g\cdot\gamma_1^\bullet$$
$$=g\cdot\gamma_1^\bullet\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{1-I^2\cdot w}}\cdot\cdot\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{.w}}\right)'\right)\left(\frac{E_\circ}{m}+g\cdot\gamma_1\right)\quad\text{auf}\quad\mathsf{dom}\,\gamma,$$

und nun via $0<g\cdot\gamma_1^\bullet$ auf $\mathsf{dom}\,\gamma$,

$$0=\frac{1}{\sqrt{1-I^2\cdot w}}$$
$$\cdot\cdot\cdot\left(-I^2\cdot w'\cdot\cdot\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{w}}+(1-I^2\cdot w)\cdot\cdot\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{.w}}\right)'-\left(\frac{1}{\sqrt{.w}}\right)'\right)\left(\frac{E_\circ}{m}+g\cdot\gamma_1\right)$$
$$=-\frac{I^2}{\sqrt{1-I^2\cdot w}}\cdot\cdot\cdot\left(\frac{w'}{2\cdot\sqrt{w}}+w\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{.w}}\right)'\right)\left(\frac{E_\circ}{m}+g\cdot\gamma_1\right)$$
$$=0\quad\text{auf}\quad\mathsf{dom}\,\gamma.$$

<u>2.Fall</u> $\gamma_1^\bullet<0$ auf $\mathsf{dom}\,\gamma$.
Dann $1\neq I^2\cdot w\left(\frac{E_\circ}{m}+g\cdot\gamma_1\right)$ auf $\mathsf{dom}\,\gamma$ und

$$\frac{\gamma_1^\bullet}{\sqrt{1-I^2\cdot w\left(\frac{E_\circ}{m}+g\cdot\gamma_1\right)}}=-|\gamma^\bullet|\quad\text{auf}\quad\mathsf{dom}\,\gamma,$$

und hieraus

$$(\gamma_2^\bullet)^2+(\gamma_3^\bullet)^2=I^2\cdot|\gamma^\bullet|^2\cdot w\left(\frac{E_\circ}{m}+g\cdot\gamma_1\right)$$
$$=I^2\cdot\frac{(\gamma_1^\bullet)^2}{1-I^2\cdot w\left(\frac{E_\circ}{m}+g\cdot\gamma_1\right)}\cdot w\left(\frac{E_\circ}{m}+g\cdot\gamma_1\right)\quad\text{auf}\quad\mathsf{dom}\,\gamma,$$

so dass

$$\gamma_1^\bullet\cdot\sqrt{\frac{I^2\cdot w}{1-I^2\cdot w}\left(\frac{E_\circ}{m}+g\cdot\gamma_1\right)}=-\sqrt{(\gamma_2^\bullet)^2+(\gamma_3^\bullet)^2}\quad\text{auf}\quad\mathsf{dom}\,\gamma,$$

folgt.
Die ODE von g) ist informationsleer, denn via

$$\gamma_1^\bullet=-|\gamma^\bullet|\cdot\sqrt{1-I^2\cdot w}\left(\frac{E_\circ}{m}+g\cdot\gamma_1\right)\quad\text{auf}\quad\mathsf{dom}\,\gamma,$$

folgt

$$
\begin{aligned}
-\Bigg(\bigg(\sqrt{1-I^2\cdot w}.\cdot.\frac{1}{\sqrt{.w}}\bigg)&\left(\frac{E_\circ}{m}+g\cdot\gamma_1\right)\Bigg)^\bullet \\
&= g\cdot|\gamma^\bullet|\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{.w}}\right)'\left(\frac{E_\circ}{m}+g\cdot\gamma_1\right) \\
&= -g\cdot\frac{\gamma_1^\bullet}{\sqrt{1-I^2\cdot w\left(\frac{E_\circ}{m}+g\cdot\gamma_1\right)}}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{.w}}\right)'\left(\frac{E_\circ}{m}+g\cdot\gamma_1\right) \\
&= -g\cdot\gamma_1^\bullet\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{1-I^2\cdot w}}.\cdot.\left(\frac{1}{\sqrt{.w}}\right)'\right)\left(\frac{E_\circ}{m}+g\cdot\gamma_1\right)\quad\text{auf}\quad \mathsf{dom}\,\gamma,
\end{aligned}
$$

also

$$
\begin{aligned}
-\left(\frac{-I^2\cdot w'}{2\cdot\sqrt{1-I^2\cdot w}}.\cdot.\frac{1}{\sqrt{.w}}+\sqrt{1-I^2\cdot w}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{.w}}\right)'\right)&\left(\frac{E_\circ}{m}+g\cdot\gamma_1\right)\cdot g\cdot\gamma_1^\bullet \\
&= -g\cdot\gamma_1^\bullet\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{1-I^2\cdot w}}.\cdot.\left(\frac{1}{\sqrt{.w}}\right)'\right)\left(\frac{E_\circ}{m}+g\cdot\gamma_1\right)\quad\text{auf}\quad \mathsf{dom}\,\gamma,
\end{aligned}
$$

und nun via $g\cdot\gamma_1^\bullet<0$ auf $\mathsf{dom}\,\gamma$,

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{\sqrt{1-I^2\cdot w}} \\
&.\cdot.\left(-I^2\cdot w'.\cdot.\frac{1}{2\cdot\sqrt{w}}+(1-I^2\cdot w).\cdot.\left(\frac{1}{\sqrt{.w}}\right)'-\left(\frac{1}{\sqrt{.w}}\right)'\right)\left(\frac{E_\circ}{m}+g\cdot\gamma_1\right) \\
&= -\frac{I^2}{\sqrt{1-I^2\cdot w}}.\cdot.\left(\frac{w'}{2\cdot\sqrt{w}}+w\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{.w}}\right)'\right)\left(\frac{E_\circ}{m}+g\cdot\gamma_1\right) \\
&= 0\quad\text{auf}\quad \mathsf{dom}\,\gamma.
\end{aligned}
$$

<u>3.Fall</u> $\gamma^\bullet$ weder strikt positiv noch strikt negativ auf $\mathsf{dom}\,\gamma$.
Dann hat $\gamma^\bullet$, da stetig, mindestens eine Nullstelle in $\mathsf{dom}\,\gamma$. Falls $\tilde{t}$ eine Nullstelle von $\gamma^\bullet$ ist, dann via der ODE von g),

$$
\begin{aligned}
\frac{\gamma_1^\bullet}{|\gamma^\bullet|}(\tilde{t})\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{.w}}\right)'\left(\frac{E_\circ}{m}+g\cdot\gamma_1(\tilde{t})\right)+\left(\frac{\gamma_1^\bullet}{|\gamma^\bullet|}\right)^\bullet(\tilde{t})\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{.w}}\right)\left(\frac{E_\circ}{m}+g\cdot\gamma_1(\tilde{t})\right) \\
= g\cdot|\gamma^\bullet|\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{.w}}\right)'\left(\frac{E_\circ}{m}+g\cdot\gamma_1\right)(\tilde{t})<0,
\end{aligned}
$$

so dass

$$
\left(\frac{\gamma_1^\bullet}{|\gamma^\bullet|}\right)^\bullet(\tilde{t})\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{.w}}\right)\left(\frac{E_\circ}{m}+g\cdot\gamma_1(\tilde{t})\right)<0,
$$

woraus via der Positivität von w,

$$\left(\frac{\gamma_1^\bullet}{|\gamma^\bullet|}\right)^\bullet(\tilde{t}) < 0,$$

folgt. Somit gilt

$$\frac{\gamma_1^{\bullet\bullet}(\tilde{t}) \cdot |\gamma^\bullet(t)| - \gamma_1^\bullet(t) \cdot |\gamma^\bullet|^\bullet(\tilde{t})}{|\gamma^\bullet|^2(\tilde{t})} < 0,$$

und es folgt

$$\gamma_1^{\bullet\bullet}(\tilde{t}) < 0.$$

Somit ist $\gamma_1^\bullet$ lokal positiv links von $\tilde{t}$ und lokal negativ rechts von $\tilde{t}$ und $\gamma_1^\bullet$ hat höchstens eine Nullstelle $t_\circ$. Konsequenter Weise ist $\gamma_1^\bullet$ positiv links von t_0 und negativ rechts von t_0. Die weiteren Aussagen folgen ähnlich wie in <u>1.Fall</u> oder <u>2.Fall</u>.

<u>Beweis</u> `k), l)` Rechnung.

<u>Beweis</u> `m)` trivial. □

Satz - brchmSkK.2

V1. $\mathfrak{e},\mathfrak{f},\mathfrak{g}$ ONB $\mathbb{R}^3$.

V2. $0<m,g\in\mathbb{R}$.

V3. $c\in\,]0|+\infty]$ und $S\in \mathtt{C}^2([0|c^2[\,:\mathbb{R})$ und $0=S(0)$.

V4. $\forall z: z\in\,]0|c^2[\quad\Rightarrow\quad 0<S'(z)+2\cdot z\cdot S''(z)$.

V5. $Q,\overline{Q},w$ wie in **Satz - SQw**.

V6. $E_\circ\in\mathbb{R}$ und $O=\{x:x\in\mathbb{R}^3\wedge E_\circ-m\cdot\overline{Q}<-m\cdot g\cdot\langle x|\mathfrak{e}\rangle<E_\circ\}$.

V7. $\Omega=(\mathbb{R}\times O)\times\{v:\mathfrak{o}^3\neq v\in\mathbb{R}^3\}$.

V8. $$L=\left\{\left(((t,x),v),\frac{|v|}{\sqrt{w\left(\frac{E_\circ}{m}+g\cdot\langle x|\mathfrak{e}\rangle\right)}}\right):t\in\mathbb{R}\wedge x\in O\wedge\mathfrak{o}^3\neq v\in\mathbb{R}^3\right\}.$$

V9. $\mathfrak{a},\mathfrak{b}\in\mathbb{R}^3$, $\mathfrak{a}\neq\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}-\mathfrak{a}\in\mathbb{H}[\{\mathfrak{e},\mathfrak{g}\}]$ und $0\le\langle\mathfrak{b}-\mathfrak{a}|\mathfrak{g}\rangle$.

V10. $$\mathcal{C}=\Big\{\gamma:\gamma\text{ ist 2-Kurve im }\mathbb{R}^3\wedge\mathsf{dom}\,\gamma\text{ offen}\wedge\lim_{t\downarrow\inf(\mathsf{dom}\,\gamma)}\gamma(t)=\mathfrak{a}$$
$$\wedge\lim_{t\uparrow\sup(\mathsf{dom}\,\gamma)}\gamma(t)=\mathfrak{b}\wedge E_\circ-m\cdot\overline{Q}<-m\cdot g\cdot\langle\gamma|\mathfrak{e}\rangle<E_\circ\text{ auf }\mathsf{dom}\,\gamma\Big\}.$$

$\Rightarrow$

a) $0\neq\mathcal{C}$

$$\Leftrightarrow\quad E_\circ-m\cdot\overline{Q}\le-m\cdot g\cdot\langle\mathfrak{a}|\mathfrak{e}\rangle\le E_\circ\wedge E_\circ-m\cdot\overline{Q}\le-m\cdot g\cdot\langle\mathfrak{b}|\mathfrak{e}\rangle\le E_\circ.$$

b) $E_\circ<-m\cdot g\cdot\min\{\langle\mathfrak{a}|\mathfrak{e}\rangle,\langle\mathfrak{b}|\mathfrak{e}\rangle\}$ oder $-m\cdot g\cdot\max\{\langle\mathfrak{a}|\mathfrak{e}\rangle,\langle\mathfrak{b}|\mathfrak{e}\rangle\}<E_\circ-m\cdot\overline{Q}$
$\Rightarrow\quad\neg(\gamma\text{ ist }3,\Omega\text{-Zustandskurve von }L\wedge\gamma\in\mathcal{C})$.

c) γ ist $3,\Omega$-Zustandskurve von $L\wedge\gamma\in\mathcal{C}$

$$\Rightarrow\quad\langle\gamma|\mathfrak{f}\rangle=\langle\mathfrak{a}|\mathfrak{f}\rangle=\langle\mathfrak{b}|\mathfrak{f}\rangle\quad\text{auf}\quad\mathsf{dom}\,\gamma\quad\wedge\quad0=\langle\gamma|\mathfrak{f}\rangle^\bullet\quad\text{auf}\quad\mathsf{dom}\,\gamma,$$

und

$$0\le\langle\gamma|\mathfrak{g}\rangle^\bullet\quad\text{auf}\quad\mathsf{dom}\,\gamma.$$

d) γ ist $3,\Omega$-Zustandskurve von $L\wedge\gamma\in\mathcal{C}\wedge0=\langle\mathfrak{b}-\mathfrak{a}|\mathfrak{g}\rangle$

$$\Rightarrow\quad\langle\gamma|\mathfrak{g}\rangle=\langle\mathfrak{a}|\mathfrak{g}\rangle=\langle\mathfrak{b}|\mathfrak{g}\rangle\quad\text{auf}\quad\mathsf{dom}\,\gamma\quad\wedge\quad0=\langle\gamma|\mathfrak{g}\rangle^\bullet\quad\text{auf}\quad\mathsf{dom}\,\gamma,$$

und

$$0\neq\langle\mathfrak{b}-\mathfrak{a}|\mathfrak{e}\rangle,$$

und

$$\gamma = \langle\gamma|\mathfrak{e}\rangle\cdot\mathfrak{e} + \langle\mathfrak{a}|\mathfrak{f}\rangle\cdot\mathfrak{f} + \langle\mathfrak{b}|\mathfrak{g}\rangle\cdot\mathfrak{g} \quad \text{auf} \quad \mathsf{dom}\,\gamma,$$
$$\mathsf{sgn}\left(\langle\gamma|\mathfrak{e}\rangle^\bullet\right) = \mathsf{sgn}\left(\langle\mathfrak{b}-\mathfrak{a}|\mathfrak{e}\rangle\right) \in \{\pm 1\} \quad \text{auf} \quad \mathsf{dom}\,\gamma,$$

und

$$\int_{\inf(\mathsf{dom}\,\gamma)}^{\sup(\mathsf{dom}\,\gamma)} (L\circ\gamma^*) = \mathsf{sgn}\left(\langle\mathfrak{b}-\mathfrak{a}|\mathfrak{e}\rangle\right)\cdot\int_{\langle\mathfrak{a}|\mathfrak{e}\rangle}^{\langle\mathfrak{b}|\mathfrak{e}\rangle}\frac{dz}{\sqrt{w\left(\frac{E_\circ}{m}+g\cdot z\right)}}.$$

e) Falls

$$E_\circ - m\cdot\overline{Q} \leq -m\cdot g\cdot\langle\mathfrak{a}|\mathfrak{e}\rangle \leq E_\circ \quad\wedge\quad E_\circ - m\cdot\overline{Q} \leq -m\cdot g\cdot\langle\mathfrak{b}|\mathfrak{e}\rangle \leq E_\circ,$$

falls $0 = \langle\mathfrak{b}-\mathfrak{a}|\mathfrak{g}\rangle$ und falls

$$\gamma : \,]0|1[\, \to \mathbb{R}^3, \quad \gamma(t) = t\cdot\mathfrak{b} + (1-t)\cdot\mathfrak{a},$$

dann ist γ eine $3,\Omega$-Zustandskurve von L und $\gamma\in\mathcal{C}$ und

$$\int_0^1 (L\circ\gamma^*) = \mathsf{sgn}\left(\langle\mathfrak{b}-\mathfrak{a}|\mathfrak{e}\rangle\right)\cdot\int_{\langle\mathfrak{a}|\mathfrak{e}\rangle}^{\langle\mathfrak{b}|\mathfrak{e}\rangle}\frac{dz}{\sqrt{w\left(\frac{E_\circ}{m}+g\cdot z\right)}}.$$

f) γ ist $3,\Omega$-Zustandskurve von $L \wedge \gamma\in\mathcal{C} \wedge 0 < \langle\mathfrak{b}-\mathfrak{a}|\mathfrak{g}\rangle \wedge \overline{\gamma} = \gamma\circ\langle\gamma|\mathfrak{g}\rangle^{-1}$

$$\wedge \quad \overline{\gamma}_1 = \langle\overline{\gamma}|\mathfrak{e}\rangle, \overline{\gamma}_2 = \langle\overline{\gamma}|\mathfrak{f}\rangle, \overline{\gamma}_3 = \langle\overline{\gamma}|\mathfrak{g}\rangle,$$

dann $\overline{\gamma}\in\mathcal{C}$ und $\mathsf{dom}\,\overline{\gamma} = \,]\langle\mathfrak{a}|\mathfrak{g}\rangle|\langle\mathfrak{b}|\mathfrak{g}\rangle[$ und

$$\overline{\gamma}_2 = \langle\mathfrak{a}|\mathfrak{f}\rangle = \langle\mathfrak{b}|\mathfrak{f}\rangle \quad \text{auf} \quad \mathsf{dom}\,\overline{\gamma},$$

und

$$\overline{\gamma} = \overline{\gamma}_1\cdot\mathfrak{e} + \langle\mathfrak{a}|\mathfrak{f}\rangle\cdot\mathfrak{f} + \mathsf{id}_{\mathsf{dom}\,\overline{\gamma}}\cdot\mathfrak{g},$$

und $\exists I : I \in \,]0| + \infty[$, so dass

$$I^2\cdot w\left(\frac{E_\circ}{m} + g\cdot\overline{\gamma}_1\right) \leq 1 \quad \text{auf} \quad \mathsf{dom}\,\overline{\gamma},$$

und

(

$0 < (\overline{\gamma}_1)^\bullet$ auf $\mathsf{dom}\,\overline{\gamma}$ und $0 < 1 - I^2\cdot w\left(\frac{E_\circ}{m} + g\cdot\overline{\gamma}_1\right)$ auf $\mathsf{dom}\,\overline{\gamma}$ und $0 < 1 - I^2\cdot w\left(\frac{E_\circ}{m} + g\cdot\langle\mathfrak{b}|\mathfrak{e}\rangle\right)$ und $\langle\mathfrak{a}|\mathfrak{e}\rangle < \langle\mathfrak{b}|\mathfrak{e}\rangle$

$$\text{und} \quad \forall t : t\in\mathsf{dom}\,\overline{\gamma} \quad\Rightarrow\quad (\overline{\gamma}_1)^\bullet(t)\cdot\sqrt{\frac{I^2\cdot w}{1-I^2\cdot w}}\left(\frac{E_\circ}{m}+g\cdot\overline{\gamma}_1\right) = 1,$$

und

$$\forall \tau, \sigma : \tau, \sigma \in \mathsf{dom}\,\overline{\gamma} \quad \Rightarrow \quad \int_{\overline{\gamma}_1(\sigma)}^{\overline{\gamma}_1(\tau)} \sqrt{\frac{I^2 \cdot w}{1 - I^2 \cdot w}} \left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot z \right)\, dz = \tau - \sigma,$$

und

$$\forall t, s : t, s \in \mathsf{dom}\,\gamma$$
$$\Rightarrow \quad \int_{\gamma_1(s)}^{\gamma_1(t)} \sqrt{\frac{I^2 \cdot w}{1 - I^2 \cdot w}} \left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot z \right)\, dz = \langle \gamma | \mathfrak{g} \rangle(t) - \langle \gamma | \mathfrak{g} \rangle(s),$$

und

$$\int_{\langle \mathfrak{a} | \mathfrak{e} \rangle}^{\langle \mathfrak{b} | \mathfrak{e} \rangle} \sqrt{\frac{I^2 \cdot w}{1 - I^2 \cdot w}} \left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot z \right)\, dz = \langle \mathfrak{b} | \mathfrak{g} \rangle - \langle \mathfrak{a} | \mathfrak{g} \rangle,$$

und

$$\int_{\inf(\mathsf{dom}\,\gamma)}^{\sup(\mathsf{dom}\,\gamma)} (L \circ \gamma^*) = \int_{\langle \mathfrak{a} | \mathfrak{g} \rangle}^{\langle \mathfrak{b} | \mathfrak{g} \rangle} (L \circ \overline{\gamma}^*)$$
$$= \int_{\langle \mathfrak{a} | \mathfrak{e} \rangle}^{\langle \mathfrak{b} | \mathfrak{e} \rangle} \frac{dz}{\sqrt{(1 - I^2 \cdot w) \cdot w} \left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot z \right)}.$$

oder

$(\overline{\gamma}_1)^\bullet < 0$ auf $\mathsf{dom}\,\overline{\gamma}$ und $0 < 1 - I^2 \cdot w \left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot \overline{\gamma}_1 \right)$ auf $\mathsf{dom}\,\overline{\gamma}$ und $0 < 1 - I^2 \cdot w \left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot \langle \mathfrak{a} | \mathfrak{e} \rangle \right)$ und $\langle \mathfrak{b} | \mathfrak{e} \rangle < \langle \mathfrak{a} | \mathfrak{e} \rangle$

$$\text{und} \quad \forall t : t \in \mathsf{dom}\,\gamma \quad \Rightarrow \quad (\overline{\gamma}_1)^\bullet(t) \cdot \sqrt{\frac{I^2 \cdot w}{1 - I^2 \cdot w}} \left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot \overline{\gamma}_1 \right) = -1,$$

und

$$\forall \tau, \sigma : \tau, \sigma \in \mathsf{dom}\,\overline{\gamma} \Rightarrow \quad \int_{\overline{\gamma}_1(\sigma)}^{\overline{\gamma}_1(\tau)} \sqrt{\frac{I^2 \cdot w}{1 - I^2 \cdot w}} \left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot z \right)\, dz = -(\tau - \sigma),$$

und

$$\forall t, s : t, s \in \mathsf{dom}\,\gamma$$
$$\Rightarrow \quad \int_{\gamma_1(s)}^{\gamma_1(t)} \sqrt{\frac{I^2 \cdot w}{1 - I^2 \cdot w}} \left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot z \right)\, dz = -(\langle \gamma | \mathfrak{g} \rangle(t) - \langle \gamma | \mathfrak{g} \rangle(s)),$$

und

$$\int_{\langle \mathfrak{b} | \mathfrak{e} \rangle}^{\langle \mathfrak{a} | \mathfrak{e} \rangle} \sqrt{\frac{I^2 \cdot w}{1 - I^2 \cdot w}} \left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot z \right)\, dz = \langle \mathfrak{b} | \mathfrak{g} \rangle - \langle \mathfrak{a} | \mathfrak{g} \rangle,$$

und

$$\int_{\inf(\mathsf{dom}\,\gamma)}^{\sup(\mathsf{dom}\,\gamma)} (L \circ \gamma^*) = \int_{\langle\mathfrak{a}|\mathfrak{g}\rangle}^{\langle\mathfrak{b}|\mathfrak{g}\rangle} (L \circ \overline{\gamma}^*)$$
$$= \int_{\langle\mathfrak{b}|\mathfrak{e}\rangle}^{\langle\mathfrak{a}|\mathfrak{e}\rangle} \frac{dz}{\sqrt{(1 - I^2 \cdot w) \cdot w}\left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot z\right)}.$$

oder

$\overline{\gamma}_1^\bullet$ hat genau eine Nullstelle $\tau_\circ$ und $0 < \overline{\gamma}_1^\bullet$ auf $]\langle\mathfrak{a}|\mathfrak{g}\rangle|\tau_\circ[$ und $\overline{\gamma}_1^\bullet < 0$ auf $]\tau_\circ|\langle\mathfrak{b}|\mathfrak{g}\rangle[$ und $0 < 1 - I^2 \cdot w\left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot \overline{\gamma}_1\right)$ auf $]\langle\mathfrak{a}|\mathfrak{e}\rangle|\langle\mathfrak{b}|\mathfrak{e}\rangle[\setminus \{\tau_\circ\}$ und $\overline{\gamma}_1$ hat in $\tau_\circ$ striktes globales Maximum mit

$$\max\{\langle\mathfrak{a}|\mathfrak{e}\rangle, \langle\mathfrak{b}|\mathfrak{e}\rangle\} < \overline{\gamma}_1(\tau_\circ),$$

und es gilt

$$\overline{\gamma}_1(\tau_\circ) = \frac{1}{g} \cdot \left(Q\left(\frac{1}{I^2}\right) - \frac{E_\circ}{m}\right) \quad \wedge \quad E_\circ - m \cdot \overline{Q} < -m \cdot g \cdot \overline{\gamma}_1(\tau) < E_\circ,$$

und

$$\forall \tau : \tau \in\,]\langle\mathfrak{a}|\mathfrak{g}\rangle|\tau_\circ[\quad \Rightarrow \quad \overline{\gamma}_1^\bullet \cdot \sqrt{\frac{I^2 \cdot w}{1 - I^2 \cdot w}}\left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot \overline{\gamma}_1\right) = 1,$$

$$\forall \tau : \tau \in\,]\tau_\circ|\langle\mathfrak{b}|\mathfrak{g}\rangle[\quad \Rightarrow \quad \overline{\gamma}_1^\bullet \cdot \sqrt{\frac{I^2 \cdot w}{1 - I^2 \cdot w}}\left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot \overline{\gamma}_1\right) = -1,$$

und

$$\forall \tau : \tau \in \mathsf{dom}\,\overline{\gamma} \quad \Rightarrow \quad \int_{\overline{\gamma}_1(\tau)}^{\overline{\gamma}_1(\tau_\circ)} \sqrt{\frac{I^2 \cdot w}{1 - I^2 \cdot w}}\left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot z\right)\, dz = |\tau - \tau_\circ|,$$

sowie

$$\forall t : t \in \mathsf{dom}\,\gamma \quad \Rightarrow \quad \int_{\gamma_1(t)}^{\gamma_1(t_\circ)} \sqrt{\frac{I^2 \cdot w}{1 - I^2 \cdot w}}\left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot z\right)\, dz$$
$$= |\langle\gamma|\mathfrak{g}\rangle(t) - \langle\gamma|\mathfrak{g}\rangle(t_\circ)|,$$

und

$$\int_{\langle\mathfrak{a}|\mathfrak{e}\rangle}^{\overline{\gamma}_1(\tau_\circ)} \sqrt{\frac{I^2 \cdot w}{1 - I^2 \cdot w}}\left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot z\right)\, dz$$
$$+ \int_{\langle\mathfrak{b}|\mathfrak{e}\rangle}^{\overline{\gamma}_1(\tau_\circ)} \sqrt{\frac{I^2 \cdot w}{1 - I^2 \cdot w}}\left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot z\right)\, dz$$
$$= \langle\mathfrak{b}|\mathfrak{g}\rangle - \langle\mathfrak{a}|\mathfrak{g}\rangle,$$

und

$$\begin{aligned}\int_{\mathsf{dom}\,\gamma}(L\circ\gamma^*) &= \int_{\langle\mathfrak{a}|\mathfrak{g}\rangle}^{\langle\mathfrak{b}|\mathfrak{g}\rangle}(L\circ\overline{\gamma}^*)\\ &= \int_{\langle\mathfrak{a}|\mathfrak{e}\rangle}^{\overline{\gamma}_1(\tau_\circ)}\frac{dz}{\sqrt{1-I^2\cdot w\cdot w\left(\frac{E_\circ}{m}+g\cdot z\right)}}\\ &\qquad + \int_{\langle\mathfrak{b}|\mathfrak{e}\rangle}^{\overline{\gamma}_1(\tau_\circ)}\frac{dz}{\sqrt{1-I^2\cdot w\cdot w\left(\frac{E_\circ}{m}+g\cdot z\right)}}.\end{aligned}$$

).

g) Falls $E_\circ - m\cdot\overline{Q} \le -m\cdot g\cdot\langle\mathfrak{b}|\mathfrak{e}\rangle < -m\cdot g\cdot\langle\mathfrak{a}|\mathfrak{e}\rangle \le E_\circ$, falls $0 < I \in \mathbb{R}$ und $0 \le 1 - I^2\cdot w\left(\dfrac{E_\circ}{m}+g\cdot\langle\mathfrak{b}|\mathfrak{e}\rangle\right)$, falls

$$\int_{\langle\mathfrak{a}|\mathfrak{e}\rangle}^{\langle\mathfrak{b}|\mathfrak{e}\rangle}\sqrt{\frac{I^2\cdot w}{1-I^2\cdot w}}\left(\frac{E_\circ}{m}+g\cdot z\right)\,dz = \langle\mathfrak{b}|\mathfrak{g}\rangle - \langle\mathfrak{a}|\mathfrak{g}\rangle,$$

falls

$$\Lambda = \left\{\left(u, \langle\mathfrak{a}|\mathfrak{g}\rangle + \int_{\langle\mathfrak{a}|\mathfrak{e}\rangle}^{u}\sqrt{\frac{I^2\cdot w}{1-I^2\cdot w}}\left(\frac{E_\circ}{m}+g\cdot z\right)\,dz\right) : z \in \left]\langle\mathfrak{a}|\mathfrak{e}\rangle|\langle\mathfrak{b}|\mathfrak{e}\rangle\right[\right\},$$

falls $\alpha = \Lambda^{-1}$ und falls

$$\gamma = \left\{(t, \alpha(t)\cdot\mathfrak{e} + \langle\mathfrak{a}|\mathfrak{f}\rangle\cdot\mathfrak{f} + t\cdot\mathfrak{g}) : t \in \left]\langle\mathfrak{a}|\mathfrak{g}\rangle|\langle\mathfrak{b}|\mathfrak{g}\rangle\right[\right\},$$

dann $\alpha : \left]\langle\mathfrak{a}|\mathfrak{g}\rangle|\langle\mathfrak{b}|\mathfrak{g}\rangle\right[\to \left]\langle\mathfrak{a}|\mathfrak{e}\rangle|\langle\mathfrak{b}|\mathfrak{e}\rangle\right[$ bijektiv und

$$\gamma : \left]\langle\mathfrak{a}|\mathfrak{g}\rangle|\langle\mathfrak{b}|\mathfrak{g}\rangle\right[\to \mathbb{R}^3, \quad \gamma(t) = \alpha(t)\cdot\mathfrak{e} + \langle\mathfrak{a}|\mathfrak{f}\rangle\cdot\mathfrak{f} + t\cdot\mathfrak{g},$$

und γ ist eine $3,\Omega$-Zustandskurve von L und $\gamma \in \mathcal{C}$ und $0 < \langle\gamma|\mathfrak{e}\rangle^\bullet = \alpha^\bullet$ auf $\mathsf{dom}\,\gamma = \left]\langle\mathfrak{a}|\mathfrak{g}\rangle|\langle\mathfrak{b}|\mathfrak{g}\rangle\right[$, und es gilt

$$\int_{\langle\mathfrak{a}|\mathfrak{g}\rangle}^{\langle\mathfrak{b}|\mathfrak{g}\rangle}(L\circ\gamma^*) = \int_{\langle\mathfrak{a}|\mathfrak{e}\rangle}^{\langle\mathfrak{b}|\mathfrak{e}\rangle}\frac{dz}{\sqrt{(1-I^2\cdot w)\cdot w\left(\frac{E_\circ}{m}+g\cdot z\right)}}.$$

h) Falls $E_\circ - m\cdot\overline{Q} \le -m\cdot g\cdot\langle\mathfrak{a}|\mathfrak{e}\rangle < -m\cdot g\cdot\langle\mathfrak{b}|\mathfrak{e}\rangle \le E_\circ$, falls $0 < I \in \mathbb{R}$ und $0 \le 1 - I^2\cdot w\left(\dfrac{E_\circ}{m}+g\cdot\langle\mathfrak{a}|\mathfrak{e}\rangle\right)$, falls

$$\int_{\langle\mathfrak{b}|\mathfrak{e}\rangle}^{\langle\mathfrak{a}|\mathfrak{e}\rangle}\sqrt{\frac{I^2\cdot w}{1-I^2\cdot w}}\left(\frac{E_\circ}{m}+g\cdot z\right)\,dz = \langle\mathfrak{b}|\mathfrak{g}\rangle - \langle\mathfrak{a}|\mathfrak{g}\rangle,$$

falls

$$\Lambda = \left\{ \left(u, \langle \mathfrak{a}|\mathfrak{g}\rangle + \int_u^{\langle \mathfrak{a}|\mathfrak{e}\rangle} \sqrt{\frac{I^2 \cdot w}{1 - I^2 \cdot w}} \left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot z \right) \, dz \right) : \right.$$
$$\left. z \in \left] \langle \mathfrak{b}|\mathfrak{e}\rangle | \langle \mathfrak{a}|\mathfrak{e}\rangle \right[\right\},$$

falls $\alpha = \Lambda^{-1}$ und falls

$$\gamma = \{ (t, \alpha(t) \cdot \mathfrak{e} + \langle \mathfrak{a}|\mathfrak{f}\rangle \cdot \mathfrak{f} + t \cdot \mathfrak{g}) : t \in \left] \langle \mathfrak{a}|\mathfrak{g}\rangle | \langle \mathfrak{b}|\mathfrak{g}\rangle \right[\},$$

dann $\alpha : \left] \langle \mathfrak{a}|\mathfrak{g}\rangle | \langle \mathfrak{b}|\mathfrak{g}\rangle \right[\to \left] \langle \mathfrak{b}|\mathfrak{e}\rangle | \langle \mathfrak{a}|\mathfrak{e}\rangle \right[$ bijektiv und

$$\gamma : \left] \langle \mathfrak{a}|\mathfrak{g}\rangle | \langle \mathfrak{b}|\mathfrak{g}\rangle \right[\to \mathbb{R}^3, \quad \gamma(t) = \alpha(t) \cdot \mathfrak{e} + \langle \mathfrak{a}|\mathfrak{f}\rangle \cdot \mathfrak{f} + t \cdot \mathfrak{g},$$

und γ ist eine $3, \Omega$-Zustandskurve von L und $\gamma \in \mathcal{C}$ und $\langle \gamma|\mathfrak{e}\rangle^\bullet = \alpha^\bullet < 0$ auf $\mathsf{dom}\, \gamma = \left] \langle \mathfrak{a}|\mathfrak{g}\rangle | \langle \mathfrak{b}|\mathfrak{g}\rangle \right[$, und es gilt

$$\int_{\langle \mathfrak{a}|\mathfrak{g}\rangle}^{\langle \mathfrak{b}|\mathfrak{g}\rangle} (L \circ \gamma^*) = \int_{\langle \mathfrak{b}|\mathfrak{e}\rangle}^{\langle \mathfrak{a}|\mathfrak{e}\rangle} \frac{dz}{\sqrt{(1 - I^2 \cdot w) \cdot w} \left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot u \right)}.$$

`i)` Falls $\frac{1}{c} < I \in \mathbb{R}$ und $\eta = \frac{1}{g} \cdot \left(Q \left(\frac{1}{I^2} \right) - \frac{E_\circ}{m} \right)$ und $-m \cdot g \cdot \langle \mathfrak{a}|\mathfrak{e}\rangle \le E_\circ$ und $-m \cdot g \cdot \langle \mathfrak{b}|\mathfrak{e}\rangle \le E_\circ$ und $\langle \mathfrak{a}|\mathfrak{e}\rangle < \eta$ und $\langle \mathfrak{b}|\mathfrak{e}\rangle < \eta$, falls

$$\int_{\langle \mathfrak{a}|\mathfrak{e}\rangle}^{\eta} \sqrt{\frac{I^2 \cdot w}{1 - I^2 \cdot w}} \left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot z \right) \, dz$$
$$+ \int_{\langle \mathfrak{a}|\mathfrak{e}\rangle}^{\eta} \sqrt{\frac{I^2 \cdot w}{1 - I^2 \cdot w}} \left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot z \right) \, dz = \langle \mathfrak{b}|\mathfrak{g}\rangle - \langle \mathfrak{a}|\mathfrak{g}\rangle,$$

falls

$$t_\circ = \langle \mathfrak{a}|\mathfrak{g}\rangle + \int_{\langle \mathfrak{a}|\mathfrak{e}\rangle}^{\eta} \sqrt{\frac{I^2 \cdot w}{1 - I^2 \cdot w}} \left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot z \right) \, dz,$$

falls

$$\Lambda_1 = \left\{ \left(t, \langle \mathfrak{a}|\mathfrak{g}\rangle + \int_{\langle \mathfrak{a}|\mathfrak{e}\rangle}^{u} \sqrt{\frac{I^2 \cdot w}{1 - I^2 \cdot w}} \left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot z \right) \, dz \right) : u \in \left] \langle \mathfrak{a}|\mathfrak{e}\rangle | \eta \right[\right\},$$

$$\Lambda_2 = \left\{ \left(t, t_\circ + \int_{u}^{\eta} \sqrt{\frac{I^2 \cdot w}{1 - I^2 \cdot w}} \left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot z \right) \, dz \right) : u \in \left] \langle \mathfrak{b}|\mathfrak{e}\rangle | \eta \right[\right\},$$

und

$$\alpha = \{(t_\circ, \eta)\} \cup ((\Lambda_1)^{-1} \cup (\Lambda_2^{-1}),$$

und falls

$$\gamma = \{(t, \alpha(t)\cdot\mathfrak{e} + \langle\mathfrak{a}|\mathfrak{f}\rangle\cdot\mathfrak{f} + t\cdot\mathfrak{g}) : t \in \,]\langle\mathfrak{a}|\mathfrak{g}\rangle|\langle\mathfrak{b}|\mathfrak{g}\rangle[\,\}\,,$$

dann

$$E_\circ - m\cdot\overline{Q} < -m\cdot g\cdot\eta < -m\cdot g\cdot\max\{\langle\mathfrak{a}|\mathfrak{e}\rangle, \langle\mathfrak{b}|\mathfrak{e}\rangle\},$$

und

$$\langle\mathfrak{a}|\mathfrak{g}\rangle < t_\circ < \langle\mathfrak{b}|\mathfrak{g}\rangle,$$

und α ist 2-Kurve in $\mathbb{R}$ und $\alpha : \,]\langle\mathfrak{a}|\mathfrak{g}\rangle|\langle\mathfrak{b}|\mathfrak{g}\rangle[\, \to \mathbb{R}$
und $\mathsf{ran}\,\alpha = \,]\min\{\langle\mathfrak{a}|\mathfrak{e}\rangle, \langle\mathfrak{b}|\mathfrak{e}\rangle\}|\eta[$ und

$$\alpha(t_\circ) = \eta, \quad \alpha^\bullet(t_\circ) = 0, \quad \alpha^{\bullet\bullet}(t_\circ) = -\frac{g}{2}\cdot w'\left(\frac{E_\circ}{m} + g\cdot\eta\right),$$

und

$$\gamma : \,]\langle\mathfrak{a}|\mathfrak{g}\rangle|\langle\mathfrak{b}|\mathfrak{g}\rangle[\, \to \mathbb{R}^3, \quad \gamma(t) = \alpha(t)\cdot\mathfrak{e} + \langle\mathfrak{a}|\mathfrak{f}\rangle\cdot\mathfrak{f} + t\cdot\mathfrak{g},$$

und $0 < \langle\gamma|\mathfrak{e}\rangle^\bullet$ auf $]\langle\mathfrak{a}|\mathfrak{g}\rangle|t_\circ[$ und $\langle\gamma|\mathfrak{e}\rangle^\bullet < 0$ auf $]t_\circ|\langle\mathfrak{b}|\mathfrak{g}\rangle[$ und $\langle\gamma|\mathfrak{e}\rangle^\bullet(t_\circ) = 0$ und γ ist eine $3,\Omega$-Zustandskurve von L und $\gamma \in \mathcal{C}$ und

$$\int_{\langle\mathfrak{a}|\mathfrak{g}\rangle}^{\langle\mathfrak{b}|\mathfrak{g}\rangle} (L\circ\gamma^*) = \int_{\langle\mathfrak{a}|\mathfrak{e}\rangle}^{\eta} \frac{dz}{\sqrt{1 - I^2\cdot w\cdot w\left(\frac{E_\circ}{m} + g\cdot z\right)}} + \int_{\langle\mathfrak{b}|\mathfrak{e}\rangle}^{\eta} \frac{dz}{\sqrt{1 - I^2\cdot w\cdot w\left(\frac{E_\circ}{m} + g\cdot z\right)}}.$$

<u>Beweis</u> `a)` $\Rightarrow$.
Falls $0 \neq \mathcal{C}$, dann gibt es $\gamma \in \mathcal{C}$ und somit, da

$$E_\circ - m\cdot\overline{Q} < -m\cdot g\cdot\langle\gamma|\mathfrak{e}\rangle < E_\circ \quad \text{auf} \quad \mathsf{dom}\,\gamma,$$

per definitionem $\mathcal{C}$

$$E_\circ - m\cdot\overline{Q} \leq -m\cdot g\cdot \lim_{t\downarrow\inf(\mathsf{dom}\,\gamma)} \langle\gamma(t)|\mathfrak{e}\rangle \leq E_\circ,$$

also

$$E_\circ - m\cdot\overline{Q} \leq -m\cdot g\cdot\langle\mathfrak{a}|\mathfrak{e}\rangle \leq E_\circ,$$

und per definitionem $\mathcal{C}$

$$E_\circ - m\cdot\overline{Q} \leq -m\cdot g\cdot \lim_{t\uparrow\sup(\mathsf{dom}\,\gamma)} \langle\gamma(t)|\mathfrak{e}\rangle \leq E_\circ,$$

also

$$E_\circ - m\cdot\overline{Q} \leq -m\cdot g\cdot\langle\mathfrak{b}|\mathfrak{e}\rangle \leq E_\circ.$$

<u>Beweis</u> `a)` $\Leftarrow$.
Dann $E_\circ - m \cdot \overline{Q} \le -m \cdot g \cdot \max\{\langle \mathfrak{a}|\mathfrak{e}\rangle, \langle \mathfrak{b}|\mathfrak{e}\rangle\} \le -m \cdot g \cdot \min\{\langle \mathfrak{a}|\mathfrak{e}\rangle, \langle \mathfrak{b}|\mathfrak{e}\rangle\} \le E_\circ$.
<u>1.Fall</u> $\langle \mathfrak{a}|\mathfrak{e}\rangle \neq \langle \mathfrak{b}|\mathfrak{e}\rangle$. Dann ist

$$\gamma : \,]0|1[\, \to \mathbb{R}^3, \quad \gamma(t) = t \cdot \mathfrak{b} + (1-t) \cdot \mathfrak{a},$$

offenbar eine 2-Kurve im $\mathbb{R}^3$ mit offenem Definitionsbereich und

$$\lim_{t \downarrow \inf(\mathsf{dom}\,\gamma)} \gamma(t) = \mathfrak{a}, \qquad \lim_{t \uparrow \sup(\mathsf{dom}\,\gamma)} \gamma(t) = \mathfrak{b},$$

und

$$\begin{aligned} \forall t : t \in \mathsf{dom}\,\gamma \quad \Rightarrow \quad & -m \cdot g \cdot \langle \gamma(t)|\mathfrak{e}\rangle = -m \cdot g \cdot (t \cdot \langle \mathfrak{b}|\mathfrak{e}\rangle + (1-t) \cdot \langle \mathfrak{a}|\mathfrak{e}\rangle) \\ & \in \,]-m \cdot g \cdot \max\{\langle \mathfrak{a}|\mathfrak{e}\rangle, \langle \mathfrak{b}|\mathfrak{e}\rangle\}| - m \cdot g \cdot \min\{\langle \mathfrak{a}|\mathfrak{e}\rangle, \langle \mathfrak{b}|\mathfrak{e}\rangle\}[\\ & \subseteq \,]E_\circ - m \cdot \overline{Q}|E_\circ[. \end{aligned}$$

Also $\gamma \in \mathcal{C}$, so dass $0 \neq \mathcal{C}$.

<u>2.Fall</u> $\langle \mathfrak{a}|\mathfrak{e}\rangle = \langle \mathfrak{b}|\mathfrak{e}\rangle$.

<u>2.1.Fall</u> Zusätzlich $-m \cdot g \cdot \langle \mathfrak{a}|\mathfrak{e}\rangle = E_\circ$ und $\overline{Q} \in \mathbb{R}$.
Dann gilt für

$$\gamma : \,]-1|1[\, \to \mathbb{R}^3, \quad \gamma(t) = t \cdot \mathfrak{b} + (1-t) \cdot \mathfrak{a} - \frac{\overline{Q}}{2 \cdot g} \cdot (-1 + t^2) \cdot \mathfrak{e},$$

offenbar $\gamma \in \mathcal{C}$, so dass $0 \neq \mathcal{C}$.

<u>2.2.Fall</u> Zusätzlich $-m \cdot g \cdot \langle \mathfrak{a}|\mathfrak{e}\rangle = E_\circ$ und $\overline{Q} = +\infty$.
Dann gilt für

$$\gamma : \,]-1|1[\, \to \mathbb{R}^3, \quad \gamma(t) = t \cdot \mathfrak{b} + (1-t) \cdot \mathfrak{a} - \frac{1}{2 \cdot g} \cdot (-1 + t^2) \cdot \mathfrak{e},$$

offenbar $\gamma \in \mathcal{C}$, so dass $0 \neq \mathcal{C}$.

<u>2.3.Fall</u> Zusätzlich $E_\circ - m \cdot \overline{Q} < -m \cdot g \cdot \langle \mathfrak{a}|\mathfrak{e}\rangle < E_\circ$.
Dann gilt für

$$\gamma : \,]-1|1[\, \to \mathbb{R}^3, \quad \gamma(t) = t \cdot \mathfrak{b} + (1-t) \cdot \mathfrak{a},$$

offenbar $\gamma \in \mathcal{C}$, so dass $0 \neq \mathcal{C}$.

<u>2.4.Fall</u> Zusätzlich $E_\circ - m \cdot \overline{Q} = -m \cdot g \cdot \langle \mathfrak{a}||\mathfrak{e}\rangle$.
Dann gilt $0 < \overline{Q} \in \mathbb{R}$ und für

$$\gamma : \,]-1|1[\, \to \mathbb{R}^3, \quad \gamma(t) = t \cdot \mathfrak{b} + (1-t) \cdot \mathfrak{a} + \frac{\overline{Q}}{2 \cdot g} \cdot (-1 + t^2) \cdot \mathfrak{e},$$

offenbar $\gamma \in \mathcal{C}$, so dass $0 \neq \mathcal{C}$.

<u>Beweis</u> `b)` trivial.

<u>Beweis</u> `c)` Aus $\mathfrak{b} - \mathfrak{a} \in \mathbb{H}[\{\mathfrak{e}, \mathfrak{g}\}]$ und $\mathfrak{e}, \mathfrak{f}, \mathfrak{g}$ ONB $\mathbb{R}^3$ folgt $\langle \mathfrak{b} - \mathfrak{a} | \mathfrak{f} \rangle = 0$, woraus

$$\langle \mathfrak{a} | \mathfrak{f} \rangle = \langle \mathfrak{b} | \mathfrak{f} \rangle,$$

folgt. Via **Satz - brchmSkK.1** gibt es $I_2 \in \mathbb{R}$, so dass

$$\gamma_2^\bullet = I_2 \cdot |\gamma^\bullet| \cdot \sqrt{w\left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot \gamma_1\right)} \quad \text{auf} \quad \mathsf{dom}\,\gamma,$$

wobei $\gamma_2 = \langle \gamma | \mathfrak{f} \rangle$ und $\gamma_1 = \langle \gamma | \mathfrak{e} \rangle$. Es folgt

$$\lim_{t \downarrow \inf(\mathsf{dom}\,\gamma)} \gamma_2(t) = \langle \mathfrak{a} | \mathfrak{f} \rangle = \langle \mathfrak{b} | \mathfrak{f} \rangle = \lim_{t \uparrow \sup(\mathsf{dom}\,\gamma)} \gamma_2(t),$$

so dass $\gamma_2^\bullet$ via 1.MWSDR mindestens eine Nullstelle hat. Hieraus folgt aus obiger Darstellung von $\gamma_2^\bullet$ auf $\mathsf{dom}\,\gamma$ die Gleichung $I_2 = 0$. Also $0 = \gamma_2^\bullet = \langle \gamma | \mathfrak{f} \rangle^\bullet$ auf $\mathsf{dom}\,\gamma$ und wegen obiger limites gilt $\langle \gamma | \mathfrak{f} \rangle = \langle \mathfrak{a} | \mathfrak{f} \rangle = \langle \mathfrak{b} | \mathfrak{f} \rangle$ auf $\mathsf{dom}\,\gamma$.

Via **Satz - brchmSkK.1** gibt es $I_3 \in \mathbb{R}$, so dass

$$\gamma_3^\bullet = I_3 \cdot |\gamma^\bullet| \cdot \sqrt{w\left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot \gamma_1\right)} \quad \text{auf} \quad \mathsf{dom}\,\gamma,$$

wobei $\gamma_3 = \langle \gamma | \mathfrak{g} \rangle$. Somit ($\gamma_3^\bullet < 0$ oder $0 < \gamma_3^\bullet$) auf $\mathsf{dom}\,\gamma$ oder $0 = \gamma_3^\bullet$ auf $\mathsf{dom}\,\gamma$. Wegen

$$\lim_{t \downarrow \inf(\mathsf{dom}\,\gamma)} \gamma_3(t) = \langle \mathfrak{a} | \mathfrak{g} \rangle \le \langle \mathfrak{b} | \mathfrak{g} \rangle = \lim_{t \uparrow \sup(\mathsf{dom}\,\gamma)} \gamma_3(t),$$

gilt via 1.MWSDR für eine Stelle $t^* \in \mathsf{dom}\,\gamma$ die Aussage $0 \le \gamma_3^\bullet(t^*)$. Es folgt $0 \le I_3$ und damit $0 \le \gamma_3^\bullet$ auf $\mathsf{dom}\,\gamma$.

<u>Beweis</u> `d)` Aus $\langle \mathfrak{b} - \mathfrak{a} | \mathfrak{g} \rangle = 0$ folgt

$$\langle \mathfrak{a} | \mathfrak{g} \rangle = \langle \mathfrak{b} | \mathfrak{g} \rangle.$$

Via **Satz - brchmSkK.1** gibt es $I_3 \in \mathbb{R}$, so dass

$$\gamma_3^\bullet = I_3 \cdot |\gamma^\bullet| \cdot \sqrt{w\left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot \gamma_1\right)} \quad \text{auf} \quad \mathsf{dom}\,\gamma,$$

wobei $\gamma_3 = \langle \gamma | \mathfrak{g} \rangle$ und $\gamma_1 = \langle \gamma | \mathfrak{e} \rangle$. Es folgt

$$\lim_{t \downarrow \inf(\mathsf{dom}\,\gamma)} \gamma_3(t) = \langle \mathfrak{a} | \mathfrak{g} \rangle = \langle \mathfrak{b} | \mathfrak{g} \rangle = \lim_{t \uparrow \sup(\mathsf{dom}\,\gamma)} \gamma_3(t),$$

so dass $\gamma_3^\bullet$ via 1.MWSDR mindestens eine Nullstelle hat. Hieraus folgt aus obiger Darstellung von $\gamma_3^\bullet$ auf $\mathsf{dom}\,\gamma$ die Gleichung $I_3 = 0$. Also $0 = \gamma_3^\bullet = \langle \gamma | \mathfrak{f} \rangle^\bullet$ auf $\mathsf{dom}\,\gamma$

und wegen obiger limites gilt $\langle\gamma|\mathfrak{g}\rangle = \langle\mathfrak{a}|\mathfrak{g}\rangle = \langle\mathfrak{b}|\mathfrak{g}\rangle$ auf $\mathsf{dom}\,\gamma$. Aus $\langle\mathfrak{b}-\mathfrak{a}|\mathfrak{f}\rangle = 0$ - siehe c) - und dem nunmehrigen $\langle\mathfrak{b}-\mathfrak{a}|\mathfrak{g}\rangle = 0$ und $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{b}$ und $\mathfrak{e},\mathfrak{f},\mathfrak{g}$ ONB $\mathbb{R}^3$ folgt $0 \neq \langle\mathfrak{b}-\mathfrak{a}|\mathfrak{e}\rangle$. Aus $\langle\gamma|\mathfrak{f}\rangle = \langle\mathfrak{a}|\mathfrak{f}\rangle$ auf $\mathsf{dom}\,\gamma$ - siehe c) - und dem nunmehrigen $\langle\gamma|\mathfrak{g}\rangle = \langle\mathfrak{a}|\mathfrak{g}\rangle = \langle\mathfrak{b}|\mathfrak{g}\rangle$ auf $\mathsf{dom}\,\gamma$ und $\mathfrak{e},\mathfrak{f},\mathfrak{g}$ ONB $\mathbb{R}^3$ folgt

$$\gamma = \langle\gamma|\mathfrak{e}\rangle\cdot\mathfrak{e} + \langle\mathfrak{a}|\mathfrak{f}\rangle\cdot\mathfrak{f} + \langle\mathfrak{b}|\mathfrak{g}\rangle\cdot\mathfrak{g} \quad \text{auf} \quad \mathsf{dom}\,\gamma.$$

Mit

$$\gamma_1 = \langle\gamma|\mathfrak{e}\rangle, \gamma_2 = \langle\gamma|\mathfrak{f}\rangle, \gamma_3 = \langle\gamma|\mathfrak{g}\rangle,$$

folgt $0 = \gamma_2^\bullet = \gamma_3^\bullet$ auf $\mathsf{dom}\,\gamma$, so dass sich via **Satz - brchmSkK.1** die Aussage $(0 < \gamma_1^\bullet$ oder $\gamma_1^\bullet < 0)$ auf $\mathsf{dom}\,\gamma$ ergibt. Hieraus folgt via

$$\lim_{t\downarrow\inf(\mathsf{dom}\,\gamma)} \gamma_1(t) = \langle\mathfrak{a}|\mathfrak{e}\rangle \neq \langle\mathfrak{b}|\mathfrak{e}\rangle = \lim_{t\uparrow\sup(\mathsf{dom}\,\gamma)} \gamma_1(t),$$

die Aussage

$$\mathsf{sgn}\left(\langle\gamma|\mathfrak{e}\rangle^\bullet\right) = \mathsf{sgn}\left(\gamma_1^\bullet\right) = \mathsf{sgn}\left(\langle\mathfrak{b}-\mathfrak{a}|\mathfrak{e}\rangle \in \{\pm 1\} \quad \text{auf} \quad \mathsf{dom}\,\gamma.$$

Schliesslich gilt mit elementarer Substitution,

$$\int_{\inf(\mathsf{dom}\,\gamma)}^{\sup(\mathsf{dom}\,\gamma)} (L\circ\gamma^*) = \int_{\inf(\mathsf{dom}\,\gamma)}^{\sup(\mathsf{dom}\,\gamma)} \frac{|\gamma^\bullet|}{\sqrt{w\left(\frac{E_\circ}{m}+g\cdot\gamma_1\right)}}$$
$$= \int_{\inf(\mathsf{dom}\,\gamma)}^{\sup(\mathsf{dom}\,\gamma)} \frac{|\gamma_1^\bullet|}{\sqrt{w\left(\frac{E_\circ}{m}+g\cdot\gamma_1\right)}} = \int_{\inf(\mathsf{dom}\,\gamma)}^{\sup(\mathsf{dom}\,\gamma)} \frac{\mathsf{sgn}\left(\gamma_1^\bullet\right)\cdot\gamma_1^\bullet}{\sqrt{w\left(\frac{E_\circ}{m}+g\cdot\gamma_1\right)}}$$
$$= \int_{\inf(\mathsf{dom}\,\gamma)}^{\sup(\mathsf{dom}\,\gamma)} \frac{\mathsf{sgn}\left(\langle\mathfrak{b}-\mathfrak{a}|\mathfrak{e}\rangle\right)\cdot\gamma_1^\bullet}{\sqrt{w\left(\frac{E_\circ}{m}+g\cdot\gamma_1\right)}} = \mathsf{sgn}\left(\langle\mathfrak{b}-\mathfrak{a}|\mathfrak{e}\rangle\right)\cdot\int_{\inf(\mathsf{dom}\,\gamma)}^{\sup(\mathsf{dom}\,\gamma)} \frac{\gamma_1^\bullet}{\sqrt{w\left(\frac{E_\circ}{m}+g\cdot\gamma_1\right)}}$$
$$\mathsf{sgn}\left(\langle\mathfrak{b}-\mathfrak{a}|\mathfrak{e}\rangle\right)\cdot\int_{\langle\mathfrak{a}|\mathfrak{e}\rangle}^{\langle\mathfrak{b}|\mathfrak{e}\rangle} \frac{dz}{\sqrt{w\left(\frac{E_\circ}{m}+g\cdot z\right)}}.$$

<u>Beweis</u> e) Offenbar ist γ eine 2-Kurve im $\mathbb{R}^3$ mit $\mathsf{dom}\,\gamma =]0|1[$ offen und

$$\lim_{t\downarrow\inf(\mathsf{dom}\,\gamma)} \gamma(t) = \lim_{t\downarrow 0}\gamma(t) = \mathfrak{a},$$

und

$$\lim_{t\uparrow\sup(\mathsf{dom}\,\gamma)} \gamma(t) = \lim_{t\uparrow 1}\gamma(t) = \mathfrak{b}.$$

Wegen $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{b}$ und $\langle\mathfrak{b}-\mathfrak{a}|\mathfrak{f}\rangle = \langle\mathfrak{b}-\mathfrak{a}|\mathfrak{g}\rangle = 0$ und $\mathfrak{e},\mathfrak{f},\mathfrak{g}$ ONB $\mathbb{R}^3$ gilt $\langle\mathfrak{a}|\mathfrak{e}\rangle \neq \langle\mathfrak{b}|\mathfrak{e}\rangle$. Konsequenter Weise,

$$\begin{aligned}\forall t : t\in\mathsf{dom}\,\gamma \quad &\Rightarrow \quad -m\cdot g\cdot\langle\gamma(t)|\mathfrak{e}\rangle = -m\cdot g\cdot(t\cdot\langle\mathfrak{b}|\mathfrak{e}\rangle + (1-t)\cdot\langle\mathfrak{a}|\mathfrak{e}\rangle)\\ &\in\ ]-m\cdot g\cdot\max\{\langle\mathfrak{a}|\mathfrak{e}\rangle,\langle\mathfrak{b}|\mathfrak{e}\rangle\}|-m\cdot g\cdot\min\{\langle\mathfrak{a}|\mathfrak{e}\rangle,\langle\mathfrak{b}|\mathfrak{e}\rangle\}[\\ &\subseteq\ ]E_\circ - m\cdot\overline{Q}|E_\circ[.\end{aligned}$$

Es folgt $\gamma \in \mathcal{C}$. Via

$$|\gamma^\bullet| = |\mathfrak{b} - \mathfrak{a}| \neq 0,$$

und aus dem bisherig Bewiesenen folgt auch $\operatorname{\mathsf{ran}} \gamma^* \subseteq \Omega$. Schliesslich gilt mit

$$\gamma_1 = \langle \gamma | \mathfrak{e} \rangle, \gamma_2 = \langle \gamma | \mathfrak{f} \rangle, \gamma_3 = \langle \gamma | \mathfrak{b} \rangle,$$

zunächst via $\mathfrak{b} - \mathfrak{a} \in \mathbb{H}[\{\mathfrak{e}, \mathfrak{g}\}]$ und $\mathfrak{e}, \mathfrak{f}, \mathfrak{g}$ ONB $\mathbb{R}^3$, nach kurzer Rechnung,

$$\gamma_2 = \langle \mathfrak{a} | \mathfrak{f} \rangle = \langle \mathfrak{b} | \mathfrak{f} \rangle, \quad 0 = \gamma_2^\bullet \quad \text{auf} \quad \operatorname{\mathsf{dom}} \gamma,$$

sowie via Voraussetzung, nach kurzer Rechnung,

$$\gamma_3 = \langle \mathfrak{a} | \mathfrak{g} \rangle = \langle \mathfrak{b} | \mathfrak{g} \rangle, \quad 0 = \gamma_3^\bullet \quad \text{auf} \quad \operatorname{\mathsf{dom}} \gamma,$$

und dann

$$\begin{aligned}
\gamma_1^\bullet = \langle \gamma | \mathfrak{e} \rangle^\bullet = \langle \mathfrak{b} - \mathfrak{a} | \mathfrak{e} \rangle \\
&= \operatorname{\mathsf{sgn}} (\langle \mathfrak{b} - \mathfrak{a} | \mathfrak{e} \rangle) \cdot |\langle \mathfrak{b} - \mathfrak{a} | \mathfrak{e} \rangle| = \operatorname{\mathsf{sgn}} (\langle \mathfrak{b} - \mathfrak{a} | \mathfrak{e} \rangle) \cdot |\mathfrak{b} - \mathfrak{a}| \quad \text{auf} \quad \operatorname{\mathsf{dom}} \gamma,
\end{aligned}$$

und für alle $t \in \operatorname{\mathsf{dom}} \gamma$,

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\gamma_1^\bullet}{|\gamma^\bullet|} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{.w}} \left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot \gamma_1 \right) \right) \right)^\bullet (t) - g \cdot |\gamma^\bullet| \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{.w}} \right)' \left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot \gamma_1 \right) (t) \\
&\quad = \left(\frac{\operatorname{\mathsf{sgn}} (\langle \mathfrak{b} - \mathfrak{a} | \mathfrak{e} \rangle) \cdot |\mathfrak{b} - \mathfrak{a}|}{|\mathfrak{b} - \mathfrak{a}|} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{.w}} \left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot \gamma_1 \right) \right) \right)^\bullet (t) \\
&\qquad - g \cdot |\mathfrak{b} - \mathfrak{a}| \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{.w}} \right)' \left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot \gamma_1 \right) (t) \\
&\quad = \operatorname{\mathsf{sgn}} (\langle \mathfrak{b} - \mathfrak{a} | \mathfrak{e} \rangle) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{.w}} \right)' \left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot \gamma_1 \right) \cdot g \cdot \gamma_1^\bullet (t) \\
&\qquad - g \cdot |\mathfrak{b} - \mathfrak{a}| \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{.w}} \right)' \left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot \gamma_1 \right) (t) \\
&\quad = g \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{.w}} \right)' \left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot \gamma_1 \right) (t) \\
&\qquad \cdot (\operatorname{\mathsf{sgn}} (\langle \mathfrak{b} - \mathfrak{a} | \mathfrak{e} \rangle) \cdot \operatorname{\mathsf{sgn}} (\langle \mathfrak{b} - \mathfrak{a} | \mathfrak{e} \rangle) \cdot |\mathfrak{b} - \mathfrak{a}| - |\mathfrak{b} - \mathfrak{a}|) \\
&\quad = g \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{.w}} \right)' \left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot \gamma_1 \right) (t) \cdot (|\mathfrak{b} - \mathfrak{a}| - |\mathfrak{b} - \mathfrak{a}|) = 0,
\end{aligned}$$

und

$$\left(\frac{\gamma_2^\bullet}{|\gamma^\bullet|}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{.w}}\left(\frac{E_\circ}{m}+g\cdot\gamma_1\right)\right)\right)^\bullet(t)=\left(\frac{0}{|\gamma^\bullet|}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{.w}}\left(\frac{E_\circ}{m}+g\cdot\gamma_1\right)\right)\right)^\bullet(t)$$
$$=0$$
$$=\left(\frac{0}{|\gamma^\bullet|}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{.w}}\left(\frac{E_\circ}{m}+g\cdot\gamma_1\right)\right)\right)^\bullet(t)$$
$$=\left(\frac{\gamma_3^\bullet}{|\gamma^\bullet|}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{.w}}\left(\frac{E_\circ}{m}+g\cdot\gamma_1\right)\right)\right)^\bullet(t),$$

so dass via **Satz - brchmSkK.1** folgt: γ ist $3,\Omega$-Zustandskurve von L. Hieraus ergibt sich via `d)` mit $0=\inf(\mathsf{dom}\,\gamma)$ und $1=\sup(\mathsf{dom}\,\gamma)$,

$$\int_0^1(L\circ\gamma^*)=\mathsf{sgn}\left(\langle\mathfrak{b}-\mathfrak{a}|\mathfrak{e}\rangle\right)\cdot\int_{\langle\mathfrak{a}|\mathfrak{e}\rangle}^{\langle\mathfrak{b}|\mathfrak{e}\rangle}\frac{dz}{\sqrt{w\left(\frac{E_\circ}{m}+g\cdot z\right)}}.$$

<u>Beweis</u> `f)` Via **Satz - brchmSkK.1** gibt es $I_3\in\mathbb{R}$, so dass

$$\gamma_3^\bullet=I_3\cdot|\gamma^\bullet|\cdot\sqrt{w\left(\frac{E_\circ}{m}+g\cdot\gamma_1\right)}\quad\text{auf}\quad\mathsf{dom}\,\gamma,$$

wobei $\gamma_3=\langle\gamma|\mathfrak{g}\rangle$. Via `c)` gilt $0\le\gamma_3^\bullet$, also $0\le I_3$. Im vorliegenden Fall gibt es wegen

$$\lim_{t\downarrow\inf(\mathsf{dom}\,\gamma)}\gamma_3(t)=\langle\mathfrak{a}|\mathfrak{g}\rangle<\langle\mathfrak{b}|\mathfrak{g}\rangle=\lim_{t\uparrow\sup(\mathsf{dom}\,\gamma)}\gamma_3(t),$$

via 1.MWSDR eine Stelle $t^*\in\mathsf{dom}\,\gamma$ mit $0<\gamma_3^\bullet(t^*)$. Es folgt $0<I_3$ und damit $0<\gamma_3^\bullet$ auf $\mathsf{dom}\,\gamma$. Damit ist γ_3 streng wachsend und wegen der soeben angegebenen limites gilt

$$\mathsf{ran}\,\gamma_3=]\langle\mathfrak{a}|\mathfrak{g}\rangle|\langle\mathfrak{b}|\mathfrak{g}\rangle[.$$

Somit gilt $\gamma_3:\mathsf{dom}\,\gamma\to]\langle\mathfrak{a}|\mathfrak{g}\rangle|\langle\mathfrak{b}|\mathfrak{g}\rangle[$ bijektiv, γ_3 streng wachsend und $\gamma_3\in\mathsf{C}^2(\mathsf{dom}\,\gamma:\mathbb{R})$ und $\langle\gamma|\mathfrak{g}\rangle^{-1}=\gamma_3^{-1}:]\langle\mathfrak{a}|\mathfrak{g}\rangle|\langle\mathfrak{b}|\mathfrak{g}\rangle[\to\mathsf{dom}\,\gamma$ bijektiv und $\gamma_3^{-1}\in\mathsf{C}^2(]\langle\mathfrak{a}|\mathfrak{g}\rangle|\langle\mathfrak{b}|\mathfrak{g}\rangle[:\mathbb{R})$ und γ_3^{-1} streng wachsend und

$$\forall t:t\in\mathsf{dom}\,\gamma\quad\Rightarrow\quad\gamma_3^{-1}(\gamma_3(t))=1\quad\wedge\quad(\gamma_3^{-1})^\bullet(\gamma_3(t))=\frac{1}{\gamma_3^\bullet(t)}\in]0|+\infty[,$$

$$\forall\tau:\tau\in]\langle\mathfrak{a}|\mathfrak{g}\rangle|\langle\mathfrak{b}|\mathfrak{g}\rangle[\quad\Rightarrow\quad\gamma_3(\gamma_3^{-1}(\tau))=\tau\quad\wedge\quad\gamma_3^\bullet(\gamma_3^{-1}(\tau))=\frac{1}{(\gamma_3^{-1})^\bullet(\tau)}.$$

Im Speziellen gelten für alle $\tau\in]\langle\mathfrak{a}|\mathfrak{g}\rangle|\langle\mathfrak{b}|\mathfrak{g}\rangle[$ die Gleichungen $\overline{\gamma}_3(\tau)=(\gamma_3\circ\gamma_3^{-1})(\tau)=\tau$. Via $\mathsf{ran}\,(\gamma_3^{-1})=\mathsf{dom}\,\gamma$ ergibt sich

$$\overline{\gamma}=\gamma\circ\gamma_3^{-1}:]\langle\mathfrak{a}|\mathfrak{g}\rangle|\langle\mathfrak{b}|\mathfrak{g}\rangle[\to\mathsf{ran}\,\gamma,$$

also auch

$$\mathsf{dom}\,(\overline{\gamma}) = \left]\langle\mathfrak{a}|\mathfrak{g}\rangle|\langle\mathfrak{b}|\mathfrak{g}\rangle\right[,$$

so dass nun

$$\overline{\gamma}_3 = \mathsf{id}_{\mathsf{dom}\,\overline{\gamma}}.$$

Via c) gilt für $\gamma_2 = \langle\gamma|\mathfrak{f}\rangle$ die Gleichung $\gamma_2 = \langle\mathfrak{a}|\mathfrak{f}\rangle$ auf $\mathsf{dom}\,\gamma$, so dass

$$\overline{\gamma}_2 = \langle\mathfrak{a}|\mathfrak{f}\rangle \quad \text{auf} \quad \mathsf{dom}\,\overline{\gamma},$$

und somit

$$\overline{\gamma} = \overline{\gamma}_1 \cdot \mathfrak{e} + \langle\mathfrak{a}|\mathfrak{f}\rangle \cdot \mathfrak{f} + \mathsf{id}_{\mathsf{dom}\,\overline{\gamma}} \cdot \mathfrak{g}.$$

Offenbar gilt

$$(\overline{\gamma})^\bullet = \frac{1}{\gamma_3^\bullet \circ \gamma_3^{-1}} \cdot (\gamma^\bullet \circ \gamma_3^{-1}), (\overline{\gamma}_1)^\bullet = \frac{\gamma_1^\bullet \circ \gamma_3^{-1}}{\gamma_3^\bullet \circ \gamma_3^{-1}}, (\overline{\gamma}_2)^\bullet = 0, (\overline{\gamma}_3)^\bullet = 1 \quad \text{auf} \quad \mathsf{dom}\,\overline{\gamma},$$

und somit wegen der Positivität von $\gamma_3^\bullet$ auch

$$\mathsf{sgn}\,((\overline{\gamma}_1)^\bullet) = \mathsf{sgn}\,(\gamma_1^\bullet \circ \gamma_3^{-1}) \quad \text{auf} \quad \mathsf{dom}\,\overline{\gamma} \quad \wedge \quad |(\overline{\gamma})^\bullet| = \frac{|\gamma^\bullet \circ \gamma_3^{-1}|}{\gamma_3^\bullet \circ \gamma_3^{-1}} \quad \text{auf} \quad \mathsf{dom}\,\overline{\gamma}.$$

Via $0 < I_3$ gibt es gemäß **Satz - brchmSkK.1** eine reelle Zahl $I \in \left]0|+\infty\right[$, so dass

$$I^2 \cdot w\left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot \gamma_1\right) \leq 1 \quad \text{auf} \quad \mathsf{dom}\,\gamma,$$

und es gilt

(

$0 < \gamma_1^\bullet$ auf $\mathsf{dom}\,\gamma$ und $0 < 1 - I^2 \cdot w\left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot \gamma_1\right)$ auf $\mathsf{dom}\,\gamma$

und $\forall t : t \in \mathsf{dom}\,\gamma$

$$\Rightarrow \quad \gamma_1^\bullet(t) \cdot \sqrt{\frac{I^2 \cdot w}{1 - I^2 \cdot w}}\left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot \gamma_1\right) = \sqrt{(\gamma_2^\bullet)^2 + (\gamma_3^\bullet)^2}(t),$$

oder

$\gamma_1^\bullet < 0$ auf $\mathsf{dom}\,\gamma$ und $0 < 1 - I^2 \cdot w\left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot \gamma_1\right)$ auf $\mathsf{dom}\,\gamma$

und $\forall t : t \in \mathsf{dom}\,\gamma$

$$\Rightarrow \quad \gamma_1^\bullet(t) \cdot \sqrt{\frac{I^2 \cdot w}{1 - I^2 \cdot w}}\left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot \gamma_1\right) = -\sqrt{(\gamma_2^\bullet)^2 + (\gamma_3^\bullet)^2}(t),$$

oder

$\gamma_1^\bullet$ hat genau eine Nullstelle t_0 und $0 < \gamma_1^\bullet$ auf $(\mathsf{dom}\,\gamma) \cap \,]-\infty|t_0[$ und $\gamma_1^\bullet < 0$ auf $(\mathsf{dom}\,\gamma) \cap \,]t_0|+\infty[$ und $0 < 1 - I^2 \cdot w\left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot \gamma_1\right)$ auf $(\mathsf{dom}\,\gamma) \setminus \{t_0\}$

$$\text{und} \quad \forall t : t \in (\mathsf{dom}\,\gamma) \setminus \{t_0\}$$
$$\Rightarrow \quad \gamma_1^\bullet(t) \cdot \sqrt{\frac{I^2 \cdot w}{1 - I^2 \cdot w}} \left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot \gamma_1\right) = \mathsf{sgn}\,(\gamma_1^\bullet(t)) \cdot \sqrt{(\gamma_2^\bullet)^2 + (\gamma_3^\bullet)^2}(t),$$

).

<u>1.Fall</u> $0 < \gamma_1^\bullet$ auf $\mathsf{dom}\,\gamma$.
Dann $0 < (\overline{\gamma}_1)^\bullet$ auf $\mathsf{dom}\,\overline{\gamma}$ und somit $\langle\mathfrak{a}|\mathfrak{e}\rangle < \langle\mathfrak{b}|\mathfrak{e}\rangle$ und $0 < 1 - I^2\left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot \overline{\gamma}_1\right)$ auf $\mathsf{dom}\,\overline{\gamma}$, woraus via Monotonie und $\langle\mathfrak{a}|\mathfrak{e}\rangle < \langle\mathfrak{b}|\mathfrak{e}\rangle$ die Aussage

$$0 < 1 - I^2 \cdot w\left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot \langle\mathfrak{b}|\mathfrak{g}\rangle\right),$$

folgt. Weiterhin gilt für alle $\tau \in \mathsf{dom}\,\overline{\gamma}$,

$$\begin{aligned}
(\overline{\gamma}_1)^\bullet(\tau) &= \frac{\gamma_1^\bullet(\gamma_3^{-1}(\tau))}{\gamma_3^\bullet(\gamma_3^{-1}(\tau))} = \gamma_1^\bullet(\gamma_3^{-1}(\tau)) \cdot \frac{1}{\gamma_3^\bullet(\gamma_3^{-1}(\tau))} \\
&= \sqrt{(\gamma_2^\bullet(\gamma_3^{-1}(\tau)))^2 + (\gamma_3^\bullet(\gamma_3^{-1}(\tau)))^2} \cdot \sqrt{\frac{1 - I^2 \cdot w}{I^2 \cdot w}} \left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot \gamma_1(\gamma_3^{-1}(\tau))\right) \\
&\qquad \cdot \frac{1}{\gamma_3^\bullet(\gamma_3^{-1}(\tau))} \\
&= \sqrt{0^2 + 1^2} \cdot \sqrt{\frac{1 - I^2 \cdot w}{I^2 \cdot w}} \left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot \overline{\gamma}_1(\tau)\right) \cdot \frac{1}{1} \\
&= \sqrt{\frac{1 - I^2 \cdot w}{I^2 \cdot w}} \left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot \overline{\gamma}_1(\tau)\right),
\end{aligned}$$

so dass

$$(\overline{\gamma}_1)^\bullet \cdot \sqrt{\frac{I^2 \cdot w}{1 - I^2 \cdot w}} \left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot \overline{\gamma}_1\right) = 1,$$

und somit

$$\forall \tau, \sigma : \tau, \sigma \in \mathsf{dom}\,\overline{\gamma} \quad \Rightarrow \quad \int_{\overline{\gamma}_1(\sigma)}^{\overline{\gamma}_1(\tau)} \sqrt{\frac{I^2 \cdot w}{1 - I^2 \cdot w}} \left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot z\right) dz = \tau - \sigma,$$

demnach auch

$$\begin{aligned}
\forall t, s : t, s \in \mathsf{dom}\,\gamma \quad \Rightarrow \quad \int_{\gamma_1(s)}^{\gamma_1(t)} \sqrt{\frac{I^2 \cdot w}{1 - I^2 \cdot w}} \left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot z\right) dz &= \gamma_3(t) - \gamma_3(s) \\
&= \langle\gamma|\mathfrak{g}\rangle(t) - \langle\gamma|\mathfrak{g}\rangle(s),
\end{aligned}$$

und via $\sigma \downarrow \langle\mathfrak{a}|\mathfrak{e}\rangle$ und $\tau \uparrow \langle\mathfrak{b}|\mathfrak{e}\rangle$ folgt

$$\int_{\langle\mathfrak{a}|\mathfrak{e}\rangle}^{\langle\mathfrak{b}|\mathfrak{e}\rangle} \sqrt{\frac{I^2 \cdot w}{1 - I^2 \cdot w}\left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot z\right)}\; dz = \langle\mathfrak{b}|\mathfrak{g}\rangle - \langle\mathfrak{a}|\mathfrak{g}\rangle.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
|\overline{\gamma}^\bullet| = \sqrt{(\overline{\gamma}_1^\bullet)^2 + (\overline{\gamma}_2^\bullet)^2 + (\overline{\gamma}_3^\bullet)^2} &= \sqrt{(\overline{\gamma}_1^\bullet)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{(\overline{\gamma}_1^\bullet)^2 + 1} \\
&= \sqrt{(\overline{\gamma}_1^\bullet)^2 + (\overline{\gamma}_1^\bullet)^2 \cdot \frac{I^2 \cdot w}{1 - I^2 \cdot w}\left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot \overline{\gamma}_1\right)} \\
&= \frac{|\overline{\gamma}_1^\bullet|}{\sqrt{1 - I^2 \cdot w\left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot \overline{\gamma}_1\right)}} \quad \text{auf} \quad \mathsf{dom}\,\overline{\gamma}.
\end{aligned}$$

und somit mit zweimaliger, elementarer Substitution,

$$\begin{aligned}
\int_{\inf(\mathsf{dom}\,\gamma)}^{\sup(\mathsf{dom}\,\gamma)} (L \circ \gamma^*) &= \int_{\inf(\mathsf{dom}\,\gamma)}^{\sup(\mathsf{dom}\,\gamma)} \frac{|\gamma^\bullet|}{\sqrt{w\left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot \gamma_1\right)}} = \int_{\langle\mathfrak{a}|\mathfrak{g}\rangle}^{\langle\mathfrak{b}|\mathfrak{g}\rangle} \frac{|\overline{\gamma}^\bullet|}{\sqrt{w\left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot \overline{\gamma}_1\right)}} \\
&= \int_{\langle\mathfrak{a}|\mathfrak{g}\rangle}^{\langle\mathfrak{b}|\mathfrak{g}\rangle} (L \circ \overline{\gamma}^*) = \int_{\langle\mathfrak{a}|\mathfrak{g}\rangle}^{\langle\mathfrak{b}|\mathfrak{g}\rangle} \frac{|\overline{\gamma}_1^\bullet|}{\sqrt{(1 - I^2 \cdot w) \cdot w\left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot \overline{\gamma}_1\right)}} \\
&= \int_{\langle\mathfrak{a}|\mathfrak{g}\rangle}^{\langle\mathfrak{b}|\mathfrak{g}\rangle} \frac{\overline{\gamma}_1^\bullet}{\sqrt{(1 - I^2 \cdot w) \cdot w\left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot \overline{\gamma}_1\right)}} \\
&= \int_{\langle\mathfrak{a}|\mathfrak{e}\rangle}^{\langle\mathfrak{b}|\mathfrak{e}\rangle} \frac{dz}{\sqrt{(1 - I^2 \cdot w) \cdot w\left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot z\right)}}.
\end{aligned}$$

<u>2.Fall</u> $\gamma_1^\bullet < 0$ auf $\mathsf{dom}\,\gamma$.
Bis auf offensichtliche Modifikationen analog zum <u>1.Fall</u>.

<u>3.Fall</u> $\gamma_1^\bullet$ hat genau eine Nullstelle $t_\circ$. ...
Dann hat $\overline{\gamma}_1^\bullet$ genau eine Nullstelle $\tau_\circ = \gamma_3(t_\circ)$ und es gilt $0 < \overline{\gamma}_1^\bullet$ auf $]\langle\mathfrak{a}|\mathfrak{g}\rangle|\tau_\circ[$ und $\overline{\gamma}_1^\bullet$ auf $]\tau_\circ|\langle\mathfrak{b}|\mathfrak{g}\rangle[$ und $1 < I^2 \cdot w\left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot \overline{\gamma}_1\right)$ auf $]\langle\mathfrak{a}|\mathfrak{g}\rangle|\langle\mathfrak{b}|\mathfrak{g}\rangle[\setminus \{\tau_\circ\}$. Auf $]\langle\mathfrak{a}|\mathfrak{g}\rangle|\tau_\circ[$ gilt wie im <u>1.Fall</u>,

$$\overline{\gamma}_1^\bullet \cdot \sqrt{\frac{I^2 \cdot w}{1 - I^2 \cdot w}\left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot \overline{\gamma}_1\right)} = 1,$$

so dass via Stetigkeit

$$0 = \gamma_1^\bullet(\tau_\circ) = \sqrt{\frac{1 - I^2 \cdot w}{I^2 \cdot w}\left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot \overline{\gamma}_1(\tau_\circ)\right)},$$

folgt, woraus sich $1 - I^2 \cdot w\left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot \overline{\gamma}_1(\tau)\right) = 0$ und dann nach kurzer Rechnung

$$\overline{\gamma}_1(\tau_\circ) = \frac{1}{g} \cdot \left(Q\left(\frac{1}{I^2}\right) - \frac{E_\circ}{m}\right),$$

ergibt, wobei via

$$\frac{1}{I^2} \in \operatorname{ran} w = [0|c^2[,$$

und $0 \neq \dfrac{1}{I^2}$, die Aussage

$$Q\left(\frac{1}{I^2}\right) \in]0|\overline{Q}[,$$

gilt, woraus

$$E_\circ - m \cdot \overline{Q} < -m \cdot g \cdot \overline{\gamma}_1(\tau_\circ) < E_\circ,$$

folgt. Da $\overline{\gamma}_1^\bullet$ positiv auf $]\langle\mathfrak{a}|\mathfrak{g}\rangle|\tau_\circ[$ und negativ auf $]\tau_\circ|\langle\mathfrak{b}|\mathfrak{g}\rangle[$ ist, nimmt $\overline{\gamma}_1$ in $\tau_\circ$ das Maximum an, so dass

$$\max\{\langle\mathfrak{a}|\mathfrak{e}\rangle, \langle\mathfrak{b}|\mathfrak{e}\rangle\} < \overline{\gamma}_1(\tau_\circ),$$

folgt. Auf $]\tau_\circ|\langle\mathfrak{a}|\mathfrak{g}\rangle[$ gilt wie im <u>2.Fall</u>,

$$\overline{\gamma}_1^\bullet \cdot \sqrt{\frac{I^2 \cdot w}{1 - I^2 \cdot w}} \left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot \overline{\gamma}_1\right) = -1,$$

so dass nun ähnlich wie im <u>1.Fall</u> oder <u>2.Fall</u> nach kurzer Umformumg

$$\forall \tau : \tau \in \operatorname{dom} \overline{\gamma} \quad \Rightarrow \quad \int_{\overline{\gamma}_1(\tau)}^{\overline{\gamma}_1(\tau_\circ)} \frac{I^2 \cdot w}{1 - I^2 \cdot w} \left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot z\right) \, dz = |\tau - \tau_\circ|,$$

und hieraus via $\tau \downarrow \langle\mathfrak{a}|\mathfrak{g}\rangle$ und $\tau \uparrow \langle\mathfrak{b}|\mathfrak{g}\rangle$, die Aussage

$$\int_{\langle\mathfrak{a}|\mathfrak{e}\rangle}^{\overline{\gamma}_1(\tau_\circ)} \sqrt{\frac{I^2 \cdot w}{1 - I^2 \cdot w}} \left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot z\right) \, dz + \int_{\langle\mathfrak{b}|\mathfrak{e}\rangle}^{\overline{\gamma}_1(\tau_\circ)} \sqrt{\frac{I^2 \cdot w}{1 - I^2 \cdot w}} \left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot z\right) \, dz = \langle\mathfrak{b}|\mathfrak{g}\rangle - \langle\mathfrak{a}|\mathfrak{g}\rangle,$$

folgt. Durch elemetare Substitution folgt auch

$$\forall t : t \in \operatorname{dom} \gamma \Rightarrow \quad \int_{\gamma_1(t)}^{\gamma_1(t_\circ)} \sqrt{\frac{I^2 \cdot w}{1 - I^2 \cdot w}} \left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot z\right) \, dz = |\langle\gamma|\mathfrak{g}\rangle(t) - \langle\gamma|\mathfrak{g}\rangle(t_\circ)|.$$

Schliesslich ergibt sich wie im <u>1.Fall</u> oder <u>2.Fall</u>,

$$\int_{\operatorname{dom}\gamma} (L \circ \gamma^*) = \int_{\langle\mathfrak{a}|\mathfrak{e}\rangle}^{\langle\mathfrak{b}|\mathfrak{e}\rangle} (L \circ \overline{\gamma}^*)$$
$$= \int_{\langle\mathfrak{a}|\mathfrak{e}\rangle}^{\overline{\gamma}_1(\tau_\circ)} \frac{dz}{\sqrt{1 - I^2 \cdot w \cdot w\left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot z\right)}} + \int_{\langle\mathfrak{b}|\mathfrak{e}\rangle}^{\overline{\gamma}_1(\tau_\circ)} \frac{dz}{\sqrt{1 - I^2 \cdot w \cdot w\left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot z\right)}}.$$

<u>Beweis</u> g) Wegen $\langle\mathfrak{a}|\mathfrak{e}\rangle < \langle\mathfrak{b}|\mathfrak{e}\rangle$ und strenger Monotonie gilt

$$\forall z : z \in \,]\,\langle\mathfrak{a}|\mathfrak{e}\rangle|\langle\mathfrak{b}|\mathfrak{e}\rangle\,[\quad \Rightarrow \quad 0 < 1 - I^2 \cdot w\left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot z\right),$$

so dass $\Lambda \in \mathsf{C}^2(]\,\langle\mathfrak{a}|\mathfrak{e}\rangle|\langle\mathfrak{b}|\mathfrak{e}\rangle\,[: \mathbb{R})$ mit $0 < \Lambda'$ auf $]\,\langle\mathfrak{a}|\mathfrak{e}\rangle|\langle\mathfrak{b}|\mathfrak{e}\rangle\,[$. Gemäß Voraussetzung gilt

$$\left(\lim_{u\uparrow\langle\mathfrak{b}|\mathfrak{e}\rangle} \Lambda(u)\right) - \left(\lim_{u\downarrow\langle\mathfrak{a}|\mathfrak{e}\rangle} \Lambda(u)\right) = \int_{\langle\mathfrak{a}|\mathfrak{e}\rangle}^{\langle\mathfrak{b}|\mathfrak{e}\rangle} \sqrt{\frac{I^2 \cdot w}{1 - I^2 \cdot w}\left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot z\right)}\, dz$$
$$= \langle\mathfrak{b}|\mathfrak{g}\rangle - \langle\mathfrak{a}|\mathfrak{g}\rangle,$$

sowie $\lim\limits_{t\downarrow\langle\mathfrak{a}|\mathfrak{e}\rangle} \Lambda(u) = \langle\mathfrak{a}|\mathfrak{g}\rangle$, so dass $\operatorname{\mathsf{ran}} \Lambda = \,]\,\langle\mathfrak{a}|\mathfrak{g}\rangle|\langle\mathfrak{b}|\mathfrak{g}\rangle\,[$.
Nun folgt $\alpha \in \mathsf{C}^2(]\,\langle\mathfrak{a}|\mathfrak{g}\rangle|\langle\mathfrak{b}|\mathfrak{g}\rangle\,[: \mathbb{R})$ und $0 < \alpha^\bullet$ auf $]\,\langle\mathfrak{a}|\mathfrak{g}\rangle|\langle\mathfrak{b}|\mathfrak{g}\rangle\,[$ und $\alpha : \,]\,\langle\mathfrak{a}|\mathfrak{g}\rangle|\langle\mathfrak{b}|\mathfrak{g}\rangle\,[\to \,]\,\langle\mathfrak{a}|\mathfrak{e}\rangle|\langle\mathfrak{b}|\mathfrak{e}\rangle\,[$ bijektiv, sowie

$$\gamma \in \mathsf{C}^2(]\,\langle\mathfrak{a}|\mathfrak{g}\rangle|\langle\mathfrak{b}|\mathfrak{g}\rangle\,[: \mathbb{R}^3),$$

mit

$$\gamma : \,]\,\langle\mathfrak{a}|\mathfrak{g}\rangle|\langle\mathfrak{b}|\mathfrak{g}\rangle\,[\to \mathbb{R}^3, \quad \gamma(t) = \alpha(t) \cdot \mathfrak{e} + \langle\mathfrak{a}|\mathfrak{f}\rangle \cdot \mathfrak{f} + t \cdot \mathfrak{g},$$

woraus $\langle\gamma|\mathfrak{e}\rangle = \alpha$,

$$E_\circ - m \cdot \overline{Q} < -m \cdot g \cdot \langle\gamma|\mathfrak{e}\rangle(t) < E_\circ \quad \text{auf} \quad \operatorname{\mathsf{dom}} \gamma,$$

und nun $\gamma \in \mathcal{C}$ und ausserdem $\langle\gamma|\mathfrak{e}\rangle^\bullet = \alpha^\bullet > 0$ auf $\operatorname{\mathsf{dom}} \gamma = \,]\,\langle\mathfrak{a}|\mathfrak{g}\rangle|\langle\mathfrak{b}|\mathfrak{g}\rangle\,[$ folgt. Es ergibt sich

$$\forall t : t \in \operatorname{\mathsf{dom}} \gamma$$
$$\Rightarrow \quad \gamma^\bullet(t) = \alpha^\bullet(t) \cdot \mathfrak{e} + \mathfrak{g} = \sqrt{\frac{1 - I^2 \cdot w}{I^2 \cdot w}\left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot \alpha(t)\right)} \cdot \mathfrak{e} + \mathfrak{g},$$

so dass einerseits $0 \neq |\gamma^\bullet|$ auf $\operatorname{\mathsf{dom}} \gamma$ und andererseits nach kurzer Rechnung

$$\forall t : t \in \operatorname{\mathsf{dom}} \gamma \quad \Rightarrow \quad |\gamma^\bullet(t)| = \frac{1}{I} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{.w}}\right)\left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot \alpha(t)\right),$$

folgt.

Somit gilt

$$\forall t : t \in \mathsf{dom}\,\gamma \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\gamma^\bullet}{|\gamma^\bullet|} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{.w}}\right) \left(\frac{E_\circ}{m} + q \cdot \langle \gamma | \mathfrak{e} \rangle \right)\right)^\bullet (t)$$

$$- g \cdot |\gamma^\bullet| \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{.w}}\right)' \left(\frac{E_\circ}{m} + \langle \gamma | \mathfrak{e} \rangle \right)(t) \cdot \mathfrak{e}$$

$$= (I \cdot \gamma^\bullet)^\bullet - g \cdot \frac{1}{I} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{.w}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{.w}}\right)'\right) \left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot \alpha\right)(t) \cdot \mathfrak{e}$$

$$= I \cdot \alpha^{\bullet\bullet} \cdot \mathfrak{e} - g \cdot \frac{1}{I} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{.w}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{.w}}\right)'\right) \left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot \alpha\right)(t) \cdot \mathfrak{e}$$

$$= I \cdot \left(\sqrt{\frac{I^2 \cdot w}{1 - I^2 \cdot w}} \left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot \alpha\right)\right)^\bullet \cdot \mathfrak{e}$$

$$- g \cdot \frac{1}{I} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{.w}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{.w}}\right)'\right) \left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot \alpha\right)(t) \cdot \mathfrak{e}$$

$$= \left(I \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{I^2 \cdot w}{1 - I^2 \cdot w}} \cdot \frac{-I^2 \cdot w' \cdot I^2 \cdot w - (1 - I^2 \cdot w) \cdot I^2 \cdot w'}{I^4 \cdot w^2} \cdot g \cdot \alpha^\bullet\right.$$

$$\left. - g \cdot \frac{1}{I} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{.w}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{.w}}\right)'\right)\right) \left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot \alpha\right)(t) \cdot \mathfrak{e}$$

$$= \left(I \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{I^2 \cdot w}{1 - I^2 \cdot w}} \cdot \frac{-I^2 \cdot w'}{I^4 \cdot w^2} \cdot \sqrt{\frac{1 - I^2 \cdot w}{I^2 \cdot w}}\right.$$

$$\left. - \frac{1}{I} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{.w}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{.w}}\right)'\right)\right) \left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot \alpha\right)(t) \cdot g \cdot \mathfrak{e}$$

$$= \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{w'}{w^2} - \left(\frac{1}{\sqrt{.w}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{.w}}\right)'\right)\right) \left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot \alpha\right)(t) \cdot \frac{g}{I} \cdot \mathfrak{e}$$

$$= \mathfrak{o}^3.$$

Nun folgt via **Satz - brchmSkK.1**, dass γ eine $3, \Omega$-Zustandskurve von L ist. Via `f)` folgt nun

$$\int_{\langle \mathfrak{a} | \mathfrak{g} \rangle}^{\langle \mathfrak{b} | \mathfrak{g} \rangle} (L \circ \gamma^*) = \int_{\langle \mathfrak{a} | \mathfrak{e} \rangle}^{\langle \mathfrak{b} | \mathfrak{e} \rangle} \frac{dz}{\sqrt{(1 - I^2 \cdot w) \cdot w} \left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot u\right)}.$$

<u>Beweis</u> `h)` Bis auf offensichtliche Modifikationen analog zum Beweis von `g)`.

<u>Beweis</u> `i)` Klarer Weise gilt $\eta \in \,]0|\overline{Q}[$, so dass

$$E_\circ - m \cdot \overline{Q} < -m \cdot g \cdot \eta < -m \cdot g \cdot \max\{\langle \mathfrak{a} | \mathfrak{e} \rangle, \langle \mathfrak{b} | \mathfrak{e} \rangle\},$$

sowie

$$\langle \mathfrak{a}|\mathfrak{g}\rangle < t_\circ < \langle \mathfrak{b}|\mathfrak{g}\rangle.$$

Λ_1, Λ_2 sind offenbar 2-Kurven in $\mathbb{R}$ mit $\Lambda_2' < 0 < \Lambda_1'$ und

$$\Lambda_1 : \,]\langle \mathfrak{a}|\mathfrak{g}\rangle|\eta[\, \to \,]\langle \mathfrak{a}|\mathfrak{e}\rangle|t_\circ[\quad \text{bijektiv},$$

$$\Lambda_2 : \,]\langle \mathfrak{b}|\mathfrak{g}\rangle|\eta[\, \to \,]t_\circ|\langle \mathfrak{b}|\mathfrak{e}\rangle[\quad \text{bijektiv},$$

so dass α zweimal stetig differenzierbar auf $]\langle \mathfrak{a}|\mathfrak{g}\rangle|\langle \mathfrak{b}|\mathfrak{g}\rangle[\, \setminus \{t_\circ\}$ mit $0 < \alpha^\bullet$ auf $]\langle \mathfrak{a}|\mathfrak{g}\rangle|t_\circ[$ und $\alpha^\bullet < 0$ auf $]\langle \mathfrak{b}|\mathfrak{g}\rangle|t_\circ[$ ist. Aus

$$\lim_{u\uparrow\eta} \Lambda_1(u) = t_\circ, \quad \lim_{u\uparrow\eta} \Lambda_2(u) = t_\circ,$$

folgt, da per definitionem $\alpha(t_\circ) = \eta$ gilt, dass α stetig in $t_\circ$ ist. Es folgt

$$\mathsf{dom}\,\alpha = \,]\langle \mathfrak{a}|\mathfrak{g}\rangle|\langle \mathfrak{b}|\mathfrak{g}\rangle[, \quad \mathsf{ran}\,\alpha = \,]\min\{\langle \mathfrak{a}|\mathfrak{e}\rangle, \langle \mathfrak{b}|\mathfrak{e}\rangle\}|\eta[.$$

Auch gilt

$$\forall t : t \in \,]\langle \mathfrak{a}|\mathfrak{g}\rangle|t_\circ[\quad \Rightarrow \quad \alpha^\bullet(t) = \sqrt{\frac{1 - I^2 \cdot w}{I^2 \cdot w}\left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot \alpha(t)\right)},$$

$$\forall t : t \in \,]t_\circ|\langle \mathfrak{b}|\mathfrak{g}\rangle[\quad \Rightarrow \quad -\alpha^\bullet(t) = \sqrt{\frac{1 - I^2 \cdot w}{I^2 \cdot w}\left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot \alpha(t)\right)},$$

woraus via $0 = 1 - I^2 \cdot w \left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot \eta\right)$ und $\eta = \alpha(t_\circ)$ die Aussagen

$$\lim_{t\uparrow t_\circ} \alpha^\bullet(t) = 0 = \lim_{t\downarrow t_\circ} \alpha^\bullet(t),$$

folgen, so dass α auch in $t_\circ$ stetig differenzierbar mit

$$0 = \alpha^\bullet(t_\circ),$$

ist. Aus den Darstellungen von $\alpha^\bullet$ auf $]\langle \mathfrak{a}|\mathfrak{g}\rangle|\langle \mathfrak{b}|\mathfrak{g}\rangle[\setminus t_\circ$ folgt nach kurzer Rechnung

$$\forall t : t \in \,]\langle \mathfrak{a}|\mathfrak{g}\rangle|\langle \mathfrak{b}|\mathfrak{g}\rangle[\, \setminus t_\circ \quad \Rightarrow \quad \alpha^{\bullet\bullet}(t) = -\frac{g}{2} \cdot \frac{w'}{I^2 \cdot w}\left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot \alpha(t)\right),$$

woraus

$$\lim_{t\uparrow t_\circ} \alpha^{\bullet\bullet}(t_\circ) = -\frac{g}{2} \cdot w' \left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot \eta\right) = \lim_{t\downarrow 0} \alpha^{\bullet\bullet}(t),$$

folgt, was die zweimalige stetige Differenzierbarkeit von α mit

$$\alpha^{\bullet\bullet}(t_\circ) = -\frac{g}{2} \cdot w' \left(\frac{E_\circ}{m} + g \cdot \eta\right),$$

etabliert. Offenbar gilt

$$\gamma :]\langle \mathfrak{a}|\mathfrak{g}\rangle|\langle \mathfrak{b}|\mathfrak{g}\rangle[\to \mathbb{R}^3, \quad \gamma(t) = \alpha(t)\cdot \mathfrak{e} + \langle \mathfrak{a}|\mathfrak{f}\rangle \cdot \mathfrak{f} + t\cdot \mathfrak{g},$$

was im Speziellen $\langle \gamma|\mathfrak{e}\rangle = \alpha$ etabliert. Konsequenter Weise ist γ eine 2-Kurve im $\mathbb{R}^3$ und nach kurzer Überprüfung folgt $\gamma \in \mathcal{C}$. Auch gilt $0 < \langle \gamma|\mathfrak{e}\rangle^\bullet = \alpha^\bullet$ auf $]\langle \mathfrak{a}|\mathfrak{g}\rangle|t_\circ[$ und $\langle \gamma|\mathfrak{e}\rangle^\bullet = \alpha^\bullet < 0$ auf $]t_\circ|\langle \mathfrak{b}|\mathfrak{g}\rangle[$ mit $\langle \gamma|\mathfrak{e}\rangle^\bullet(t_\circ) = \alpha^\bullet(t_\circ) = 0$. Ähnlich wie in `g)`, `h)` ist

$$\begin{aligned}
&t \in]\langle \mathfrak{a}|\mathfrak{g}\rangle|\langle \mathfrak{b}|\mathfrak{g}\rangle[\setminus t_\circ \\
&\qquad\Rightarrow \quad \left(\frac{\gamma^\bullet}{|\gamma^\bullet|}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{.w}}\right)\left(\frac{E_\circ}{m} + g\cdot\langle\gamma|\mathfrak{e}\rangle\right)\right)^\bullet(t) \\
&\qquad\qquad = g\cdot|\gamma^\bullet|\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{.w}}\right)'\left(\frac{E_\circ}{m} + g\cdot\langle\gamma|\mathfrak{e}\rangle\right)^\bullet(t).
\end{aligned}$$

festzustellen. Wegen der stetigen Differenzierbarkeit von γ muss diese Gleichung auch für $t = t_\circ$ gelten.
Somit ist γ via **Satz - brchmSkK.1** eine $3,\Omega$-Zustandskurve von L. Via `f)` folgt

$$\begin{aligned}
&\int_{\langle \mathfrak{a}|\mathfrak{g}\rangle}^{\langle \mathfrak{b}|\mathfrak{g}\rangle} (L\circ\gamma^*) \\
&\qquad = \int_{\langle \mathfrak{a}|\mathfrak{e}\rangle}^{\eta} \frac{dz}{\sqrt{1 - I^2\cdot w\cdot w\left(\frac{E_\circ}{m} + g\cdot z\right)}} + \int_{\langle \mathfrak{b}|\mathfrak{e}\rangle}^{\eta} \frac{dz}{\sqrt{1 - I^2\cdot w\cdot w\left(\frac{E_\circ}{m} + g\cdot z\right)}}.
\end{aligned}$$

□

4.2 $\Phi(x) = -\frac{G \cdot m \cdot M}{|x - \mathfrak{m}|}$

Satz - brchmSNwt.1

`V1.` $0 < m, M, G \in \mathbb{R}$.

`V2.` $\Phi = \left(\left(x, -\dfrac{G \cdot m \cdot M}{|x - \mathfrak{m}|}\right) : x \in O\right\}$.

`V3.` $c \in \left]0\right| + \infty]$ und $S \in \mathtt{C}^2(\left[0|c^2\right[: \mathbb{R})$ und $0 = S(0)$.

`V4.` $\forall z : z \in \left]0|c^2\right[\quad \Rightarrow \quad 0 < S'(z) + 2 \cdot z \cdot S''(z)$.

`V5.` $Q, \overline{Q}, w$ wie in **Satz - SQw**.

`V6.` $E_\circ \in \mathbb{R}$ und $O = \left\{x : \mathfrak{m} \neq x \in \mathbb{R}^3 \wedge E_\circ - m \cdot \overline{Q} < -\dfrac{G \cdot m \cdot M}{|x - \mathfrak{m}|} < E_\circ\right\}$.

`V7.` $\Omega = (\mathbb{R} \times O) \times \{v : \mathfrak{o}^3 \neq v \in \mathbb{R}^3\}$.

`V8.` $L = \left\{\left(((t, x), v), \dfrac{|v|}{\sqrt{w\left(\frac{E_\circ}{m} + \frac{G \cdot M}{|x - \mathfrak{m}|}\right)}}\right) : t \in \mathbb{R} \wedge x \in O \wedge \mathfrak{o}^3 \neq v \in \mathbb{R}^3\right\}$.

$\Rightarrow$

`a)` $\Phi : \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathfrak{m}\} \to \mathbb{R},\ \Phi(x) = -\dfrac{G \cdot m \cdot M}{|x - \mathfrak{m}|}$.

`b)` $0 \neq \Omega \subseteq (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3) \times \mathbb{R}^3$ offen.

`c)` $L : \Omega \to \mathbb{R},\ L(((t, x), v)) = \dfrac{|v|}{\sqrt{w\left(\frac{E_\circ}{m} + \frac{G \cdot M}{|x - \mathfrak{m}|}\right)}}$

und $\quad L = \left\{\left(((t, x), v), \dfrac{|v|}{\sqrt{w\left(\frac{E_\circ}{m} - \Phi(x)\right)}}\right) :\right.$

$\left. t \in \mathbb{R} \wedge x \in O \wedge \mathfrak{o}^3 \neq v \in \mathbb{R}^3\right\}$.

`d)` E ist $3, \Omega$-Energie von $L \quad \Leftrightarrow \quad E = \mathsf{zo}_\Omega$.

e) Falls $\mathfrak{e}, \mathfrak{f}, \mathfrak{g}$ ONB $\mathbb{R}^3$ und falls $\forall \alpha, u$: $\alpha \in \mathbb{R} \wedge u \in \mathbb{R}^3$

$$\Rightarrow \quad D(\alpha)(u) = \langle u|\mathfrak{e}\rangle \cdot \mathfrak{e} + ((\cos\alpha) \cdot \langle u|\mathfrak{f}\rangle + (\sin\alpha) \cdot \langle u|\mathfrak{g}\rangle) \cdot \mathfrak{f} \\ + (-(\sin\alpha) \cdot \langle u|\mathfrak{f}\rangle + (\cos\alpha) \cdot \langle u|\mathfrak{g}\rangle) \cdot \mathfrak{g},$$

dann $\forall t, x, v : t \in \mathbb{R} \wedge x, v \in \mathbb{R}^3 \wedge ((t, x), v) \in \Omega$

$$\Rightarrow \quad ((t, \mathfrak{m} + D(\alpha)(x - \mathfrak{m})), D(\alpha)(v) \in \Omega \\ \wedge L(((t, \mathfrak{m} + D(\alpha)(x - \mathfrak{m})), D(\alpha)(v))) = L(((t, x), v)).$$

f) Falls γ eine $3, \Omega$-Zustandskurve von L ist, dann

$$\forall t : t \in \mathsf{dom}\,\gamma \quad \Rightarrow \quad E_\circ - m \cdot \overline{Q} < -\frac{G \cdot m \cdot M}{|\gamma(t) - \mathfrak{m}|} < E_\circ,$$

$$\text{und} \quad \forall t : t \in \mathsf{dom}\,\gamma \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\gamma^\bullet}{|\gamma^\bullet|} \cdot \frac{1}{\sqrt{w\left(\frac{E_\circ}{m} + \frac{G \cdot M}{|\gamma. - \mathfrak{m}|}\right)}} \right)^\bullet (t) \\ = -G \cdot M \cdot |\gamma^\bullet| \cdot \frac{\gamma. - \mathfrak{m}}{|\gamma. - \mathfrak{m}|^3} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{.w}}\right)' \left(\frac{E_\circ}{m} + \frac{G \cdot M}{|\gamma. - \mathfrak{m}|}\right)(t)$$

und

$$\exists I : I \in \mathbb{R}^3 \quad \wedge \quad \forall t : t \in \mathsf{dom}\,\gamma \quad \Rightarrow \\ \left((\gamma. - \mathfrak{m}) \otimes \frac{\gamma^\bullet}{|\gamma^\bullet|}\right)(t) = \sqrt{w\left(\frac{E_\circ}{m} + \frac{G \cdot M}{|\gamma. - \mathfrak{m}|}\right)}(t) \cdot I.$$

g) Falls γ eine $3, \Omega$-Zustandskurve von L ist und falls

$$\forall t : t \in \mathsf{dom}\,\gamma \quad \Rightarrow \quad \left((\gamma. - \mathfrak{m}) \otimes \frac{\gamma^\bullet}{|\gamma^\bullet|}\right)(t) = \mathfrak{o}^3,$$

dann $\exists \mathfrak{e}, \alpha : \mathfrak{e} \in \mathbb{R}^3 \wedge |\mathfrak{e}| = 1 \wedge \alpha \in \mathtt{C}^2(\mathsf{dom}\,\gamma : \mathbb{R}) \wedge 0 < \alpha$ auf $\mathsf{dom}\,\gamma$ und $0 \neq \alpha^\bullet$ auf $\mathsf{dom}\,\gamma$

$$\wedge \quad \forall t : t \in \mathsf{dom}\,\gamma \quad \Rightarrow \quad E_\circ - m \cdot \overline{Q} < -\frac{G \cdot m \cdot M}{\alpha(t)} < E_\circ,$$

$$\wedge \quad \forall t : t \in \mathsf{dom}\,\gamma \quad \Rightarrow \quad \gamma(t) = \mathfrak{m} + \alpha(t) \cdot \mathfrak{e}.$$

h) Falls γ eine $3,\Omega$-Zustandskurve von L ist, falls $\mathfrak{o}^3 \neq I \in \mathbb{R}^3$, falls

$$\forall t : t \in \mathsf{dom}\,\gamma \quad \Rightarrow$$
$$\left((\gamma. - \mathfrak{m}) \otimes \frac{\gamma^\bullet}{|\gamma^\bullet|}\right)(t) = \sqrt{w\left(\frac{E_\circ}{m} + \frac{G \cdot M}{|\gamma. - \mathfrak{m}|}\right)}(t) \cdot I,$$

falls $\mathfrak{f} = \pm\dfrac{I}{|I|}$, falls $\mathfrak{e}, \mathfrak{f}, \mathfrak{g}$ ONB $\mathbb{R}^3$ und falls

$$\gamma_1 = \langle \gamma. - \mathfrak{m} | \mathfrak{e} \rangle, \quad \gamma_2 = \langle \gamma. - \mathfrak{m} | \mathfrak{f} \rangle, \quad \gamma_3 = \langle \gamma. - \mathfrak{m} | \mathfrak{g} \rangle,$$

dann sind $\gamma_{1,2,3}$ jeweils 2-Kurven in $\mathbb{R}$ und

$$\forall t : t \in \mathsf{dom}\,\gamma \quad \Rightarrow \quad 0 = \gamma_2(t),$$

und

$$\forall t : t \in \mathsf{dom}\,\gamma \quad \Rightarrow \quad \gamma(t) = \mathfrak{m} + \gamma_1(t) \cdot \mathfrak{e} + \gamma_3(t) \cdot \mathfrak{g},$$

und $\forall t : t \in \mathsf{dom}\,\gamma$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{\gamma_1^\bullet}{\sqrt{(\gamma_1^\bullet)^2 + (\gamma_3^\bullet)^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{w\left(\frac{E_\circ}{m} + \frac{G \cdot M}{\sqrt{\gamma_1^2+\gamma_3^2}}\right)}}\right)^\bullet (t)$$
$$= -G \cdot M \cdot \sqrt{(\gamma_1^\bullet)^2 + (\gamma_3^\bullet)^2} \cdot \frac{\gamma_1}{\sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_3^2}^3} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{.w}}\right)' \left(\frac{E_\circ}{m} + \frac{G \cdot M}{\sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_3^2}}\right)(t),$$

und $\forall t : t \in \mathsf{dom}\,\gamma$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{\gamma_3^\bullet}{\sqrt{(\gamma_1^\bullet)^2 + (\gamma_3^\bullet)^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{w\left(\frac{E_\circ}{m} + \frac{G \cdot M}{\sqrt{\gamma_1^2+\gamma_3^2}}\right)}}\right)^\bullet (t)$$
$$= -G \cdot M \cdot \sqrt{(\gamma_1^\bullet)^2 + (\gamma_3^\bullet)^2} \cdot \frac{\gamma_3}{\sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_3^2}^3} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{.w}}\right)' \left(\frac{E_\circ}{m} + \frac{G \cdot M}{\sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_3^2}}\right)(t),$$

und $\forall t : t \in \mathsf{dom}\,\gamma \quad \Rightarrow \quad (\gamma_1 \cdot \gamma_3^\bullet - \gamma_1^\bullet \cdot \gamma_3)(t)$

$$= \pm \mathsf{sgn}\left(\langle \mathfrak{e} \otimes \mathfrak{g} | \mathfrak{f} \rangle\right) \cdot |\gamma^\bullet| \cdot |I| \cdot \sqrt{w\left(\frac{E_\circ}{m} + \frac{G \cdot M}{\sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_3^2}}\right)}(t).$$

`i)` Falls α eine 2-Kurve in $\mathbb{R}$ ist, falls $0 \neq \alpha, \alpha^\bullet$ auf $\mathsf{dom}\,\alpha$, falls

$$\forall t : t \in \mathsf{dom}\,\alpha \quad \Rightarrow \quad E_\circ - m \cdot \overline{Q} < -\frac{G \cdot m \cdot M}{\alpha(t)} < E_\circ,$$

falls $\mathfrak{e} \in \mathbb{R}^3$, falls $1 = |\mathfrak{e}|$ und falls

$$\gamma = \{(t, \mathfrak{m} + \alpha(t) \cdot \mathfrak{e}) : t \in \mathsf{dom}\,\alpha\},$$

dann gilt

$$\gamma : \mathsf{dom}\,\alpha \to \mathbb{R}^3, \quad \gamma(t) = \mathfrak{m} + \alpha(t) \cdot \mathfrak{e},$$

und $\gamma \in \mathtt{C}^2(\mathsf{dom}\,\alpha : \mathbb{R}^3)$ und γ ist $3, \Omega$-Zustandskurve von L.

`j)` Falls γ eine 2-Kurve im $\mathbb{R}^3$ ist, falls

$$\forall t : t \in \mathsf{dom}\,\gamma \quad \Rightarrow \quad E_\circ - m \cdot \overline{Q} < -\frac{G \cdot m \cdot M}{|\gamma(t) - \mathfrak{m}|} < E_\circ,$$

und falls $\forall t : t \in \mathsf{dom}\,\gamma \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\gamma^\bullet}{|\gamma^\bullet|} \cdot \frac{1}{\sqrt{w\left(\frac{E_\circ}{m} + \frac{G \cdot M}{|\gamma . - \mathfrak{m}|}\right)}} \right)^\bullet (t)$

$$= -G \cdot M \cdot |\gamma^\bullet| \cdot \frac{\gamma . - \mathfrak{m}}{|\gamma . - \mathfrak{m}|^3} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{.w}}\right)' \left(\frac{E_\circ}{m} + \frac{G \cdot M}{|\gamma . - \mathfrak{m}|}\right)(t)$$

dann ist γ eine $3, \Omega$-Zustandskurve von L.

<u>Beweis</u> `a), b), c), d), e)` trivial.

<u>Beweis</u> `f)` Rechnung.

<u>Beweis</u> `g)` Rechnung (inclusive Informationsleere ODE).

<u>Beweis</u> `h)` Rechnung.

<u>Beweis</u> `i), j)` trivial. $\square$

Satz - brchmSNwt.2

V1. $0 < m, M, G \in \mathbb{R}$.

V2. $\Phi = \left\{ \left(x, -\dfrac{G \cdot m \cdot M}{|x - \mathfrak{m}|} \right) : x \in O \right\}$.

V3. $c \in \,]0| + \infty]$ und $S \in \mathtt{C}^2([0|c^2[\, : \mathbb{R})$ und $0 = S(0)$.

V4. $\forall z : z \in \,]0|c^2[\quad \Rightarrow \quad 0 < S'(z) + 2 \cdot z \cdot S''(z)$.

V5. $Q, \overline{Q}, w$ wie in **Satz - SQw**.

V6. $E_\circ \in \mathbb{R}$ und $O = \left\{ x : \mathfrak{m} \neq x \in \mathbb{R}^3 \wedge E_\circ - m \cdot \overline{Q} < -\dfrac{G \cdot m \cdot M}{|x - \mathfrak{m}|} < E_\circ \right\}$.

V7. $\Omega = (\mathbb{R} \times O) \times \{v : \mathfrak{o}^3 \neq v \in \mathbb{R}^3\}$.

V8. $L = \left\{ \left(((t, x), v), \dfrac{|v|}{\sqrt{w\left(\frac{E_\circ}{m} + \frac{G \cdot M}{|x - \mathfrak{m}|}\right)}} \right) : t \in \mathbb{R} \wedge x \in O \wedge \mathfrak{o}^3 \neq v \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

V9. $\mathfrak{e}, \mathfrak{f}, \mathfrak{g}$ ONB $\mathbb{R}^3$.

V10. $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathfrak{m}\}$ und $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{b}$ und $\dfrac{\mathfrak{a} - \mathfrak{m}}{|\mathfrak{a} - \mathfrak{m}|} = \mathfrak{e}$ und $\mathfrak{b} - \mathfrak{m} \in \mathbb{H}[\{\mathfrak{e}, \mathfrak{g}\}]$.

V11. $\mathcal{C} = \Big\{ \gamma : \gamma$ ist 2-Kurve im $\mathbb{R}^3 \wedge \mathsf{dom}\,\gamma$ offen $\wedge \lim\limits_{t \downarrow \inf(\mathsf{dom}\,\gamma} \gamma(t) = \mathfrak{a}$

$\wedge \lim\limits_{t \uparrow \sup(\mathsf{dom}\,\gamma)} \gamma(t) = \mathfrak{b} \wedge E_\circ - m \cdot \overline{Q} < -\frac{G \cdot M}{|\gamma. - \mathfrak{m}|} < E_\circ$ auf $\mathsf{dom}\,\gamma \Big\}$.

$\Rightarrow$

a) Falls γ eine $3, \Omega$-Zustandskurve von L ist, falls $\gamma \in \mathcal{C}$, falls $I \in \mathbb{R}^3$ und falls

$$\forall t : t \in \mathsf{dom}\,\gamma \quad \Rightarrow \quad \left((\gamma. - \mathfrak{m}) \otimes \frac{\gamma^\bullet}{|\gamma^\bullet|} \right)(t) = \sqrt{w\left(\frac{E_\circ}{m} + \frac{G \cdot M}{\gamma. - \mathfrak{m}}\right)}(t) \cdot I,$$

dann $0 = \langle \mathfrak{e} | I \rangle$ und $I \in \mathbb{H}[\{\mathfrak{f}, \mathfrak{g}\}]$ und falls $0 \neq \langle \mathfrak{b} - \mathfrak{m} | \mathfrak{g} \rangle$, dann $I \in \mathbb{H}[\{\mathfrak{f}\}]$ und falls $I = \mathfrak{o}^3$, dann $0 = \langle \mathfrak{b} - \mathfrak{m} | \mathfrak{g} \rangle$ und $\exists \alpha : \alpha \in \mathtt{C}^2(\mathsf{dom}\,\gamma : \mathbb{R})$, so dass $0 < \alpha$ auf $\mathsf{dom}\,\gamma$ und $0 \neq \alpha^\bullet$ auf $\mathsf{dom}\,\gamma$ und $\mathsf{sgn}\,(\alpha^\bullet) = \mathsf{sgn}\,(\langle \mathfrak{b} - \mathfrak{a} | \mathfrak{e} \rangle)$ auf $\mathsf{dom}\,\gamma$

$$\text{und} \quad \forall t : t \in \mathsf{dom}\,\gamma \quad \Rightarrow \quad E_\circ - m \cdot \overline{Q} < -\frac{G \cdot M}{\alpha(t)} < E_\circ,$$

$$\text{und} \quad \forall t : t \in \mathsf{dom}\,\gamma \quad \Rightarrow \quad \gamma(t) = \mathfrak{m} + \alpha(t) \cdot \mathfrak{e},$$

und falls $0 \neq \langle \mathfrak{b} - \mathfrak{m} | \mathfrak{g} \rangle$ und $\mathfrak{o}^3 \neq I$, dann $\mathfrak{f} = \pm \dfrac{I}{|I|}$.

b) Falls $0 = \langle \mathfrak{b} - \mathfrak{m} | \mathfrak{g} \rangle$, falls $0 < \langle \mathfrak{b} - \mathfrak{m} | \mathfrak{e} \rangle$, falls

$$E_\circ - m \cdot \overline{Q} \leq -\frac{G \cdot M}{|\mathfrak{a} - \mathfrak{m}|} \leq E_\circ \quad \wedge \quad E_\circ - m \cdot \overline{Q} \leq -\frac{G \cdot M}{|\mathfrak{b} - \mathfrak{m}|} \leq E_\circ,$$

falls α eine 2-Kurve in $\mathbb{R}$ mit $\mathsf{dom}\,\alpha$ offen und

$$\lim_{t \downarrow \inf(\mathsf{dom}\,\alpha)} \alpha(t) = \langle \mathfrak{a} - \mathfrak{m} | \mathfrak{e} \rangle \quad \wedge \quad \lim_{t \uparrow \sup(\mathsf{dom}\,\alpha)} \alpha(t) = \langle \mathfrak{b} - \mathfrak{m} | \mathfrak{e} \rangle,$$

und $0 \neq \alpha^\bullet$ auf $\mathsf{dom}\,\alpha$ und falls

$$\gamma = \{(t, \mathfrak{m} + \alpha(t) \cdot \mathfrak{e}) : t \in \mathsf{dom}\,\alpha\},$$

dann gilt $\mathsf{dom}\,\gamma = \mathsf{dom}\,\alpha$ und

$$\forall t : t \in \mathsf{dom}\,\alpha \quad \Rightarrow \quad \gamma(t) = \mathfrak{m} + \alpha(t) \cdot \mathfrak{e},$$

und γ ist $3, \Omega$-Zustandskurve von L und $\gamma \in \mathcal{C}$.

c) Falls J ein offenes, echtes reelles Intervall ist, falls $\gamma_1, \gamma_3 \in \mathsf{C}^2(J : \mathbb{R})$, falls

$$\forall t : t \in J \quad \Rightarrow \quad 0 \neq \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_3^2}(t) \quad \wedge \quad E_\circ - m \cdot \overline{Q} < \frac{G \cdot M}{\sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_3^2}(t)} < E_\circ,$$

falls

$$\lim_{t \downarrow \inf J} \gamma_1(t) = \langle \mathfrak{a} - \mathfrak{m} | \mathfrak{e} \rangle \quad \wedge \quad \lim_{t \uparrow \sup J} \gamma_1(t) = \langle \mathfrak{a} - \mathfrak{m} | \mathfrak{e} \rangle,$$

falls

$$\lim_{t \downarrow \inf J} \gamma_3(t) = \langle \mathfrak{a} - \mathfrak{m} | \mathfrak{g} \rangle \quad \wedge \quad \lim_{t \uparrow \sup J} \gamma_3(t) = \langle \mathfrak{a} - \mathfrak{m} | \mathfrak{g} \rangle,$$

falls

$$\forall t : t \in J \quad \Rightarrow \quad 0 \neq \sqrt{(\gamma_1^\bullet)^2 + (\gamma_3^\bullet)^2}(t),$$

falls

$$\forall t : t \in J$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{\gamma_1^\bullet}{\sqrt{(\gamma_1^\bullet)^2 + (\gamma_3^\bullet)^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{w\left(\frac{E_\circ}{m} + \frac{G \cdot M}{\sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_3^2}}\right)}} \right)^\bullet (t)$$

$$= -G \cdot M \cdot \sqrt{(\gamma_1^\bullet)^2 + (\gamma_3^\bullet)^2} \cdot \frac{\gamma_1}{\sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_3^2}^3} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{.w}}\right)' \left(\frac{E_\circ}{m} + \frac{G \cdot M}{\sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_3^2}}\right)(t),$$

falls

$$\forall t : t \in \mathsf{dom}\, J$$
$$\Rightarrow \quad \left(\frac{\gamma_3^\bullet}{\sqrt{(\gamma_1^\bullet)^2 + (\gamma_3^\bullet)^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{w\left(\frac{E_\circ}{m} + \frac{G \cdot M}{\sqrt{\gamma_1^2+\gamma_3^2}}\right)}} \right)^\bullet (t)$$
$$= -G \cdot M \cdot \sqrt{(\gamma_1^\bullet)^2 + (\gamma_3^\bullet)^2} \cdot \frac{\gamma_3}{\sqrt{\gamma_1^2+\gamma_3^2}^3} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{.w}} \right)' \left(\frac{E_\circ}{m} + \frac{G \cdot M}{\sqrt{\gamma_1^2+\gamma_3^2}} \right)(t),$$

und falls
$$\gamma = \{(t, \mathfrak{m} + \gamma_1(t) \cdot \mathfrak{e} + \gamma_3(t) \cdot \mathfrak{g}) : t \in J\},$$
dann gilt $\gamma \in \mathtt{C}^2(J : \mathbb{R}^3)$

$$\text{und} \quad \forall t : t \in J \quad \Rightarrow \quad \gamma(t) = \mathfrak{m} + \gamma_1(t) \cdot \mathfrak{e} + \gamma_3(t) \cdot \mathfrak{g},$$

und γ ist $3, \Omega$-Zustandskurve von L und $\gamma \in \mathcal{C}$.

Beweis `a)`, `b)` Rechnung.

Beweis `c)` trivial. □