

© 2014 г. Р. Ф. Бикбаев, А. И. Бобенко^{*†}, А. Р. Итс[‡]

УРАВНЕНИЕ ЛАНДАУ–ЛИФШИЦА. СЛУЧАЙ ОДНООСНОЙ АНИЗОТРОПИИ. ТЕОРИЯ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ

Методом обратной задачи исследуется хорошо известное в теории ферромагнетизма $X\bar{X}Z$ -уравнение Ландау–Лифшица. Построены все элементарные возбуждения солитонного типа. Изучено их взаимодействие. Получены также конечнозонные (в тета-функциях) решения, среди них выделены вещественные.

Ключевые слова: многосолитонные решения, ферромагнетик, конечнозонное интегрирование, тета-функции.

DOI: 1010.4231/tmf8532

1. ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известное в теории ферромагнетизма уравнение Ландау–Лифшица (уравнение ЛЛ) [1]

$$\begin{aligned} \vec{S}_t &= [\vec{S} \times \vec{S}_{xx}] + [\vec{S} \times J\vec{S}], \\ \vec{S} &= (S_1, S_2, S_3), \quad S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = 1, \quad J = \text{diag}(J_1, J_2, J_3), \end{aligned} \tag{1.1}$$

уже много лет является объектом повышенного внимания со стороны специалистов по теории вполне интегрируемых нелинейных эволюционных систем. Этот особенный по отношению к другим погружающимся в схему метода обратной задачи моделям интерес к уравнению (1.1) объясняется, в частности, следующим обстоятельством. Представление уравнения ЛЛ в виде условия совместности двух линейных уравнений (предъявление U – V пары) было получено давно: в 1977 г. для полностью

Статья является переработанным по заказу Редколлегии вариантом одноименного препринта ДонФТИ-84-6(81), Донецкий физико-технический институт АН УССР, Донецк, 1984 г.

^{*}Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН

[†]Institut für Mathematik, Technische Universität Berlin.

E-mail: bobenko@math.tu-berlin.de

[‡]Department of Mathematical Sciences, Indiana University-Purdue University Indianapolis, Indianapolis, USA. E-mail: itsa@math.iupui.edu

изотропного случая ($J_1 = J_2 = J_3$, XXX -модель) Л. Д. Тахтаджяном [2], в 1978 г. для случая одноосной анизотропии ($J_1 = J_2 \neq J_3$, XXZ -модель) А. Е. Боровиком [3] и, наконец, в 1979 г. для случая полной анизотропии ($J_1 \neq J_2 \neq J_3$, XYZ -модель) Е. К. Скляниным и, независимо, Д. Е. Боровиком (см. [4]). Тем самым, казалось бы, сразу открывалась возможность применить к уравнению (1.1) традиционный аппарат метода обратной задачи со всеми его основными атрибутами: построение явных решений, исследование задачи Коши и т. п. Однако вплоть до середины 80-х гг. эта возможность в полной мере так и не была реализована. Трудность применения метода обратной задачи к уравнению ЛЛ объяснялась тем, что уравнение ЛЛ более чем какая-либо другая интегрируемая система требует переформулировок метода обратной задачи в “метод матричной задачи Римана”. Подобная переформулировка к моменту написания $U-V$ пары для уравнения (1.1) окончательно еще не была осуществлена, хотя, строго говоря, переосмысление схемы метода обратной задачи в указанном направлении началось еще в 1975 г. в известных работах А. Б. Шабата, Б. Е. Захарова и С. Б. Манакова [5], [6].

Таким образом, с 1979 г. в математической теории уравнения ЛЛ наблюдалась весьма странная ситуация – уравнение, казалось бы, было погружено в схему метода обратной задачи, а реальной выгоды от этого не ощущалось. Заметим, что с физической точки зрения уравнение (1.1) исключительно важно. Поэтому независимо от “взаимоотношений” с методом обратной задачи теория уравнения ЛЛ интенсивно и вполне успешно развивалась. В частности, к 1979 г. уже было известно много его частных решений как солитонного, так и более сложного типа. В этой связи в первую очередь необходимо упомянуть работы И. А. Ахиезера и А. Е. Боровика [7], [8] и исследования групп А. М. Косевича (А. М. Косевич, Б. А. Иванов, А. С. Ковалев, М. М. Богдан, И. М. Бабич и др.) и В. И. Елеонского (В. М. Елеонский, Е. И. Кирова, Я. Е. Кулагин и др.). Мы позволяем себе не приводить ссылок на многочисленные публикации упомянутых авторов, отсылая читателя за ними, а также за более подробной историей вопроса к обзору А. М. Косевича [9]. Из работ, которые в той мере, в какой это было возможно в описываемый период, использовали метод обратной задачи, помимо уже упоминавшихся трудов Л. А. Тахтаджяна, Е. К. Склянина и А. Е. Боровика, следует отметить работы по конечнозонному интегрированию уравнения ЛЛ, выполненные Н. Н. Боголюбовым (мл.) и А. К. Прикарпатским [10] (XXZ -случай), И. В. Чередником [11] и Е. Дейтом, М. Джимбо, М. Кошварой и Т. Мивой [12] (XYZ -случай). Очень интересную статью М. М. Богдана и Л. С. Ковалева [13], в которой по методу Хироты строятся N -солитонные решения уравнения ЛЛ в случае полной анизотропии, мы также относим к этому кругу работ, хотя сами ее авторы и противопоставляют (на наш взгляд, неоправданно) метод Хироты методу обратной задачи.

Коренной вклад в развитие эффективных схем приложения метода обратной задачи к уравнению ЛЛ произошел в 1982 г., после того как А. В. Михайлов в работе [14] точно сформулировал матричную задачу Римана, аксиоматика которой адекватна структуре $U-V$ пары для XYZ -уравнения ЛЛ. Результат не замедлил сказаться: в работах А. В. Михайлова [14] и Ю. Л. Родина [15] были регулярным образом описаны многосолитонные решения уравнения (1.1) в полностью анизотропном случае, а А. И. Бобенко [16] и А. Б. Борисов [17] предложили “процедуры

одевания” для этого уравнения, позволявшие по известным решениям строить новые. Сдвиги произошли и в алгебро-геометрическом (конечнозонном) интегрировании уравнения (1.1): авторам настоящей работы удалось погрузить в $X X Z$ -случае уравнение (1.1) в схему Кричевера и довести конечнозонное интегрирование этого уравнения до получения явных формул в тета-функциях [18], а также осуществить аналогичную программу для случая полной анизотропии сделав тем самым более полезными соответствующие результаты работ [10] и [11]. Подводя итог вышесказанному, можно констатировать, что в настоящий момент в теории уравнения ЛЛ (1.1) существует схема, позволяющая регулярным образом как строить все ранее известные решения, так и предъявлять новые, существенно отличные от ранее известных, точные решения и исследовать всевозможные эффекты, связанные с их взаимодействием.

Цель настоящей работы – дать подробное описание упомянутой схемы на промежуточном по сложности примере уравнения ЛЛ в случае одноосной анизотропии. Мы адресуем нашу статью специалистам по теории ферромагнетизма, не предполагая при этом глубокого знакомства читателя с идеями метода обратной задачи и стараясь уделить как можно больше внимания конкретным результатам, физически интересным частным случаям и эффектам, которые можно извлечь из развиваемого нами подхода. Это намерение существенным образом определило структуру самой статьи.

В разделах 2, 3 закладываются основы схемы – формулируется и обсуждается “обобщенная матричная задача Римана”, отвечающая $X Y Z$ -уравнению ЛЛ. При этом мы, хотя и отталкиваемся от упоминавшейся выше работы [14], используем, однако, нестандартную версию сведения интегрируемого уравнения к задаче Римана. Эта версия взята нами из работ М. Джимбо, Т. Мивы и К. Уено [19], [20], она оказывается наиболее удобной для развития на ее основе в следующих разделах всех основных конструкций нашей схемы. Математический аппарат разделов 2, 3 вполне элементарен: мы практически пользуемся лишь простейшими идеями линейной алгебры и комплексного анализа (алгеброй матриц размера 2×2 и теоремой Лиувилля).

Не выходя за рамки этого аппарата, в разделах 4–6 мы развиваем процедуру одевания для $X X Z$ -уравнения ЛЛ с одновременным ее применением к построению, классификации и описанию взаимодействий солитонных решений. Необходимо подчеркнуть, что мы, по-видимому, не получаем здесь новых результатов, однако в методологическом плане выводимые нами формулы обладают рядом преимуществ по сравнению с ранее известными представлениями для точных решений уравнения ЛЛ. В частности, все полученные нами ответы совершенно симметричны с точки зрения степени явности и компактности по отношению к компонентам вектора \vec{S} . Параметризуются наши формулы (см. раздел 5) точками комплексной плоскости (спектром соответствующей линейной задачи), на которые наложены весьма слабые ограничения. Последнее обстоятельство позволяет эффективно изучать различные предельные переходы в конструируемых нами решениях.

В разделе 6 демонстрируются возможности нашего метода при описании эффектов взаимодействия друг с другом различных элементарных решений. Здесь, наря-

ду с довольно простыми процессами взаимодействия двух солитонов, мы описываем и такое явление, как прохождение солитона через доменную стенку.

Существенно новые типы решений XXZ -уравнения ЛЛ рассматриваются в разделах 7–10. Здесь реализация основной абстрактной теоремы из раздела 2 происходит в рамках техники “конечнозонного интегрирования” на базе уже менее тривиального математического аппарата теории функций на компактных римановых поверхностях. Выдержать замкнутость изложения здесь, к сожалению, невозможно. Однако мы постарались свести к минимуму необходимость обращения к внешним математическим источникам. Наиболее близким источником является монография [21]. Читатель может обратиться также к заключительным главам монографии [22] и вводной части обзора [23]. Дополнительные сведения о редукциях римановых поверхностей, используемые нами в разделе 9, приводятся в приложении. Более детальное изложение теории римановых тета-функций, подчиненное законам интегрирования нелинейных уравнений, читатель может найти в монографии [21] (см. также обзоры [24], [25] и книгу [26]).

Опишем теперь кратко содержание разделов 7–10. В разделе 7 строятся в терминах многомерных тета-функций комплексные почти периодические (конечнозонные) решения уравнения ЛЛ в случае одноосной анизотропии. В разделе 8, следуя технике работы [27], мы выводим условия вещественности. С точки зрения физических приложений многомерная тета-функция является очень сложным объектом для количественного анализа. Однако в настоящее время существуют пакеты программ для вычислений на римановых поверхностях [28]. В частности, они позволяют эффективно рассчитать решения в тета-функциях. Тем самым многомерные формулы, содержащие тета-функции, превратились в полноценный объект численного анализа. Кроме того, общие выражения в тета-функциях являются удобной аналитической базой для вывода важных специальных решений.

В разделе 9, используя технику сведения тета-функций высших родов к низшим, из общих формул разделов 7, 8 мы извлекаем периодические решения, которые описываются уже в эллиптических функциях – кноидальные волны и их суперпозиции. В разделах 10, 11 общая формула раздела 7 подвергается определенной процедуре вырождения (производится попарное слияние точек ветвления исходной римановой поверхности), в результате которой возникают удобные формулы для многосолитонных решений и решений, описывающих взаимодействие солитонов с кноидальными волнами. Более точно, ограничиваясь в целях экономии места случаем анизотропии “легкая плоскость”, мы строим многосолитонные формулы для решений типа “движущаяся доменная стенка” и описываем эффект взаимодействия одной движущейся доменной стенки с кноидальной волной.

Подводя итог описанию содержания настоящей статьи, отметим следующее. Как мы надеемся показать, развиваемая нами на основе метода обратной задачи схема есть наиболее адекватный способ нахождения, классификации и исследования точных решений уравнения ЛЛ.

Мы посвящаем эту публикацию нашему безвременно ушедшему другу Рамилю Фаритовичу Бикбаеву.

2. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

XXZ -уравнение ЛЛ ($J_1 = J_2$, без потери общности положим $J = \text{diag}(0, 0, \varepsilon)$)

$$\vec{S}_t = [\vec{S} \times \vec{S}_{xx}] + [\vec{S} \times J\vec{S}] \quad (2.1)$$

является условием совместности

$$U_t - V_x + [U, V] = 0 \quad (2.2)$$

пары линейных дифференциальных уравнений

$$\Psi_x = U\Psi, \quad \Psi_t = V\Psi, \quad (2.3)$$

где U и V задаются выражениями

$$U(\lambda) = -i \sum_{\alpha=1}^3 S_\alpha w_\alpha \sigma_\alpha, \quad (2.4)$$

$$V(\lambda) = 2i \sum_{\alpha=1}^3 S_\alpha w_1 w_2 w_3 w_\alpha^{-1} \sigma_\alpha - i \sum_{\alpha=1}^3 [S \times S_x]_\alpha w_\alpha \sigma_\alpha,$$

$$w_1 = w_2 = \sqrt{\lambda^2 - a^2}, \quad w_3 = \lambda, \quad a = i \frac{\sqrt{\varepsilon}}{4}. \quad (2.5)$$

Если $\varepsilon > 0$, то мы имеем анизотропию типа оси легкого намагничивания, при $\varepsilon < 0$ – анизотропию типа легкой плоскости намагничивания. Оба случая исследуются совершенно аналогично. Пара (2.4) есть простое вырождение U – V -пары Склянина–Боровика для XYZ -уравнения ЛЛ в случае $J_1 = J_2$. Заметим, что в рассматриваемом случае спектральный параметр λ меняется не на комплексной плоскости, а на двулистной римановой поверхности Γ функции $\sqrt{\lambda^2 - a^2}$. Конечно, можно было бы произвести соответствующую замену переменной λ так, чтобы U и V стали рациональными функциями спектрального параметра, но мы этого делать не будем, так как в выбранной нами униформизации (2.5) соотношений $w_\alpha^2 - w_\beta^2 = -(J_\alpha - J_\beta)/4$ очень естественно учитывается редукция пары (2.4):

$$\sigma_3 U(\lambda^\tau) \sigma_3 = U(\lambda), \quad \sigma_3 V(\lambda^\tau) \sigma_3 = V(\lambda), \quad (2.6)$$

где через $\lambda \rightarrow \lambda^\tau$ обозначена инволюция, переставляющая листы поверхности Γ , $\sqrt{(\lambda^\tau)^2 - a^2} = -\sqrt{\lambda^2 - a^2}$. Такая редукция, связанная с перестановкой листов, легко учитывается при построении конечнозонных решений (см. раздел 7).

Центральным объектом при построении точных формул для решений нелинейных уравнений, интегрируемых методом обратной задачи, является функция Ψ . Первоначально именно она строится по своим аналитическим свойствам, которые вытекают из вида U – V -пары, а затем уже по ней строятся формулы для решений нелинейных уравнений. Сформулируем так называемую обобщенную задачу Римана, отвечающую уравнению (2.1).

Задача Римана. Требуется найти функцию $\Psi(\lambda)$, определенную на Γ , со значениями в множестве матриц размера 2×2 , которая обладает следующими свойствами.

1. Две бесконечно удаленные точки $\infty^{1,2}$ поверхности Γ в ее стандартной реализации двулиственным накрытием плоскости переменной λ ($\sqrt{\lambda^2 - a^2} \rightarrow \pm\lambda$ при $\lambda \rightarrow \infty^{1,2}$) суть точки существенной особенности функции Ψ , которая в окрестности этих точек имеет дифференцируемую по x и t существенную особенность вида

$$\Psi(\lambda, x, t) = \sum_{j=0}^{\infty} \Phi_j(x, t) \lambda^{-j} e^{-i\sigma_3 \lambda x + 2i\sigma_3 \lambda^2 t} C \lambda^m, \quad (2.7)$$

где $\det \Phi_0(x, t) \neq 0$, матрица C обратима и не зависит от x, t .

2. Функция $\Psi(\lambda)$ имеет также так называемые “регулярные особенности” в точках a_1, \dots, a_N , т. е. функция $\Psi(\lambda)$ голоморфна и обратима во всех точках множества $\Gamma \setminus \{\infty^{1,2}\}$, кроме точек a_1, \dots, a_N , не зависящих от x, t , в окрестности которых справедливо следующее представление:

$$\Psi(\lambda) \underset{\lambda \sim a_j}{=} \widehat{\Psi} k^{T_j} C_j, \quad j = 1, \dots, N, \quad (2.8)$$

где T_j – диагональная, а C_j – обратимая постоянные матрицы (не зависящие от x, t); матричнозначная функция $\widehat{\Psi}(\lambda)$ голоморфна и обратима в окрестности точки a_j и k – локальный параметр в окрестности точки a_j ,

$$k = \begin{cases} \lambda - a_j, & a_j \neq \pm a, \\ \sqrt{\lambda \pm a}, & a_j = \pm a. \end{cases}$$

Отметим, что в случае, когда T_j – рациональная нецелая матрица, функция $\Psi(\lambda)$ неоднозначна на Γ . В этом случае точка a_j является точкой ветвления накрытия $\widehat{\Gamma} \rightarrow \Gamma$, функция Ψ однозначна уже на этой накрывающей поверхности $\widehat{\Gamma}$, а как функция на Γ характеризуется следующим свойством: при обходе по поверхности Γ вокруг точки a_j в положительном направлении функция $\Psi(\lambda)$ домножается справа на матрицу монодромии,

$$\Psi(\lambda) \rightarrow \Psi(\lambda) M_j, \quad M_j = C_j^{-1} e^{2\pi i T_j} C_j. \quad (2.9)$$

3. Пусть также имеются контуры $\mathcal{L}_i \in \Gamma$ и не зависящие от x, t матрицы $G_i(\lambda)$, $i = 1, \dots, M$. Вдоль контуров \mathcal{L}_i матрицы $\Psi_+(\lambda)$ и $\Psi_-(\lambda)$ (граничные значения функции Ψ с различных сторон контура \mathcal{L}_i) связаны линейными соотношениями

$$\Psi_-(\lambda) = \Psi_+(\lambda) G_i(\lambda) \Big|_{\lambda \in \mathcal{L}_i}. \quad (2.10)$$

4. Справедливо редукционное ограничение

$$\sigma_3 \Psi(\lambda^\tau) = \Psi(\lambda) \sigma(\lambda), \quad (2.11)$$

где $\sigma(\lambda)$ не зависит от x, t .

5. Выполнены следующие условия нормировки:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \ln \Psi_{1i}(a) &= \frac{\partial}{\partial x} \ln \Psi_{2k}(-a), \\ \frac{\partial}{\partial t} \ln \Psi_{1j}(a) &= \frac{\partial}{\partial t} \ln \Psi_{2l}(-a) \end{aligned} \quad (2.12)$$

для каких-либо i, k, j, l .

ТЕОРЕМА 1. Пусть построена функция Ψ , удовлетворяющая условиям 1–5 задачи Римана, тогда с точностью до слагаемых, пропорциональных единичной матрице, логарифмические производные $\Psi_x \Psi^{-1}$ и $\Psi_t \Psi^{-1}$ имеют вид (2.4), где

$$\sum_{\alpha=1}^3 S_\alpha \sigma_\alpha = \Phi_0 \sigma_3 \Phi_0^{-1}, \quad (2.13)$$

т. е. если

$$\Phi_0 = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad (2.14)$$

то

$$S_1 = \frac{CD - AB}{AD - BC}, \quad S_2 = -i \frac{CD + AB}{AD - BC}, \quad S_3 = \frac{AD + BC}{AD - BC}. \quad (2.15)$$

Функции $S_j(x, t)$, определяемые соотношениями (2.13)–(2.15), удовлетворяют равенству

$$\sum_{\alpha=1}^3 S_\alpha^2 = 1$$

и образуют решение XXZ -уравнения ЛЛ (2.1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что логарифмические производные $\Psi_x \Psi^{-1}$ и $\Psi_t \Psi^{-1}$ в силу свойств (2.8)–(2.10) уже являются, в отличие от самой функции Ψ , однозначными функциями на поверхности Γ . Они не имеют особенностей в точках a_j ,

$$\Psi_x \Psi^{-1} \Big|_{\lambda \sim a_j} = \widehat{\Psi}_x k^{T_j} C_j C_j^{-1} k^{-T_j} \widehat{\Psi}^{-1} = \widehat{\Psi}_x \widehat{\Psi}^{-1},$$

и на контурах \mathcal{L}_i ,

$$(\Psi_+)_x \Psi_+^{-1} = (\Psi_-)_x \Psi_-^{-1} \Big|_{\lambda \in \mathcal{L}_i}.$$

Таким образом, из вида асимптотики (2.7) и того факта, что особенности на множестве $\Gamma \setminus \{\infty^{1,2}\}$ отсутствуют, вытекает следующее представление логарифмических производных $\Psi_x \Psi^{-1}$ и $\Psi_t \Psi^{-1}$:

$$\begin{aligned} \Psi_x \Psi^{-1} &= \lambda A_1 + \sqrt{\lambda^2 - a^2} A_2 + A_3, \\ \Psi_t \Psi^{-1} &= \lambda^2 B_1 + \lambda \sqrt{\lambda^2 - a^2} B_2 + \lambda B_3 + \sqrt{\lambda^2 - a^2} B_4 + B_5, \end{aligned}$$

где A_i, B_i – матрицы, зависящие только от x и t ,

$$\text{Sp}(A_1 + A_2) = \text{Sp}(B_1 + B_2) = \text{Sp}(B_3 + B_4) = 0.$$

Далее, из редукции (2.11) следует, что матрицы A_1, A_3, B_1, B_3, B_5 диагональные, а матрицы A_2, B_2, B_4 антидиагональные. Таким образом,

$$\begin{aligned} \Psi_x \Psi^{-1} &= -i \sum_{\alpha=1}^3 S_\alpha w_\alpha \sigma_\alpha + A(x, t) \sigma_3 + \alpha(x, t) I, \\ \Psi_t \Psi^{-1} &= 2i \sum_{\alpha=1}^3 P_\alpha w_1 w_2 w_3 w_\alpha^{-1} \sigma_\alpha + i \sum_{\alpha=1}^3 Q_\alpha w_\alpha \sigma_\alpha + B(x, t) \sigma_3 + \beta(x, t) I. \end{aligned}$$

Из условия нормировки (2.12) следует, что $A(x, t) = B(x, t) = 0$. И, наконец, подставляя асимптотическое разложение (2.7) в (2.3) и приравнивая члены при одинаковых степенях λ , убеждаемся в справедливости формулы (2.13) и равенств $P_\alpha = S_\alpha$, $Q_\alpha = -[S \times S_x]_\alpha$. Теорема доказана.

Итак, функция Ψ (а значит, и решение XXZ -уравнения ЛЛ) определяется следующими данными обобщенной задачи Римана – “данными рассеяния”:

$$\Lambda = \{a_1, \dots, a_N, T_j, \dots, T_N, C_1, \dots, C_N, \mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_M, G_1(\lambda), \dots, G_M(\lambda)\}, \quad (2.16)$$

где $T_j, C_j, j = 1, \dots, N$, определены в (2.8) и в $G_i(\lambda)$ аргумент $\lambda \in \mathcal{L}_i, i = 1, \dots, M$. В дальнейшем мы найдем точные выражения для функций Ψ с некоторыми конкретными данными Λ и, таким образом, построим решения уравнения (2.1).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть функция Ψ удовлетворяет редукции

$$\sigma_2 \overline{\Psi(\bar{\lambda})} = \Psi(\lambda) M(\lambda), \quad (2.17)$$

где антиинволюция сопряжения на Γ задается естественным образом как

$$(\lambda, \sqrt{\lambda^2 - a^2}) \rightarrow (\bar{\lambda}, \overline{\sqrt{\lambda^2 - a^2}}),$$

а $M(\lambda)$ – матричнозначная функция, не зависящая от x, t . Тогда решение уравнения (2.1), определяемое выражениями (2.13)–(2.15), будет вещественным.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пусть функция $\Psi(\lambda)$ удовлетворяет условиям (2.7)–(2.12) и определяет решение $\vec{S}(x, t)$, тогда функция

$$\Psi_\gamma(\lambda) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \gamma^{-1} \end{pmatrix} \Psi(\lambda), \quad \gamma = \text{const} \in \mathbb{C}, \quad (2.18)$$

также удовлетворяет обобщенной задаче Римана. Соответствующее ей решение \vec{S}_γ уравнения (2.1) отличается от \vec{S} (рассматриваются только вещественные решения, $|\gamma| = 1$) простым поворотом осей 1 и 2 в плоскости этих осей (плоскости, перпендикулярной оси анизотропии 3). Очевидно, что с физической точки зрения решения \vec{S} и \vec{S}_γ эквивалентны. Далее, функция $\Psi_\varphi(\lambda) = \varphi(x, t) \Psi(\lambda)$, где $\varphi(x, t)$ – произвольная скалярная функция переменных x и t , также удовлетворяет задаче Римана. Соответствующие решения уравнения (2.1) совпадают: $\vec{S}_\varphi(x, t) = \vec{S}(x, t)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Существуют некоторые априорные ограничения на матрицы $\sigma(\lambda)$ и $M(\lambda)$, входящие в редукционные тождества (2.11) и (2.17). В частности, применяя к $\Psi(\lambda)$ последовательно два преобразования (2.11), приходим к соотношению

$$\sigma(\lambda) \sigma(\lambda^\tau) \equiv I; \quad (2.19)$$

применяя к $\Psi(\lambda)$ последовательно два преобразования (2.17), приходим к соотношению

$$M(\lambda) \overline{M(\bar{\lambda})} \equiv -I; \quad (2.20)$$

применяя к $\Psi(\lambda)$ последовательно преобразования (2.11) и (2.17) – к соотношению

$$\sigma(\lambda) M(\lambda^\tau) + M(\lambda) \overline{\sigma(\bar{\lambda})} = 0. \quad (2.21)$$

3. ВНЕШНЕЕ ПОЛЕ

Хорошо известно, что однородное внешнее поле, направленное по оси анизотропии (в нашем случае это ось 3), не нарушает интегрируемости системы. В этом разделе мы построим некоторое обобщение отвечающей уравнению (1.1) задачи Римана, которая сформулирована в разделе 2. $X X Z$ -уравнение ЛЛ с внешним полем, направленным по оси анизотропии, будет погружаться в предлагаемую модель.

ТЕОРЕМА 2. Пусть функция $\Psi(\lambda, x, t)$ удовлетворяет свойствам 1–4 задачи Римана и условию нормировки

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \ln \Psi_{1i}(a) &= \frac{\partial}{\partial x} \ln \Psi_{2k}(-a) + i \frac{\partial}{\partial x} f(x, t), \\ \frac{\partial}{\partial t} \ln \Psi_{1j}(a) &= \frac{\partial}{\partial t} \ln \Psi_{2l}(-a) + i \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) \end{aligned} \quad (3.1)$$

для некоторых индексов i, j, k, l . Тогда логарифмические производные $\Psi_x \Psi^{-1}$, $\Psi_t \Psi^{-1}$ с точностью до слагаемых, пропорциональных единичной матрице, равны соответственно

$$U_f = U + \frac{i}{2} \sigma_3 \frac{\partial f}{\partial x}, \quad V_f = V + \frac{i}{2} \sigma_3 \frac{\partial f}{\partial t},$$

где U и V – матрицы (2.4). Уравнение Захарова–Шабата (2.2) для U_f и V_f приводит к уравнению

$$\vec{S}_t = [\vec{S} \times \vec{S}_{xx}] + [\vec{S} \times \tilde{J}\vec{S}] + [\vec{S} \times \vec{H}] - 2\vec{S}_x S_3 \frac{\partial f}{\partial x}, \quad (3.2)$$

где

$$\tilde{J} = \text{diag} \left(0, 0, \varepsilon + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 \right), \quad \vec{H} = \left(0, 0, \frac{\partial f}{\partial t} \right).$$

Частный случай уравнения (3.2) является физически интересным, он описывает нелинейную динамику ферромагнетика во внешнем однородном магнитном поле $\vec{H}(t)$, произвольным образом зависящем от t .

СЛЕДСТВИЕ 1. Если $f(x, t) = \int^t H(s) ds$ зависит только от t , то такой задаче Римана отвечает уравнение

$$\vec{S}_t = [\vec{S} \times \vec{S}_{xx}] + [\vec{S} \times J\vec{S}] + [\vec{S} \times \vec{H}], \quad \vec{H} = (0, 0, H(t)). \quad (3.3)$$

Из следствия 1 вытекает элементарная процедура построения решений уравнения (3.3) по решениям уравнения (2.1).

СЛЕДСТВИЕ 2. Если решение уравнения ЛЛ (2.1) $\vec{S}(x, t) = (S_1, S_2, S_3)$ выражается через A, B, C, D с помощью формул (2.15), то величины

$$A_f = A \exp \left(\int^t H(s) ds \right), \quad B_f = B \exp \left(\int^t H(s) ds \right), \quad C_f = C, \quad D_f = D$$

с помощью тех же формул (2.15) определяют функцию $\vec{S}_f(x, t)$, являющуюся решением уравнения (3.3).

Разумеется, этот чисто алгебраический факт можно проверить и непосредственно. Очевидно, что решение \vec{S}_f будет вещественным, если вещественны \vec{S} и $H(t)$.

4. ПРОЦЕДУРА ОДЕВАНИЯ. ОБЩАЯ СХЕМА

Нам удобно начать этот раздел с доказательства одного вспомогательного утверждения [19].

ЛЕММА 1. Пусть $\Psi(\lambda)$ – (2×2) -матричная функция, голоморфная в окрестности некоторой точки $\lambda = a$, являющейся простым нулем $\det \Psi(\lambda)$. Тогда для матрицы $\Psi(\lambda)$ в окрестности точки a справедливо представление вида (2.8), в котором $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. При этом в качестве C можно взять любую обратимую матрицу такую, что первый столбец матрицы C^{-1} принадлежит $\ker \Psi(a)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть C и T такие, как описано в лемме. Утверждение леммы эквивалентно голоморфности и матричной обратимости функции

$$\widehat{\Psi}(\lambda) = \Psi(\lambda)C^{-1}(\lambda - a) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

в некоторой окрестности точки a . Пусть $C^{-1} = (X, Y)$. Тогда (в силу $\Psi(a)X = 0$)

$$\begin{aligned} \widehat{\Psi}(\lambda) &= \Psi(\lambda)(X, Y) \begin{pmatrix} (\lambda - a)^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{\lambda - a} \Psi(\lambda)X, \Psi(\lambda)Y \right) = \\ &= \left(\frac{1}{\lambda - a} [\Psi(a)X + \Psi'(a)X(\lambda - a) + \dots], \Psi(a)Y + (\lambda - a)\Psi'(a)Y + \dots \right) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda - a)^k \Psi_k, \end{aligned}$$

следовательно, функция $\widehat{\Psi}(\lambda)$ голоморфна в окрестности точки a . После установления голоморфности функции $\widehat{\Psi}(\lambda)$ ее матричная обратимость следует из того, что ноль $\det \Psi(\lambda)$ в точке a простой. Лемма доказана.

Пусть теперь $\Psi_0(\lambda, x, t)$ – функция, удовлетворяющая всем условиям теоремы 1 и приводящая тем самым к некоторому решению $\vec{S}_0(x, t)$ уравнения ЛЛ. Отвечающие Ψ_0 данные обобщенной задачи Римана обозначим через

$$\Lambda_0 = \{a_1^0, \dots, a_N^0, T_1^0, \dots, T_N^0, C_1^0, \dots, C_N^0, \mathcal{L}_1^0, \dots, \mathcal{L}_N^0, G_1^0(\lambda), \dots, G_M^0, m^0\}.$$

Мы хотим по функции Ψ_0 явным образом построить новую функцию $\Psi(\lambda, x, t)$, удовлетворяющую тем же условиям 1–5 задачи Римана, но с новым набором данных $\Lambda = \Lambda_0 \oplus \Lambda'$ и тем самым по известному решению $\vec{S}_0(x, t)$ уравнения ЛЛ построить его новое решение. Будем искать функцию Ψ в виде

$$\Psi(\lambda, x, t) = f(\lambda, x, t)\Psi_0(\lambda, x, t), \quad (4.1)$$

где f – (2×2) -матричная функция, мероморфная на Γ , с простыми полюсами в точках $\infty^{1,2}$ в качестве единственных особенностей. Потребуем от f выполнения соотношения

$$\sigma_3 f(\lambda^\tau) \sigma_3 = f(\lambda). \quad (4.2)$$

Данное равенство вместе с указанными условиями для особенностей функции $f(\lambda)$ приводит к следующему представлению для нее:

$$f(\alpha) = \sum_{\alpha=1}^3 q_\alpha w_\alpha(\alpha) \sigma_\alpha + (q_0 \lambda + p_0)I + p_3 \sigma_3, \quad (4.3)$$

где скалярные функции $q_\alpha(x, t)$ и $p_\alpha(x, t)$ еще подлежат определению. Для их фиксации зададим точки $\lambda_1, \lambda_2 \notin \{a_1^0, \dots, a_N^0\} \cup \{a, -a\}$ и два комплексных числа A_1, A_2 . Положим

$$\Psi(\lambda_j) \begin{pmatrix} 1 \\ A_j \end{pmatrix} = 0, \quad j = 1, 2, \quad p_3 = -aq_0. \quad (4.4)$$

Эти соотношения представляет собой линейную однородную алгебраическую систему из пяти уравнений относительно шести неизвестных (величин q_α и p_α). Решая эту систему, находим интересующие нас функции $q_\alpha(x, t)$, $p_\alpha(x, t)$ с точностью до общего функционального множителя. Этот произвол в силу замечания 2 в конце раздела 1 для нас уже не является существенным.

ТЕОРЕМА 3. *Функция $\Psi(\lambda, x, t)$, определяемая формулами (4.1), (4.3) и (4.4), удовлетворяет всем условиям теоремы 1. Отвечающие ей данные обобщенной задачи Римана отличаются от исходных данных Λ_0 тем, что количество регулярных особых точек увеличивается на четыре,*

$$\{a_1^0, \dots, a_N^0\} \rightarrow \{a_1^0, \dots, a_N^0\} \oplus \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1^\tau, \lambda_2^\tau\},$$

и сдвигом $m^0 \rightarrow m^0 + I$ матрицы m^0 на единичную. Соответствующее (комплексное) решение $\vec{S}(x, t)$ уравнения ЛЛ¹⁾ связано с затравочным решением $\vec{S}_0(x, t)$:

$$S = QS_0Q^{-1}, \quad Q = \sum_{\alpha=1}^3 q_\alpha \sigma_\alpha + q_0 I. \quad (4.5)$$

Доказательству теоремы 3 предположим доказательство следующей леммы.

ЛЕММА 2. *Нули функции $\det f(\lambda)$ как функции на Γ являются простыми и расположены в точках $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1^\tau$ и λ_2^τ . Во всех этих точках для функции $\Psi(\lambda)$ справедливо представление вида (2.8) с не зависящими от x и t матрицами T и C .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу формулы (4.3) функция $\det f(\lambda)$ имеет на Γ два полюса второго порядка в точках $\infty^{1,2}$. Поэтому у нее должно быть четыре нуля. Первые два векторных равенства в (4.4) говорят о том, что среди этих нулей обязательно должны быть точки λ_1 и λ_2 . Наряду с точками λ_1, λ_2 , нулями $\det f(\lambda)$ обязательно будут точки λ_1^τ и λ_2^τ , это следует из редукционного тождества (4.2). Наконец, последнее утверждение леммы есть непосредственное следствие леммы 1 и того факта, что из равенства (4.2) вытекает справедливость для $\Psi(\lambda)$ редукционного равенства (2.11) с той же матрицей $\sigma_0(\lambda)$, что и для затравочной функции $\Psi_0(\lambda)$. Матрицы T и C , отвечающие точкам $\lambda_j, \lambda_j^\tau$, суть следующие:

для λ_j

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -A_j & 1 \end{pmatrix};$$

для λ_j^τ

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -A_j & 1 \end{pmatrix} \sigma_0.$$

На этом доказательство леммы заканчивается.

¹⁾Мы применяем обозначения \vec{S} для вектора (S_1, S_2, S_3) и S для матрицы $\sum_{\alpha=1}^3 S_\alpha \sigma_\alpha$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. В силу леммы 2 функция $f(\lambda)$ во всех “старых” регулярных особых точках a_j^0 голоморфна и матрично обратима. Поэтому умножение функции $\Psi_0(\lambda)$ слева на функцию $f(\lambda)$ не портит ее поведения в точках a_j^0 – для функции $\Psi(\lambda)$ в этих точках остается справедливым соотношение (2.8) с теми же матрицами T_j^0 и C_j^0 . То же самое относится и к условиям сопряжения на “старых” контурах \mathcal{L}_j , в то время как новых линий разрыва возникнуть, очевидно, не может.

Далее, асимптотическое условие (2.7) выполняется для функции $\Psi(\lambda)$ с матрицей $m = m^0 + I$, и, как уже отмечалось при доказательстве леммы 2, редуцированное тождество (2.11) выполняется с матрицей $\sigma(\lambda) = \sigma_0(\lambda)$. Единственными новыми особенностями функции $\Psi(\lambda)$ являются нули ее детерминанта в точках $\lambda_j, \lambda_j^\tau, j = 1, 2$. Но в силу леммы 2 в этих точках гарантируется нужное представление (2.8) с не зависящими от x и t матрицами T и C . Тем самым все условия теоремы 1 для функции $\Psi(\lambda)$ проверены, кроме последнего, условия нормировки (2.12). Покажем, что оно следует из скалярного уравнения $p_3 = -aq_0$ системы (4.4). В самом деле, так как для затравочной функции $\Psi_0(x, t, \lambda)$ условия (2.12) выполняются, при некоторых k, l и j, r верны равенства

$$\begin{aligned} (\Psi_0)_{1k}(a) &= \alpha(\Psi_0)_{2l}(-a), & \alpha_x &= 0, \\ (\Psi_0)_{1j}(a) &= \beta(\Psi_0)_{2r}(-a), & \beta_t &= 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Матрица $f(\lambda)$ (при $\lambda = \pm a$) имеет диагональный вид. Равенство $p_3 = -aq_0$ эквивалентно соотношению $f_{11}(a) = f_{22}(-a)$. Поэтому при тех же k, l и j, r , что и в (4.6), имеем

$$\Psi_{1k}(a) = f_{11}(a)(\Psi_0)_{1k}(a) = \alpha f_{11}(a)(\Psi_0)_{2l}(-a) = \alpha f_{22}(-a)(\Psi_0)_{2l}(-a) = \alpha \Psi_{2l}(-a),$$

следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial x} \ln \Psi_{1k}(a) = \frac{\partial}{\partial x} \ln \Psi_{2l}(-a);$$

аналогично

$$\Psi_{1j}(a) = f_{11}(a)(\Psi_0)_{1j}(a) = \beta f_{11}(a)(\Psi_0)_{2r}(-a) = \beta f_{22}(-a)(\Psi_0)_{2r}(-a) = \beta \Psi_{2r}(-a),$$

следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln \Psi_{1j}(a) = \frac{\partial}{\partial t} \ln \Psi_{2r}(-a),$$

т. е. условия нормировки (2.12) для “одетой” функции Ψ выполняются при тех же k, l и j, r , что и для затравочной функции Ψ_0 . Теорема 3 доказана.

Заметим, что с учетом соотношения $p_3 = -aq_0$ матрицу $f(\lambda)$ можно представить в виде

$$f(\lambda) = D_1(\lambda)(Q + d_0 R(\lambda))D(\lambda), \quad (4.7)$$

где $d_0 = p_0 + aq_3$ и

$$D_1(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{\lambda+a}{\lambda-a}} \end{pmatrix}, \quad R(\lambda) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda-a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda+a} \end{pmatrix}, \quad D(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda - a & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda^2 - a^2} \end{pmatrix}.$$

Векторные уравнения системы (4.4) переписываются тогда следующим образом:

$$QX_j = -d_0 R(\lambda_j) X_j, \quad j = 1, 2, \quad (4.8)$$

где

$$\vec{X}_j = D(\lambda_j) \Psi_0(\lambda_j) \begin{pmatrix} 1 \\ A_j \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

Будем считать, что две матричные функции X и Y связаны соотношением $X \cong Y$, если существует такая скалярная функция $d(x, t)$, что $X = dY$. Тогда из уравнений (4.8) для матрицы Q , непосредственно участвующей в переходе (4.5) от старого решения \vec{S}_0 к новому решению \vec{S} , получается явное представление через затравочную функцию $\Psi_0(\lambda)$ и параметры преобразования (λ_j, A_j) :

$$Q \cong VW^{-1}, \quad W = (\vec{X}_1, \vec{X}_2), \quad V = (R(\lambda_1)\vec{X}_1, R(\lambda_2)\vec{X}_2). \quad (4.10)$$

Как отмечалось в разделе 1, уравнение ЛЛ в комплексном случае сохраняется при калибровочном преобразовании

$$S \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} S \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta^{-1} \end{pmatrix}, \quad \delta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Поэтому можно сказать, что, фиксируя значения λ_j, A_j , мы выделяем не одно решение уравнения ЛЛ, а целый калибровочный класс. Каждый представитель этого класса характеризуется своим значением параметра δ и описывается функцией

$$S = Q_\delta S_0 Q_\delta^{-1}, \quad Q_\delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} Q. \quad (4.11)$$

В дальнейшем нас особенно будут интересовать решения, отвечающие следующему специальному значению параметра δ :

$$\delta = \delta_0 \equiv \sqrt{\frac{(\lambda_1 + a)(\lambda_2 + a)}{(\lambda_1 - a)(\lambda_2 - a)}}.$$

Для соответствующей матрицы $Q_0 \equiv Q_{\delta_0}$ развернутая запись представления

$$Q_\delta \cong \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} VW^{-1}$$

имеет наиболее симметричный вид:

$$Q_0 \cong \begin{pmatrix} \alpha_1 \beta_2 \sqrt{\lambda_2^2 - a^2} - \alpha_2 \beta_1 \sqrt{\lambda_1^2 - a^2} & \alpha_1 \alpha_2 (\lambda_1 - \lambda_2) \\ \beta_1 \beta_2 (\lambda_2 - \lambda_1) & \alpha_1 \beta_2 \sqrt{\lambda_1^2 - a^2} - \alpha_2 \beta_1 \sqrt{\lambda_2^2 - a^2} \end{pmatrix}, \quad (4.12)$$

где введены обозначения

$$\begin{pmatrix} \alpha_j \\ \beta_j \end{pmatrix} \equiv \Psi_0(\lambda_j) \begin{pmatrix} 1 \\ A_j \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2. \quad (4.13)$$

Соответствующее решение уравнения ЛЛ и отвечающая ему функция Ψ суть

$$S = Q_0 S_0 Q_0^{-1}, \quad (4.14)$$

$$\Psi(\lambda) \cong D_1(\lambda) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta_0 \end{pmatrix} (VW^{-1} - R(\lambda)) D(\lambda) \Psi_0(\lambda). \quad (4.15)$$

Этими формулами мы заканчиваем описание процедуры одевания в комплексном случае и переходим к обсуждению тех условий на параметры (λ_j, A_j) , которые обеспечивают в преобразовании (4.12)–(4.14) сохранение вещественности вектора \vec{S} .

Заметим прежде всего, что для вещественности \vec{S} достаточно добиться выполнения соотношения

$$\sigma_2 \bar{Q}_0 \sigma_2 \cong Q_0. \quad (4.16)$$

В самом деле, вещественность \vec{S} эквивалентна выполнению равенства $\sigma_2 \bar{S} \sigma_2 = -S$. По предположению для \vec{S}_0 это равенство выполняется. Поэтому из (4.16) имеем

$$\sigma_2 \bar{S} \sigma_2 = \sigma_2 \bar{Q}_0 \bar{S}_0 \bar{Q}_0^{-1} \sigma_2 = Q_0 \sigma_2 \bar{S}_0 \sigma_2 \bar{Q}_0^{-1} = -Q S_0 Q^{-1} = -S.$$

Рассмотрим теперь непосредственно условия вещественности.

ТЕОРЕМА 4. Пусть затравочное решение \vec{S}_0 вещественно, и, следовательно, затравочная функция Ψ_0 удовлетворяет тождеству (2.17) с некоторой матрицей $M = M_0$. Тогда соотношение (4.16) имеет место в следующих двух случаях:

а) если $\text{Im } \lambda_j \neq 0$, $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$ и

$$\det \left(M_0(\lambda_1) \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{A}_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ A_1 \end{pmatrix} \right) = 0; \quad (4.17)$$

б) если $a = \bar{a}$ (легкая плоскость), $\text{Im } \lambda_j = 0$, $|\lambda_j| < a$ и

$$\det \left(\sigma_0(\lambda_j) M_0(\lambda_j^*) \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{A}_j \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ A_j \end{pmatrix} \right) = 0, \quad (4.18)$$

где $\sigma_0(\lambda)$ – матрица $\sigma(\lambda)$, участвующая в редукционном тождестве (2.11) для функции Ψ_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Начнем со случая “а”. Равенство (4.17) означает, что векторы

$$M_0(\lambda_1) \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{A}_2 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ A_1 \end{pmatrix}$$

пропорциональны. Вспоминая априорное тождество $\bar{M}(\bar{\lambda}) M(\lambda) = -I$, убеждаемся в том, что коллинеарны также и векторы

$$M_0(\lambda_2) \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{A}_1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ A_2 \end{pmatrix}.$$

Мы имеем

$$M_0(\lambda_1) \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{A}_2 \end{pmatrix} = \varkappa \begin{pmatrix} 1 \\ A_1 \end{pmatrix}, \quad - \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{A}_2 \end{pmatrix} = \varkappa \bar{M}_0(\bar{\lambda}_1) \begin{pmatrix} 1 \\ A_1 \end{pmatrix}, \quad M_0(\lambda_2) \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{A}_1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{\varkappa} \begin{pmatrix} 1 \\ A_2 \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\sigma_2 \bar{\Psi}_0(\lambda_2) \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{A}_2 \end{pmatrix} &= \Psi_0(\lambda_1) M_0(\lambda_1) \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{A}_2 \end{pmatrix} = \varkappa \Psi_0(\lambda_1) \begin{pmatrix} 1 \\ A_1 \end{pmatrix}, \\ \sigma_2 \bar{\Psi}_0(\lambda_1) \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{A}_1 \end{pmatrix} &= \Psi_0(\lambda_2) M_0(\lambda_2) \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{A}_1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{\varkappa} \Psi_0(\lambda_2) \begin{pmatrix} 1 \\ A_2 \end{pmatrix},\end{aligned}\quad (4.19)$$

что на языке величин α_j, β_j записывается как

$$\begin{aligned}\bar{\alpha}_1 &= \frac{i}{\varkappa} \beta_2, & \bar{\beta}_1 &= -\frac{i}{\varkappa} \alpha_2, \\ \bar{\alpha}_2 &= -i\varkappa \beta_1, & \bar{\beta}_2 &= i\varkappa \alpha_1.\end{aligned}\quad (4.20)$$

Учитывая (см. закон действия антиинволюции $\lambda \rightarrow \bar{\lambda}$ на Γ в разделе 1), что

$$\overline{\sqrt{\lambda_1^2 - a^2}} = \sqrt{\lambda_2^2 - a^2}, \quad \overline{\sqrt{\lambda_2^2 - a^2}} = \sqrt{\lambda_1^2 - a^2}.$$

Утверждение теоремы в случае “а” получаем простой проверкой непосредственно из формулы (4.12), принимая во внимание соотношения (4.20).

Переходя к случаю “б”, заметим, что $\operatorname{Re} \sqrt{\lambda_j^2 - a^2} = 0$ при заданных условиях на λ_j . Это означает, что

$$\overline{\sqrt{\lambda_j^2 - a^2}} = -\sqrt{\lambda_j^2 - a^2} = \sqrt{(\lambda_j^\tau)^2 - a^2}, \quad (4.21)$$

т. е. на точки λ_j как точки поверхности Γ антиинволюция $\lambda \rightarrow \bar{\lambda}$ действует как инволюция $\tau: \bar{\lambda}_j = \lambda_j^\tau$. Это обстоятельство как раз и учтено в условии (4.18) на параметры A_j : именно в таком виде они приводят к соотношениям, аналогичным соотношениям (4.19) предыдущего случая:

$$\begin{aligned}\sigma_2 \bar{\Psi}_0(\lambda_j) \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{A}_j \end{pmatrix} &= \Psi_0(\lambda_j^\tau) M_0(\lambda_j^\tau) \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{A}_j \end{pmatrix} = \\ &= \sigma_3 \Psi_0(\lambda_j) \sigma_0(\lambda_j) M_0(\lambda_j^\tau) \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{A}_j \end{pmatrix} = \varkappa \sigma_3 \Psi_0(\lambda_j) \begin{pmatrix} 1 \\ A_j \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Соотношения (4.20) заменяются тем самым на следующие:

$$\sigma_2 \begin{pmatrix} \bar{\alpha}_j \\ \bar{\beta}_j \end{pmatrix} = \varkappa \sigma_3 \begin{pmatrix} \alpha_j \\ \beta_j \end{pmatrix} \iff \begin{aligned}\bar{\beta}_j &= -i\varkappa \alpha_j, \\ \bar{\alpha}_j &= -i\varkappa \beta_j.\end{aligned}\quad (4.22)$$

Доказательство утверждения теоремы в случае “б” завершается снова непосредственной проверкой в формуле (4.12) с учетом первого равенства в (4.21) и соотношения (4.22). На этом завершается и доказательство самой теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Используя тождество $M(\lambda) \bar{M}(\bar{\lambda}) = -I$, можно показать, что условие вещественности запрещает в рассматриваемой нами процедуре одевания следующие две ситуации: $a = \bar{a}$ (легкая плоскость), $\operatorname{Im} \lambda_j = 0$, $|\lambda_j| > a$ и $a = -\bar{a}$ (легкая ось), $\operatorname{Im} \lambda_j = 0$. В самом деле, в обоих этих случаях точки λ_j как точки

поверхности Γ суть неподвижные точки инволюции $\lambda \rightarrow \bar{\lambda}$. Поэтому, предположив, что $\sigma_2 \bar{\Psi}(\bar{\lambda}) = \Psi(\lambda)M(\lambda)$, приходим к следующему противоречию:

$$\Psi(\lambda_j) \begin{pmatrix} 1 \\ A_j \end{pmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \bar{\Psi}(\lambda_j) \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{A}_j \end{pmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \Psi(\lambda_j)M(\lambda_j) \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{A}_j \end{pmatrix} = 0,$$

следовательно,

$$M(\lambda_j) \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{A}_j \end{pmatrix} = \varkappa \begin{pmatrix} 1 \\ A_j \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad - \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{A}_j \end{pmatrix} = \varkappa \bar{M}(\lambda_j) \begin{pmatrix} 1 \\ A_j \end{pmatrix},$$

таким образом,

$$M(\lambda_j) \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{A}_j \end{pmatrix} = -\frac{1}{\bar{\varkappa}} \begin{pmatrix} 1 \\ A_j \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad |\varkappa|^2 = -1.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Как уже отмечалось, “одетая” функция Ψ (4.15) удовлетворяет редукционному тождеству (2.11) с той же матрицей $\sigma_0(\lambda)$, что и затравочная функция $\Psi_0(\lambda)$. Как мы сейчас убедимся, аналогичное утверждение верно и для вещественной редукции (2.17). Более точно, пусть выполнены условия теоремы 4, тогда функция Ψ , отвечающая решению (4.12)–(4.14), удовлетворяет тождеству (2.17) с матрицей $M(\lambda) \cong M_0(\lambda)$. В самом деле, рассматривая наряду с функцией²⁾ $\Psi(\lambda) = f(\lambda)\Psi_0(\lambda)$ функцию $\tilde{\Psi}(\lambda) = \sigma_2 \bar{f}(\bar{\lambda})\sigma_2 \Psi_0(\lambda)$, нетрудно убедиться, что при условиях (4.17) или (4.18) обе эти функции имеют одинаковый набор данных задачи Римана (функция $\tilde{\Psi}$ удовлетворяет тем же векторным равенствам системы (4.4)). Поэтому $\tilde{\Psi}(\lambda) = \Phi\Psi(\lambda)$ и матрица Φ не зависит от λ . С другой стороны, $\tilde{\Psi}(\lambda) = \sigma_2 \bar{\Psi}(\bar{\lambda})M_0^{-1}(\lambda)$ и, следовательно,

$$\tilde{\Psi} \longleftrightarrow \tilde{S} = S \longleftrightarrow \Psi \quad \Longrightarrow \quad S = \Phi S \Phi^{-1}. \quad (4.23)$$

Далее, функции $\tilde{\Psi}$ и Ψ удовлетворяют редукционному тождеству (2.11) с одной и той же матрицей $\sigma_0(\lambda)$. Поэтому

$$\sigma_3 \Phi \sigma_3 = \Phi \quad \Longleftrightarrow \quad \Phi = \text{diag}(c, d).$$

Сопоставляя последнее соотношение с (4.23), приходим немедленно к выводу, что $c = d$, т. е. $\Phi = cI$, следовательно,

$$\sigma_2 \bar{\Psi}(\bar{\lambda}) = c\Psi(\lambda)M_0(\lambda),$$

что эквивалентно $M(\lambda) \cong M_0(\lambda)$.

5. ПРОЦЕДУРА ОДЕВАНИЯ. СОЛИТОННЫЕ РЕШЕНИЯ

Простейшим применением предложенной в предыдущем разделе схемы является одевание двух типов “вакуумных” Ψ -функций:

$$\Psi_0(\lambda, x, t) = e^{-i\sigma_3 \lambda x + 2i\sigma_3(\lambda^2 - a^2)t}, \quad \vec{S}_0 = (0, 0, 1), \quad (5.1a)$$

$$\Psi_0(\lambda, x, t) = e^{-i\sigma_1 \sqrt{\lambda^2 - a^2}(x - 2\lambda t)}, \quad \vec{S}_0 = (1, 0, 0). \quad (5.1б)$$

²⁾Множитель $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta_0 \end{pmatrix}$ мы включаем в $f(\lambda)$.

Как уже отмечалось в разделе 1, получающиеся при этом решения, возможно, включают в себя все ранее известные решения уравнения ЛЛ, выражающиеся в элементарных функциях. Отметим также еще раз, что авторы не претендуют в этом разделе на получение каких-либо новых физических результатов. Единственная наша цель здесь методологическая: подтвердить простотой описания и широтой охвата ранее известных эффектов адекватность развиваемого нами подхода. В связи с этим авторы, полагая все изложенные ниже факты хорошо известными специалистам по теории ферромагнетизма, позволят себе опустить многочисленные приоритетные ссылки, которые читатель при необходимости может восстановить по обзору [9].

Нам удобно ввести следующую “нефизическую” условную терминологию. Решения уравнения ЛЛ, получающиеся в результате однократного применения процедуры одевания (4.12)–(4.14) к затравочному решению (5.1а), мы будем называть S_3 -солитонами, а решения, получающиеся аналогичным образом из затравочного решения (5.1б) – S_1 -солитонами.

5.1. S_3 -солитоны. Для затравочного решения (5.1а) матрицы $\sigma_0(\lambda)$ и $M_0(\lambda)$ таковы:

$$\sigma_0(\lambda) \equiv \sigma_3, \quad M_0(\lambda) \equiv \sigma_2.$$

Теорема 4 приводит тогда к двум типам условий на параметры (λ_j, A_j) :

$$\lambda_1 = \bar{\lambda}_2 \equiv \mu, \quad \text{Im } \mu > 0, \quad A_1 = -\frac{1}{A_2} \equiv A, \quad A \in \mathbb{C} \setminus \{0\}; \quad (5.2a)$$

$$\text{Im } \lambda_j = 0, \quad |\lambda_j| < a, \quad A_j = e^{2i\varphi_j}, \quad \varphi_j \in \mathbb{R}, \quad j = 1, 2 \quad (5.2b)$$

(второй тип возможен только при $a = \bar{a}$). Соответственно условиям (5.2а) и (5.2б) имеем для матрицы Q_0 (см. (4.12))

$$Q_0 \cong \begin{pmatrix} \sqrt{\bar{\mu}^2 - a^2} + |E|^2 \sqrt{\mu^2 - a^2} & (\bar{\mu} - \mu)\bar{E} \\ E(\bar{\mu} - \mu) & \sqrt{\mu^2 - a^2} + |E|^2 \sqrt{\bar{\mu}^2 - a^2} \end{pmatrix}, \quad (5.3a)$$

$$Q_0 \cong \begin{pmatrix} i\sqrt{a^2 - \lambda_2^2}E_1 - i\bar{E}_1\sqrt{a^2 - \lambda_1^2} & \bar{E}_2(\lambda_1 - \lambda_2) \\ E_2(\lambda_2 - \lambda_1) & iE_1\sqrt{a^2 - \lambda_1^2} - i\bar{E}_1\sqrt{a^2 - \lambda_2^2} \end{pmatrix}, \quad (5.3b)$$

где

$$\begin{aligned} E(x, t) &= Ae^{2i\mu x - 4i(\mu^2 - a^2)t}, \\ E_1(x, t) &= e^{i(\lambda_2 - \lambda_1)x - 2i(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)t + \varphi_2 - \varphi_1}, \\ E_2(x, t) &= e^{i(\lambda_1 + \lambda_2)x - 2i(\lambda_2^2 + \lambda_1^2 - 2a^2)t + \varphi_2 + \varphi_1}. \end{aligned}$$

Подставляя (5.3а) и (5.3б) в (4.14), мы получаем следующие явные формулы для двух типов S_3 -солитонов (второй тип возможен лишь в случае легкой плоскости):

для матрицы Q_0 из (5.3а)

$$\begin{aligned}
S_3(x, t) &= 1 - \frac{4\eta^2}{|\mu|^2 - a^2 + |\mu^2 - a^2| \operatorname{ch} 2\beta(x, t)}, \\
S_1 - iS_2 &= 4i\eta\sqrt{|\mu^2 - a^2|} \frac{e^{-i\theta(x, t)} (\cos \varphi \operatorname{ch} \beta(x, t) - i \sin \varphi \operatorname{sh} \beta(x, t))}{|\mu|^2 - a^2 + |\mu^2 - a^2| \operatorname{ch} 2\beta(x, t)}, \\
\mu &= \xi + i\eta, \quad \varphi = \frac{1}{2} \arg(\mu^2 - a^2), \\
\beta(x, t) &= 2\eta(x - 4\xi t) - \ln |A|, \\
\theta(x, t) &= 2\xi x - 4(\xi^2 - \eta^2 - a^2)t + \arg A;
\end{aligned} \tag{5.4а}$$

для матрицы Q_0 из (5.3б)

$$\begin{aligned}
S_1(x, t) &= S_1^0(x, t) \cos \theta_2(x, t) - S_2^0(x, t) \sin \theta_2(x, t), \\
S_2(x, t) &= S_1^0(x, t) \sin \theta_2(x, t) + S_2^0(x, t) \cos \theta_2(x, t), \\
S_3(x, t) &= 1 + \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{\sqrt{(a^2 - \lambda_1^2)(a^2 - \lambda_2^2)} \cos 2\theta_1(x, t) + \lambda_1 \lambda_2 - a^2}, \\
\theta_1(x, t) &= (\lambda_2 - \lambda_1)(x - 2(\lambda_2 + \lambda_1)t) + \varphi_2 - \varphi_1, \\
\theta_2(x, t) &= (\lambda_1 + \lambda_2)(x - 2(\lambda_2 + \lambda_1)t) + 4(a^2 + \lambda_1 \lambda_2)t + \varphi_2 + \varphi_1, \\
S_1^0(x, t) &= (\lambda_2 - \lambda_1) \sin \theta_1(x, t) \frac{\sqrt{a^2 - \lambda_1^2} + \sqrt{a^2 - \lambda_2^2}}{\sqrt{(a^2 - \lambda_1^2)(a^2 - \lambda_2^2)} \cos 2\theta_1(x, t) + \lambda_1 \lambda_2 - a^2}, \\
S_2^0(x, t) &= (\lambda_2 - \lambda_1) \cos \theta_1(x, t) \frac{\sqrt{a^2 - \lambda_1^2} + \sqrt{a^2 - \lambda_2^2}}{\sqrt{(a^2 - \lambda_1^2)(a^2 - \lambda_2^2)} \cos 2\theta_1(x, t) + \lambda_1 \lambda_2 - a^2}.
\end{aligned} \tag{5.4б}$$

Решение (5.4а) представляет собой уединенную волну, движущуюся со скоростью $v = 4\xi$. Движение сопровождается равномерным вращением вектора \vec{S} в плоскости (S_1, S_2) с частотой

$$\omega = 4\xi^2 + 4\eta^2 + 4a^2 \equiv 4|\mu|^2 + 4a^2. \tag{5.5}$$

Скорость v и частота ω являются двумя независимыми физическими параметрами, которые вместе с начальным положением $x_0 = (\ln |A|)/2\eta$ и начальной фазой вращения $\theta_0 = \arg A$ однозначно характеризуют рассматриваемое солитонное решение. Заметим, что в случае легкой плоскости $a^2 > 0$ вращение вектора \vec{S} всегда имеет место, в то время как в случае легкой оси вращение может отсутствовать (уединенная спиновая волна). Условие отсутствия вращения имеет вид $\xi^2 + \eta^2 = -a^2$. Таким образом, максимальная скорость, с которой могут двигаться уединенные спиновые волны, равна $4\sqrt{-a^2}$. При превышении этого значения должно возникнуть вращение вектора \vec{S} в плоскости (S_1, S_2) .

Решение (5.4б) представляет собой бегущую периодическую волну с фазовой скоростью $v_\Phi = 2(\lambda_1 + \lambda_2)$. Так же как и в случае (5.4а), имеется вращение в плоскости (S_1, S_2) с частотой $\Omega = 4(a^2 + \lambda_1 \lambda_2)$. Поскольку $|\lambda_j| < a$, избежать вращения нельзя. Отметим еще раз, что этот тип решений возможен лишь в случае легкой плоскости. Укажем на следующее любопытное обстоятельство: S_3 -компонента решения (5.4б) может быть формально получена из компоненты S_3 решения (5.4а), если в последней

положить

$$\eta = i \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}, \quad \xi = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}. \quad (5.6)$$

Более того, при этих условиях частота ω переходит в частоту Ω . Таким образом, опираясь только на информацию о третьей компоненте вектора \vec{S} и частоте вращения в плоскости (S_1, S_2) , мы могли бы прийти к неверному заключению о возможности существования периодических по x и t решений типа (5.4б) и в случае легкой оси. Имея же в руках полный набор формул (5.4а), мы этой опасности избегаем – первые две компоненты вектора \vec{S} становятся мнимыми при условиях (5.6).

Формулы (5.4) показывают, что S_3 -солитоны включают в себя также решения бризерного типа (неподвижные, осциллирующие во времени образования):

при $\xi = 0$

$$\begin{aligned} S_1(x, t) &= 4\eta \sqrt{|\eta^2 + a^2|} \frac{\operatorname{ch} 2\eta(x - x_0) \sin(4(\eta^2 + a^2)t + \theta_0)}{\eta^2 - a^2 + |\eta^2 + a^2| \operatorname{ch} 4\eta(x - x_0)}, \\ S_2(x, t) &= -4\eta \sqrt{|\eta^2 + a^2|} \frac{\operatorname{ch} 2\eta(x - x_0) \cos(4(\eta^2 + a^2)t + \theta_0)}{\eta^2 - a^2 + |\eta^2 + a^2| \operatorname{ch} 4\eta(x - x_0)}, \\ S_3(x, t) &= 1 - \frac{4\eta^2}{\eta^2 - a^2 + |\eta^2 + a^2| \operatorname{ch} 4\eta(x - x_0)}; \end{aligned} \quad (5.7)$$

при $\lambda_1 = -\lambda_2 \equiv \lambda_0$, $|\lambda_0| < a$

$$\begin{aligned} S_1(x, t) &= -4\lambda_0 \sqrt{a^2 - \lambda_0^2} \frac{\sin(2\lambda_0 x + \theta_1) \cos(4(a^2 - \lambda_0^2)t + \theta_2)}{(a^2 - \lambda_0^2) \cos(4\lambda_0 x + 2\theta_1) - \lambda_0^2 - a^2}, \\ S_2(x, t) &= 4\lambda_0 \sqrt{a^2 - \lambda_0^2} \frac{\sin(2\lambda_0 x + \theta_1) \sin(4(a^2 - \lambda_0^2)t + \theta_2)}{(a^2 - \lambda_0^2) \cos(4\lambda_0 x + 2\theta_1) - \lambda_0^2 - a^2}, \\ S_3(x, t) &= 1 + \frac{4\lambda_0^2}{(a^2 - \lambda_0^2) \cos(4\lambda_0 x + 2\theta_1) - \lambda_0^2 - a^2}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

При всех значениях параметров $\mu \neq a$ и $A \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ формулы (5.4а) описывают решения уравнения ЛЛ, характеризующиеся следующим поведением при больших $|x|$:

$$\vec{S} \rightarrow (0, 0, 1), \quad |x| \rightarrow \infty. \quad (5.9)$$

Однако в случае легкой оси существует такой предельный переход для параметров μ , A , что условие (5.9) нарушается. Положим, считая $a = -\bar{a}$,

$$\begin{aligned} |A|^2 &= -\frac{1}{4\gamma a^2} |\mu^2 - a^2|, \quad \gamma > 0, \\ \arg A &= -\frac{1}{2} \arg(\mu^2 - a^2) + \psi, \quad \psi \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

и устремим μ к a . Формулы (5.4а) перейдут тогда в формулы

$$S_1(x, t) = \frac{\sin \psi}{\operatorname{ch}(2|a|x + \Delta)}, \quad S_2(x, t) = \frac{-\cos \psi}{\operatorname{ch}(2|a|x + \Delta)}, \quad S_3(x, t) = \operatorname{th}(2|a|x + \Delta), \quad (5.10)$$

где $\Delta = (\ln \gamma)/2$. Это решение представляет собой классическую “доменную стенку”. При $x \rightarrow \pm\infty$ мы имеем $\vec{S} \rightarrow (0, 0, \pm 1)$.

В разделе 5 нам потребуются выражения для матрицы Q_0 и функции Ψ , отвечающие решению (5.10). Соответствующие формулы легко получаются в результате предельного перехода в формулах (5.3б) и (4.15) и имеют вид

$$Q_0 \cong \begin{pmatrix} -\sqrt{\gamma}c_0 e^{2|a|x+i\psi} & i \\ ic_0 e^{2i\psi} & -\sqrt{\gamma}e^{2|a|x+i\psi} \end{pmatrix}, \quad (5.11)$$

$$\Psi(\lambda) = D_1(\lambda)Q_0D(\lambda)\Psi_0(\lambda), \quad c_0 = \lim_{\mu \rightarrow a} \sqrt{\frac{\bar{\mu}^2 - a^2}{\mu^2 - a^2}}. \quad (5.12)$$

5.2. S_1 -солитоны. Так как

$$e^{-i\sigma_1 \sqrt{\lambda^2 - a^2}(x-2\lambda t)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} e^{-i\sigma_3 \sqrt{\lambda^2 - a^2}(x-2\lambda t)} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

в качестве Ψ_0 можно взять (и это оказывается удобно) функцию

$$\Psi_0(\lambda, x, t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} e^{-i\sigma_3 \sqrt{\lambda^2 - a^2}(x-2\lambda t)}.$$

Соответствующие матрицы $\sigma_0(\lambda)$ и $M_0(\lambda)$ суть

$$\sigma_0(\lambda) \equiv \sigma_1, \quad M_0(\lambda) \equiv -\sigma_2,$$

а два типа условий вещественности таковы:

$$\lambda_1 = \bar{\lambda}_1 \equiv \mu, \quad \text{Im } \mu > 0, \quad A_1 = -\frac{1}{A_2} \equiv A, \quad A \in \mathbb{C} \setminus \{0\}; \quad (5.13a)$$

$$\text{Im } \lambda_j = 0, \quad |\lambda_j| < a, \quad A_j = -\bar{A}_j, \quad j = 1, 2 \quad (5.13б)$$

(второй тип условий требует $a = \bar{a}$).

Из представления (4.12) для матрицы Q_0 в случаях (5.13a) и (5.13б) имеем соответственно

$$Q_0 \cong \begin{pmatrix} C_+ \sqrt{\bar{\mu}^2 - a^2} + C_- \sqrt{\mu^2 - a^2} & S_+(\bar{\mu} - \mu) \\ S_-(\bar{\mu} - \mu) & C_+ \sqrt{\mu^2 - a^2} + C_- \sqrt{\bar{\mu}^2 - a^2} \end{pmatrix}, \quad (5.14a)$$

$$C_{\pm} = \text{ch } \beta(x, t) \pm \cos \theta(x, t), \quad S_{\pm} = -\text{sh } \beta(x, t) \pm i \sin \theta(x, t),$$

$$\beta(x, t) = \text{Re}(2i\sqrt{\mu^2 - a^2}(x - 2\mu t)) + \ln |A|,$$

$$\theta(x, t) = \text{Im}(2i\sqrt{\mu^2 - a^2}(x - 2\mu t)) + \arg A;$$

$$Q_0 \cong \begin{pmatrix} i\tilde{E}_1^+ \tilde{E}_2^- \sqrt{a^2 - \lambda_2^2} - i\tilde{E}_2^+ \tilde{E}_1^- \sqrt{a^2 - \lambda_1^2} & \tilde{E}_1^+ \tilde{E}_2^+(\lambda_1 - \lambda_2) \\ \tilde{E}_1^- \tilde{E}_2^-(\lambda_2 - \lambda_1) & i\tilde{E}_1^+ \tilde{E}_2^- \sqrt{a^2 - \lambda_1^2} - i\tilde{E}_2^+ \tilde{E}_1^- \sqrt{a^2 - \lambda_2^2} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{E}_j^{\pm} = 1 \pm E_j(x, t), \quad E_j(x, t) = i\gamma_j e^{-2\sqrt{a^2 - \lambda_j}(x - 2\lambda_j t)}, \quad \gamma_j = \text{Im } A_j, \quad j = 1, 2. \quad (5.14б)$$

Собственно решения уравнения ЛЛ восстанавливаются из формул (5.14) как

$$S = Q_0 \sigma_1 Q_0^{-1} \quad (5.15)$$

и имеют при произвольных μ и λ_j весьма громоздкий вид, приводить который мы не будем, тем более что вся физическая информация легко может быть извлечена непосредственно из формул (5.14), (5.15).

В случае общего положения решение (5.14а) описывает локализованный по x солитон ($\vec{S} \rightarrow (1, 0, 0)$, $|x| \rightarrow \infty$), движущийся со скоростью, которая определяется из линейной функции $\beta(x, t)$. Это движение, в отличие от тривиального вращения S_3 -солитонов, сопровождается прецессией вектора \vec{S} во времени. Частота прецессии вычисляется по линейной функции $\theta(x, t)$. Соответствующее бризерное решение (неподвижный бион) получается из (5.14а) при условиях $\text{Re } \mu = 0$, $|\mu| > |a|$ (в случае легкой оси). Формулы для \vec{S} при этом сильно упрощаются, и мы можем их привести: при $\mu_0 = i\eta$, $\eta > 0$ (легкая плоскость), $\eta > |a|$ (легкая ось) мы имеем

$$\begin{aligned} S_1(x, t) &= \frac{\eta^2 \text{ch}^2(kx + \beta_0) - a^2 \cos^2(\omega t + \theta_0) - 2\eta^2}{\eta^2 \text{ch}^2(kx + \beta_0) + a^2 \cos^2(\omega t + \theta_0)}, \\ S_2(x, t) &= 2\eta^2 \frac{\sin(\omega t + \theta_0) \text{sh}(kx + \beta_0)}{\eta^2 \text{ch}^2(kx + \beta_0) + a^2 \cos^2(\omega t + \theta_0)}, \\ S_3(x, t) &= -2\eta \sqrt{\eta^2 + a^2} \frac{\cos(\omega t + \theta_0) \text{sh}(kx + \beta_0)}{\eta^2 \text{ch}^2(kx + \beta_0) + a^2 \cos^2(\omega t + \theta_0)}, \end{aligned} \quad (5.16)$$

$$k = -2\sqrt{\eta^2 + a^2}, \quad \omega = 4\eta\sqrt{\eta^2 + a^2}, \quad \beta_0 = \ln |A|, \quad \theta_0 = \arg A.$$

Подчеркнем еще раз нетривиальную по сравнению с S_3 -бризером (см. соотношения (5.7)) зависимость биона (5.16) от времени.

Анализ формулы (5.14а) закончим следующим наблюдением: в случае легкой оси существует решение, убывающее по t и осциллирующее по x . Для его получения достаточно в формуле (5.14а) положить $\mu = i\eta$, $0 < \eta < |a|$. Тогда

$$\beta(x, t) = 4\eta\sqrt{|a|^2 - \eta^2}t + \beta_0, \quad \theta(x, t) = 2\sqrt{|a|^2 - \eta^2}x + \theta_0.$$

Формулы для самого решения таковы (при $a = -\bar{a}$):

$$\begin{aligned} S_1(x, t) &= \frac{a^2 \text{ch}^2(\Omega t + \beta_0) - \eta^2 \cos^2(kx + \theta_0) + 2\eta^2}{a^2 \text{ch}^2(\Omega t + \beta_0) + \eta^2 \cos^2(kx + \theta_0)}, \\ S_2(x, t) &= -\frac{2\eta^2 \text{sh}(\Omega t + \beta_0) \sin(kx + \theta_0)}{a^2 \text{ch}^2(\Omega t + \beta_0) + \eta^2 \cos^2(kx + \theta_0)}, \\ S_3(x, t) &= -\frac{2\eta\sqrt{|a|^2 - \eta^2} \text{ch}(\Omega t + \beta_0) \sin(kx + \theta_0)}{a^2 \text{ch}^2(\Omega t + \beta_0) + \eta^2 \cos^2(kx + \theta_0)}, \\ k &= 2\sqrt{|a|^2 - \eta^2}, \quad \Omega = 4\eta\sqrt{|a|^2 - \eta^2}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Переходя к обсуждению S_1 -солитонов, отметим, что структура формул (5.14б) много проще структуры формул (5.14а). Какие-либо осцилляции в соотношениях (5.14б) отсутствуют. По сути дела, эти формулы описывают взаимодействие двух более простых решений односолитонного типа. Это односолитонное решение

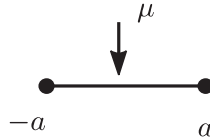


Рис. 1

можно получить из формулы (5.14б) в результате предельного перехода

$$\lambda_1 \rightarrow a, \quad A_1 \rightarrow 0. \quad (5.18)$$

Матрица Q_0 при этом сильно упрощается и принимает вид

$$Q_0 \cong \begin{pmatrix} i\tilde{E}_2^- \sqrt{a^2 - \lambda_2^2} & \tilde{E}_2^+(a - \lambda_2) \\ \tilde{E}_2^-(\lambda_2 - a) & -i\tilde{E}_2^+ \sqrt{a^2 - \lambda_2^2} \end{pmatrix},$$

а само решение записывается как

$$\begin{aligned} S_1(x, t) &= -\operatorname{th}(2\sqrt{a^2 - \lambda^2}(x - 2\lambda t) + \Delta), \\ S_2(x, t) &= \mp \frac{\lambda}{a} \frac{1}{\operatorname{ch}(2\sqrt{a^2 - \lambda^2}(x - 2\lambda t) + \Delta)}, \\ S_3(x, t) &= \pm \frac{\sqrt{a^2 - \lambda^2}}{a} \frac{1}{\operatorname{ch}(2\sqrt{a^2 - \lambda^2}(x - 2\lambda t) + \Delta)}, \end{aligned} \quad (5.19)$$

где $\lambda \equiv \lambda_2$, $\Delta = -\ln|\gamma_2|$ и в равенствах для S_2, S_3 верхний знак соответствует $\gamma_2 > 0$, а нижний соответствует $\gamma_2 < 0$. Решение (5.19) представляет собой движущуюся доменную стенку³⁾ ($\vec{S} \rightarrow (\mp 1, 0, 0)$, $x \rightarrow \pm\infty$). Соотношения (5.14б) можно тогда интерпретировать как описывающие взаимодействие двух доменных стенок. Однако дальше развивать эту точку зрения оказывается нецелесообразно. В разделе 10 для решений (5.19) мы получим общие N -солитонные формулы. Поэтому изучение взаимодействия S_1 -солитонов типа (5.19) друг с другом естественно отнести в раздел 10.

Все рассмотренные выше решения характеризовались либо экспоненциальным, либо тригонометрическим поведением по x . Однако как различные предельные случаи в формулах (5.4) и (5.14а) содержатся также и решения уравнения ЛЛ со степенным поведением по x (“рациональные” солитоны).

5.3. Рациональные солитоны в случае легкой плоскости. Пусть в формуле (5.4а)

$$\eta \rightarrow 0, \quad |\xi| < a \quad (a^2 > 0), \quad \theta_0 = O(1), \quad x_0 = O(1). \quad (5.20)$$

Тогда (см. рис. 1)⁴⁾ $\varphi \rightarrow \pi/2$. Более точно

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2\xi\eta}{\xi^2 - \eta^2 - a^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\xi}{a^2 - \xi^2} \eta + o(\eta),$$

³⁾Подчеркнем еще раз, что это решение мы получили только для случая легкой плоскости.

⁴⁾Выбор разреза на рис. 1 согласован с действием антиинволюции $\lambda \rightarrow \bar{\lambda}$ (см. раздел 2).

следовательно,

$$\cos \varphi = \frac{\xi}{a^2 - \xi^2} \eta + O(\eta^3), \quad \sin \varphi = 1 + O(\eta^2). \quad (5.21)$$

Оценки для остальных величин, входящих в формулы (5.4а), получаются столь же просто:

$$\begin{aligned} |\mu^2 - a^2| &= \sqrt{(\xi^2 - \eta^2 - a^2)^2 + 4\xi^2\eta^2} = a^2 - \xi^2 + \eta^2 \left(1 + \frac{2\xi^2}{a^2 - \xi^2}\right) + O(\eta^4), \\ |\mu|^2 - a^2 &= \xi^2 - a^2 + \eta^2, \quad \theta = 2\xi x - 4(\xi^2 - a^2)t + \theta_0 + O(\eta^2), \\ \operatorname{sh} \beta &= 2\eta(x - 4\xi t - x_0) + O(\eta^3), \quad \operatorname{ch} \beta = 1 + O(\eta^2), \\ \operatorname{ch} 2\beta &= 1 + 8\eta^2(x - 4\xi t - x_0)^2 + O(\eta^4). \end{aligned} \quad (5.22)$$

Из соотношений (5.21) и (5.22) получаем, что при предельном переходе (5.20) решение (5.4а) превращается в решение вида

$$\begin{aligned} S_3(x, t) &= 1 - \frac{2(a^2 - \xi^2)}{a^2 + 4(a^2 - \xi^2)^2(x - 4\xi t - x_0)^2}, \\ S_1 + iS_2 &= -\frac{4i\sqrt{a^2 - \xi^2}(\xi\eta/2 + i(a^2 - \xi^2)(x - 4\xi t - x_0))}{a^2 + 4(a^2 - \xi^2)^2(x - 4\xi t - x_0)^2} \times \\ &\quad \times e^{2i\xi x - 4i(\xi^2 - a^2)t + \theta_0}. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Это решение снова представляет собой равномерно движущийся и равномерно вращающийся в плоскости (S_1, S_2) солитон. Однако в отличие от “экспоненциального” случая имеется ограничение на скорость движения: $|v| < 4a$.

5.4. Рациональные солитоны в случае легкой оси. Отталкиваясь на этот раз от S_1 -солитона (5.14), (5.15) и считая, что $a = -\bar{a}$, рассмотрим следующий предельный переход:

$$\begin{aligned} \varepsilon \downarrow 0, \quad \mu &= a + O(\varepsilon), \\ \sqrt{\mu^2 - a^2} &= \varepsilon e^{i\gamma}, \quad \ln |A| = -\varepsilon \operatorname{Re}(2ie^{i\gamma}x_0), \quad \arg A = -\varepsilon \operatorname{Im}(4|a|e^{i\gamma}t_0), \end{aligned}$$

где $\gamma, x_0, t_0 \in \mathbb{R}$. Предельное выражение для матрицы Q_0 из (5.14а) будет иметь, очевидно, вид

$$Q_0 \cong \begin{pmatrix} 2e^{-i\gamma} & -4|a|e^{-i\gamma}(i(x - x_0) - 2|a|(t - t_0)) \\ 4i|a|e^{i\gamma}(i(x - x_0) + 2|a|(t - t_0)) & 2e^{i\gamma} \end{pmatrix}. \quad (5.24)$$

Подставляя это выражение в (5.15), получаем формулы для соответствующего решения уравнения ЛЛ:

$$\begin{aligned} S_3(x, t) &= \frac{4|a|(x - x_0)}{1 + 4|a|^2((x - x_0)^2 + 4|a|^2(t - t_0)^2)}, \\ S_1(x, t) - iS_2(x, t) &= \frac{e^{-2i\gamma}[1 - 4|a|^2((x - x_0) + 2i|a|(t - t_0))^2]}{1 + 4|a|^2((x - x_0)^2 + 4|a|^2(t - t_0)^2)}. \end{aligned} \quad (5.25)$$

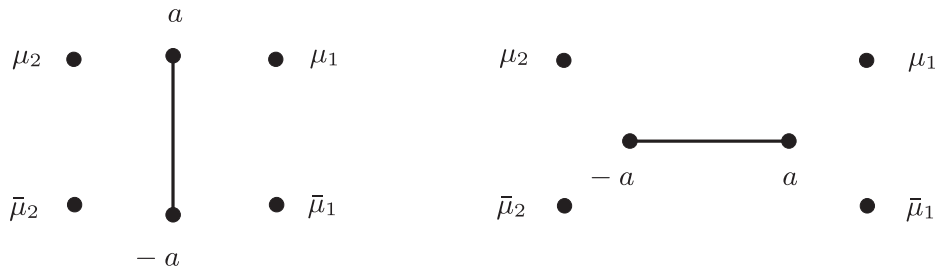


Рис. 2

В отличие от (5.23) это решение имеет бризерный тип и характеризуется полностью рациональным поведением по обеим переменным. Еще раз подчеркнем, что решение типа (5.25) существует только в случае легкой оси, в то время как решение типа (5.23) – только в случае легкой плоскости.

6. ПРОЦЕДУРА ОДЕВАНИЯ. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СОЛИТОННЫХ РЕШЕНИЙ

По своей сути развиваемая нами процедура одевания есть процедура индуктивная: после ее однократного применения мы получаем сразу пару (\vec{S}, Ψ) , которую снова можем одеть по тем же формулам (4.12)–(4.15), считая теперь, что $\Psi_0 \equiv \Psi$, и т. д. Существенно, что при этом в силу замечания 5 “редукционные” матрицы $\sigma(\lambda)$ и $M(\lambda)$ сохраняются на протяжении всего возникающего итерационного ряда. То есть на каждом шаге мы имеем один и тот же набор условий на параметры преобразования (λ_j, A_j) . Поэтому если однократное использование процедуры одевания даст нам описание и классификацию всех элементарных возбуждений, порождаемых исходным “вакуумом” (S_0, Ψ_0) , то все последующие итерации позволяют описать всевозможные процессы взаимодействия этих элементарных возбуждений между собой. В настоящем разделе мы проиллюстрируем эффективность такого подхода на примере описания парного взаимодействия S_3 -солитонов.

6.1. Взаимодействие двух S_3 -солитонов типа (5.4a). Двухсолитонное решение, отвечающее схемам на рис. 2, можно получить в результате двух способов двукратного одевания:

$$(\Psi_0, \vec{S}_0) \Big|_{S_0=(0,0,1)} \xrightarrow{(\mu_1, A_1)} (\Psi_1, \vec{S}_1) \xrightarrow{(\mu_2, A_2)} (\Psi_{12}, \vec{S}_{12}), \tag{6.1a}$$

$$(\Psi_0, \vec{S}_0) \Big|_{S_0=(0,0,1)} \xrightarrow{(\mu_2, A_2)} (\Psi_2, \vec{S}_2) \xrightarrow{(\mu_1, A_1)} (\Psi_{21}, \vec{S}_{21}). \tag{6.1б}$$

Очевидно, что $\vec{S}_{12} = \vec{S}_{21}$, ибо эти два решения обладают одинаковым набором данных задачи Римана. Для вычисления эффекта воздействия солитона (μ_1, A_1) на солитон (μ_2, A_2) будем исходить из (6.1a). Найдем асимптотику функции Ψ_1 при условиях $t \rightarrow \pm\infty, x - 4\xi_2 t = \text{const}$. Считая для определенности, что $\xi_2 < \xi_1$, имеем (см. соотношения (4.9), (4.10)) в этом пределе

$$\vec{X}_1 = \sqrt{\mu_1^2 - a^2} A_1 e^{-\eta_1(x-4\xi_2 t) - 4\eta(\xi_2 - \xi_1)t} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + o(1) \right],$$

$$\vec{X}_2 = (\bar{\mu}_1 - a) e^{-\eta_1(x-4\xi_2 t) - 4\eta(\xi_2 - \xi_1)t} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + o(1) \right],$$

следовательно,

$$W = e^{-\eta_1(x-4\xi_2t)-4\eta_1(\xi_2-\xi_1)t}[I + o(1)] \begin{pmatrix} 0 & \bar{\mu}_1 - a \\ A_1\sqrt{\mu_1^2 - a^2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$V = e^{-\eta_1(x-4\xi_2t)-4\eta_1(\xi_2-\xi_1)t} \left[\begin{pmatrix} \frac{1}{\bar{\mu}_1 - a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu_1 + a} \end{pmatrix} + o(1) \right] \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 0 & \bar{\mu}_1 - a \\ A_1\sqrt{\mu_1^2 - a^2} & 0 \end{pmatrix},$$

отсюда

$$VW^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\bar{\mu}_1 - a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu_1 + a} \end{pmatrix} + o(1). \quad (6.2)$$

Подставляя эти соотношения в формулу (4.15), получаем для $\Psi_1(\lambda)$ искомую асимптотику: при $t \rightarrow +\infty$, $x - 4\xi_2t = \text{const}$ и $\xi_2 < \xi_1$

$$\Psi_1(\lambda) = \frac{\lambda - \bar{\mu}_1}{\bar{\mu}_1 - a} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta_0 \frac{\lambda - \bar{\mu}_1}{\mu_1 + a} \frac{\bar{\mu}_1 - a}{\lambda - \bar{\mu}_1} \end{pmatrix} + o(1) \right] \Psi_0(\lambda). \quad (6.3)$$

Аналогичные вычисления при $t \rightarrow -\infty$, $x - 4\xi_2t = \text{const}$ и $\xi_2 < \xi_1$ приводят к формуле

$$\Psi_1(\lambda) = \frac{\lambda - \mu_1}{\mu_1 - a} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta_0 \frac{\lambda - \bar{\mu}_1}{\lambda - \mu_1} \frac{\mu_1 - a}{\bar{\mu}_1 + a} \end{pmatrix} + o(1) \right] \Psi_0(\lambda). \quad (6.4)$$

Асимптотика (6.3) показывает, что вторая стрелка в (6.1a) при предельном переходе $t \rightarrow +\infty$ и $x - 4\xi_2t = \text{const}$ превращается в простое одевание “нулевого” затравочного решения (\vec{S}_0, Ψ_0) , характеризуемое параметрами

$$\mu_2, \quad A_2^+ = A_2 \delta_0 \frac{\bar{\mu}_1 - a}{\mu_1 + a} \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 - \bar{\mu}_1}.$$

Иными словами, в указанном пределе решение \vec{S}_{12} имеет в качестве своей асимптотики S_3 -солитон вида (6.3), который характеризуется скоростью $v_2 = 4\xi_2$, круговой частотой $\omega_2 = 4(\xi_2^2 + \eta_2^2 + a^2)$, начальным положением

$$x_{02}^+ = \frac{1}{2\eta_2} \left(\ln |A_2 \delta_0| + \ln \left| \frac{\bar{\mu}_1 - a}{\mu_1 + a} \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 - \bar{\mu}_1} \right| \right)$$

и начальной фазой вращения

$$\theta_{02}^+ = \arg A_2 + \arg \delta_0 + \arg \left(\frac{\bar{\mu}_1 - a}{\mu_1 + a} \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 - \bar{\mu}_1} \right).$$

Аналогично из асимптотики (6.4) мы получаем, что при предельном переходе $t \rightarrow -\infty$ и $x - 4\xi_2t = \text{const}$ решение \vec{S}_{12} асимптотически выходит на S_3 -солитон вида (6.3), характеризуемый той же скоростью v_2 и той же частотой ω_2 , но иными значениями параметров x_{02} и θ_{12} :

$$x_{02}^- = \frac{1}{2\eta_2} \left(\ln |A_2 \delta_0| + \ln \left| \frac{\mu_1 - a}{\bar{\mu}_1 + a} \frac{\mu_2 - \bar{\mu}_1}{\mu_2 - \mu_1} \right| \right),$$

$$\theta_{02}^- = \arg A_2 + \arg \delta_0 + \arg \left(\frac{\mu_1 - a}{\bar{\mu}_1 + a} \frac{\mu_2 - \bar{\mu}_1}{\mu_2 - \mu_1} \right).$$

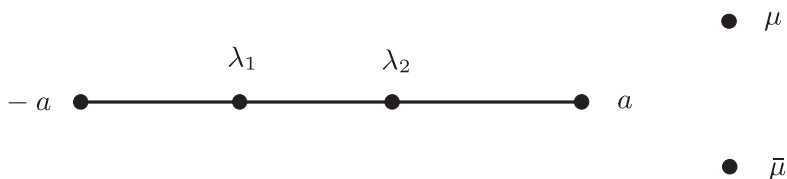


Рис. 3

Таким образом, результат воздействия солитона (μ_1, A_1) на солитон (μ_2, A_2) сводится к следующим сдвигам положения центра масс и начальной фазы вращения в плоскости (S_1, S_2) :

$$\begin{aligned}\Delta x_{02} &= x_{02}^+ - x_{02}^- = \frac{1}{\eta_2} \ln \left| \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 - \bar{\mu}_1} \right|, \\ \Delta \theta_{02} &= \theta_{02}^+ - \theta_{02}^- = -2 \arg(\mu_1^2 - a^2) + 2 \arg \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 - \bar{\mu}_1}.\end{aligned}\quad (6.5)$$

Для получения асимптотики решения $\vec{S}_{12} = \vec{S}_{21}$ при $t \rightarrow \pm\infty$ и $x - 4\xi_1 t = \text{const}$ нужно отталкиваться от соотношений (6.16). При этом мы, очевидно, получим, что асимптотикой решения \vec{S}_{12} при $t \rightarrow \pm\infty$ будет S_3 -солитон вида (5.4а), который характеризуется скоростью $v_1 = 4\xi_1$ и частотой вращения $\omega_1 = 4(\xi_1^2 + \eta_1^2 + a^2)$. Соответствующие сдвиги положения центра масс и начальной фазы вращения описываются формулами, аналогичными формулам (6.5):

$$\begin{aligned}\Delta x_{01} &= \frac{1}{\eta_1} \ln \left| \frac{\mu_1 - \bar{\mu}_2}{\mu_1 - \mu_2} \right|, \\ \Delta \theta_{01} &= 2 \arg(\mu_2^2 - a^2) + 2 \arg \left(\frac{\mu_1 - \bar{\mu}_2}{\mu_1 - \mu_2} \right).\end{aligned}$$

В заключение анализа этого случая взаимодействия приведем выражение для сдвига центра масс солитонов через физические параметры v_j и ω_j :

$$\begin{aligned}\Delta x_{02} &= -\frac{\eta_1}{\eta_2} \Delta x_{01} = \\ &= \frac{1}{2\eta_1} \ln \frac{2\omega_2 + 2\omega_1 - 16a^2 - v_1 v_2 - \sqrt{4\omega_1 - 16a^2 - v_1^2} \sqrt{4\omega_2 - 16a^2 - v_2^2}}{2\omega_2 + 2\omega_1 - 16a^2 - v_1 v_2 + \sqrt{4\omega_1 - 16a^2 - v_1^2} \sqrt{4\omega_2 - 16a^2 - v_2^2}}.\end{aligned}$$

6.2. Взаимодействие S_3 -солитона типа (5.4а) с S_3 -солитоном типа (5.4б) (случай легкой плоскости). Схема для решения, описывающего этот вид взаимодействия, изображена на рис. 3. Это решение может быть реализовано как следующее двукратное одевание:

$$(\Psi_0, \vec{S}_0) \Big|_{\vec{S}_0=(0,0,1)} \xrightarrow{(\mu, A)} (\Psi_1, \vec{S}_1) \xrightarrow{(\lambda_1, \lambda_2, \varphi_1, \varphi_2)} (\Psi_{12}, \vec{S}_{12}). \quad (6.6)$$

Считая, что $\xi > (\lambda_1 + \lambda_2)/2$, и повторяя соответствующие рассуждения из предыдущего пункта, мы снова приходим к формулам (6.3) в пределе $t \rightarrow +\infty$ при $x - 2(\lambda_1 + \lambda_2)t = \text{const}$ и к формулам (6.4) при $t \rightarrow -\infty$ и $x - 2(\lambda_1 + \lambda_2)t = \text{const}$. Это обстоятельство позволяет нам сделать вывод о том, что вторая стрелка в (6.6)

при $t \rightarrow \pm\infty$, $x - 2(\lambda_1 + \lambda_2)t = \text{const}$ превращается в простое одевание при условиях (5.2б) “нулевого” затравочного решения (\vec{S}_0, Ψ_0) , характеризующееся эффективными параметрами

$$\lambda_j, \quad \varphi_j^\pm = \varphi_j \mp \arg(\mu^2 - a^2) \pm 2 \arg(\lambda_j - \mu), \quad t \rightarrow \pm\infty.$$

Тем самым при $t \rightarrow \pm\infty$, $x - 2(\lambda_1 + \lambda_2)t = \text{const}$ решение \vec{S}_{12} имеет в качестве своей асимптотики периодический S_3 -солитон вида (5.4б), который характеризуется фазовой скоростью $v_\Phi = 2(\lambda_1 + \lambda_2)$, круговой частотой $\Omega = 4(a^2 + \lambda_1\lambda_2)$ и начальными значениями фаз движения и вращения

$$\begin{aligned} \varphi_2^\pm - \varphi_1^\pm &= \pm 2 \arg \frac{\lambda_2 - \mu}{\lambda_1 - \mu}, \\ \varphi_2^\pm + \varphi_1^\pm &= \mp 2 \arg(\mu^2 - a^2) \pm 2 \arg(\lambda_2 - \mu)(\lambda_1 - \mu) + \varphi_2 + \varphi_1. \end{aligned}$$

Иными словами, эффект воздействия S_3 -солитона типа (5.4а) на периодическую волну (5.4б) описывается соотношениями

$$\begin{aligned} \Delta(\varphi_2 - \varphi_1) &= 4 \arg \frac{\lambda_2 - \mu}{\lambda_1 - \mu}, \\ \Delta(\varphi_2 + \varphi_1) &= -4 \arg(\mu^2 - a^2) + 4 \arg(\lambda_2 - \mu)(\lambda_1 - \mu). \end{aligned} \quad (6.7)$$

В физических параметрах (v, ω) солитона и (v_Φ, Ω) периодической волны формулы (6.7) могут быть записаны следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta(\varphi_2 - \varphi_1) &= 4 \arg \frac{v_\Phi + 2\sqrt{v_\Phi^2/4 - \Omega + 4a^2} - \mu}{v_\Phi - 2\sqrt{v_\Phi^2/4 - \Omega + 4a^2} - \mu}, \\ \Delta(\varphi_2 + \varphi_1) &= -4 \arg(\mu^2 - a^2) + 4 \arg\left(\mu^2 - \frac{1}{2}v_\Phi\mu + \frac{1}{4}\Omega - a^2\right), \end{aligned}$$

где

$$\mu = \frac{1}{4}v + i\sqrt{\frac{\omega}{4} - \frac{v^2}{16} - a^2}.$$

6.3. Взаимодействие S_3 -солитона типа (5.4а) с доменной стенкой (случай легкой оси). Как показано в разделе 5, доменная стенка (5.10) есть вырожденный случай ($\mu \rightarrow a$, $A \rightarrow 0$) S_3 -солитона (5.4а). Поэтому рассматриваемый в данном пункте случай взаимодействия можно изучить на базе взаимодействия двух S_3 -солитонов, производя в соответствующих формулах предельный переход

$$\mu_2 \rightarrow a, \quad A_2 \equiv \frac{1}{2|a|\sqrt{\gamma}} \sqrt{\bar{\mu}_2^2 - a^2} e^{i\psi} \rightarrow 0. \quad (6.8)$$

Схема для решения \vec{S}_{12}^0 , отвечающего этому случаю, изображена на рис. 4.

Это решение можно получить в результате выполнения следующих двух последовательностей одеваний и вырождений:

$$(\Psi_0, \vec{S}_0) \xrightarrow{(\mu_1, A_1)} (\Psi_1, \vec{S}_1) \xrightarrow{(\mu_2, A_2)} (\Psi_{12}, \vec{S}_{12}) \xrightarrow[A_2 \rightarrow 0]{\mu_2 \rightarrow a} (\Psi_{12}^0, \vec{S}_{12}^0), \quad (6.9a)$$

$$(\Psi_0, \vec{S}_0) \xrightarrow{(\mu_2, A_2)} (\Psi_2, \vec{S}_2) \xrightarrow[A_2 \rightarrow 0]{\mu_2 \rightarrow a} (\Psi_2^0, \vec{S}_2^0) \xrightarrow{(\mu_1, A_1)} (\Psi_{12}^0, \vec{S}_{12}^0). \quad (6.9b)$$

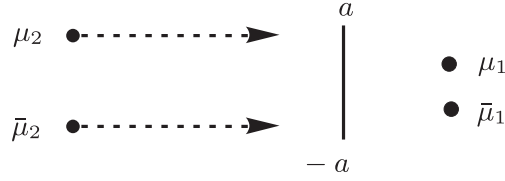


Рис. 4

По аналогии с предыдущими случаями для вычисления эффекта воздействия солитона на доменную стенку нужно сравнить асимптотики при $t \rightarrow \pm\infty$, $x = \text{const}$. Эти асимптотики удобно находить, опираясь на диаграмму (6.9а). Напротив, воздействие доменной стенки на солитон (т. е. асимптотики \vec{S}_{12}^0 в пределе $t \rightarrow \pm\infty$, $x - 4\xi_1 t = \text{const}$) легче рассчитать, если воспользоваться диаграммой (6.9б).

6.3.1. *Воздействие солитона на доменную стенку.* Запишем функцию $\Psi_1(\lambda)$ в виде (см. формулы (4.1), (4.4))

$$\Psi_1(\lambda) = f(\lambda)\Psi_0(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda(q_0 + q_3) + p_0 + p_3 & (q_1 - iq_2)\sqrt{\lambda^2 - a^2} \\ (q_1 + iq_2)\sqrt{\lambda^2 - a^2} & \lambda(q_0 - q_3) + p_0 - p_3 \end{pmatrix} \times \\ \times e^{-i\sigma_3 \lambda x + 2i\sigma_3(\lambda^2 - a^2)t}. \quad (6.10)$$

Подставляя данную функцию в качестве Ψ_0 в формулы (4.12), (4.13) (вторая стрелка в (6.9а)) и совершая в последних предельный переход (6.8) (третья стрелка в (6.9а)), для элементов матрицы Q_0 , отвечающей решению \vec{S}_{12}^0 , получаем явные выражения:

$$\begin{aligned} Q_{11}^0 &= -\Psi_{11}(a)\Psi_{22}(\bar{a})\sqrt{\gamma}2|a|e^{i\psi}c_0, \\ Q_{22} &= \frac{1}{c_0}Q_{11}^0, \\ Q_{12}^0 &= -2i|a|(\Psi_1(a))_{11}2|a|\sqrt{\gamma}e^{i\psi}c_0(q_1 - iq_2)e^{|a|x} + 2i|a|\Psi_{11}(a)(\Psi_1(\bar{a}))_{11}, \\ Q_{21}^0 &= 2i|a|(\Psi_1(a))_{22}2|a|\sqrt{\gamma}e^{i\psi}c_0(q_1 + iq_2)e^{|a|x} + \\ &+ 2i|a|[\Psi_1(a)]_{22}(\Psi_1(\bar{a}))_{22}c_0e^{2i\psi}, \end{aligned} \quad (6.11)$$

где

$$c_0 = \lim_{\mu \rightarrow a} \sqrt{\frac{\bar{\mu}^2 - a}{\mu^2 - a}} \quad |c_0| = 1. \quad (6.12)$$

Положим теперь $t \rightarrow +\infty$, $x = \text{const}$. Для функции $\Psi_1(\lambda)$ можно тогда воспользоваться асимптотикой (6.3), что приводит к следующему упрощению формул (6.11):

$$Q_0^+ \cong \begin{pmatrix} -\left|\frac{\mu_1 + a}{\mu_1 - a}\right|e^{2|a|x}\sqrt{\gamma}e^{i\psi}c_0 & i \\ ic_0e^{2i\psi} & -\left|\frac{\mu_1 + a}{\mu_1 - a}\right|e^{2|a|x}\sqrt{\gamma}e^{i\psi} \end{pmatrix}. \quad (6.13)$$

В рассматриваемом пределе $\vec{S}_1 \rightarrow (0, 0, 1)$, поэтому асимптотика решения \vec{S}_{12}^0 имеет вид

$$\vec{S}_{12}^0 Q_0^+ \sigma_3 (Q_0^+)^{-1}, \quad t \rightarrow +\infty, \quad x = \text{const.}$$

Сопоставляя матрицу (6.13) с представлением (5.11) для матрицы Q_0 доменной стенки, приходим к выводу, что асимптотикой решения \vec{S}_{12}^0 при $t \rightarrow +\infty$, $x = \text{const}$ является доменная стенка с параметрами

$$\gamma^+ = \gamma \left| \frac{\mu_1 + a}{\mu_1 - a} \right|^2, \quad \psi^+ = \psi. \quad (6.14)$$

Аналогичным образом, подставляя в (6.11) асимптотику (6.4), приходим к заключению, что при $t \rightarrow -\infty$, $x = \text{const}$ решение \vec{S}_{12}^0 снова есть доменная стенка, но с параметрами

$$\gamma^- = \gamma \left| \frac{\mu_1 - a}{\mu_1 + a} \right|^2, \quad \psi^- = \psi.$$

Таким образом, эффект воздействия S_3 -солитона (5.4а), который имеет скорость $v_1 = 4 \operatorname{Re} \mu_1$ и частоту $\omega_1 = 4|\mu_1|^2 + 4a^2$, на доменную стенку (5.10) описывается соотношениями

$$\Delta^+ - \Delta^- = 2 \ln \left| \frac{\mu_1 + a}{\mu_1 - a} \right|, \quad \psi^+ = \psi^-. \quad (6.15)$$

6.3.2. Воздействие доменной стенки на солитон. Результат действия первых двух стрелок в (6.7) описывается формулами (5.10) и (5.12) – это доменная стенка и отвечающая ей функция Ψ , которые характеризуются параметрами γ и ψ . Положим $t \rightarrow +\infty$, $x - 4\xi_1 t = \text{const}$. Тогда $x \rightarrow +\infty$, и формулы (5.10), (5.12) переходят в

$$\Psi_2^0(\lambda) = \begin{pmatrix} c_0(\lambda - a) & 0 \\ 0 & \lambda + a \end{pmatrix} e^{-i\sigma_3 \lambda x + 2i\sigma_3(\lambda^2 - a^2)t}, \quad \vec{S}_2^0 = (0, 0, 1). \quad (6.16)$$

Таким образом, третья стрелка в (6.9б) превращается в простое одевание при условиях (5.2а) с эффективными параметрами

$$\mu_1, \quad A_1^+ = A_1 \frac{\mu_1 + a}{\mu_1 - a} \frac{1}{c_0}.$$

Тем самым при $t \rightarrow +\infty$, $x - 4\xi_1 t = \text{const}$ решение \vec{S}_{12}^0 имеет в качестве своей асимптотики S_3 -солитон (5.4а) с параметрами

$$v_1 = 4\xi_1, \quad \omega_1 = 4|\mu_1|^2 + 4a^2, \quad 2\chi = \arg c_0, \\ x_0^+ = \frac{1}{2\eta_1} \ln |A_1| + \frac{1}{2\eta_1} \ln \left| \frac{\mu_1 + a}{\mu_1 - a} \right|, \quad \theta_0^+ = \arg A_1 - 2\chi + \arg \frac{\mu_1 + a}{\mu_1 - a}. \quad (6.17)$$

Пусть теперь $t \rightarrow -\infty$, $x - 4\xi_1 t = \text{const}$. Тогда $x \rightarrow -\infty$, и вместо (6.16) мы имеем формулы

$$\Psi_2^0(\lambda) = \sqrt{\lambda^2 - a^2} \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\psi - i\chi} \\ e^{-i\psi + i\chi} & 0 \end{pmatrix} e^{-i\sigma_3 \lambda x + 2i\sigma_3(\lambda^2 - a^2)t}, \quad \vec{S}_2^0 = (0, 0, -1). \quad (6.18)$$

Обозначим через Q_{CB}^0 матрицу Q_0 , отвечающую S_3 -солитону \vec{S}_{CB} с параметрами μ_1, A_1 . Как нетрудно убедиться, матрица Q_0^- , получающаяся в результате одевания по формуле (4.12) функции (6.18), связана с матрицей Q_{CB}^0 соотношением

$$Q_0^- = T Q_{\text{CB}}^0 T, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & e^{-i(\psi + \chi)} \\ e^{i(\psi + \chi)} & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда для решения \vec{S}_{12}^0 при $t \rightarrow -\infty$, $x - 4\xi t = \text{const}$ имеем

$$\begin{aligned} \vec{S}_{12}^0 &= T Q_{\text{CB}}^0 T \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} T (Q_{\text{CB}}^0)^{-1} T = T Q_{\text{CB}}^0 \sigma_3 Q_{\text{CB}}^0 = \\ &= T S_{\text{CB}} T = \begin{pmatrix} -S_{3,\text{CB}} & (S_{1,\text{CB}} + iS_{2,\text{CB}})e^{-2i(\psi + \chi)} \\ (S_{1,\text{CB}} - iS_{2,\text{CB}})e^{2i(\psi + \chi)} & S_{3,\text{CB}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Итак, при $t \rightarrow -\infty$, $x - 4\xi t = \text{const}$ решение \vec{S}_{12}^0 превращается в S_3 -солитон (5.4а), повернутый в плоскости (S_2, S_3) на 180° (т. е. $(S_1, S_2, S_3) \rightarrow (S_1, -S_2, -S_3)$) и характеризуемый параметрами

$$\begin{aligned} v_1 &= 4\xi_1, & \omega_1 &= 4|\mu_1|^2 + 4a^2, \\ x_0^- &= \frac{1}{2\eta_1} \ln |A_1|, & \theta_0^- &= \arg A_1 - 2\chi - 2\psi. \end{aligned}$$

Таким образом, эффект прохождения S_3 -солитона (5.4а) через доменную стенку (5.10) описывается соотношениями

$$\begin{aligned} (S_1, S_2, S_3) &\rightarrow (S_1, -S_2, -S_3), \\ \Delta x_0 &= x_0^+ - x_0^- = \frac{1}{2\eta_1} \ln \left| \frac{\mu_1 + a}{\mu_1 - a} \right|, \\ \Delta \theta_0 &= \theta_0^+ - \theta_0^- = \arg \frac{\mu_1 + a}{\mu_1 - a} + 2\psi. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Отметим, что, в отличие от взаимодействия двух S_3 -солитонов, в формулах (6.15), (6.19), описывающих взаимодействие доменной стенки и солитона, имеется явное отсутствие симметрии. В частности, сдвиг солитона в два раза меньше сдвига доменной стенки.

На этом мы заканчиваем демонстрацию применения процедуры одевания к проблеме взаимодействия элементарных решений уравнения ЛЛ. Заметим только, что, совершая соответствующие предельные переходы в полученных нами формулах, можно без труда описать также процессы взаимодействия с участием рациональных солитонов (5.21). Наконец, совершенно аналогичным образом можно исследовать взаимодействие S_1 -солитонов. Однако в этом случае гораздо эффективнее оказывается подход, основанный на вырождении конечнозонных решений уравнения ЛЛ. Этот подход будет изложен в разделе 10.

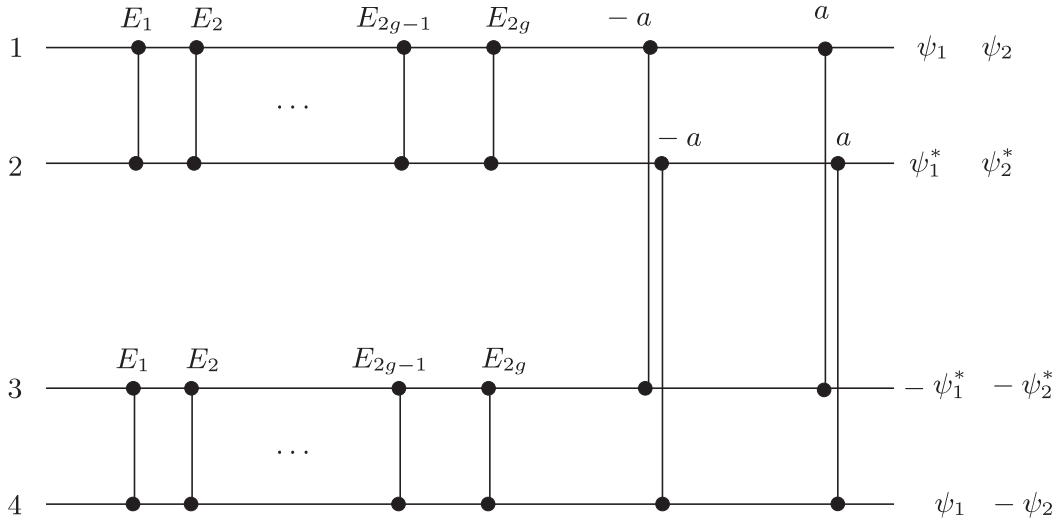


Рис. 5. Поверхность $\widehat{\Gamma}$.

7. КОНЕЧНОЗОННЫЕ РЕШЕНИЯ

В данном разделе мы построим общие конечнозонные решения XXZ -уравнения ЛЛ. Им отвечают следующие данные обобщенной задачи Римана:

$$\Lambda_1 = \{a_1, \dots, a_{3g}, T_1, \dots, T_{3g}, C_1, \dots, C_{3g}, \mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_g, G_1, \dots, G_g\},$$

$$a_i = \begin{cases} E_i, & i = 1, \dots, 2g, \\ \mu_{i-2g}, & i = 2g + 1, \dots, 3g, \end{cases} \tag{7.1}$$

$$T_i = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}, & i = 1, \dots, 2g, \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & i = 2g + 1, \dots, 3g, \end{cases} \quad C_i = \begin{cases} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, & i = 1, \dots, 2g, \\ I, & i = 2g + 1, \dots, 3g, \end{cases}$$

$$\mathcal{L}_i = [a_{2i-1}, a_{2i}], \quad G_i = \sigma_1, \quad i = 1, \dots, g.$$

Мы построим функцию Ψ , удовлетворяющую редукции (2.11), с матрицей $\sigma(\lambda) = \sigma_1$:

$$\sigma_3 \Psi(\lambda^\tau) = \Psi(\lambda) \sigma_1. \tag{7.2}$$

Таким образом, данные (7.1) – это данные на одном листе поверхности Γ , в соответствии с редукцией (7.2) они определяют данные Λ_2 на другом листе поверхности Γ , полные данные обобщенной задачи Римана определяются как сумма $\Lambda_1 \oplus \Lambda_2$. В обычной терминологии \mathcal{L}_i – разрезы на римановой поверхности, E_i – точки ветвления, μ_i – полюсы функции Бейкера–Ахиезера.

Функция Ψ является неоднозначной функцией на Γ , матрицы монодромии M_i , отвечающие точкам E_i , согласно формуле (2.9) равны

$$M_i = C_i^{-1} \sigma_3 C_i = \sigma_1. \tag{7.3}$$

Функция Ψ становится однозначной на поверхности $\widehat{\Gamma}$, схематически изображенной на рис. 5, которая является накрытием поверхности Γ с точками ветвления E_i . В случае уравнения Кортевега–де Фриза, нелинейного уравнения Шредингера и др.

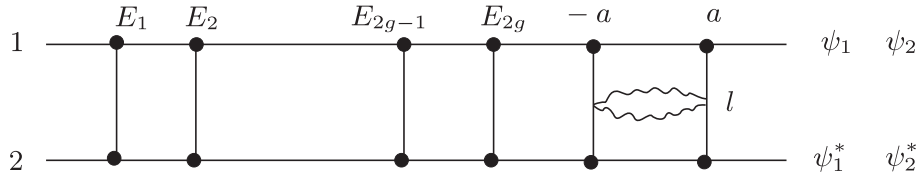


Рис. 6. Поверхность Γ_0

поверхность Γ (поверхность, на которой определена соответствующая $U-V$ -пара) была просто комплексной плоскостью, и риманова поверхность $\widehat{\Gamma}$, на которой была определена функция Бейкера–Ахиезера, являлась (аналогично нашему случаю) ее двулистным накрытием, т. е. гиперэллиптической поверхностью.

Далее, функцию $\Psi(\lambda)$ можно задать по векторной функции Бейкера–Ахиезера $\vec{\psi}(\lambda) = (\psi_1(\lambda), \psi_2(\lambda))$ с помощью формулы

$$\Psi(\lambda) = \begin{pmatrix} \psi_1(\lambda) & \psi_1^*(\lambda) \\ \psi_2(\lambda) & \psi_2^*(\lambda) \end{pmatrix}, \tag{7.4}$$

где $\psi_1(\lambda)$ и $\psi_2(\lambda)$ – однозначные функции на $\widehat{\Gamma}$ и $\psi^*(\lambda) = \psi(\lambda^*)$. Здесь $\lambda \rightarrow \lambda^*$ – инволюция поверхности $\widehat{\Gamma}$, переставляющая листы $1 \leftrightarrow 2$ и $3 \leftrightarrow 4$. Такая структура функции Ψ продиктована данными монодромии (7.3). Интересным является вопрос, удовлетворяет ли функция Ψ редукции (7.2). Прежде всего определим инволюцию $\lambda \rightarrow \lambda^\tau$ поверхности $\widehat{\Gamma}$, естественным образом перенеся на $\widehat{\Gamma}$ инволюцию поверхности Γ , которая меняет листы $1 \leftrightarrow 3$ и $2 \leftrightarrow 4$. В терминах ψ_1 и ψ_2 редукция (7.2) записывается следующим образом:

$$\psi_1(\lambda^\tau) = \psi_1(\lambda^*), \quad \psi_2(\lambda^\tau) = -\psi_2(\lambda^*). \tag{7.5}$$

Для построения функций $\psi_1(\lambda)$ и $\psi_2(\lambda)$ рассмотрим вспомогательную гиперэллиптическую поверхность Γ_0 рода g , схематически изображенную на рис. 6, и две функции на ней: однозначную функцию $\psi_1(\lambda)$ и функцию $\psi_2(\lambda)$, $\lambda \in \Gamma_0$, меняющую знак при пересечении замкнутого контура l , проходящего через точки a и $-a$ (изображенного на рис. 6 волнистой линией):

$$\psi_2^+(\lambda) = -\psi_2^-(\lambda)|_{\lambda \in l}, \tag{7.6}$$

где $\psi_2^+(\lambda)$ и $\psi_2^-(\lambda)$ – значения функции $\psi_2(\lambda)$ соответственно на верхней и нижней границах контура. Построенные таким образом функции ψ_1 и ψ_2 легко определяется на поверхности $\widehat{\Gamma}$, представляющей собой естественную область аналитического продолжения функции $\psi_2(\lambda)$.

Обозначим значения функций $\psi_1(\lambda)$ и $\psi_2(\lambda)$ на первом листе поверхности Γ_0 через ψ_1 и ψ_2 , а на втором – через ψ_1^* и ψ_2^* . Будем считать, что значения функций $\psi_1(\lambda)$ и $\psi_2(\lambda)$ на первом листе поверхности $\widehat{\Gamma}$ (см. рис. 5) совпадают со значениями этих функций на первом листе поверхности $\widehat{\Gamma}_0$ (см. рис. 6). Листы 1 и 2 поверхности $\widehat{\Gamma}$ склеены по разрезам $[E_{2i-1}, E_{2i}]$, поэтому, продолжая аналитически функции $\psi_1(\lambda)$ и $\psi_2(\lambda)$ через эти разрезы, получим их значения на втором листе поверхности $\widehat{\Gamma}$: эти значения равны ψ_1^* и ψ_2^* . Значения на третьем листе поверхности $\widehat{\Gamma}$ получаются

при продолжении с первого листа через разрез $[-a, a] = l$, на котором $\psi_2(\lambda)$ как функция на Γ_0 меняет знак в соответствии с (7.6), поэтому значения функций $\psi_1(\lambda)$ и $\psi_2(\lambda)$ на третьем листе поверхности $\widehat{\Gamma}$ равны ψ_1^* и $-\psi_2^*$. Аналогично на четвертом листе поверхности $\widehat{\Gamma}$ они равны ψ_1 и $-\psi_2$.

Очевидно, что построенные таким образом на поверхности $\widehat{\Gamma}$ функции $\psi_1(\lambda)$ и $\psi_2(\lambda)$ удовлетворяют редукции (7.5), и, следовательно, функция $\Psi(\lambda)$, определенная по ним с помощью соотношения (7.4), удовлетворяет требуемой редукции (7.2).

ТЕОРЕМА 5. Пусть функции $\psi_1(\lambda)$ и $\psi_2(\lambda)$ как функции на Γ_0 обладают следующими свойствами:

1) имеют место асимптотические равенства

$$\begin{aligned} \psi_1(\lambda, x, t) &= (A + A_1\lambda^{-1} + \dots)e^{-i\lambda x + 2i\lambda^2 t}, & \lambda \rightarrow \infty^+, \\ \psi_1(\lambda, x, t) &= (B + B_1\lambda^{-1} + \dots)e^{i\lambda x - 2i\lambda^2 t}, & \lambda \rightarrow \infty^-, \\ \psi_2(\lambda, x, t) &= (C + C_1\lambda^{-1} + \dots)e^{-i\lambda x + 2i\lambda^2 t}, & \lambda \rightarrow \infty^+, \\ \psi_2(\lambda, x, t) &= (D + D_1\lambda^{-1} + \dots)e^{i\lambda x - 2i\lambda^2 t}, & \lambda \rightarrow \infty^-, \end{aligned} \quad (7.7)$$

где A, B, C, D – неизвестные функции переменных x и t , а ∞^+ и ∞^- – две бесконечно удаленные точки поверхности Γ_0 соответственно на верхнем и нижнем ее листах;

2) функции $\psi_1(\lambda)$ и $\psi_2(\lambda)$ мероморфны на $\Gamma \setminus \{\infty^\pm\}$ и имеют неспециальный дивизор полюсов $\mathcal{D} = \mu_1 + \dots + \mu_g$;

3) функция $\psi_1(\lambda)$ однозначна на Γ_0 , а функция $\psi_2(\lambda)$ удовлетворяет соотношению (7.5);

4) значения $\psi_1(a)$ и $\psi_2(-a)$ не зависят от x, t .

Тогда функция $\Psi(\lambda)$, определенная на $\widehat{\Gamma}$ по функциям $\psi_1(\lambda)$ и $\psi_2(\lambda)$ с помощью формулы (7.4) и процедуры, описанной выше, удовлетворяет обобщенной задаче Римана с данными $\Lambda = \Lambda_1 \oplus \Lambda_2$ (см. (7.1)) и редукции (7.2), а ее первый коэффициент Φ_0 разложения (2.7) в окрестности бесконечно удаленной точки задается формулой (2.14), где A, B, C, D определяется равенствами (7.7).

Доказательство этой теоремы несложно, и мы его приводить не будем.

Итак, для построения конечнозонных решений уравнения (2.1) осталось построить функции $\psi_1(\lambda)$ и $\psi_2(\lambda)$, $\lambda \in \Gamma_0$, удовлетворяющие условиям теоремы 5.

Определим на Γ_0 канонические объекты конечнозонного интегрирования (подробно этот материал изложен в книге [21]). Канонический базис циклов a_i, b_i , $i = 1, \dots, g$, выберем так, чтобы цикл

$$\sum a = a_1 + \dots + a_g$$

обходил вокруг разреза $[-a, a]$, т. е. совпадал с контуром l .

Пусть $dU_i(\lambda)$, $i = 1, \dots, g$, – соответствующий нормированный базис абелевых дифференциалов (с нормировкой $\oint_{a_i} dU_j = \delta_{ij}$), а B – матрица периодов поверхности Γ_0 , пусть

$$\theta[\alpha, \beta](z|B) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^g} e^{\pi i \langle B(m+\alpha), m+\alpha \rangle + 2\pi i \langle z+\beta, m+\alpha \rangle} \quad (7.8)$$

– тета-функция Римана с характеристиками $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^g$,

$$\theta[0, 0](z|B) \equiv \theta(z|B), \quad z \in \mathbb{C}^g.$$

Определим также два нормированных (с нулевыми a -периодами) абелевых интеграла второго рода $\Omega_1(\lambda)$ и $\Omega_2(\lambda)$ их асимптотиками на ∞^\pm :

$$\Omega_1(\lambda) \rightarrow \mp(\lambda + b + \dots), \quad \Omega_2(\lambda) \rightarrow \pm(2\lambda^2 + c + \dots), \quad \lambda \rightarrow \infty^\pm. \quad (7.9)$$

Пусть $V, W \in \mathbb{C}^g$ – векторы их b -периодов.

Функции $\psi_1(\lambda)$ и $\psi_2(\lambda)$ задаются традиционными формулами:

$$\begin{aligned} \psi_1(\lambda) &= \frac{\theta(U(\lambda) + \Omega + \mathcal{D})}{\theta(U(\lambda) + \mathcal{D}) \theta(U(a) + \Omega + \mathcal{D})} e^{i(\Omega_1(\lambda) - \Omega_1(a))x + i(\Omega_2(\lambda) - \Omega_2(a))t}, \\ \psi_2(\lambda) &= \frac{\theta[0, n](U(\lambda) + \Omega + \mathcal{D})}{\theta(U(\lambda) + \mathcal{D}) \theta[0, n](U(-a) + \Omega + \mathcal{D})} e^{i(\Omega_1(\lambda) - \Omega_1(-a))x + i(\Omega_2(\lambda) - \Omega_2(-a))t}, \end{aligned} \quad (7.10)$$

где $n = (1/2, 1/2, \dots, 1/2)$,

$$U(\lambda) = \left(\int_{p_0}^{\lambda} dU_1, \dots, \int_{p_0}^{\lambda} dU_g \right), \quad \Omega = \frac{1}{2\pi}(Vx + Wt)$$

и $\mathcal{D} \in \mathbb{C}^g$ – произвольный вектор общего положения, являющийся с точностью до вектора римановых констант отображением Абеля дивизора \mathcal{D} . Нетрудно видеть, что функция $\psi_2(\lambda)$ неоднозначна: при обходе по циклам b_1, \dots, b_g , т. е. при пересечении контура l , она меняет знак, как и предписывается условиям теоремы 5. Функцию $\psi_2(\lambda)$ можно привести к более удобному виду, если учесть, что β -характеристика сводится лишь к сдвигу аргумента тета-функции и что $U(a) - U(-a) = n$, так как

$$dU(\lambda^*) = -dU(\lambda), \quad \int_{\Sigma_a} dU = 2n.$$

Мы имеем

$$\psi_2(\lambda) = \frac{\theta(U(\lambda) + \Omega + \mathcal{D} + n)}{\theta(U(\lambda) + \mathcal{D}) \theta(U(a) + \Omega + \mathcal{D})} e^{i(\Omega_1(\lambda) - \Omega_1(-a))x + i(\Omega_2(\lambda) - \Omega_2(-a))t}. \quad (7.11)$$

Далее, если выбрать в качестве начальной точки интегрирования точку ветвления поверхности Γ_0 , то мы получим равенство

$$\Omega_j(a) = \Omega_j(-a), \quad (7.12)$$

так как

$$\oint_{\Sigma_a} d\Omega_j = 0, \quad d\Omega_j(\lambda^*) = -d\Omega_j(\lambda), \quad j = 1, 2.$$

Таким образом, мы построили функцию $\Psi(\lambda)$. Величины A, B, C, D (7.7) задаются выражениями

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{f(\infty^+)} \theta(U(\infty^+) + \Omega + \mathcal{D}) e^{i(-b - \Omega_1(a))x + i(c - \Omega_2(a))t}, \\ B &= \frac{1}{f(\infty^-)} \theta(U(\infty^+) + \Omega + \mathcal{D} + r) e^{i(b - \Omega_1(a))x + i(-c - \Omega_2(a))t}, \\ C &= \frac{1}{f(\infty^+)} \theta(U(\infty^+) + \Omega + \mathcal{D} + n) e^{i(-b - \Omega_1(-a))x + i(c - \Omega_2(-a))t}, \\ D &= -\frac{1}{f(\infty^-)} \theta(U(\infty^+) + \Omega + \mathcal{D} + n + r) e^{i(b - \Omega_1(-a))x + i(-c - \Omega_2(-a))t}, \end{aligned}$$

где $f(s) = \theta(U(s) + \mathcal{D}) \theta(U(a) + \Omega + \mathcal{D})$ и $r = \int_{\infty^+}^{\infty^-} dU$, интегрирование ведется по пути на поверхности Γ_0 , который пересекает контур l ; параметры b, c определяются из соотношений (7.9).

Поясним наличие знака минус в выражении для D . Дело в том, что если значение функции ψ_2 на первом листе поверхности $\hat{\Gamma}$ равно B , то D – значение этой функции на втором листе поверхности $\hat{\Gamma}$ (см. (7.4)); добавление в аргумент тета-функции интеграла r по пути, пересекающему контур l , дает значение функции $\psi_2(\lambda)$ в бесконечно удаленной точке третьего листа поверхности $\hat{\Gamma}$ (так как этот путь связывает листы 1 и 3, а не 1 и 2). Значения функции $\psi_2(\lambda)$ на листах 2 и 3 отличаются знаком.

Заметим, что выражения (2.15) для спинов инвариантны относительно преобразования $A \rightarrow \alpha A, B \rightarrow \beta B, C \rightarrow \alpha C, D \rightarrow \beta D$ (или, что то же самое, функцию Ψ можно домножить справа на произвольную диагональную матрицу). Произведя соответствующее сокращение с учетом равенства (7.12), получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 6. *Общие конечнозонные решения XXZ -уравнения ЛЛ (2.1) определяются формулами (2.15), где*

$$A = \theta(\Omega + \mathcal{D}), \quad B = \theta(\Omega + \mathcal{D} + r), \quad C = \theta(\Omega + \mathcal{D} + n), \quad D = -\theta(\Omega + \mathcal{D} + r + n), \quad (7.13)$$

$n = (1/2, \dots, 1/2)$, $\mathcal{D} \in \mathbb{C}^g$, $\Omega = (Vx + Wt)/2\pi$. Здесь тета-функция определяется римановой поверхностью Γ_0 , заданной уравнением

$$\omega^2 = (\lambda^2 - a^2) \prod_{i=1}^{2g} (\lambda - E_i),$$

цикл $\sum a = a_1 + \dots + a_g$ которой окружает разрез $[-a, a]$, и

$$r = \int_{\infty^+}^{\infty^-} dU,$$

где путь интегрирования пересекает цикл $\sum a$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Легко показать, что если канонический базис выбран так, что контур l есть $l = \sum_{i=1}^g (\beta_i a_i + \alpha_i b_i)$, $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{Z}$, то

$$\begin{aligned} A &= \theta(\Omega + \mathcal{D}), & B &= \theta(\Omega + \mathcal{D} + r), \\ C &= \theta\left[\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}\right](\Omega + \mathcal{D}), & D &= -\theta\left[\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}\right](\Omega + \mathcal{D} + r), \end{aligned} \quad (7.14)$$

где путь интегрирования пересекает контур l .

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Мы видим, что формулы для решений зависят от выбора базиса циклов. Таким образом, может показаться, что решение определяется не только данными задачи Римана Λ (7.1), т. е. точками ветвления и дивизором полюсов ψ , но и зависят от выбора канонического базиса циклов на Γ_0 . Приведем простое рассуждение, показывающее, что это не так. Действительно, хотя формальная реализация функции Ψ и зависит от выбора базиса циклов, тем не менее очевидно, что функция Ψ единственным образом строится по данным Λ . В самом деле, пусть функции Ψ и $\tilde{\Psi}$ отвечают Λ , тогда

$$\Psi \tilde{\Psi}^{-1} = \varphi(x, t) \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \gamma^{-1} \end{pmatrix}, \quad \gamma = \text{const},$$

что вытекает из голоморфности функций на \mathbb{C} , нормировки (2.12) и редукции (2.11). Такие функции мы не различаем (см. замечание 2 в разделе 1). Поэтому определяемое функцией Ψ по формулам (2.14), (2.15) решение уравнения ЛЛ единственно. Также простое рассуждение показывает, что определяемое гиперэллиптической поверхностью Γ_0 решение зависит только от точек ветвления поверхности Γ_0 и не зависит от способа проведения разрезов между ними.

В различных случаях нам будет удобно по-разному выбирать разрезы и базис циклов поверхности Γ_0 (см. разделы 8–11 ниже). При этом будут получаться одни и те же решения уравнения ЛЛ.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Для нахождения вектора b -периодов Ω удобно воспользоваться следующим простым фактом (см., например, [25]). Пусть z – локальная координата в окрестности точки $P_0 \in \Gamma$ ($z \rightarrow 0$ при $P \rightarrow P_0$) и базисные голоморфные дифференциалы записываются в окрестности точки P_0 в виде $dU = f(z) dz$. Тогда нормированный абелев интеграл второго рода с единственной особенностью в точке P_0 вида $\Omega(P) = z^{-n} + O(1)$ при $z \rightarrow 0$ имеет вектор b -периодов, равный

$$\Omega = -\frac{2\pi i}{(n-1)!} \left. \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} f(z) \right|_{z=0}. \quad (7.15)$$

Для гиперэллиптической поверхности Γ , задаваемой уравнением

$$\omega^2 = \prod_{i=1}^{2g+2} (\lambda - E_i),$$

с нормированным базисом

$$dU_i = \frac{1}{\omega} \sum_{j=1}^g c_{ij} \lambda^{g-j}, \quad i = 1, \dots, g,$$

получаем, что абелевы интегралы второго рода $\Omega_1(P)$, $\Omega_2(P)$ с особенностями (7.9) имеют векторы b -периодов V и W , заданные как

$$V_k = -4\pi c_{k,1}, \quad W_k = 8\pi i \left(c_{k,2} + \frac{c_{k,1}}{2} \sum_{i=1}^{2g+2} E_i \right), \quad k = 1, \dots, g. \quad (7.16)$$

8. ВЫДЕЛЕНИЕ ВЕЩЕСТВЕННЫХ КОНЕЧНОЗОННЫХ РЕШЕНИЙ

Выделим из полученных в разделе 7 общих конечнозонных решений вещественные. Мы не будем приводить достаточно громоздкое строгое доказательство того, что мы нашли все вещественные решения, которое основано на требовании выполнения редукции (2.17). Вместо этого применим технику, предложенную первоначально в работе [27] для уравнения синус-Гордон и основанную на анализе только окончательных формул для решений в тета-функциях Римана.

Отметим сначала простой алгебраический факт, который легко доказывается прямым вычислением.

ЛЕММА 3. *Формулы (2.15) определяют вещественное решение уравнения (2.1) тогда и только тогда, когда выполняется соотношение*

$$D\bar{C} = -B\bar{A}. \quad (8.1)$$

Функция Ψ , отвечающая вещественным решениям уравнения (2.1), удовлетворяет редукции (2.17), следовательно, поверхность Γ_0 обладает антиинволюцией сопряжения. Из замечания 2 раздела 1, теоремы 6 и леммы 3 следует второе ограничение на параметры решения – в этом случае на вектор \mathcal{D} :

$$|\gamma|^4 = \frac{\theta(\Omega + \mathcal{D} + n + r)\overline{\theta(\Omega + \mathcal{D} + n)}}{\theta(\Omega + \mathcal{D} + r)\overline{\theta(\Omega + \mathcal{D} + n)}} = \text{const} > 0, \quad (8.2)$$

т. е. $|\gamma|^4$ – положительная константа, не зависящая от x и t .

Проведем подробный анализ этих двух ограничений сначала в случае анизотропии типа легкая плоскость ($\varepsilon < 0$). Рассмотрим поверхность $\Gamma_{\text{ЛП}}$, изображенную вместе с базисом циклов на рис. 7. Пусть, кроме пары точек ветвления a и $-a$, на вещественной оси лежат еще $\mu + \nu$ пар точек ветвления, μ пар из которых лежат на отрезке $[-a, a]$, и поверхность $\Gamma_{\text{ЛП}}$ имеет еще $g - \mu - \nu$ пар сопряженных точек ветвления.

Антиинволюция сопряжения $\tau(\lambda, \omega) = (\bar{\lambda}, \bar{\omega})$, не меняющая листов поверхности $\Gamma_{\text{ЛП}}$, действует на эти циклы так:

$$\begin{aligned} a_i &= \tau a_i, & b_i &= -\tau b_i, & i &= 1, \dots, \mu, \\ a_i &= -\tau a_i, & b_i &= \tau b_i, & i &= \mu + 1, \dots, \mu + \nu, \\ a_i &= -\tau a_i, & b_i &= \tau b_i + \tau a_i, & i &= \mu + \nu + 1, \dots, g \end{aligned} \quad (8.3)$$

(равенство в группе гомологий $H_1(\Gamma, \mathbb{Z})$), следовательно, нормированные голоморфные дифференциалы при действии антиинволюции τ преобразуются по закону

$$\begin{aligned} \tau^* dU_i(\lambda) &= dU_i(\tau(\lambda)) = dU_i(\bar{\lambda}) = \overline{dU_i(\lambda)}, & i &= 1, \dots, \mu, \\ \tau^* dU_i(\lambda) &= dU_i(\tau(\lambda)) = dU_i(\bar{\lambda}) = -\overline{dU_i(\lambda)}, & i &= \mu + 1, \dots, g. \end{aligned} \quad (8.4)$$

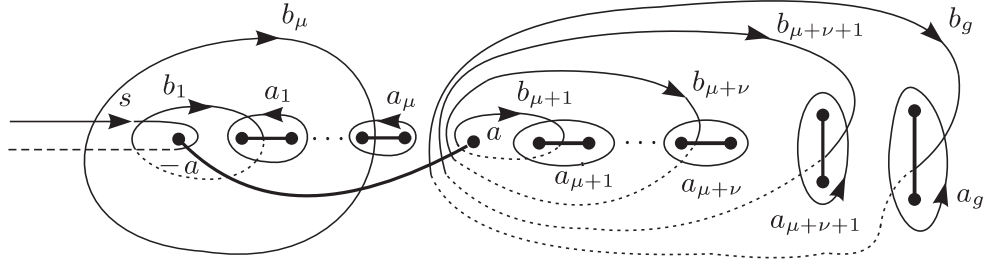


Рис. 7. Базис циклов и контур s на римановой поверхности $\Gamma_{\text{лп}}$. Штриховыми линиями изображены части циклов, лежащие на нижнем листе римановой поверхности.

Таким образом, матрица периодов имеет следующую структуру:

$\operatorname{Re} B_{ij} = 0$ при $i, j = 1, \dots, \mu$, при $i = \mu + 1, \dots, \mu + \nu$, $j = \mu + 1, \dots, g$ и при $i, j = \mu + \nu + 1, \dots, g$, $i \neq j$;

$\operatorname{Re} B_{ij} = 0$ при $i = 1, \dots, \mu$, $j = \mu + 1, \dots, g$;

$\operatorname{Re} B_{ii} = -1/2$ при $i = \mu + \nu + 1, \dots, g$.

Будем обозначать g -мерный вектор как $z = \begin{pmatrix} z' \\ z'' \end{pmatrix}$, $z' \in \mathbb{C}^\mu$, $z'' \in \mathbb{C}^{g-\mu}$, где z' — первые μ координат вектора z , а z'' — последние $g - \mu$ координат. Тета-функция, определяемая заданной выше матрицей B , обладает симметрией

$$\overline{\theta(z)} = \overline{\theta \begin{pmatrix} z' \\ z'' \end{pmatrix}} = \overline{\theta \begin{pmatrix} -\bar{z}' \\ \bar{z}'' + \lambda \end{pmatrix}}, \quad \lambda = \frac{1}{2} \left(\underbrace{0, \dots, 0}_\nu, 1, \dots, 1 \right), \quad \lambda \in \mathbb{R}^{g-\mu}. \quad (8.5)$$

Нетрудно также убедиться, что компоненты вектора $\Omega = \begin{pmatrix} \Omega' \\ \Omega'' \end{pmatrix}$ удовлетворяют условиям $\operatorname{Re} \Omega' = 0$, $\operatorname{Im} \Omega'' = 0$, а интеграл r , вычисленный по пути s , $\tau s = s$ (см. рис. 7), равен

$$r = \begin{pmatrix} r' \\ r'' \end{pmatrix} = \int_s dU(\lambda) = \int_{\tau s = s} dU(\bar{\lambda}) = \begin{pmatrix} \bar{r}' \\ -\bar{r}'' \end{pmatrix}, \quad \operatorname{Im} r' = 0, \quad \operatorname{Re} r'' = 0. \quad (8.6)$$

Пользуясь соотношением (8.5), перепишем условие (8.2) в виде

$$|\gamma|^4 = \frac{\theta(\Omega' + \mathcal{D}' + n' + r') \theta(\Omega' - \bar{\mathcal{D}}' + n')}{\theta(\Omega'' + \mathcal{D}'' + r'') \theta(\Omega'' - \bar{\mathcal{D}}'' + \lambda)} = \operatorname{const} > 0, \quad (8.7)$$

где $\mathcal{D} = \begin{pmatrix} \mathcal{D}' \\ \mathcal{D}'' \end{pmatrix}$ и $n = \begin{pmatrix} n' \\ n'' \end{pmatrix}$. Оно может быть выполнено, только если

$$\begin{pmatrix} \mathcal{D}' + n' + r' \\ \mathcal{D}'' + n'' + r'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\bar{\mathcal{D}}' \\ \bar{\mathcal{D}}'' + \lambda \end{pmatrix} + M + BN, \quad M, N \in \mathbb{Z}^g, \quad (8.8)$$

откуда следует, что $N = 0$, $\nu = 0$, $\lambda = n''$,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}' &= \mathcal{D}'_0 - \frac{1}{2}(r' + n' + \delta), & \operatorname{Re} \mathcal{D}'_0 &= 0, & \delta &\in \mathbb{Z}^\mu / 2\mathbb{Z}^\mu, \\ \mathcal{D}'' &= \mathcal{D}''_0 - \frac{1}{2}r'', & \operatorname{Im} \mathcal{D}''_0 &= 0, \end{aligned} \quad (8.9)$$

где векторы \mathcal{D}'_0 и \mathcal{D}''_0 произвольны. В этом случае $|\gamma|^4 = 1$.

Таким образом, поверхность $\Gamma_{\text{ЛП}}$ описывается уравнением

$$\omega^2 = (\lambda^2 - a^2) \prod_{j=1}^2 (\lambda - e_j) \prod_{i=1}^{g-\mu} (-c_i + \lambda)(\lambda - \bar{c}_i), \quad (8.10)$$

$$\text{Im } c_i \neq 0, \quad e_j \in \mathbb{R}, \quad |e_j| < a.$$

При этом мы имеем 2^μ топологически различных компонент решений (которые не переходят друг в друга при динамике по динамическим переменным). Эти компоненты отвечают 2^μ различным возможностям выбора вектора δ в (8.9), состоящего из нулей и единиц.

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Используя теорему сложения для тета-функций (см., например, обзор [25])

$$\theta(z_1|B)\theta(z_2|B) = \sum_{2\alpha \in \mathbb{Z}^g/2\mathbb{Z}^g} \theta[\alpha, 0](z_1 + z_2|2B)\theta[\alpha, 0](z_1 - z_2|2B) \quad (8.11)$$

и формулы (2.15), (7.13), нетрудно показать, что решения, определяемые векторами $\delta_1 \in \mathbb{Z}^g$ и $\delta_2 = 2n' - \delta_1$, отличаются только преобразованием $(S_1, S_2, S_3) \rightarrow (S_1, -S_2, -S_3)$, сводящимся к выбору осей координат. Мы не будем различать такие решения (хотя во внешнем поле (см. раздел 3) они эволюционируют по-разному). Следовательно, реально число компонент решений вдвое меньше и равно $2^\mu - 1$.

Аналогично рассматривается случай легкой оси ($\varepsilon > 0$). Соответствующая риманова поверхность $\Gamma_{\text{ЛО}}$ изображена на рис. 8. У этой поверхности, кроме точек $-a$ и a , есть еще ν пар сопряженных точек и $g - \nu$ пар вещественных точек ветвления. Справедливы равенства

$$a_i = -\tau a_i, \quad i = 1, \dots, g, \quad b_i = \begin{cases} \tau b_i - \tau a_i + \sum_{k=1}^g \tau a_k, & i = 1, \dots, \nu, \\ \tau b_i + \sum_{k=1}^g \tau a_k, & i = \nu + 1, \dots, g; \end{cases}$$

$$B = -\bar{B} + J, \quad J_{ij} = -1, \quad i \neq j, \quad J_{ii} = \begin{cases} 0, & i = 1, \dots, \nu, \\ -1, & i = \nu + 1, \dots, g; \end{cases}$$

$$\overline{\theta(z)} = \theta(\bar{z} + \lambda), \quad \lambda = \frac{1}{2}(\underbrace{0, \dots, 0}_\nu, 1, \dots, 1);$$

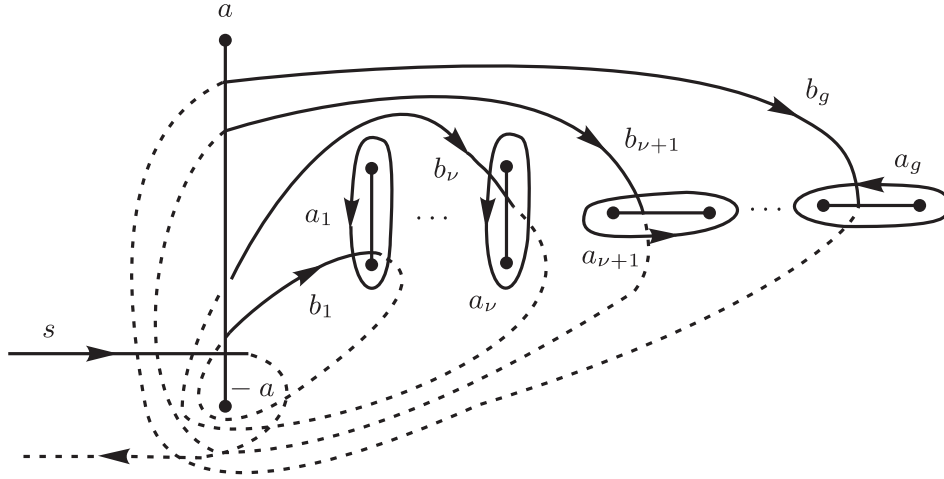
$$r_0 = -\bar{r}_0 - 2n, \quad \text{Re } r_0 = -n, \quad n = \frac{1}{2}(1, 1, \dots, 1),$$

где r_0 означает интеграл r по пути s на рис. 8; вектор $\Omega \in \mathbb{R}^g$. Как и в случае легкой плоскости, условие (8.2) с необходимостью приводит к равенству

$$\mathcal{D} + n + r = \bar{\mathcal{D}} + \lambda + M + BN, \quad M, N \in \mathbb{Z}^g, \quad (8.12)$$

при этом

$$|\gamma|^4 = e^{2\pi i \langle N, n \rangle}, \quad \langle N, n \rangle = \sum_{i=1}^g N_i n_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^g N_i. \quad (8.13)$$

Рис. 8. Риманова поверхность $\Gamma_{ЛО}$.

Возможны два случая.

1. Если $\nu = g$, $\lambda = 0$, $N = 0$, то $|\gamma|^4 = 1$. Вектор \mathcal{D} определяется равенством

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_0 - \frac{1}{2}r, \quad \mathcal{D}_0 \in \mathbb{R}. \quad (8.14)$$

2. Пусть $\nu < g$. Возьмем вещественную часть от равенства (8.12), получим

$$0 = \lambda + M + \operatorname{Re} BN = \lambda + M + \frac{1}{2}JN, \quad -M = \lambda - 2\langle N, n \rangle n + \frac{1}{2}LN, \quad (8.15)$$

где

$$L = \operatorname{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{\nu}, 0, \dots, 0).$$

Во втором из равенств (8.15) слева стоит вектор с целочисленными координатами, а в правой части мы имеем $(LN)_i = 0$, $\lambda_i = 1/2$ для $i = \nu + 1, \dots, g$, следовательно, число $\langle N, n \rangle$ полуцелое. В результате из выражения (8.13) получаем, что $|\gamma|^4 = -1$, и вещественных решений нет.

Таким образом, поверхность $\Gamma_{ЛО}$, определяющая вещественные решения, задается уравнением

$$\omega^2 = (\lambda^2 - a^2) \prod_{i=1}^g (\lambda - c_i)(\lambda - \bar{c}_i), \quad \operatorname{Im} c_i \neq 0, \quad (8.16)$$

и доказана

ТЕОРЕМА 7. *Чтобы конечнозонные решения ХХZ-уравнения ЛЛ (2.1), заданные в теореме 6, были вещественными, необходимо и достаточно, чтобы римановы поверхности $\Gamma_{ЛП}$ и $\Gamma_{ЛО}$ задавались соответственно уравнениями (8.10) и (8.16), вектор \mathcal{D} определялся соответственно условиями (8.9) и (8.14), где $r = \int_s dU$, а пути интегрирования s при $\varepsilon < 0$ и $\varepsilon > 0$ изображены на рис. 7 и 8.*

9. ПРОСТЕЙШИЕ КОНЕЧНОЗОННЫЕ РЕШЕНИЯ В ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ

Простейшим невырожденным конечнозонным решением является решение в случае $g = 1$. Рассмотрим поверхности $\Gamma_{\text{ЛП}}$ (рис. 9а и 9б) и $\Gamma_{\text{ЛО}}$ (рис. 10).

Как уже отмечалось в замечании 7 раздела 7, хотя формальные представления для конечнозонных решений уравнения ЛЛ и зависят от выбора разрезов и базиса циклов поверхности Γ_0 , сами решения определяются только точками ветвления поверхности Γ_0 . В дальнейшем нам будет удобно пользоваться различными представлениями для Γ_0 . В этой связи отметим, например, что поверхности $\Gamma_{\text{ЛП}}$ с базисами циклов, изображенные на рис. 9а, 9б, эквивалентны поверхностям с базисами, изображенными соответственно на рис. 11а, 11б.

Во всех случаях имеется единственный голоморфный дифференциал

$$du(\lambda) = N \frac{d\lambda}{\sqrt{(\lambda^2 - a^2)(\lambda - E_1)(\lambda - E_2)}},$$

где $(E_1, E_2) = (c, \bar{c})$ или $(E_1, E_2) = (e_1, e_2)$. Постоянная N находится из условия нормировки $\oint_{a_1} dU = 1$. Период кривой Γ_0 равен $B = \oint_{b_1} dU$. Периоды V и W интегралов второго рода определяются равенствами (7.16), откуда

$$V = -4\pi i N, \quad W = 4\pi i N(c + \bar{c}).$$

Интеграл $r = 2s_0$ вычисляется непосредственно. Таким образом, как обычно, решение $\vec{S}(x, t) = \vec{Q}_X(x - vt)$ рода $g = 1$ имеет вид кноидальной волны – периодической бегущей волны. Для поверхностей, изображенных на рис. 9а и 10, получаем волну

$$\begin{aligned} A &= \theta[0, 0](2iN(-x + vt) + d - s_0|B), \\ B &= \theta[0, 0](2iN(-x + vt) + d_0 + s_0|B), \\ C &= \theta[0, \frac{1}{2}](2iN(-x + vt) + d - s_0|B), \\ D &= -\theta[0, \frac{1}{2}](2iN(-x + vt) + d + s_0|B), \quad d \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{9.1}$$

скорость которой равна

$$v = c + \bar{c}, \tag{9.2}$$

а вещественный период по x есть

$$X = \frac{i}{2N}. \tag{9.3}$$

По поверхности $\Gamma_{\text{ЛП}}$ (рис. 9б) строятся решения $\vec{Q}_X^+(x - vt)$ и $\vec{Q}_X^-(x - vt)$, отвечающие различному выбору $\delta \in \mathbb{Z}/2\mathbb{R}$ в формуле (8.9). Из замечания 9 раздела 8 следует, что эти решения отличаются друг от друга тривиальным преобразованием $(S_1, S_2, S_3) \rightarrow (S_2, -S_2, -S_3)$, а $\vec{Q}_X^+(x - vt)$ также задается выражениями (9.1), причем $d = d_0 + 1/4$, где d_0 – произвольное мнимое число. Это кноидальная волна со скоростью

$$v = e_1 + e_2 \tag{9.4}$$

и вещественным периодом

$$X = i \frac{B}{N}, \quad N \in \mathbb{R}. \tag{9.5}$$

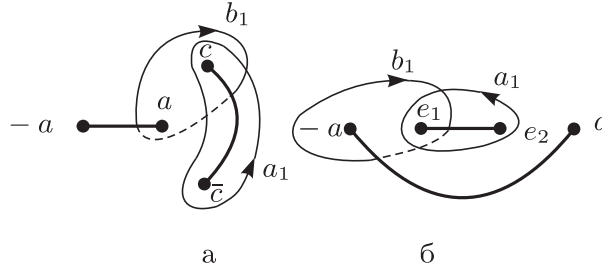


Рис. 9. Римановы поверхности $\Gamma_{\text{ЛП}}$ рода 1 с базисом циклов.

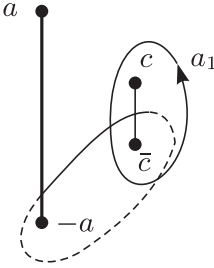


Рис. 10. Риманова поверхность $\Gamma_{\text{ЛО}}$ рода 1 с базисом циклов.

Используя формулу (8.11), легко получить следующее представление для \vec{Q} :

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{\theta[0, 0](z|2B) \theta[0, 0](2s_0|2B)}{\theta[0, \frac{1}{2}](z|2B) \theta[0, \frac{1}{2}](2s_0|2B)} = \frac{\theta_3(z) \theta_3(2s_0)}{\theta_4(z) \theta_4(2s_0)}, \\ Q_2 &= i \frac{\theta[\frac{1}{2}, 0](z|2B) \theta[\frac{1}{2}, 0](2s_0|2B)}{\theta[0, \frac{1}{2}](z|2B) \theta[0, \frac{1}{2}](2s_0|2B)} = i \frac{\theta_2(z) \theta_2(2s_0)}{\theta_4(z) \theta_4(2s_0)}, \\ Q_3 &= \frac{\theta[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}](z|2B) \theta[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}](2s_0|2B)}{\theta[0, \frac{1}{2}](z|2B) \theta[0, \frac{1}{2}](2s_0|2B)} = \frac{\theta_1(z) \theta_1(2s_0)}{\theta_4(z) \theta_4(2s_0)}, \end{aligned} \tag{9.6}$$

где $z = 4iN(-x + vt) + 2d$ и

$$\theta_1(z) = \theta[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}](z), \quad \theta_2(z) = \theta[\frac{1}{2}, 0](z), \quad \theta_3(z) = \theta[0, 0](z), \quad \theta_4(z) = \theta[0, \frac{1}{2}](z)$$

– тета-функции Якоби [29].

Отметим, что решения $\vec{Q}_X(x - vt) = (Q_1, Q_2, Q_3)$ и $\vec{Q}_X^\pm(x - vt) = (Q_1^\pm, Q_2^\pm, Q_3^\pm)$ удовлетворяют условиям

$$\vec{Q}_X\left(x + \frac{X}{2} - vt\right) = (Q_1, -Q_2, -Q_3), \quad \vec{Q}_X^\pm\left(x + \frac{X}{2} - vt\right) = (-Q_1^\pm, -Q_2^\pm, Q_3^\pm).$$

Решение $\vec{Q}_X(x - vt)$ построено по римановой поверхности, определяемой “свободными” краями зон c и \bar{c} , а решение $\vec{Q}_X^\pm(x - vt)$ аналогично определяется краями зон e_1 и e_2 . По кривой Γ_0 с краями зон $-c$ и $-\bar{c}$ строится решение $\vec{Q}_X(-x - vt)$, а по кривой Γ_0 с краями зон $-e_1$ и $-e_2$ строится решение $\vec{Q}_X^\pm(-x - vt)$, описывающее точно такую же волну, которая движется навстречу волне $\vec{Q}_X(x - vt)$.

Если $c = -\bar{c}$ (если $e_1 = -e_2$), то, как видно из формул (9.2), (9.4), получаются стационарные периодические с периодами (9.3), (9.5) решения, которые мы обозначим как $\vec{Q}_X(x)$ (как $\vec{Q}_X^\pm(x)$).

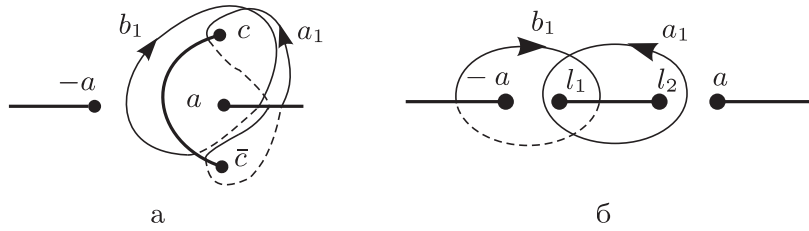


Рис. 11. Римановы поверхности $\Gamma_{\text{ЛП}}$ с базами циклов, эквивалентные поверхностям, изображенным на рис. 9.

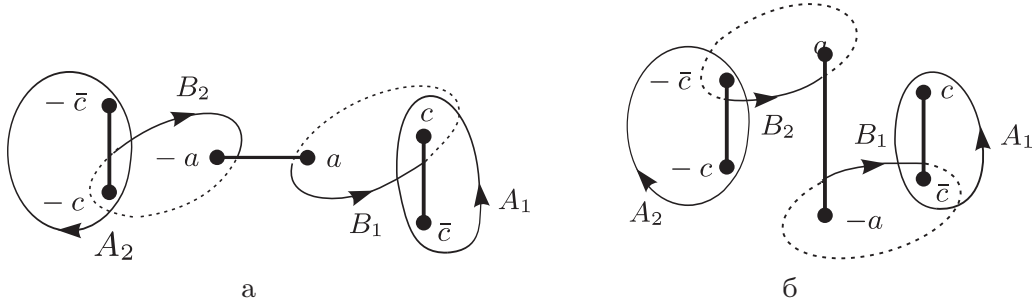


Рис. 12. Симметричные поверхности $\Gamma_{\text{ЛП}}$ (а) и $\Gamma_{\text{ЛО}}$ (б).

Разумеется, решения типа (9.1), (9.6) легче найти прямой подстановкой выражения $\vec{S}(x - vt)$ в формулу (2.1). Однако заметим, что, кроме решений (9.1), (9.6), мы нашли и соответствующие Ψ -функции, которые позволяют применять процедуру “одевания” (см. раздел 4), т. е. строить решения, описывающие взаимодействие кноидальных волн \vec{Q} с солитонами, бризерами и доменными стенками.

Решение, строящееся по кривой Γ_0 рода $g = 2$, есть двухфазное решение, которое описывает взаимодействие двух кноидальных волн $\vec{Q}_{X_1}(x - v_1t)$ и $\vec{Q}_{X_2}(x - v_2t)$. В общем случае оно выражается в терминах двумерных тета-функций Римана. В работах [30], [31] показано, что в некоторых случаях невырожденные (т. е. не сводящиеся к взаимодействию кноидальных волн и солитонов) многофазные решения также выражаются в эллиптических функциях. В работах [27], [30], [32], [33] было предложено несколько различных способов выделения решений в эллиптических функциях и тета-функциях меньшей размерности из общих конечнозонных. Так, в работе [32] были предложены схемы, основанные на приведении абелевых интегралов к эллиптическим и на редукциях многомерных тета-функций, которые отвечают римановым поверхностям с богатыми группами автоморфизмов.

Мы рассмотрим простейшие такие поверхности рода $g = 2$ и $g = 3$. Кривые $\Gamma_{\text{ЛП}}$ и $\Gamma_{\text{ЛО}}$ (см. рис. 12), заданные уравнением

$$\omega^2 = (\lambda^2 - a^2)(\lambda^2 - c^2)(\lambda^2 - \bar{c}^2) \tag{9.7}$$

обладают инволюцией $\phi: (\lambda, \omega) \rightarrow (-\lambda, -\omega)$ ⁵⁾, т. е. поверхность Γ_0 является накрытием кривой Γ_0/ϕ рода $g = 1$. Это разветвленное двулистное накрытие. Общая схема редукции тета-функции таких накрытий приведена в приложении. В обозначениях приложения $\hat{\Gamma} = \hat{C}$, поверхность $C = \hat{C}/\varphi$ задается уравнением

$$\omega_1^2 = z(z - a^2)(z - c^2)(z - \bar{c}^2), \tag{9.8}$$

⁵⁾Отметим, что ϕ не меняет листы Γ_0 .

Рис. 13. Кривые C (а) и C_π (б).

неподвижные точки инволюции ϕ суть $\lambda = \infty$ на обоих листах ($n = 1$). Циклы $A_1 = a_1, B_1 = b_1, A_2 = a_{1'}, B_2 = b_{1'}$. Нормированные голоморфные дифференциалы кривой \widehat{C} равны

$$dU_1 = u_1 = \frac{-\alpha\lambda + \beta}{\omega} d\lambda \quad dU_2 = u_{1'} = \frac{-\alpha\lambda - \beta}{\omega} d\lambda.$$

Нормированный голоморфный дифференциал v кривой C (9.8) равен

$$v = u_1 - u_{1'} = \frac{2\beta}{\omega} d\lambda = \frac{\beta}{\omega_1} dz, \quad z = \lambda^2. \quad (9.9)$$

Нормированный дифференциал Прима

$$w = u_1 + u_{1'} = -\frac{2\alpha\lambda}{\omega} d\lambda = -\frac{\alpha}{\omega_2} dz \quad (9.10)$$

также является эллиптическим, он задан на кривой C_π , определяемой уравнением

$$\omega_2^2 = (z - a^2)(z - c^2)(z - \bar{c}^2). \quad (9.11)$$

Кривые C и C_π (см. рис. 13) для случая легкой плоскости изображены вместе с базисом, отвечающим дифференциалам v и w (для кривой $\Gamma_{\text{ЛО}}$ рисунки совершенно аналогичны).

Константы α, β находятся из условий нормировки

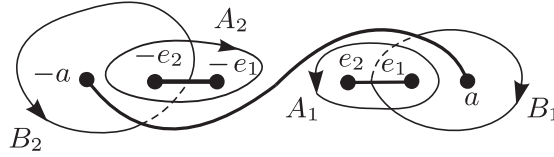
$$\oint_A v = 1, \quad \oint_A w = 1, \quad (9.12)$$

где интегрирование ведется по A -циклам поверхностей C (9.8) и C_π (9.11) соответственно. Матрица периодов кривой \widehat{C} равна (см. формулу (П.4) приложения)

$$B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \Pi + T & \Pi - T \\ \Pi - T & \Pi + T \end{pmatrix}, \quad T = \oint_B v, \quad \Pi = \oint_B w. \quad (9.13)$$

Определяемая ею тета-функция представляется согласно соотношению (П.8) через одномерные тета-функции:

$$\begin{aligned} \theta((z_1, z_2)|B) &= \theta[0, 0](z_1 + z_2|2\Pi) \theta[0, 0](z_1 - z_2|2T) + \\ &+ \theta\left[\frac{1}{2}, 0\right](z_1 + z_2|2\Pi) \theta\left[\frac{1}{2}, 0\right](z_1 - z_2|2T) = \\ &= \theta_3(z_1 + z_2|2\Pi) \theta_3(z_1 - z_2|2T) + \theta_2(z_1 + z_2|2\Pi) \theta_2(z_1 - z_2|2T), \end{aligned} \quad (9.14)$$


 Рис. 14. Симметричная поверхность $\Gamma_{\text{ЛП}}$ рода 2.

где θ_3, θ_2 – тета-функции Якоби. Величины V, W и r_0 (см. теорему 6 в разделе 7) также обладают определенной симметрией. Из тождества (7.16) следует, что

$$V = 4\pi i \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad W = 8\pi i \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (9.15)$$

Для интеграла r_0 получаем

$$r_0 = \int_s d\vec{U} = \int_s \begin{pmatrix} u_1 \\ u_{1'} \end{pmatrix} = \int_{\phi_s} \begin{pmatrix} \phi(u_1) \\ \phi(u_{1'}) \end{pmatrix} = - \int_{\phi_s} \begin{pmatrix} u_{1'} \\ u_1 \end{pmatrix} = - \int_s \begin{pmatrix} u_{1'} \\ u_1 \end{pmatrix},$$

откуда

$$r_0 = s_0 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad s_0 = \int_l w, \quad (9.16)$$

где контур l изображен на рис. 13а. Подставляем соотношения (9.14)–(9.16) в (7.13), получаем окончательные выражения для решения $\vec{S}(x, t) = \vec{Q}_{X, \tau}(x, t)$ (см. (2.15)):

$$\begin{aligned} A &= \theta_3(z_1|2\Pi) \theta_3(z_2 - s_0|2T) + \theta_2(z_1|2\Pi) \theta_2(z_2 - s_0|2\Pi), \\ B &= \theta_3(z_1|2\Pi) \theta_3(z_2 + s_0|2T) + \theta_2(z_1|2\Pi) \theta_2(z_2 + s_0|2\Pi), \\ C &= \theta_3(z_1|2\Pi) \theta_3(z_2 - s_0|2T) - \theta_2(z_1|2\Pi) \theta_2(z_2 - s_0|2\Pi), \\ D &= -\theta_3(z_1|2\Pi) \theta_3(z_2 + s_0|2T) + \theta_2(z_1|2\Pi) \theta_2(z_2 + s_0|2\Pi), \end{aligned} \quad (9.17)$$

где $z_1 = 4i\alpha x + d_1$, $z_2 = 8i\beta t + d_2$, s_0 – интеграл (9.16), а величины $d_1, d_2 \in \mathbb{R}$ произвольны. При выводе этой формулы мы учли условие (8.9) ($\mu = 0$) и тот факт, что $n = (1/2, 1/2)$. Величины α, β определяются из формул (9.9), (9.10), (9.12), где v и w – дифференциалы кривых C (9.8) и C_π (9.11), периоды которых задаются равенством (9.13).

Решение $\vec{Q}_{X, \tau}(x, t)$ (9.15) представляет собой стоячую волну, периодическую по x с периодом $X = 1/4i\alpha$ и периодическую по t с периодом $\tau = 1/8i\beta$, которая описывает нетривиальное взаимодействие двух волн $\vec{Q}(x - vt)$ и $\vec{Q}(-x - vt)$ (см. (9.2)), бегущих с одинаковыми скоростями навстречу друг другу. Каждая из величин $A \pm C$ и $B \pm D$ – это просто произведение двух функций, одна из которых зависит только от x , а другая – только от t . В этом смысле решение (9.17) является аналогом известного анзаца Лэмба [31] для уравнения синус-Гордон.

Другое интересное решение в случае легкой плоскости отвечает $\Gamma_{\text{ЛП}}$ (см. рис. 14). Анализ этого решения проводится совершенно аналогично случаю, разобранному выше. В результате получаем, что четыре ($2^\mu = 4$) стоячие волны, описывающие взаимодействие различных пар волн $\vec{Q}_X^\pm(x - vt)$ и $\vec{Q}_X^\pm(-x - vt)$ (мы, очевидно, имеем четыре комбинации), задаются выражениями (9.17), в которых

$$z_1 = 4i\alpha x + d_1 + \frac{\delta_1}{2}, \quad z_2 = 8i\beta t + d_2 + \frac{\delta_2}{2},$$

где $d_{1,2}$ – произвольные числа, $\text{Re } d_{1,2} = 0$, а $\delta_{1,2}$ могут принимать значения 0 и 1.

Из замечания 9 в разделе 8 следует, что существенно различными являются только два решения, отвечающие, например, следующему выбору: $\delta = (0, 0)$ или $\delta = (1, 0)$, т. е. решения, описывающие взаимодействие волн Q^+ с Q^+ или Q^+ с Q^- ; другие две стоячие волны отличаются от них тривиальным образом.

Отметим также, что решению, описывающему взаимодействие стационарной волны $\vec{Q}(x)$ и кноидальной волны $\vec{Q}(x - vt)$, отвечает поверхность рода 2, заданная уравнением

$$\omega^2 = (\lambda^2 - a^2)(\lambda - c)(\lambda - \bar{c})(\lambda^2 + d^2), \quad d \in \mathbb{R},$$

которая не обладает дополнительной симметрией, поэтому данное взаимодействие является более сложным и описывается двумерными тета-функциями.

Наконец, рассмотрим специальное решение рода $g = 3$, отвечающее поверхности \hat{C} , заданной уравнением

$$\omega^2 = (\lambda^2 - a^2)(\lambda^2 - c^2)(\lambda^2 - \bar{c}^2)(\lambda^2 + d^2), \quad d \in \mathbb{R}. \quad (9.18)$$

Как видно из рис. 15 (в случае легкой оси все абсолютно аналогично), решение, отвечающее такой поверхности, описывает взаимодействие трех волн: $\vec{Q}(x)$, $\vec{Q}(x - vt)$ и $\vec{Q}(-x - vt)$. Поверхность (9.18) обладает инволюцией $\phi: (\lambda, \omega) \rightarrow (-\lambda, \omega)$, которая не переставляет бесконечно удаленные точки ∞^+ и ∞^- и действует на базис группы гомологий $H_1(\hat{C}, \mathbb{Z})$ (см. рис. 15) так, как это указано в приложении. Здесь $C = \hat{C}/\phi$, т. е. поверхность C задается уравнением

$$\omega_1^2 = (z - a^2)(z - c^2)(z - \bar{c}^2)(z + d^2), \quad (9.19)$$

при этом $\hat{g} = 3$, $g = 1$, $n = 2$, неподвижные точки суть 0 и ∞ . Нормированный дифференциал поверхности C равен

$$v = u_1 - u_{1'} = \frac{\alpha\lambda}{\omega} d\lambda = \frac{\alpha}{2\omega_1} dz, \quad z = \lambda^2,$$

нормированные дифференциалы Прима задаются равенствами

$$\begin{aligned} w_1 = u_1 + u_{1'} &= \frac{\beta_1\lambda^2 + \gamma_1}{\omega} d\lambda = \frac{\beta_1 z + \gamma_1}{2\omega_2} dz, \\ w_2 = u_2 &= \frac{\beta_2\lambda^2 + \gamma_2}{\omega} d\lambda = \frac{\beta_2 z + \gamma_2}{2\omega_2} dz, \end{aligned} \quad (9.20)$$

где $\omega_2^2 = z(z - a^2)(z - c^2)(z - \bar{c}^2)(z + d^2)$. Отсюда с учетом равенства (7.16) следует, что векторы V и W равны

$$V = -2\pi i \begin{pmatrix} \beta_1 \\ 2\beta_2 \\ \beta_1 \end{pmatrix}, \quad W = 4\pi i \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}. \quad (9.21)$$

Для матрицы b -периодов согласно (П.4) получаем

$$B = \begin{pmatrix} (\Pi_{11} + T)/2 & \Pi_{12} & (\Pi_{11} - T)/2 \\ \Pi_{12} & 2\Pi_{22} & \Pi_{12} \\ (\Pi_{11} - T)/2 & \Pi_{12} & (\Pi_{11} + T)/2 \end{pmatrix}. \quad (9.22)$$

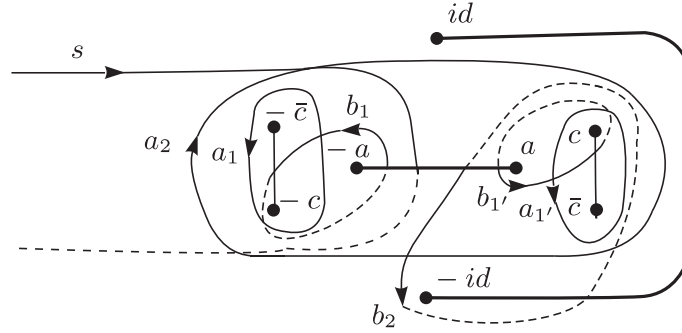


Рис. 15

Выкладка, аналогичная (9.16), показывает, что интеграл

$$r_0 = \int_s d\vec{U} = \int_s \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_{1'} \end{pmatrix} = - \int_{\phi s} \begin{pmatrix} u_{1'} \\ u_2 \\ u_1 \end{pmatrix} = - \int_s \begin{pmatrix} u_{1'} \\ u_2 \\ u_1 \end{pmatrix} - \int_{-2b_2+a_2} \begin{pmatrix} u_{1'} \\ u_2 \\ u_1 \end{pmatrix}$$

(путь s указан на рис. 15) равен

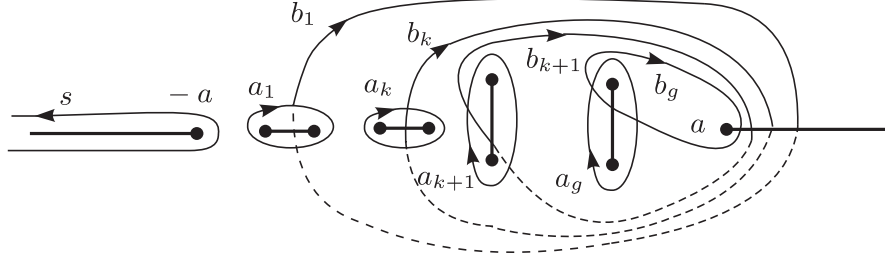
$$r_0 = \begin{pmatrix} s_0 \\ -1/2 \\ s_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Pi_{12} \\ -2\Pi_{22} \\ \Pi_{12} \end{pmatrix}, \quad s_0 = \int_{\infty}^0 v. \quad (9.23)$$

И окончательно, проводя необходимые вычисления (см. (П.8)), получаем, что при любых вещественных d_1, d_2, d_3 решение уравнения (2.1) по формулам (2.15) определяется величинами

$$\begin{aligned} A &= \theta\left[\left(0, \frac{1}{2}\right), (0, 0)\right] \left(\begin{matrix} z_1 \\ z_2 \end{matrix} \middle| 2\Pi\right) \theta[0, 0](z_3 - s_0|2T) + \\ &\quad + \theta\left[\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), (0, 0)\right] \left(\begin{matrix} z_1 \\ z_2 \end{matrix} \middle| 2\Pi\right) \theta\left[\frac{1}{2}, 0\right](z_3 - s_0|2T), \\ B &= \theta\left[\left(0, \frac{1}{2}\right), (0, 0)\right] \left(\begin{matrix} z_1 \\ z_2 \end{matrix} \middle| 2\Pi\right) \theta[0, 0](z_3 + s_0|2T) + \\ &\quad + \theta\left[\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), (0, 0)\right] \left(\begin{matrix} z_1 \\ z_2 \end{matrix} \middle| 2\Pi\right) \theta\left[\frac{1}{2}, 0\right](z_3 + s_0|2T), \\ C &= \theta\left[\left(0, \frac{1}{2}\right), \left(0, \frac{1}{2}\right)\right] \left(\begin{matrix} z_1 \\ z_2 \end{matrix} \middle| 2\Pi\right) \theta[0, 0](z_3 - s_0|2T) + \\ &\quad + \left[\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(0, \frac{1}{2}\right)\right] \left(\begin{matrix} z_1 \\ z_2 \end{matrix} \middle| 2\Pi\right) \theta\left[\frac{1}{2}, 0\right](z_3 - s_0|2T), \\ D &= \theta\left[\left(0, \frac{1}{2}\right), \left(0, \frac{1}{2}\right)\right] \left(\begin{matrix} z_1 \\ z_2 \end{matrix} \middle| 2\Pi\right) \theta[0, 0](z_3 + s_0|2T) + \\ &\quad + \theta\left[\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(0, \frac{1}{2}\right)\right] \left(\begin{matrix} z_1 \\ z_2 \end{matrix} \middle| 2\Pi\right) \theta\left[\frac{1}{2}, 0\right](z_3 + s_0|2T). \end{aligned} \quad (9.24)$$

Здесь

$$z_1 = -2i\beta_1 x + d_1, \quad z_2 = -2i\beta_2 x + d_2, \quad z_3 = 4i\alpha t + d_3.$$

Рис. 16. Вырождение в многосолитонное решение. Поверхность $\Gamma_{\text{ЛП}}$.

Это решение является периодическим с периодом $\tau = 1/4i\alpha$ по t , а от x зависит сложным, непериодическим образом.

Аналогично, для любой кривой рода $\hat{g} = 2g + n - 1$, обладающей инволюцией с неподвижными точками ∞^+ и ∞^- , динамика по x ограничена на примииан Π размерности $g + n - 1$, а динамика по t – на якобиан T размерности g .

10. N -СОЛИТОННЫЕ РЕШЕНИЯ В СЛУЧАЕ “ЛЕГКАЯ ПЛОСКОСТЬ”

Рассмотрим кривую $\Gamma_{\text{ЛП}}$, изображенную вместе с базисом циклов на рис. 16, и подвергнем точки ветвления E_j , $j = 1, \dots, 2g$, следующему предельному переходу:

$$\begin{aligned} E_{2k-1}, E_{2k} &\rightarrow \lambda_k \in (-a, a), \quad k = 1, \dots, g, \\ \lambda_1 &< \lambda_2 < \dots < \lambda_g. \end{aligned} \quad (10.1)$$

Кривая $\Gamma_{\text{ЛП}}$ вырождается при этом в кривую рода ноль – риманову поверхность функции $\sqrt{\lambda^2 - a^2}$, а голоморфные дифференциалы $dU_\nu(\lambda)$ – в дифференциалы с особенностями в точках λ_k :

$$dU_\nu(\lambda) \rightarrow dU_\nu^0(\lambda) = \frac{\varphi_\nu^0(\lambda)}{\sqrt{\lambda^2 - a^2} \prod_{k=1}^g (\lambda - \lambda_k)} d\lambda,$$

где

$$\varphi_\nu^0(\lambda) = \sum_{k=1}^g c_\nu^{0,k} \lambda^{g-k}.$$

Полиномы $\varphi_\nu^0(\lambda)$ определяются из условий нормировки

$$\begin{aligned} \delta_\mu^\nu &= \int_{a_\mu} dU_\nu^0(\lambda) = -2\pi i \operatorname{res}(dU_\nu^0(\lambda); \lambda_\mu) = \\ &= -\frac{2\pi i}{\sqrt{\lambda_\mu^2 - a^2}} \varphi_\nu^0(\lambda_\mu) \frac{1}{\prod_{k \neq \mu} (\lambda_\mu - \lambda_k)}, \end{aligned}$$

следовательно,

$$\varphi_\nu^0(\lambda) = c_\nu^{0,1} \prod_{k \neq \nu} (\lambda - \lambda_k), \quad c_\nu^{0,1} = \frac{i\sqrt{\lambda_\nu^2 - a^2}}{2\pi} = -\frac{\varkappa_\nu}{2\pi}, \quad \varkappa_\nu = \sqrt{a^2 - \lambda_\nu^2} > 0. \quad (10.2)$$

Поэтому дифференциалы $dU_\nu^0(\lambda)$ можно записать в виде

$$dU_\nu^0(\lambda) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\varkappa_\nu}{\sqrt{\lambda^2 - a^2}(\lambda - \lambda_\nu)} d\lambda. \quad (10.3)$$

В силу (10.3) предельные значения для коэффициентов $c_\nu^{0,2}$ суть

$$c_\nu^{0,2} = -c_\nu^{0,1} \sum_{k \neq \nu} \lambda_k = \frac{1}{2\pi} \varkappa_\nu \sum_{k \neq \nu} \lambda_k, \quad \nu = 1, \dots, g.$$

Отсюда для компонент векторов V и W имеем

$$\begin{aligned} V_\nu \rightarrow V_\nu^0 &= -4\pi i c_\nu^{0,1} = 2i\varkappa_\nu, \\ W_\nu \rightarrow W_\nu^0 &= 8\pi i \left(c_\nu^{0,1} \sum_{k=1}^g \lambda_k + c_\nu^{0,2} \right) = -4i\varkappa_\nu \lambda_\nu. \end{aligned} \quad (10.4)$$

Приступим теперь к вычислению предельных значений для матрицы b -периодов базиса $d\vec{U}$. Пусть $\nu > \mu$. Тогда

$$B_{\nu\mu} \rightarrow B_{\nu\mu}^0 = 2 \int_{\lambda_\nu}^a dU_\mu^0 = -\frac{i}{\pi} \ln \frac{\gamma_\mu - \gamma_\nu}{\gamma_\mu + \gamma_\nu}, \quad \gamma_\nu = \sqrt{\frac{a - \lambda_\nu}{a + \lambda_\nu}} > 0. \quad (10.5)$$

В силу симметричности матрицы B при $\nu < \mu$ для $B_{\nu\mu}^0$ из (10.5) следует, что

$$B_{\nu\mu}^0 = -\frac{i}{\pi} \ln \frac{\gamma_\nu - \gamma_\mu}{\gamma_\nu + \gamma_\mu}. \quad (10.6)$$

Диагональные элементы матрицы B конечных пределов не имеют. Несложные выкладки показывают, что

$$\operatorname{Re}(iB_{\nu\nu}) = \frac{1}{\pi} \ln |E_{2\nu+1} - E_{2\nu}| + O(1),$$

т. е. при рассматриваемом предельном переходе

$$\operatorname{Re}(iB_{\nu\nu}) \rightarrow -\infty. \quad (10.7)$$

Нам осталось обсудить поведение векторов r и \mathcal{D} . Для вектора r имеем

$$r_\nu \rightarrow \frac{1}{2\pi i} r_\nu^0 + 1, \quad r_\nu^0 = -4\pi i \int_a^{\infty^+} dU_\nu(\lambda) = -2 \ln \frac{i\gamma_\nu + 1}{i\gamma_\nu - 1}. \quad (10.8)$$

Заметим, что $\operatorname{Re} r_\nu^0 = 0$. Что же касается вектора \mathcal{D} , то это свободный параметр, и мы вправе задать его поведение при предельном переходе (10.1) по своему усмотрению. Положим

$$\mathcal{D}_\nu = \frac{1}{2} B_{\nu\nu} + \frac{1}{2\pi i} \eta_\nu^0 + o(1), \quad (10.9)$$

где η_ν^0 – пока произвольные комплексные числа. На этом вычисление предельных значений всех входящих в формулы (7.13) параметров заканчивается, и мы теперь

можем написать предельные выражения для соответствующих решений уравнения ЛЛ.

Представим показатель экспоненты, входящей в определение ряда для функции $\theta(\Omega + \mathcal{D} + lr + kn)$ при $l = 0, 1$ и $k = 0, 1$, в виде

$$\begin{aligned} & \pi i \sum_{\nu=1}^g B_{\nu\nu} m_{\nu} (m_{\nu} + 1) + 2\pi i \sum_{\nu>\mu} B_{\nu\mu} m_{\nu} m_{\mu} + \\ & + \sum_{\nu=1}^g m_{\nu} (V_{\nu} x + W_{\nu} t + \eta_{\nu}^0 + lr_{\nu}^0 + k\pi i + o(1)). \end{aligned}$$

В силу (10.7) при предельном переходе (10.1) из всей бесконечной суммы, входящей в определение функции $\theta(\Omega + \mathcal{D} + lr + kn)$, остаются только члены, отвечающие векторам m , которые принадлежат множеству вершин $\{0, -1\}^g$ куба $[0, -1]^g$. Таким образом, учитывая формулы (10.4)–(10.8), мы приходим к выводу, что при предельном переходе (10.1), (10.9) $\theta(\Omega + \mathcal{D} + lr + kn) \rightarrow \theta_k^l(x, t)$, где

$$\begin{aligned} \theta_k^l(x, t) = & \sum_{m \in \{0, -1\}^g} \exp \left\{ \sum_{\nu>\mu} \ln \left| \frac{\gamma_{\nu} - \gamma_{\mu}}{\gamma_{\nu} + \gamma_{\mu}} \right|^2 m_{\nu} m_{\mu} \right\} + \\ & + \sum_{\nu=1}^g m_{\nu} (-2\kappa_{\nu} x + 4\kappa_{\nu} \lambda_{\nu} t + \eta_{\nu}^0 + lr_{\nu}^0 + k\pi i); \end{aligned} \quad (10.10)$$

получающиеся в результате рассматриваемого предельного перехода решения уравнения ЛЛ описываются формулами

$$A = \theta_0^0(x, t), \quad B = \theta_0^1(x, t), \quad C = \theta_1^0(x, t), \quad D = -\theta_1^1(x, t). \quad (10.11)$$

Последнее, что осталось выяснить, – это условия на вектор η^0 , гарантирующие вещественность решения (10.11). Так как все величины γ_{ν} , κ_{ν} , λ_{ν} вещественные, а r_{ν}^0 чисто мнимые, действие сопряжения на $\theta_k^l(x, t)$ сводится лишь к замене в правой части равенства (10.10) η_{ν}^0 на $\overline{\eta_{\nu}^0}$ и r_{ν}^0 на $-r_{\nu}^0$. Отсюда легко понять, что соотношение (8.1) эквивалентно в рассматриваемой ситуации требованию

$$\overline{\eta_{\nu}^0} - \eta_{\nu}^0 = \pi i + r_{\nu}^0 + 2\pi i z, \quad z = 0, -1. \quad (10.12)$$

Итак, формулы (10.10), (10.11) при условии (10.12) описывают вещественное решение уравнения ЛЛ, которое параметризуется $2g$ вещественными параметрами $(\lambda_{\nu}, \operatorname{Re} \eta_{\nu})$, $\nu = 1, \dots, g$. При $g = 1$ получается простой солитон, найденный ранее в разделе 5 с помощью метода “одевания”:

$$\theta_k^l = 1 + e^{-2\kappa x + 4\kappa \lambda t - \eta^0 - lr^0 - \pi i k},$$

следовательно,

$$\begin{aligned} S_1(x, t) &= -\operatorname{th}(2\sqrt{a^2 - \lambda^2}(x - 2\lambda t) + \Delta), \\ S_2(x, t) &= \mp \frac{\lambda}{a} \frac{1}{\operatorname{ch}(2\sqrt{a^2 - \lambda^2}(x - 2\lambda t) + \Delta)}, \\ S_3(x, t) &= \pm \frac{\sqrt{a^2 - \lambda^2}}{a} \frac{1}{\operatorname{ch}(2\kappa x - 4\kappa \lambda t + \Delta)}, \end{aligned} \quad (10.13)$$

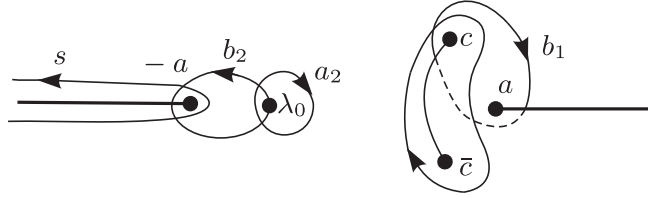


Рис. 17. Поверхность Г_{ЛП} в случае частичного вырождения. Комплексные точки ветвления.

где $\Delta = -\operatorname{Re} \eta^0$, знаки плюс в S_3 и минус в S_2 соответствуют выбору $z = -1$ в (10.12). При $g > 1$ формулы (10.10), (10.11) описывают процесс взаимодействия g простых солитонов (10.13) между собой. Простой стандартный анализ (см., например, работу [34]) суммы, стоящей в правой части равенства (10.10), при $t \rightarrow \pm\infty$ и $x - 2\lambda_j t = \text{const}$ показывает, что j -й солитон, который имел при $t \rightarrow -\infty$ скорость λ_j и фазу Δ_j^- , имеет при $t \rightarrow +\infty$ ту же скорость λ_j и фазу

$$\Delta_j^+ = \Delta_j^- + 2 \sum_{\nu=j+1}^g \ln \left| \frac{\gamma_j - \gamma_\nu}{\gamma_j + \gamma_\nu} \right| - 2 \sum_{\nu=1}^{j-1} \ln \left| \frac{\gamma_j - \gamma_\nu}{\gamma_j + \gamma_\nu} \right|.$$

11. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПРОСТОГО СОЛИТОНА С КНОИДАЛЬНОЙ ВОЛНОЙ (СЛУЧАЙ “ЛЕГКОЙ ПЛОСКОСТИ”)

Рассмотрим “частичное” вырождение кривой Г_{ЛП} из предыдущего раздела, считая $g = 2$:

$$E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow \lambda_0 \in (-a, a), \quad E_3 = \bar{E}_4 \equiv c, \quad \operatorname{Im} c \neq 0. \quad (11.1)$$

“Предельная” кривая изображена на рис. 17. В отличие от ситуации раздела 10 род предельной кривой уменьшился не до нуля. Из двух голоморфных дифференциалов один и в пределе остается голоморфным:

$$dU_1(\lambda) \rightarrow dU_1^0(\lambda) = \frac{c_1^{0,1}}{\sqrt{(\lambda^2 - a^2)(\lambda - c)(\lambda - \bar{c})}} d\lambda, \quad (11.2)$$

$$dU_2(\lambda) \rightarrow dU_2^0(\lambda) = \frac{c_2^{0,1}\lambda + c_2^{0,2}}{(\lambda - \lambda_0)\sqrt{(\lambda^2 - a^2)(\lambda - c)(\lambda - \bar{c})}} d\lambda,$$

Условия нормировки в пределе принимают вид

$$c_1^{0,1} = \left(\int_{a_1} \frac{d\lambda}{\sqrt{(\lambda^2 - a^2)(\lambda - c)(\lambda - \bar{c})}} \right)^{-1},$$

$$c_2^{0,1}\lambda_0 + c_2^{0,2} = -\frac{1}{2\pi i} \sqrt{(\lambda_0^2 - a^2)(\lambda_0 - c)(\lambda_0 - \bar{c})}, \quad (11.3)$$

$$\int_{a_1} \frac{c_2^{0,1}\lambda + c_2^{0,2}}{(\lambda - \lambda_0)\sqrt{(\lambda_0^2 - a^2)(\lambda_0 - c)(\lambda_0 - \bar{c})}} d\lambda = 0.$$

Отсюда для компонент векторов V и W получаем представления

$$\begin{aligned} V_1 &= 4\pi i N, & V_2 &= -2i\hat{\varkappa}_0, \\ W_1 &= -4\pi i N v, & W_2 &= -4i\hat{\varkappa}_0\hat{\lambda}_0, \end{aligned} \quad (11.4)$$

где

$$\begin{aligned} N &= c_1^{0,1} = \left(\int_{a_1} \frac{d\lambda}{\sqrt{(\lambda^2 - a^2)(\lambda - c)(\lambda - \bar{c})}} \right)^{-1}, & v &= c + \bar{c}, & \hat{\lambda}_0 &= \lambda_0 + \frac{v}{2} + \Lambda_0, \\ \Lambda_0 &= - \left(\int_{a_1} \frac{\lambda d\lambda}{(\lambda - \lambda_0)\sqrt{(\lambda^2 - a^2)(\lambda - c)(\lambda - \bar{c})}} \right) \times \\ &\quad \times \left(\int_{a_1} \frac{d\lambda}{(\lambda - \lambda_0)\sqrt{(\lambda^2 - a^2)(\lambda - c)(\lambda - \bar{c})}} \right)^{-1}, \\ \hat{\varkappa}_0 &= -2\pi c_2^{0,1} = 2\pi \frac{\frac{1}{2\pi i} \sqrt{(\lambda_0^2 - a^2)(\lambda_0 - c)(\lambda_0 - \bar{c})}}{\lambda_0 + \Lambda_0}. \end{aligned}$$

Вектор r и элементы B_{1j} матрицы b -периодов в пределе также выражаются через эллиптические интегралы:

$$r \rightarrow r^0 = \int_s dU^0(\lambda), \quad B_{1j}^0 = \int_{b_1} dU_j^0(\lambda), \quad j = 1, 2.$$

В отличие от ситуации раздела 10, только элемент B_{22} матрицы b -периодов стремится к $i\infty$. Поэтому условие типа (10.9) естественно наложить на вторую компоненту вектора \mathcal{D} , оставляя первую ограниченной:

$$\mathcal{D}_1 \equiv d^0, \quad \mathcal{D}_2 = \frac{1}{2\pi i} \eta^0 + \frac{1}{2} B_{22} + o(1), \quad d^0, \eta^0 \in \mathbb{C}. \quad (11.5)$$

В результате исходное суммирование в ряде для $\theta(\Omega + \mathcal{D} + lr + kn)$ по $m \in \mathbb{Z}^2$ при нашем предельном переходе заменяется на суммирование по $m \in \mathbb{Z} \times \{0, -1\}$, и для $\theta_k^l(x, t) = \lim \theta(\Omega + \mathcal{D} + lr + m)$ получается формула

$$\begin{aligned} \theta_k^l(x, t) &= \theta_3 \left(2iN(x - vt) + d^0 + lr_1^0 + \frac{k}{2} \left| B_{11}^0 \right. \right) + \\ &+ \theta_3 \left(2iN(x - vt) + d^0 + lr_1^0 + \frac{k}{2} - B_{12}^0 \left| B_{11}^0 \right. \right) e^{-2\hat{\varkappa}_0(x - 2\hat{\lambda}_0 t) - \eta^0 - 2\pi i l r_2^0 - k\pi i}. \end{aligned} \quad (11.6)$$

Обсудим теперь вопрос вещественности решений. Антиинволюция сопряжения τ в рассматриваемой нами реализации кривой $\Gamma_{\text{ЛП}}$ меняет листы и действует на циклы a_ν и b_1 следующим образом: $\tau a_\nu = a_\nu$, $\nu = 1, 2$ и $\tau b_1 = -b_1 + a_1$. Рассуждая так же, как и в разделе 8, заключаем, что вещественны все c_ν^j и, следовательно, вещественны величины N , v , $\hat{\varkappa}_0$ и $\hat{\lambda}_0$. Что касается матрицы b -периодов и вектора r , то для них имеем

$$\bar{B}_{11}^0 = -B_{11}^0 + 1, \quad \bar{B}_{12}^0 = -B_{12}^0, \quad \bar{r}_\nu = r_\nu, \quad \nu = 1, 2. \quad (11.7)$$

Таким образом, рассматривая $\bar{C} = \overline{\theta_1^0(x, t)}$, получаем

$$\begin{aligned} \bar{C} &= \theta_3(2iN(x - vt) - \bar{d}^0 | B_{11}^0) + \\ &+ \theta_3(2iN(x - vt) - \bar{d}^0 - B_{12}^0 | B_{11}^0) e^{-2\hat{\varkappa}_0(x - 2\hat{\lambda}_0 t) - \bar{\eta}^0 + \pi i}. \end{aligned}$$

Полагая

$$-\bar{d}^0 = d^0 + r_1^0, \quad -\bar{\eta}^0 = -\eta^0 - 2\pi i r_2^0 - \pi i, \quad (11.8)$$

мы, как легко видеть, получаем равенство $\bar{C} = B$. Нетрудно проверить, что соотношения (10.8) гарантируют также выполнение равенства $\bar{A} = -D$, т. е. вещественность соответствующего решения уравнения ЛЛ.

Подведем итог. Положим

$$d^0 = -id - \frac{1}{2}r_i^0 \equiv id - s, \quad \eta^0 = \Delta - i\pi r_2^0 - \frac{i\pi}{2}, \quad B_{11}^0 = B,$$

где Δ , d – произвольные вещественные числа, а $s = r_1^0/2$. Тогда вещественное решение уравнения ЛЛ задается формулами

$$A = \theta_0^0(x, t), \quad B = \theta_0^1(x, t), \quad C = \theta_1^0(x, t), \quad D = -\theta_1^1(x, t), \quad (11.9)$$

где

$$\begin{aligned} \theta_k^l(x, t) &= \theta_3 \left(2iN(x - vt) + id - s + 2ls + \frac{k}{2} \Big| B \right) + \\ &+ \theta_3 \left(2iN(x - vt) + id - s + 2ls + \frac{k}{2} - B_{12} \Big| B \right) e^{-2\hat{\varkappa}_0(x - 2\hat{\lambda}_0 t) - \Delta + i\pi r_2^0 + i\pi/2 - 2\pi i l r_2^0 - k\pi i}. \end{aligned}$$

Решение (11.9) можно интерпретировать как описывающее процесс взаимодействия простого солитона, который характеризуется скоростью $\hat{\lambda}_0$, с кноидальной волной $\vec{Q}_X(x - vt)$ с вещественным периодом $X = i(2B - 1)/2N$ и фазовой скоростью v . Опишем этот процесс подробнее. Из соотношений (11.9) следует, что присутствие солитона существенно сказывается, как и следовало ожидать, лишь в узкой полосе на плоскости (x, t) вокруг “солитонного” луча $x - 2\hat{\lambda}_0 t = 0$. В областях

$$\Omega^+ = \{(x, t): \hat{\varkappa}_0(x - 2\hat{\lambda}_0 t) \ll 0\}, \quad \Omega^- = \{(x, t): \hat{\varkappa}_0(x - 2\hat{\lambda}_0 t) \gg 0\},$$

в частности, при фиксированном t и при $x \rightarrow \pm\infty$ (при $t \rightarrow \pm\infty$ и при фиксированном x) формула (11.9) переходит в формулы (9.1) для невозмущенной кноидальной волны: в области Ω^-

$$\begin{aligned} A &= \theta_3(2iN(x - vt) + id - s | B), \\ B &= \theta_3(2iN(x - vt) + id + s | B), \\ C &= \theta_4(2iN(x - vt) + id - s | B), \\ D &= -\theta_4(2iN(x - vt) + id + s | B); \end{aligned} \quad (11.10)$$

в области Ω^+

$$\begin{aligned} A &= \theta_3(2iN(x - vt) + id - s - B_{12} | B), \\ B &= \theta_3(2iN(x - vt) + id + s - B_{12} | B), \\ C &= -\theta_4(2iN(x - vt) + id - s - B_{12} | B), \\ D &= \theta_4(2iN(x - vt) + id + s - B_{12} | B) \end{aligned} \quad (11.11)$$

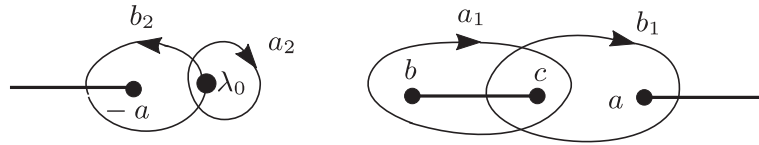


Рис. 18. Поверхность $\Gamma_{\text{ЛП}}$ в случае частичного вырождения. Вещественные точки ветвления.

(при сравнении формул (11.10) и (11.11) с (9.1) следует учитывать замечание 7 в разделе 7).

Таким образом, воздействие на кноидальную волну сводятся к двум эффектам: возникает сдвиг фазы (параметра id) на величину

$$B_{12} = B_{21} = \int_{b_2} dU_1^0(\lambda) = -2 \int_{-a}^{\lambda_0} \frac{N d\lambda}{\sqrt{(\lambda^2 - a^2)(\lambda - c)(\lambda - \bar{c})}}$$

и происходит поворот $(S_1, S_2, S_3) \rightarrow (-S_1, -S_2, -S_3)$ на 180° в плоскости (S_1, S_2) . С другой стороны, как показывают формулы (11.9), (11.4), наличие “кноидального” фона приводит к аддитивной добавке $2\Lambda_0$ к скорости свободного солитона $2\lambda_0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 10. Рассматривая вместо кривой, изображенной на рис. 17, кривую $\Gamma'_{\text{ЛП}}$, у которой все точки ветвления вещественны (см. рис. 18), мы снова придем к тем же формулам (11.6) для комплексного решения уравнения ЛЛ – нужно лишь всюду считать, что $\bar{c} \rightarrow b$, $\text{Im } c = \text{Im } b = 0$. Разбор условий вещественности отличается от уже разобранного нами случая лишь тем, что теперь $\tau b_1 = -b_1$ и, следовательно, $\overline{B^0_{11}} = -B^0_{11}$ вместо того, что было в (11.7). Последнее обстоятельство приводит лишь к изменению условий на параметр $-\overline{d^0} = d^0 + r_1^0 - 1/2$, т. е.

$$d^0 = id - \frac{1}{2}r_1^0 + \frac{1}{4} = id - s + \frac{1}{4},$$

и это, в свою очередь, означает, что в формулах (11.9)–(11.11) следует произвести замену $id \rightarrow id + 1/4$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Разветвленные двулистные накрытия и редукция тета-функций Римана

В этом приложении мы приведем результаты о редукции тета-функций Римана, содержащиеся в монографии [35].

Пусть $\widehat{C} \xrightarrow{\pi} C$ – разветвленное двулистное накрытие рода $\hat{g} = 2g + n - 1$ компактной римановой поверхности C рода g . Пусть $Q_1, \dots, Q_{2n} \in C$ – точки ветвления накрытия. Обозначим через $\phi: \widehat{C} \rightarrow \widehat{C}$ инволюцию с неподвижными точками Q_1, \dots, Q_{2n} , переставляющую листы накрытия ($C = \widehat{C}/\phi$). Канонический базис группы гомологий $H_1(\widehat{C}, \mathbb{Z})$

$$a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, a_{g+1}, b_{g+1}, \dots, a_{g+n-1}, b_{g+n-1}, a_{1'}, b_{1'}, \dots, a_{g'}, b_{g'} \quad (\text{П.1})$$

можно выбрать так, что $\pi a_1, \pi b_1, \dots, \pi a_g, \pi b_g$ будет каноническим базисом группы $H_1(C, \mathbb{Z})$:

$$\begin{aligned} a_{\alpha'} + \phi a_{\alpha} &= b_{\alpha'} + \phi b_{\alpha} = 0, & \alpha &= 1, \dots, g, \\ a_i + \phi a_i &= b_i + \phi b_i = 0, & i &= g+1, \dots, g+n-1. \end{aligned} \quad (\text{П.2})$$

Здесь через ϕa_{α} обозначены циклы, получающиеся из a_{α} под действием ϕ . Для соответствующих нормированных голоморфных дифференциалов

$$u_1, \dots, u_g, u_{g+1}, \dots, u_{g+n-1}, u_{1'}, \dots, u_{g'}$$

справедливы равенства

$$u_{\alpha}(x) = -u_{\alpha'}(\phi(x)), \quad u_i(x) = -u_i(\phi(x)), \quad x \in \widehat{C} \quad (\text{П.3})$$

(здесь $\alpha = 1, \dots, g$ и $i = g+1, \dots, g+n-1$).

Нормированные в базисе $\pi a_1, \pi b_1, \dots, \pi a_g, \pi b_g$ голоморфные дифференциалы на поверхности C равны $v_{\alpha} = u_{\alpha} - u_{\alpha'}$, $\alpha = 1, \dots, g$, а выражения

$$w_{\alpha} = u_{\alpha} + u_{\alpha'}, \quad \alpha = 1, \dots, g, \quad w_i = u_i, \quad i = g+1, \dots, g+n-1,$$

задают $g+n-1$ линейно независимых нормированных дифференциалов Прима. Мы имеем

$$v_{\alpha}(\phi(x)) = v_{\alpha}(x), \quad w_{\beta}(\phi(x)) = -w_{\beta}(x).$$

Из формул (П.3) следует, что матрица периодов поверхности \widehat{C} имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} (\Pi_{\alpha\beta} + T_{\alpha\beta})/2 & \Pi_{\alpha i} & (\Pi_{\alpha\beta} - T_{\alpha\beta})/2 \\ \Pi_{i\alpha} & 2\Pi_{ij} & \Pi_{i\alpha} \\ (\Pi_{\alpha\beta} - T_{\alpha\beta})/2 & \Pi_{\alpha i} & (\Pi_{\alpha\beta} + T_{\alpha\beta})/2 \end{pmatrix}, \quad (\text{П.4})$$

где $\alpha, \beta = 1, \dots, g$ и $i, j = g+1, \dots, g+n-1$, а T – матрица периодов поверхности C (составленная из дифференциалов v_{α} в базисе $\pi a_1, \pi b_1, \dots, \pi a_g, \pi b_g$) и Π – симметричная матрица размера $(g+n-1) \times (g+n-1)$, заданная как

$$\Pi = \begin{pmatrix} \Pi_{\alpha\beta} & \Pi_{\alpha j} \\ \Pi_{i\beta} & \Pi_{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{b_{\beta}} w_{\alpha} & \frac{1}{2} \int_{b_j} w_{\alpha} \\ \int_{b_{\beta}} w_i & \frac{1}{2} \int_{b_j} w_i \end{pmatrix}. \quad (\text{П.5})$$

Рассмотрим тета-функцию с нулевыми характеристиками, определяемую матрицей (П.4):

$$\theta(z|B) = \sum_{m \in \mathbb{Z}\hat{g}} e^{\pi i \langle Bm, m \rangle + 2\pi i \langle z, m \rangle}, \quad (\text{П.6})$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – обычное скалярное произведение. Обозначим через $S = (s_1|s_2|s_3)$ вектор размерности \hat{g} , где s_1 и s_3 – g -мерные векторы, а s_2 – $(n-1)$ -мерный вектор; пусть $t = (t_1|t_2)$ есть $(g+n+1)$ -мерный вектор, где t_1 есть g -мерный вектор, а t_2 – $(n-1)$ -мерный вектор.

Заметим, что если вектор k пробегает всю решетку $\mathbb{Z}\hat{g}$, а $\hat{\delta} = (\delta|0|\delta)$, где δ пробегает всевозможные векторы, состоящие из чисел 0 и $1/2$, то вектор

$$m = N(k + \delta), \quad N = \begin{pmatrix} I & 0 & I \\ 0 & I & 0 \\ I & 0 & -I \end{pmatrix}, \quad (\text{П.7})$$

также пробегает \mathbb{Z}^g (размерность блоков матрицы N совпадает с размерностью блоков матрицы B в (П.4)). Таким образом, суммирование по m в формуле (П.6) можно заменить на суммирование по k и δ :

$$\langle Bm, m \rangle = \langle BN(k + \hat{\delta}), N(k + \hat{\delta}) \rangle = \langle NBN(k + \hat{\delta}), (k + \hat{\delta}) \rangle.$$

Нетрудно заметить, что матрица NBN блочная,

$$NBN = \begin{pmatrix} 2\Pi & 0 \\ 0 & 2T \end{pmatrix}$$

(отсюда, в частности, следует положительная определенность мнимой части Π). Следовательно,

$$\begin{aligned} \langle Bm, m \rangle + 2\langle z, m \rangle &= \langle NBN(k + \hat{\delta}), k + \hat{\delta} \rangle + 2\langle Nz, k + \hat{\delta} \rangle = \\ &= \langle 2\Pi(k_1 + (\delta|0)), k_1 + (\delta|0) \rangle + \langle 2T(k_2 + \delta), k_2 + \delta \rangle + \\ &+ 2\langle (z_1 + z_3|z_2), k_1 + (\delta|0) \rangle + 2\langle z_1 - z_3, k_2 + \delta \rangle, \end{aligned}$$

где $k = (k'_1|k''_1|k_2)$, $k_1 = (k'_1|k''_1)$, $z = (z_1|z_2|z_3)$. Подставляя это в выражения (П.6), получаем представление \hat{g} -мерной тета-функции через конечную сумму произведений g -мерной и $(g + n - 1)$ -мерной тета-функций:

$$\theta((z_1|z_2|z_3)|B) = \sum_{\delta \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}^g / 2\mathbb{Z}^g} \theta[(\delta|0), 0]((z_1 + z_3|z_2)|2\Pi) \theta[\delta|0](z_1 - z_3|2T). \quad (\text{П.8})$$

Благодарности. В заключение авторы приносят свою искреннюю благодарность В. Г. Барьяхтару, чей интерес к настоящей работе существенно стимулировал ее написание. Авторы также благодарят Редакционную коллегию журнала “Теоретическая и математическая физика” за возможность представить читателям работу, написанную 30 лет назад.

Список литературы

- [1] Л. Д. Ландау, Е. М. Лившиц, “К теории дисперсии магнитной проницаемости ферромагнитных тел”, *Собрание трудов Л. Д. Ландау в 2-х т.*, т. 1, Наука, М., 1969, 128–143.
- [2] L. A. Takhtajan, *Phys. Lett. A*, **64**:2 (1977), 235–237.
- [3] А. Е. Боровик, *Письма в ЖЭТФ*, **28**:10 (1978), 629–632.
- [4] Е. К. Sklyanin, *On complete integrability of the Landau–Lifshitz equation*, Preprint E-3-79, LOMI, Leningrad, 1979.
- [5] А. Б. Шабат, *Функц. анализ и его прил.*, **9**:3 (1975), 75–78.
- [6] В. Е. Захаров, С. В. Манаков, *Письма в ЖЭТФ*, **18**:7 (1973), 413–417.
- [7] И. А. Ахиезер, Л. Е. Боровик, *ЖЭТФ*, **52**:2 (1967), 508–513.
- [8] И. А. Ахиезер, Л. Е. Боровик, *ЖЭТФ*, **52**:5 (1967), 1332–1344.
- [9] А. М. Косевич, *ФММ*, **53**:3 (1982), 420–446.
- [10] Н. Н. Боголюбов (мл.), А. К. Прикарпатский, “О конечнозонных решениях уравнения типа Гейзенберга”, *Математические методы и физико-механические поля*, Наукова думка, Киев, 1983, 7–13.
- [11] И. В. Чередник, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **47**:2 (1983), 384–406.
- [12] E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara, T. Miwa, *J. Phys. Soc. Jpn.*, **52** (1983), 388–393.

- [13] М. М. Богдан, А. С. Ковалев, *Письма в ЖЭТФ*, **31**:8 (1980), 453–457.
- [14] A. V. Mikhailov, *Phys. Lett. A*, **92**:2 (1982), 51–55.
- [15] Yu. L. Rodin, *Lett. Math. Phys.*, **7**:1 (1983), 3–8.
- [16] А. И. Бобенко, *Зап. научн. семин. ЛОМИ*, **123** (1983), 58–66.
- [17] А. Б. Борисов, *ФММ*, **55**:2 (1983), 230–234.
- [18] Р. Ф. Бикбаев, А. И. Бобенко, А. Р. Итс, *Докл. АН СССР*, **272**:6 (1983), 1293–1298.
- [19] M. Jimbo, I. Miwa, K. Ueno, *Physica D*, **2** (1981), 306–352.
- [20] M. Jimbo, T. Miwa, *Physica D*, **2** (1981), 407–448.
- [21] E. D. Belokolos, A. I. Bobenko, V. Z. Enol'skii, A. R. Its, V. B. Matveev, *Algebraic-Geometric Approach to Nonlinear Integrable Equations*, Springer Series in Nonlinear Dynamics, Springer, Berlin, 1994.
- [22] А. Гурвиц, Р. Курант, *Теория функций*, Наука, М., 1968.
- [23] Э. И. Зверович, *УМН*, **26**:1(157) (1971), 113–179.
- [24] V. B. Matveev, *Abelian functions and solitons*, Preprint H 373, Univ. Wroclaw, Wroclaw, 1976.
- [25] Б. А. Дубровин, *УМН*, **36**:2(218) (1981), 11–80.
- [26] В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов: метод обратной задачи*, Наука, М., 1980.
- [27] Б. А. Дубровин, С. И. Натанзон, *Функц. анализ и его прил.*, **16**:1 (1982), 27–43.
- [28] A. I. Bobenko, Ch. Klein (eds.), *Computational Approach to Riemann Surfaces*, Lecture Notes in Mathematics, **2013**, Springer, 2011.
- [29] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*, т. 3: *Эллиптические и автоморфные функции, функции Ламе и Матъе*, Наука, М., 1967.
- [30] Е. Д. Белоколов, В. З. Энольский, *ТМФ*, **53**:2 (1982), 271–282.
- [31] G. Forest, D. W. McLaughlin, *J. Math. Phys.*, **23**:7 (1982), 1248–1277.
- [32] Е. Д. Белоколов, А. И. Бобенко, В. Б. Матвеев, В. З. Энольский, “Алгебро-геометрические принципы суперпозиции конечнозонных решений интегрируемых нелинейных уравнений”, *УМН*, **41**:2(248) (1986), 3–42.
- [33] J. Zagrodzinski, *J. Phys. A.*, **15**:10 (1982), 3109–3118.
- [34] Л. А. Тахтаджян, *ЖЭТФ*, **66**:2 (1974), 476–489.
- [35] J. D. Fay, *Theta-Functions on Riemann Surfaces*, Lecture Notes in Mathematics, **352**, Springer, 1973.

Поступила в редакцию 7.03.2013