

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ОРДЕНА ЛЕНИНА И ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ им. В.А. СТЕКЛОВА
ЛЕНИНГРАДСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

П р е п р и н т ы Л О М И
Р - 10 - 86

А. И. Бобенко

УНИКОРМИЗАЦИЯ И КОНЕЧНОСОННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Рекомендован к опубликованию
Ученым Советом Ленинградского
отделения ордена Ленина и
ордена Октябрьской Революции
Математического института
им. В. А. Стеклова (ЛОМИ)

18 апреля 1986 года

Ленинград
1986

The finite-gap solution of a nonlinear equation depends on a corresponding compact real Riemann surface. By the Schottky uniformization the convenient formulas for the finite-gap solutions are obtained. Wave numbers, phase speeds and amplitudes are expressed in terms of Poincaré series. Numerical results obtained by the supposed method are presented.

Содержание

- Введение
 - § 1. Конечные решения уравнения Кадомова-Петвиашвили
 - § 2. Униформизация Шоттки
 - § 3. Униформизация Шоттки вещественных римановых поверхностей Σ раздельного типа
 - § 4. Множество \mathcal{M} для M-кривых
 - § 5. Решения уравнения КИЗ
 - § 6. Решения уравнения КП
 - § 7. Решения уравнения КДФ
 - § 8. Качественный анализ решений уравнения КДФ
 - § 9. Вычисления
 - § 10. Решения уравнения sine-Gordon
- Приложение. Модулярное преобразование
Литература

Библиографическая ссылка:

А.И.Бобенко
Препринт ЛОМИ Р-10-86
Ленинград, 1986

Ленинградское отделение
Математического института АН СССР
Ленинград, 1986



Введение

Теория конечнозонного интегрирования, возникшая в рамках метода обратной задачи (МОЗ) в середине 70-х годов в работах С.П.Новикова, Б.А.Дубровина, В.Б.Магтеева, А.Р.Йтса и др. (см. обзор [5]), позволяет строить конечнозонные (алгеброгеометрические) решения нелинейных уравнений интегрируемых МОЗ. Эти многофазные решения иногда называют также тэта-функциональными, так как они сравнительно просто выражаются в терминах тэта-функций римановых поверхностей. Однако, эта простота обманчива, так как реальным параметром, определяющим все характеристики N -фазного решения (волновые числа, фазовые скорости, амплитуды взаимодействующих гармоник), является компактная риманова поверхность Γ рода N . Из-за сложности и неизвестности задания этих характеристик использовались тэта-функциональные формулы для вычислений оказывается негравитальным. Это обстоятельство, возможно, объясняет тот факт, что продолжавшиеся в течение десятилетия интенсивное развитие теории конечнозонного интегрирования не находило достаточного яркого приложения к задачам физики, механики, гидродинамики, которые и привели к отрыву этого метода.

Были предприняты серьезные усилия для более эффективно описания конечнозонных решений. Мы имеем в виду "алгеброгеометрическую" эффективизацию Дубровина-Новикова [4] и "физическую" эффективизацию, предложенную в работах [34], [25], [18]. Они основаны на подстановке в нелинейное уравнение тэта-функциональных ответов, причем алгеброгеометрическое происхождение характеристик решения "забывается", и они определяются прямо из уравнения. Следует отметить, что выдвинутая в рамках этого подхода гипотеза Новикова с выделением уравнением Кадцева-Петвишвили (KP) матриц периода римановых поверхностей оказалась очень плодотворной для решения классической проблемы алгебраической геометрии - проблемы Шоттки [4], [38]. Однако, что касается собственно

эффективного описания конечнозонных решений, то здесь серьезно продвинулись на пути подстановок удается лишь в двухфазном случае [18], [6], [37] (и при $N=3$ для уравнения KP [4]).

Указанная выше проблема успешно решается для тех специальных конечнозонных решений, которые строятся по накрытиям малого рода над эллиптической кривой. Недавно было установлено [1], что в этом случае решение может быть выражено в эллиптических функциях.

Хорошо известно, что согласно теории униформизации вместо функций на кривых можно рассматривать автоморфные функции. Однако, аппарат автоморфных функций слабо используется в математической физике. Это связано с тем, что фундаментальный объект - тэта-ряд Пуанкаре - определяется как сумма по всем элементам соответствующей дискретной группы, для которой нет удобной параметризации. Проведение вычислений становится невозможным. К счастью, имеется одно исключение. Если дискретная группа свободна от соотношений, то оказывается легко параметризовать ее образующие и, как следствие, всю группу. А при помощи свободных групп можно униформизовать любую риманову поверхность.

В настоящей работе предлагается универсальный по отношению к значению рода N подход к проблеме эффективизации. При этом алгеброгеометрическое происхождение постоянных не "забывается", а используется удачную параметризацию римановой поверхности при помощи униформизации Шоттки, характеристики решения выражаются через параметры униформизации. Таким образом удается описать все физически важные вещественные не-сингулярные решения. Эффективность подтверждается расчетами на ЭВМ.

Автор попытался сделать изложение подробным и наглядным в надежде, что результаты настоящей работы заинтересуют специалистов по физике нелинейных волн. Этим, в частности, объясняется большое количество рисунков. Большая часть излагаемых результатов анонсирована в [2]. В параграфах по-

священных качественному анализу и вычислению конечнозонных решений уравнения КдФ, мы следуем работе [3].

Автор глубоко благодарен П.Г. Зографу, А.Р. Итсу и С.М. Натанзону за полезные обсуждения, а также В.Б. Матвееву, который привлек внимание автора к книге [17], в результате анализа которой и возникла настоящая работа.

§ I. Конечнозонные решения уравнения Кадомцева-Петвиашвили

Уравнение Кадомцева-Петвиашвили (КП) [9]

$$\frac{3}{4} u_{yy} = \frac{\partial}{\partial x} \left(u_t - \frac{1}{4} (6uu_x + u_{xxx}) \right) \quad (I)$$

является естественным двумерным аналогом уравнения Кортевега де Фриза (КдФ). Конечнозонные решения этого уравнения были построены И.М. Кричевером [11].

Пусть Γ - компактная риманова поверхность рода N с отмеченной точкой P_∞ на ней, $P \in \Gamma$ - локальный параметр в окрестности P_∞ , $P \rightarrow P_\infty$, $P \in \Gamma$. Зафиксируем некоторый канонический базис циклов $\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_N, \beta_N$ на Γ ; u_1, \dots, u_N - голоморфные дифференциалы нормированные в этом базисе ($\int_{\alpha_m} du_n = 2\pi i \delta_{nm}$). $\Omega(P)$ - нормированный абелев интеграл второго рода с простым полюсом в P_∞ . Разложения в P_∞

$$\begin{aligned} du_n &= f_n(p) dp, \\ \Omega &\rightarrow p^{-1} - cp + O(p^2) \end{aligned} \quad (2)$$

определяют постоянную c , а также векторы $U, V, W \in \mathbb{C}^N$:

$$U_n = f_n(0), V_n = \frac{d}{dp} f_n(p) \Big|_{p=0}, W_n = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dp^2} f_n(p) \Big|_{p=0}. \quad (3)$$

Тета-функция Римана кривой Γ

$$\theta(z|B) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^N} \exp\left\{ \frac{1}{2} \langle Bm, m \rangle + \langle z, m \rangle \right\} \quad (4)$$

строится по матрице периодов $B_{nm} = \int_{\alpha_m} du_n$.

ТЕОРЕМА I (Кричевер [11]). Конечнозонные решения уравнения (I) задаются следующим выражением

$$u(x, y, t) = 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \theta(Ux + Vy + Wt + D|B) + 2c, \quad (5)$$

где $D \in \mathbb{C}^N$ - произвольный вектор (см. также [4]).

Обсудим теперь важный для физических приложений вопрос вещественности решений. Хорошо известно, что имеется два варианта уравнения КП не сводящиеся друг к другу вещественными заменами переменных. Уравнение (I) - это устойчивый вариант или, как его называют иначе, уравнение КП2. Получающееся из него комплексной заменой

$$x \rightarrow ix, y \rightarrow iy, t \rightarrow it \quad (6)$$

уравнение КП1 (неустойчивый вариант), выглядит следующим образом:

$$\frac{3}{4} u_{yy} = \frac{\partial}{\partial x} \left(u_t - \frac{1}{4} (6uu_x - u_{xxx}) \right). \quad (7)$$

Уравнения КП1 и КП2 применяются для описания различных физических процессов, причем физический смысл имеет их вещественные несингулярные решения. Поэтому естественно возникает задача выделения из общих комплексных конечнозонных решений (5) уравнения КП вещественных несингулярных решений уравнения КП1 и КП2. Эта задача в самое последнее время была решена Б.А. Дубровиным и С.М. Натанзоном. Мы приведем здесь их результат, напомним сначала некоторые факты из теории вещественных римановых поверхностей (именно такие поверхности оп-ределяют вещественные решения).

3) Для КП2 имеется дополнительное топологическое ограничение: Γ должна быть M-кривой. В базисе циклов (8) ($n = N+1, g=0$) D - произвольный вектор с чисто мнимыми координатами.

§ 2. Униформизация Шоттки

Пусть F - $2N$ связанная область в \mathbb{C} , ограниченная пересекющимися жордановыми кривыми $C_1, C'_1, \dots, C_N, C'_N$ (см. рис.1). Дробно-линейное преобразование S_n

$$\frac{b_n z - b_n}{b_n z - A_n} = \mu_n \frac{z - B_n}{z - A_n}, |\mu_n| < 1, n=1, \dots, N \quad (10)$$

отображает внешность C_n во внутренность $C'_n, b_n C_n = C'_n$

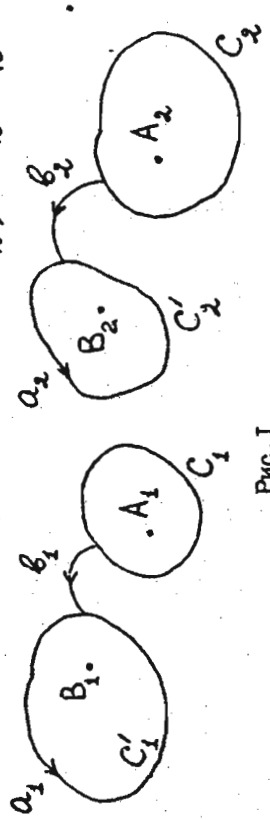


Рис.1

A_n и B_n - неподвижные точки локсодромического преобразования b_n , причем притягивающая точка B_n лежит внутри C'_n , а отталкивающая точка A_n - внутри C_n . b_n как элемент $PSL(2, \mathbb{C})$ записывается следующим образом:

$$b_n z = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \frac{1}{\mu - \mu^{-1}} \begin{pmatrix} A_n \mu^{1/2} - B_n \mu^{-1/2} & A_n (\mu^{-1/2} - \mu^{1/2}) \\ A_n \mu^{-1/2} - B_n \mu^{1/2} & A_n (\mu^{1/2} - \mu^{-1/2}) \end{pmatrix} \quad (11)$$

Центр изометрической окружности расположен в точке $-\delta/\gamma = (B_n \mu^{-1/2} - A_n \mu^{1/2}) / (\mu^{1/2} - \mu^{-1/2})$, а ее радиус равен $|\gamma|^{-1}$.

Риманова поверхность Γ называется вещественной, если на ней задана антиголоморфная инволюция (антиинволюция) $\tau: \Gamma \rightarrow \Gamma, \tau^2 = 1$. Пусть антиинволюция τ имеет на Γ n неподвижных компонент $\Gamma_0, \dots, \Gamma_{n-1}$ (овалов, $0 \leq n \leq N+1$). Возможны два случая: 1) поверхность разделяющего типа - объединение вещественных овалов разделяет Γ на две компоненты $\Gamma_+ \text{ и } \Gamma_- = \tau(\Gamma_+)$; Γ_+ и Γ_- - поверхности рода $g = \frac{N+1-n}{2}$ с n граничными кривыми, $N+1-n \equiv 0 \pmod{2}$.

2) поверхность неразделяющего типа - объединение овалов не разделяет Γ . Если число овалов максимальное $n = N+1$, то Γ называется M-кривой.

На поверхности разделяющего типа всегда можно выбрать базис циклов [23]

$$a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, a_{2g+1}, \dots, b_{2g}, a_{2g+1}, \dots, a_{2g+n-1}, b_{2g+n-1} \quad (8)$$

такой, что $a_{2k+k} = \Gamma_k, k=1, \dots, n-1$ - вещественные овалы и $a_i, b_i \in \Gamma_+, \tau a_i = a_i + g, \tau b_i = -b_i + g, i=1, \dots, g$

$$\tau a_{2g+j} = a_{2g+j}, \tau b_{2g+j} = -b_{2g+j}, j=1, \dots, n-1$$

ТЕОРЕМА 2 (Дубровин, Натанзон [7]). Для гладкости и в. действительности решения (5) уравнений КП3 и КП2 необходимо и достаточно, чтобы для тройки (Γ, P_∞, ρ) и вектора D выполнялись следующие условия:

- 1) Риманова поверхность Γ вещественная, разделяющего типа, причем $\tau(P_\infty) = P_\infty, \tau^* P = \bar{P}$.
- 2) пусть $P_\infty \in \Gamma_0$, и на Γ выбран базис (8), тогда вектор D для уравнения КП3 (напомним, что для КП2 в формуле (5) следует произвести замену (6)) - произвольный вектор

$$D = (\xi, \xi, \eta), \quad \xi \in \mathbb{C}, \eta \in \mathbb{R}^{n-1} \quad (9)$$

Система образующих $\sigma_1, \dots, \sigma_N$ порождает свободную строго локсодромическую клейнову группу - группу Шоттки G [36]. Группа Шоттки с фиксированной системой образующих называется отмеченной. Если C_n, C'_n - окружности, то группа Шоттки называется классической [30]. F - фундаментальная область группы. Можно дать более общее определение: группой Шоттки называется свободная конечнопорожденная строго локсодромическая клейнова группа [31]. Оно эквивалентно первоначальному, так как по любой свободной от соотношений системе образующих такой группы можно построить фундаментальную область F , описанную выше [21]. Предельное множество $\Lambda(G)$ - канторово, область разрывности $\Sigma(G)$ - связна. Факторпространство Σ/G - компактная риманова поверхность рода N .

Согласно классической теореме о разрезах [15], в таком виде можно подставить любую компактную риманову поверхность Γ рода N . Более точно, пусть на Γ выбрано N гомологически независимых простых поперечно пересекающихся петель U_1, \dots, U_N . "Разрезанная" по этим петлям Γ представляет собой плоскую область, она конформно отображается на фундаментальную область F соответствующей отмеченной группы Шоттки G , причем U_n отображается на кривые C'_n, C_n . Если U_n системы петель U_1, \dots, U_N и U'_1, \dots, U'_N порождают одну и ту же группу в $H_1(\Gamma, \mathbb{Z})$, то им отвечает одна и та же группа G , только с различным выбором образующих, если же соответствующие подгруппы $H_1(\Gamma, \mathbb{Z})$ различаются, то и униформизующие группы Шоттки G и G' различны. Выберем канонический базис $H_1(\Gamma, \mathbb{Z})$ так, чтобы Q -циклы совпадали с петлями $U_n = \alpha_n$. Этот канонический базис циклов Σ/G изображен на рис. 1: цикл α_n совпадает с кривой C'_n , ориентированной в положительном направлении, β_n идет в F от точки $z_n \in C_n$ до точки $\sigma_n z_n \in C'_n$, причем между собой β -циклы не пересекаются.

Обозначим G_n подгруппу G , порожденную элементом σ_n . Соединяя классы G/G_n и $G_m \setminus G/G_n$ состоит из элемен-

тов $\sigma = \sigma_{i_1}^{j_1} \dots \sigma_{i_k}^{j_k}$, $j_e \neq 0$ таких, что $i_k \neq n$, а для $G_m \setminus G/G_n$ еще и $i_1 \neq m$. Следующие утверждение содержится уже в классических работах [19], [17].

ЛЕММА 1. Если ряды

$$du_n = \sum_{\sigma \in G/G_n} \left(\frac{1}{z - \sigma B_n} - \frac{1}{z - \sigma A_n} \right) \quad (12)$$

абсолютно сходятся, то они определяют базис голоморфных дифференциалов, нормированный в изображенном на рис. 1. базисе циклов. Матрица периодов задается следующим выражением

$$V_{nm} = \sum_{\sigma \in G_m \setminus G/G_n} \ln \{ B_m, A_m, \sigma B_n, \sigma A_n \}, \quad m \neq n \quad (13)$$

$$V_{nn} = \ln \mu_n + \sum_{\sigma \in G_n \setminus G/G_n, \sigma \neq I} \ln \{ B_n, A_n, \sigma B_n, \sigma A_n \},$$

где фигурными скобками обозначается двойное отношение

$$\{ z_1, z_2, z_3, z_4 \} = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)} \quad (14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ряд (12) не имеет полюсов на F . Равенство $\int \alpha_m du_n = 2\pi i \delta_{nm}$ доказывается вычислением интеграла по вчетам. Действительно, если $\sigma = \sigma_{i_1}^{j_1} \dots \sigma_{i_k}^{j_k}$, $\sigma \neq I$ то обе точки σB_n и σA_n при $j_1 > 0$ лежат внутри C'_{i_1} , а при $j_1 < 0$ - внутри C_{i_1} , если же $\sigma = I$, то B_n лежит внутри C'_n , а A_n - внутри C_n , что и дает ненулевой вклад в интеграл по α_n . Легко доказать, что $du_n(\sigma z) = du_n(z)$ для любого $\sigma \in G$, а также, учитывая инвариантность двойного отношения относительно дробно-линейных преобразований

$$\{ \sigma z_1, \sigma z_2, \sigma z_3, \sigma z_4 \} = \{ z_1, z_2, z_3, z_4 \} \quad (15)$$

получить из $V_{nm} = \int z^{\sigma m} du_n = u_n(\sigma z) - u_n(z)$ формулы (13).

Заметим, что ряды (I2) - это тета-ряды Пуанкаре размерности (-2), они могут быть записаны несколько иначе

$$du_n = \sum_{\sigma \in G_n \setminus G} \left(\frac{1}{\sigma z - B_n} - \frac{1}{\sigma z - A_n} \right) \sigma' z dz, \quad \sigma' z = \frac{1}{(\gamma z + \delta)^2}$$

Конечнозонное решение не зависит от выбора базиса циклов на Γ . Поэтому для целей конечнозонного интегрирования достаточно рассматривать группу Шоттки G , определяемую какой-либо одной униформизацией Ω/G римановой поверхности Γ . В этой связи необходимо ответить на два вопроса:

1) У любой ли поверхности Γ существует такая униформизация Шоттки Ω/G (т.е. можно ли так выбрать петли $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_N$, что построенные по ней ряды (I2) абсолютно сходятся?

2) Можно ли явно указать множества S -область изменения параметров таких униформизаций $(A_1, B_1, \mu_1, \dots, A_N, B_N, \mu_N)$?

Ответы на эти вопросы неизвестны. Аналогичные задачи решались для групп Шоттки вне связи с униформизацией римановых поверхностей, т.е. группы G и G' униформизирующие одну и ту же риманову поверхность $\Omega/G = \Omega'/G'$ рассматриваются обе и независимо). Вопрос о сходимости рядов Пуанкаре размерности (-2) исследовал еще Бернсайд [19]. Он доказал абсолютную сходимость в двух случаях:

а) Окружности C_n, C'_n достаточно малы и располагаются достаточно далеко друг от друга (соответствующие оценки приведены также в [17]).

б) Группа G имеет инвариантную окружность C , размерности C_n, C'_n произволен (см. также [15], стр. 115).

Для общих групп Шоттки тета-ряды Пуанкаре размерности (-2) могут абсолютно расходиться. В работах [33], [16] построены соответствующие примеры классических групп Шоттки. В этих примерах окружности C_n и C'_n изометрические и лежат близко друг к другу. Предельное множество $\Lambda(G)$ таких групп имеет хаусдорфову размерность больше 1, так как показатель сходи-

мости рядов Пуанкаре совпадает с хаусдорфовой размерностью $\Lambda(G)$ (см. введение к [35]). В работе [35] приведены примеры вычислений показателей сходимости рядов для различных групп Шоттки.

Близко связанным со вторым вопросом является вопрос о том, любую ли риманову поверхность можно униформизовать классической группой Шоттки. Ответ на него также неизвестен. Существование неклассических (при любой системе образующих) групп Шоттки было доказано в работе [30]. Позднее при $N=2$ был построен пример такой группы [39].

§ 3. Униформизация Шоттки вещественных римановых поверхностей разделяющего типа.

Как уже отмечалось, вопросы, сформулированные в предыдущем параграфе, весьма сложны, и ответы в общей постановке неизвестны. Однако, на них можно дать положительный ответ в самом важном для приложений случае вещественных римановых поверхностей. В этом параграфе мы приведем простое доказательство этого факта для разделяющих вещественных римановых поверхностей, которые и определяют вещественные несингулярные решения уравнений КИИ и КИ2 (см. §1).

Пусть Γ - вещественная риманова поверхность рода N разделяющего типа, $\tau: \Gamma \rightarrow \Gamma$ - антиинволюция. $\Gamma_0, \dots, \Gamma_{n-1}$ - две компоненты овалов, которые делят Γ на две компоненты Γ_+ и Γ_- , являющиеся римановыми поверхностями сигнатуры (g, n) , т.е. рода $g = (N+1-n)/2$ с n граничными контурами.

ЛЕММА 2. Можно построить униформизацию Шоттки Ω/G вещественной римановой поверхности разделяющего типа Γ при помощи функции второго рода G . Ряды (I2), возникающие при такой униформизации, абсолютно сходятся.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим функцию униформизацию H/G поверхности Γ_+ . Здесь $H = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} z > 0\}$ - верхняя

полуплоскость. Γ_+ имеет граничные контуры, поэтому G -фуксова группа второго рода. Это строго гиперболическая группа с образующими $\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_j, \beta_j, \gamma_1, \dots, \gamma_n$ и определяющим соотношением

$$\alpha_1 \beta_1 \alpha_1^{-1} \beta_1^{-1} \dots \alpha_j \beta_j \alpha_j^{-1} \beta_j^{-1} \gamma_1 \dots \gamma_n = 1.$$

Распространим действие G на всю плоскость \mathbb{C} , при этом фактор H/G , где $H = \{z \in \mathbb{C}, \text{Im } z < 0\}$, конформно эквивалентен Γ_- . N образующих $\sigma_i = \alpha_i, \sigma_{2j+i} = \beta_j, \sigma_{2j+j} = \gamma_j, i=1, \dots, 2j, j=1, \dots, n-1$ порождают свободную строго гиперболическую группу - отмеченную группу Шоттки G , униформизирует риманову поверхность Γ_- . Хорошо известно [15], что тета-ряды Пуанкаре размерности (-2), построенные по фуксовой группе второго рода абсолютно сходятся - это случай б) сходимости тета-рядов групп Шоттки, доказанный Бернсайдом (см. §2), инвариантная окружность здесь - вещественная ось. Лемма доказана.

В двух последующих параграфах мы более подробно обсудим эту униформизацию Шоттки, в частности, построение фундаментальной области группы G .

Фуксовы группы второго рода хорошо изучены, в частности, множество изменения параметров образующих таких групп описано в работе [13], что дает эффективное описание множества S (см. §2) изменения параметров униформизации Шоттки.

§ 4. Множество S для M -кривых.

Обсудим выбор фундаментальной области F группы Шоттки G униформизирующей M -кривую Γ_+ . В этом случае Γ_+ гомеоморфна сфере с $N+1$ граничным контуром $\Gamma_0, \dots, \Gamma_N$ (см. рис.2). Пусть точка $P_\infty \in \Gamma_+$.

Пусть $\ell_n, n=1, \dots, N$ - система непересекающихся между собой кривых на Γ_+ , таких, что поверхность $\Gamma_+[\ell]$, полученная разрезанием Γ_+ по контурам ℓ_n , односвязна.

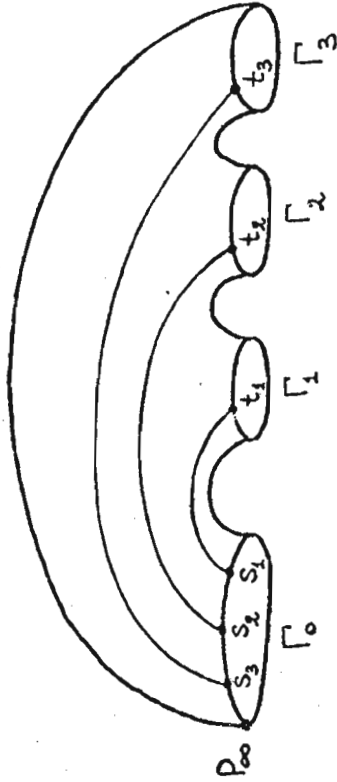


Рис.2

Пример такой системы разрезов приведен на рис.2. $\Gamma_+ = H/G$ - фуксова униформизация Γ_+ . Существует естественная проекция $\Phi: H \rightarrow \Gamma_+ = H/G$. Сопряженные в $PSL(2, \mathbb{R})$ группы приводят к конформноэквивалентным римановым поверхностям, которые мы не различаем. Выберем нормировку $\Phi(\infty) = P_\infty$. Отметим поверхность $\Gamma_+[\ell]$ можно поднять на накрытие H , причем поднятие однозначно фиксируется условиями:

1) $\Phi^{-1}(P_\infty) = \infty$, 2) $\Phi^{-1}(\Gamma_+[\ell])$ связано. При этом $F = \Phi^{-1}(\Gamma_+[\ell]) \subset H$ - фундаментальная область группы G . $\Phi^{-1}(\ell_n)$ состоит из двух компонент C_n и C'_n , они лежат на границе F и связаны гиперболическим преобразованием $\sigma_n C_n = C'_n$ (10), где

$$A_n, B_n, \mu_n \in \mathbb{R}, 0 < \mu_n < 1. \quad (16)$$

$\sigma_1, \dots, \sigma_N$ - свободная система образующих G . Каждая система кривых ℓ_n порождает некоторую фундаментальную область F группы G . На рис.3 изображена отвечающая системе кривых рис.2 F группа Шоттки G , определенной в §3

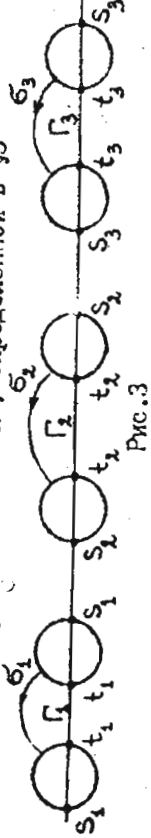


Рис.3

и, как следствие, фундаментальной области группы Шоттки рис.5 описывается в замкнутом виде. Проводимые в этом параграфе рассуждения почти полностью повторяют соответствующие доказательства работы [13].

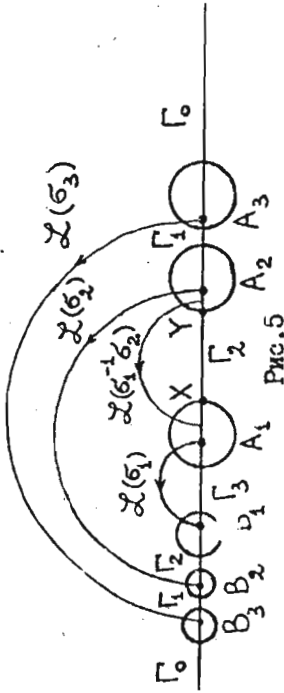


Рис.5

ЛЕММА 3. Пусть $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ система образующих фуксовой группы Шоттки с фундаментальной областью рис.5. Тогда инвариантные прямые $\mathcal{L}(\sigma_{n+1}), \mathcal{L}(\sigma_n), \mathcal{L}(\sigma_n^{-1}\sigma_{n+1})$ проходят так, как изображено на рис.5.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из геометрии отображения $\sigma_1^{-1}\sigma_2$ легко заметить (см.рис.5), что

$$A_1 < \sigma_1^{-1}\sigma_2 A_2 < \sigma_1^{-1}\sigma_2 A_1 < \sigma_1^{-1}\sigma_2 Y < X < Y < A_2.$$

Это означает, что притягивающая неподвижная точка преобразования $\sigma_1^{-1}\sigma_2$ лежит внутри отрезка $[A_1, X]$, а отталкивающая - внутри $[Y, A_2]$. Аналогично рассматриваются другие отображения $\sigma_n^{-1}\sigma_{n+1}$.

ЛЕММА 4. Инвариантные прямые $\mathcal{L}(\sigma_{n+1}), \mathcal{L}(\sigma_n)$, $\mathcal{L}(\sigma_n^{-1}\sigma_{n+1})$ проходят так, как изображено на рис.6 тогда и только тогда, когда выполнено неравенство

$$\{B_n, A_n, B_{n+1}, A_{n+1}\} > \left(\frac{\sqrt{\mu_n + \sqrt{\mu_{n+1}}}}{1 + \sqrt{\mu_n \mu_{n+1}}} \right)^2, \quad (17)$$

где $\{ \}$ - двойное отношение (14).

Метрика Пинкере на H индуцирует метрику на $\Gamma_+ = H/G$. Пусть кривые $\ell_n(S_n, t_n)$ не пересекаются, а их концы S_n, t_n лежат на граничных контурах Γ_+ . Сопоставим кривой ℓ_n гомотопную ей геодезическую $\ell'_n(S_n, t_n)$ с теми же самыми конечными точками. Очевидно, что кривые ℓ_n также не пересекаются друг с другом. $\Phi^{-1}(\ell'_n)$ - геодезические на H , поэтому построенная по $\Gamma_+[\ell'_n]$ фундаментальная область F ограничена полукривостями S_n, S'_n . В дальнейшем будут рассматриваться только такие F .

Пусть σ - некоторое гиперболическое преобразование, характеризуемое числами A, B, μ (10). Инвариантной прямой $\mathcal{L}(\sigma)$ называется полукривость, лежащая в H , ортогональная R с концами в точках A и B . Под действием σ она переходит в себя. Расположение инвариантных прямых стандартных образующих фуксовых групп и некоторых их произведений изучены в работах Илн [27], [28], [29] и Натансона [12]. На основе этих результатов Натансон получил полное описание множества $S = \{A_n, B_n, \mu_n, n=1, \dots, N\}$ параметров образующих G [13] (см. также работы [29], [24], где используется несколько другая параметризация). Понятно, что множество S зависит от того, какая система образующих G выбрана. В работе [13] для римановых поверхностей сигнатуры $(0, n)$ изучалась система образующих, изображенная на рис.3. Мы опишем множество S параметров другой системы образующих $\sigma_1, \dots, \sigma_n$, которая отвечает разрезам ℓ_n , изображенным на рис.4,

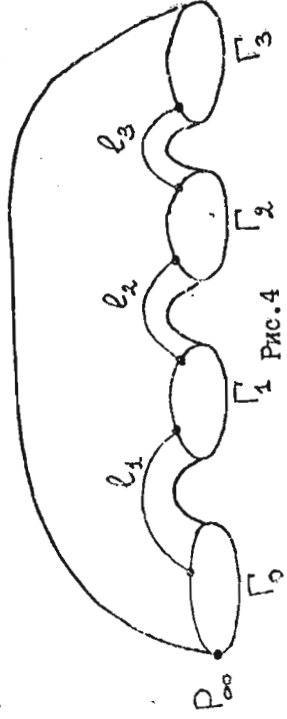


Рис.4

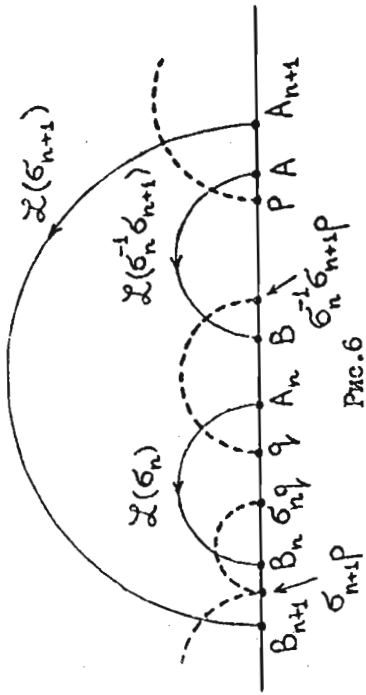


Рис. 6

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего слегаем дробно-линейное преобразование $gz = \{z, A_n, B_{n+1}, A_{n+1}\}$, при этом $A_{n+1} \rightarrow \infty$, $B_{n+1} \rightarrow 0$, $A_n \rightarrow 1$, $B_n \rightarrow \lambda = \{B_n, A_n, B_{n+1}, A_{n+1}\}$. В реализации или $PSL(2, \mathbb{R})$ элементы $\tilde{\sigma} = gbg^{-1}$ выглядят следующим образом (рис. 7)

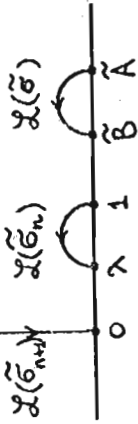


Рис. 7

$$\tilde{\sigma}_{n+1} = \begin{pmatrix} \sqrt{\mu_{n+1}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\mu_{n+1}}} \end{pmatrix}, \tilde{\sigma}_n = \frac{1}{1-\lambda} \begin{pmatrix} \sqrt{\mu_n} - \lambda & \lambda \\ \sqrt{\mu_n} - \frac{1}{\sqrt{\mu_n}} & \frac{1}{\sqrt{\mu_n}} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\sigma}_n^{-1} \tilde{\sigma}_{n+1} = \frac{1}{1-\lambda} \begin{pmatrix} \sqrt{\mu_{n+1}} \left(\frac{1}{\sqrt{\mu_n}} - \lambda \sqrt{\mu_n} \right) & -\frac{\lambda}{\sqrt{\mu_{n+1}}} \left(\frac{1}{\sqrt{\mu_n}} - \sqrt{\mu_n} \right) \\ \sqrt{\mu_{n+1}} \left(\frac{1}{\sqrt{\mu_n}} - \sqrt{\mu_n} \right) & \frac{1}{\sqrt{\mu_{n+1}}} \left(\sqrt{\mu_n} - \frac{\lambda}{\sqrt{\mu_n}} \right) \end{pmatrix},$$

$$0 < \sqrt{\mu_n}, \sqrt{\mu_{n+1}} < 1, 0 < \lambda < 1.$$

Неподвижные точки $\tilde{\sigma}$ (обозначим их \tilde{A}, \tilde{B}) являются решениями квадратного уравнения

$$f(z) = z^2 \mu_{n+1} (1 - \mu_n) + z (\mu_n \lambda - \mu_{n+1} + \lambda \mu_n \mu_{n+1}) + \lambda (1 - \mu_n) = 0. \quad (18)$$

Пусть инвариантные прямые расположены так, как на рис. 7.

Тогда оба корня уравнения (18) больше 1, следовательно,

$$\operatorname{Re} f'/f(z) |_{z=1} < 0, \text{ что эквивалентно}$$

$$\lambda > \frac{\mu_n + \mu_{n+1} - 2\mu_n \mu_{n+1}}{1 - \mu_n \mu_{n+1}}. \quad (19)$$

Элемент $\tilde{\sigma}$ гиперболический в двух случаях $tz\tilde{\sigma} > 2$ и $tz\tilde{\sigma} < -2$, или, что то же самое

$$\lambda < \left(\frac{\sqrt{\mu_{n+1}} - \sqrt{\mu_n}}{1 - \sqrt{\mu_n \mu_{n+1}}} \right)^2, \quad (20)$$

$$\lambda > \left(\frac{\sqrt{\mu_{n+1}} + \sqrt{\mu_n}}{1 + \sqrt{\mu_n \mu_{n+1}}} \right)^2. \quad (21)$$

Однако (20) противоречит (19), что и доказывает справедливость (21).

Пусть теперь выполнено (21), тогда $\tilde{\sigma}$ — гиперболический элемент, и у него есть 2 неподвижные точки — решения уравнения (18). Так как из (21) следует (19), то обе эти неподвижные точки больше 1. Осталось доказать, что $\tilde{A} > \tilde{B}$.

Предположим, что это не так, тогда из геометрии отображений очевидно $\tilde{\sigma}^{-1} [1, \tilde{A}] \subset [1, \tilde{A}]$, $\tilde{\sigma}_n^{-1} [1, \tilde{A}] \subset [1, \tilde{A}]$, следовательно, этим свойством обладает и их произведение $\tilde{\sigma}_{n+1}^{-1}$.

Постому на отрезке $[1, \tilde{A}]$ у $\tilde{\sigma}_{n+1}$ есть неподвижная точка. Полученное противоречие и доказывает истинный порядок расположения неподвижных точек $\tilde{\sigma}$: $\tilde{A} > \tilde{B}$. Легко доказана, так как в ее формулировке участвует только инварианты

отображения $\tilde{\sigma} = \sigma \circ \sigma^{-1}$.

ЛЕММА 5. Пусть инвариантные прямые $\mathcal{L}(\sigma_{n+1}), \mathcal{L}(\sigma_n)$, тройка так, как на рис.5, т.е. каждая тройка так, как на рис.6. Тогда можно выбрать фундаментальную область группы G в виде, изображенном на рис.5.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть p - некоторая точка: $B < p < A$, тогда и $B < \sigma_n^{-1} \sigma_{n+1} p < A$. Применим к p отображение σ_{n+1} , очевидно $\sigma_{n+1} p > B_{n+1}$ (рис.6). С другой стороны, применяя к $\sigma_n^{-1} \sigma_{n+1} p$ отображение σ_n , замечаем $\sigma_n^{-1} \sigma_{n+1} p < B_n$. Следовательно, фундаментальная область группы с образующими σ_n, σ_{n+1} ограничена полукругностями, изображенными на рис.6 пунктиром. Касание окружностей в точке $\sigma_{n+1} p$ устраняется малым шевелением фундаментальной области. Повторение описанной процедуры при всех n доказывает лемму.

Отметим, что образующие $\sigma_1, \sigma_1^{-1} \sigma_2, \dots, \sigma_{N-1}^{-1} \sigma_N$ отвечает фундаментальная область, изображенная на рис.3.

Таким образом доказана равносильность следующих трех утверждений относительно униформизации рис.4,5:

- 1) фундаментальная область G - как на рис.5,
- 2) инвариантные прямые расположены на рис.5,
- 3) параметры образующих удовлетворяют неравенствам:

$$B_N < B_{N-1} < \dots < B_1 < A_1 < \dots < A_N, \quad 0 < \sqrt{\mu_i} < 1, \quad i=1, \dots, N$$

$$\left\{ B_n, A_n, B_{n+1}, A_{n+1} \right\} > \left(\frac{\sqrt{\mu_n} + \sqrt{\mu_{n+1}}}{1 + \sqrt{\mu_n} \sqrt{\mu_{n+1}}} \right)^2, \quad n=1, \dots, N-1. \quad (22)$$

§ 5. Решения уравнения КП2.

Вернемся к уравнению КП2. Локальный параметр в окрестности $P_{\infty} = \infty$ равен $p = z^{-1}$. Требования на свободный вектор D теоремы 2 сформулированы для определенного базиса циклов (8). Базис рис.1,5 от него отличается, так как антиинволюция $\tau z = \bar{z}$ действует на него отличным от (9) образом

$\tau \alpha_n = -\alpha_n, \tau \beta_n = \beta_n$. При помощи модулярного преобразования (см. приложение) легко переформулировать условия на D применительно к базису $H_1(\Gamma, \mathbb{Z})$, выбранному нами. Это дает $D \in R^N$ - любой вещественный.

Далее, сравнивая формулы (3), (12), получаем

$$U_n = \sum_{\sigma \in G/G_n} (\sigma A_n - \sigma B_n), \quad V_n = \sum_{\sigma \in G/G_n} ((\sigma A_n)^2 - (\sigma B_n)^2), \quad (23)$$

$$W_n = \sum_{\sigma \in G/G_n} ((\sigma A_n)^3 - (\sigma B_n)^3).$$

Сходимость рядов $\sum_{\sigma \in G} (\sigma \alpha - \sigma \beta)$ есть следствие сходимости ряда $\sum_{\sigma \in G} \chi^{-2}$, где χ - матричный элемент $(\Pi) \in [15]$, по-

этому корректно следующее выражение для абелева интеграла второго рода (2)

$$\Omega(z) = \sum_{\sigma \in G} (\sigma z - \frac{\alpha}{\chi}). \quad (24)$$

Из формул (2), (24) следует

$$c = \sum_{\sigma \in G} \chi^{-2}. \quad (25)$$

Таким образом, доказана следующая

ТЕОРЕМА 3. Все вещественные несингулярные конечнозонные решения уравнения КП2 задаются формулами (5), (13), (23), (25), в которых параметры A_n, B_n, μ_n μ_n пробегают множество (22), а вектор $D \in R^N$ - любой вещественный.

Из выражений (23) следует, что при выборе образующих G , как на рис.5, имеет место упорядочение

$$0 < V_1 < V_2 < \dots < V_N.$$

При вычислениях могут оказаться удобнее другие образующие - те, у которых меньше размер окружностей C_n, C'_n и, следовательно, все ряды быстрее сойдутся.

§ 6. Решения уравнения ШП.

Решения уравнения ШП строятся по общим вещественным разделимым римановым поверхностям, не обязательно M -кривым. Пусть Γ - такая поверхность, $\Gamma_0, \dots, \Gamma_{n-1}$ - n неподвижных овалов антикэволюции τ . Γ_+ - риманова поверхность сигнатуры (g, n) , $g = (N+1-n)/2$, $\Gamma_0, \dots, \Gamma_{n-1}$ - ее граничные контуры (см. рис. 8).

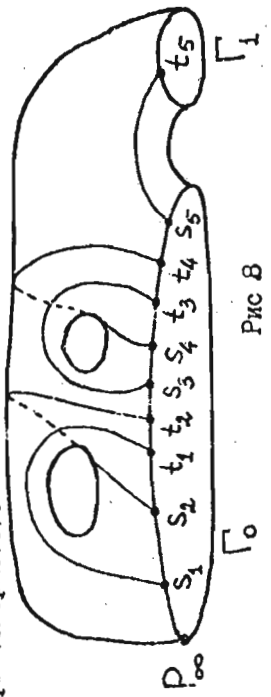


Рис 8

По системе геодезических непересекающихся разрезов ℓ_n $n=1, \dots, n$ таких, что $\Gamma_+[\ell]$ односвязна, абсолютно аналогично §4 строится фундаментальная область F фуксовой классической группы Шоттки G . Мы будем выбирать ℓ_n с концами на Γ_+ . На рис. 9 изображена F , построенная по системе контуров ℓ_n рис. 8. Это один из способов задать F , когда окружности располагаются канонически "четверками" и "парами". Инвариантные прямые q пар образующих пересекаются.

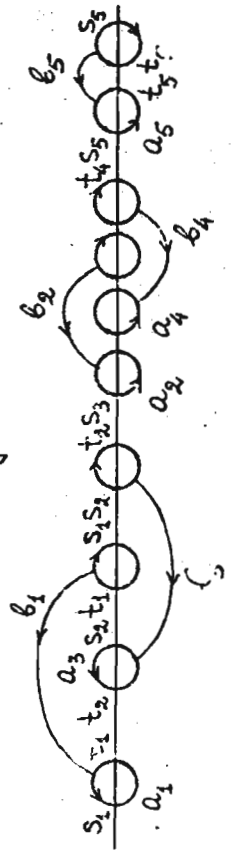


Рис. 9

Отметим, что изображенная на рис. 9 фундаментальная область фуксовой группы второго рода (ограничение на верхнюю полусферу) отличается от канонической [27], которая связана с выбором разрезов ℓ_n выходящих из некоторой отмеченной внутренней точки $P_0 \in \Gamma_+$. Система образующих определяемая такой канонической фундаментальной областью, не свободна от соотношений (см. § 3).

Вообще, пусть мы имеем N пар окружностей $S_{n_1}, S_{n_2}, \dots, S_{n_N}$ сел-занных при помощи гиперболических отображений β_n , лежащих внешне друг к другу образом, ортогональных вещественной оси и расположенных в произвольном порядке. Порожденная β_1, \dots, β_N группа Шоттки G униформизует вещественную разделимую кривую, причем число овалов N легко определяется по порядку разложения окружностей.

Множество S параметров генераторов β_1, \dots, β_N в этом случае также можно полностью описать из анализа инвариантных прямых группы. Соответствующие результаты для системы образующих, выбранных как на рис. 9, получены в работе [13].

Базис циклов, указанный на рис. 9, при действии антиинволюции $\tau Z = \bar{Z}$ ведет себя следующим образом:

$$\tau a_k = -a_k, \quad k=1, \dots, N, \quad \tau b_i = b_i - a_{g+i}, \quad (26)$$

$$\tau b_{g+i} = b_{g+i} - a_i, \quad \tau b_{2g+j} = b_{2g+j}, \quad i=1, \dots, g, \quad j=1, \dots, n-1.$$

Базис a'_k, b'_k , связанный с ним равенствами

$$\begin{aligned} a'_i &= a_i - b_{g+i} & b'_i &= b_i \\ a'_{g+i} &= -b_{g+i} & b'_{g+i} &= a_{g+i} - b_i \\ a'_{2g+j} &= -b_{2g+j} & b'_{2g+j} &= a_{2g+j} \end{aligned} \quad (27)$$

канонический, и при действии антиинволюции преобразуется по формулам (8). Именно в таком базисе и сформулированы требования (9) на вектор D теоремы 2. Пользуясь законом изменения аргумента тета-функции при модулярном преобразовании (П 2) легко переписать ограничения (9) на свободный вектор D в базисе рис.9. Действительно, матрица периодов в базисе (26) равна

$$B = B_R + \tau i \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \# & \# \\ \# & \# \end{pmatrix} \begin{matrix} \# \\ \# \end{matrix} \begin{matrix} n-1 \\ n-1 \end{matrix} \quad (28)$$

где B_R - чисто вещественная, а аргумент тета-функции (5) в базисе a'_k, b'_k согласно теореме 2 имеет следующий вид:

$$z' = (\xi, \bar{\xi}, \eta), \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad \eta \in \mathbb{R}^{n-1} \quad (29)$$

Связь (27), записанная в матричной форме (П I), дает (размеры матриц см. выше (28))

$$\gamma = - \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ 0 & I & 0 \\ I & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \delta = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (30)$$

Подставляя выражения (28), (29), (30) в закон преобразования (П 2), получаем, что аргумент Z тета-функции в базисе (26) чисто мнимый. Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА 4. Все вещественные несингулярные конечнозонные решения уравнения КПИ задаются формулой

$$u(x, y, t) = -2 \frac{\partial}{\partial x} \ln \theta(i(Vx + \gamma y + Wt + D|B) + \lambda c),$$

где постоянные определяются равенствами (13), (23), (25), а вектор $D \in \mathbb{R}^N$ - любой вещественный.

§ 7. Решения уравнения КДФ.

Если поверхность Γ - гиперэллиптическая, P_∞ - точка ветвления, то зависимость от y в формуле (5) пропадает. Таким образом получаются все конечнозонные решения уравнения КДФ

$$4u_x = 6uu_x + u_{xxx}.$$

Опишем эти решения более подробно. Рассмотрим риманову поверхность Γ гиперэллиптической кривой (см. рис.10)

$$\omega = \prod_{i=1}^{2N+1} (E - E_i), \quad E_1 < E_2 < \dots < E_{2N+1}. \quad (31)$$

Γ обладает гиперэллиптической инволюцией $\mathcal{T}: (E, \omega) \rightarrow (E, -\omega)$, а также - антиинволюциями $\mathcal{T}: (E, \omega) \rightarrow (\bar{E}, \bar{\omega})$ и $\mathcal{T}\mathcal{T}: (E, \omega) \rightarrow (\bar{E}, -\bar{\omega})$. Γ -M-кривая: и \mathcal{T} , и $\mathcal{T}\mathcal{T}$ имеют по $N+1$ неподвижных овалу, причем неподвижные овалы \mathcal{T} "висят" над запрещенными зонами $[-\infty, E_1], \dots, [E_{2N}, E_{2N+1}]$, а неподвижные овалы $\mathcal{T}\mathcal{T}$ - над разрешенными зонами $[E_1, E_2], \dots, [E_{2N+1}, +\infty]$. Пусть локальный параметр P в $P_\infty = \infty$ такой, что $K = P^{-1} = i\sqrt{E}$. В этом случае $\mathcal{T}^* K = \bar{K}$, и при соответствующем выборе вектора $D \in \mathbb{C}^N$ формула Матвеева-Итса [8]

$$u(x, t) = 2 \frac{\partial}{\partial x} \ln \theta(Vx + Wt + D|B) + \lambda c,$$

где постоянные задаются теми же выражениями (2), (3), определяет все гладкие вещественные конечнозонные решения уравнения КДФ. В частности, если циклы выбраны так, как на рис.10, т.е. $\tau\alpha = -\alpha$, $\tau\beta = \beta$, то вектор D - любой вещественный $D \in \mathbb{R}^N$, а если так, как на рис.11, $\tau\alpha = \alpha$, $\tau\beta = -\beta$, то D - любой чисто мнимый. Можно посмотреть на рис.11 несколько по-другому: рассмотрим вместо \mathcal{T} антиинволюцию $\mathcal{T}\mathcal{T}$. Она действует на циклы так же, как и \mathcal{T} в первом случае: $\mathcal{T}\mathcal{T}\alpha = -\alpha$, $\mathcal{T}\mathcal{T}\beta = \beta$, $(\mathcal{T}\mathcal{T})^* K = -\bar{K}$.

тогональны вещественной оси и лежат правее нуля, а окружности C'_1, \dots, C'_N получаются из них при отображении $Z \rightarrow -Z$ (см. рис.12). Как и раньше, пара C_n, C'_n задает гиперболическое преобразование B_n . неподвижные точки B_n - это A_n и $B_n^{-1} = -A_n$. C_n и C'_n - изометрические окружности B_n и B_n^{-1} , центр C_n находится в точке $A_n(1+\mu_n)/(1-\mu_n)$, а ее радиус равен $2A_n\mu_n/(1-\mu_n)$. В этом случае группа Шоттки G - подгруппа индекса 2 группы с образующими α_n и $\beta_n z = -z$: $\alpha_n^2 = 1$, $\beta_n = \alpha_n \tau$. Точки пересечения окружностей с вещественной осью, а также 0 и ∞ - неподвижные точки гиперэллиптической кривой $\tau z = -z$. $\tau z = z$ - антиинволюция сопряжения.

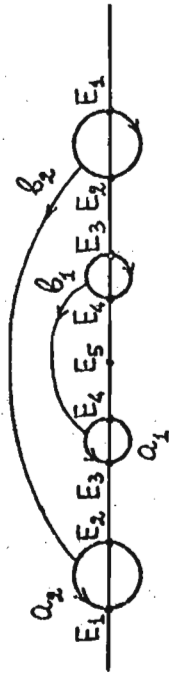


Рис.12 G

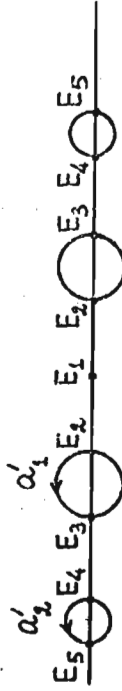


Рис.13 G'

Как уже отмечалось в §2, униформизация Шоттки зависит от выбора петель $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ на римановой поверхности. В дальнейшем мы будем рассматривать две различные униформизации Шоттки кривой (31), определяемые выбором α -циклов

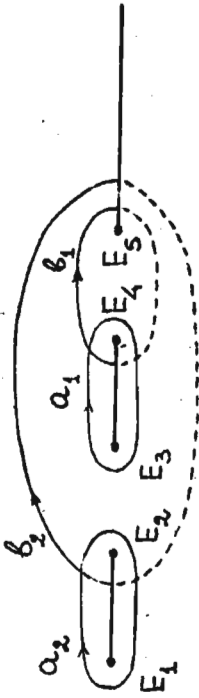


Рис.10

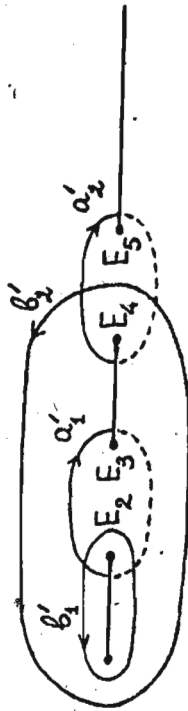


Рис.11

Разумеется, часто конечное решение не зависит от выбора циклов на римановой поверхности и, тем самым, рис. 10 и 11 задают разную параметризацию одного и того же решения. Однако, как будет ясно из дальнейшего, удобно использовать обе эти параметризации. Отметим, наконец, что замена локального параметра $k \rightarrow \alpha \cdot k + \beta k^{-1} + O(k^{-2})$ эквивалентна замене

$$x \rightarrow \alpha x + 3\alpha^2 \beta t, t \rightarrow \alpha^3 t, u \rightarrow \alpha^{-2} u - 2\alpha^{-1} \beta. \quad (32)$$

При чисто мнимых α и β она преводит решение в первой из рассмотренных параметризаций в некоторое решение во второй параметризации (при соответствующей замене вектора D).

Любая гиперэллиптическая M-кривая может быть униформизована следующим образом. Пусть окружности C_1, \dots, C_N ор-

(мы полагаем всегда $\alpha_n = \sqrt{\mu_n}$) рис.10 и рис.11. Группы Шоттки G и G' , отвечающие этим двум различным униформизациям Γ , различны, их фундаментальные области F и F' изображены, соответственно, на рис.12 и рис.13, причем указаны точки, в которые отображаются точки ветвления E_i ($E = \infty \rightarrow z = \infty$). Для первой униформизации \mathcal{T} и \mathcal{T}' описаны выше, локальный параметр в ∞ равен $K = z$. Во втором случае также $\mathcal{T}z = -z$, но, как было ранее объяснено, $\mathcal{T}'z = \bar{z}$, $K = iz$.

Редукция $B_n = -A_n$ приводит к упрощению матрицы периодов

$$B_{nm} = \sum_{\substack{\beta \in G_m \\ \beta \in G_m \setminus G/G_n}} \{ \beta A_m, \beta B_n, \beta A_n \} = \sum \ell_n \left(\frac{\beta - \beta B_n}{\beta - \beta A_n} \right) + \sum \ell_n \left(\frac{A_m - \beta A_n}{A_m - \beta B_n} \right) = \sum \ell_n \left(\frac{A_m - \beta A_n}{A_m - \beta(-A_n)} \right) + \sum \ell_n \left(\frac{A_m - \beta A_n}{A_m - \beta(-A_n)} \right)^2 \quad (33)$$

$$B_{nn} = \ell_n \mu_n + \sum_{\substack{\beta \in G_n \setminus G/G_n \\ \beta \neq I}} \ell_n \left(\frac{A_n - \beta A_n}{A_n - \beta(-A_n)} \right)^2.$$

Здесь мы воспользовались тем, что группа G обладает автоморфизмом $\beta \rightarrow \beta^* = \mathcal{T}\beta\mathcal{T}$, не выводящим из смежного класса. Сходимость рядов в (33) есть следствие сходимости ряда $\sum (\beta A_n - \beta(-A_n))$ и отделимости A_m от βA_n и $\beta(-A_n)$. Остальные постоянные согласно (23), (25) равны

$$U_n = \sum_{\beta \in G/G_n} (\beta A_n - \beta(-A_n)), W_n = \sum_{\beta \in G/G_n} ((\beta A_n)^3 - (\beta(-A_n))^3), c = \sum_{\beta \in G} \gamma^{-2}. \quad (34)$$

Выражения для краев зон через параметры униформизации можно получить из работ [20], [17].

Ограничения (22) на параметры A_n, μ_n в гиперреалистическом случае могут быть записаны следующим образом

$$0 < A_1 < \dots < A_N < +\infty$$

$$\left(\frac{1 - \sqrt{\mu_n}}{1 + \sqrt{\mu_n}} \right) \left(\frac{1 - \sqrt{\mu_{n+1}}}{1 + \sqrt{\mu_{n+1}}} \right) > \frac{A_n}{A_{n+1}}, \quad n = 1, \dots, N-1, \quad (35)$$

$$0 < \sqrt{\mu_i} < 1, \quad i = 1, \dots, N.$$

Как показано выше, униформизация, задаваемая выбором циклов рис.11, эквивалентна выбору в ∞ локального параметра $K = iz$, что согласно (32) приводит к замене $z \rightarrow iz, t \rightarrow -it$.

ТЕОРЕМА 5. Все вещественные несингулярные конечнозонные решения уравнения КдФ задаются формулами

$$u(x,t) = 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \theta(Ux + Wt + D|B) + 2c \quad (36)$$

$$u(x,t) = -2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \theta(i(Ux - Wt + D)|B) + 2c, \quad (37)$$

в которых постоянные U, W, c определяются выражениями (34), параметры A_n, μ_n пробегает множество (35), а вектор $D \in \mathbb{R}^N$ - любой вещественный. Каждая из формул (36), (37) задает все множество конечнозонных решений.

§ 8. Качественный анализ решений уравнения КдФ.

Ряды в §7 всегда сходятся, так как G - фуксова группа второго рода. Однако, они сходятся тем быстрее, чем меньше размер окружностей C, C' , что означает "малости" циклов α, α' рис.10, 11, т.е. на рис.10 малы разрешенные зоны, а на рис.11 - запрещенные. В работе [18] при помощи техники тета-функциональной подстановки проведен детальный анализ двухфазного решения уравнения КдФ в этих случаях. При помощи аналитических вычислений на ЭВМ были получены несколько

ко первых членов рядов для V, U, W по малому параметру (\sim ширина зоны), которых оказалось достаточно для изучения решений. На наш взгляд, формулы настоящей работы более удобны для такого анализа. Кроме того, они позволяют определить физические характеристики многофазного решения, такие как амплитуды, волновые числа и фазовые скорости гармоник (см. ниже), что в подходе, основанном на прямых подстановках вызвало известные трудности, связанные с тем, что тета-функция элускает модулярное преобразование (см. приложение и [18]), меняющее эти характеристики.

Волны малой амплитуды. Решение с малой амплитудой строится по римановой поверхности с маленькими запрещенными зонами. В этом случае удобно рассмотреть униформизацию, задаваемую выбором циклов рис.11 и формулу (37). Обозначим соответствующие параметры униформизации A_n, μ_n . Малость запрещенных зон приводит к малости окружностей C_n , что в свою очередь означает $\mu_n \ll 1$. В этом случае очень хорошую точность дает первое приближение

$$V'_{nm} \approx \ln \left(\frac{A'_m - A'_n}{A'_m + A'_n} \right)^2, U'_n \approx 2A'_n, W'_n \approx 2A_n^3, c \approx 0. \quad (38)$$

Диагональные элементы матрицы периодов много больше недиагональных, поэтому решение представляет собой сумму не взаимодействующих гармоник малой амплитуды

$$u(x, t) \approx -2 \sum x^2 \ln \{ 1 + 2 \sum \sqrt{\mu'_n} \cos(2A'_n(x - A_n^2 t + D_n)) \} \approx \approx 8 \sum A_n^2 \sqrt{\mu'_n} \cos(2A'_n(x - A_n^2 t + D_n)).$$

Закфиксируем U'_n и будем увеличивать амплитуду гармоник. При этом μ'_n растут, а A_n почти не меняются, радиусы окружностей C_n увеличиваются, а их центры меняются не сильно. $|V'_{nm}|$ убывают, и в некоторый момент пренебрегать взаимодействием гармоник становится нельзя.

Солитонные цепочки. Аналогичным образом может быть изучен и другой предел - малых разрешенных зон. В этом случае

удобно рассматривать формулу (36) и униформизацию рис.12, задаваемую выбором циклов рис.10. Обозначим соответствующие параметры униформизации A_n, μ_n . $\mu_n \ll 1$, и хорошую точность дает первое приближение

$$V'_{nm} \approx \ln \mu_n, V \approx \ln \left(\frac{A'_m - A'_n}{A'_m + A'_n} \right)^2, U'_n \approx 2A_n, W'_n \approx 2A_n^3, c \approx 0. \quad (39)$$

Такое решение описывает взаимодействие M периодических цепочек далеко отстоящих друг от друга солитонов, причем солитоны взаимодействуют попарно и с обычным сдвигом фаз (см. [18], где подробно анализируется такое решение). Каждой цепочке можно сопоставить некоторое волновое число K_n . Действительно, группа периодов тета-функции в формулах (36), (37) задается решеткой $\mathcal{L} = \{2\pi iM + nB\}, M, n \in \mathbb{Z}^N$, где

B - вещественная. В случае малых амплитуд рассматриваемая в предыдущем пункте, аргумент тета-функции (37) чисто мнимый, поэтому волновые числа гармоник определяются мнимой частью решетки \mathcal{L} , они равны $K'_n = U'_n$. Аргумент тета-функции (36) у солитонных цепочек вещественный, поэтому волновые числа равны

$$K = (K_1, \dots, K_N) = 2\pi UB^{-1}. \quad (40)$$

Рост μ_n при неизменном K_n приводит к уменьшению амплитуды солитонов, пики становятся менее острыми, а солитонная интерпретация перестает быть естественной.

Таким образом, каждое N -фазное решение уравнения КдФ может быть интерпретировано двумя способами: 1) как взаимодействие N солитонных цепочек (униформизация A_n, μ_n , рис.12), 2) как взаимодействие M гармоник (униформизация A'_n, μ'_n , рис.13). Эти два описания связаны при помощи модулярного преобразования (П 4, П 5). Чем больше скружности в одной униформизации, тем меньше они в другой. Действительно, из первых приближений (38), (39) и закона преобразования (П 3), (П 5) матрицы периодов получаем

$$\ln \mu_n \sim V_{nn} \sim \frac{4\pi^2}{N-n, N-n} \sim \frac{4\pi^2}{\ln \mu'_{N-n}}$$

Далее, пусть при втором описании решение характеризуется волновыми числами $K' = (K'_1, \dots, K'_N)$. Тогда при замене базиса циклов, отвечающей переходу от рис. II к рис. I, аргумент гэта-функции преобразуется следующим образом (П 4):

$$iU' = iK' \rightarrow K' \chi B / 2\pi = U,$$

где U и U' - векторы (34) соответственно в первой и второй реализации. Учитывая (40), получаем связь волновых чисел

$$K = K' \chi, \quad (41)$$

где матрица χ определяется равенством (П 5).

Рассмотрим периодическое с периодом $1/2\pi$ решение малой амплитуды, описывающее взаимодействие N первых гармоник, причем ни одна гармоника не пропущена

$$K' = (1, 2, \dots, N).$$

Не меняя периода, будем увеличивать амплитуды всех гармоник. В некоторый момент более естественной станет интерпретация солитонных цепочек, причем согласно (41)

$$K = (1, 1, \dots, 1)$$

все цепочки имеют одинаковый период, равный периоду решения. Это явление получило название парадокса волновых чисел, оно исследовалось при $N=2$ в работе [10].

§ 9. Вычисления.

Формулы настоящей работы оказались довольно удобными для вычислений параметров конечных решений на ЭМ. Приведем некоторые результаты таких вычислений для уравнения КдФ.

Была составлена программа, позволяющая по заданным значениям диагоналей матрицы периодов V_{nn}^0 и вектора U_n^0 (амплитуды и волновые числа) вычислять параметры униформизации A_n, μ_n . Работает она методом итераций. Из первого приближения

$$V_{nn} = \ln \mu_n, \quad U_n = 2A_n \quad (42)$$

по V_{nn}^0, U_n^0 находят начальные значения A_n, μ_n , затем вычисляются определяемые ими V_{nn}, U_n (33), (34). Невязки $\Delta U_n = U_n - U_n^0, \Delta V_{nn} = V_{nn} - V_{nn}^0$, опять же, по приближению (42) диктуют изменение соответственно A_n и μ_n ; затем вся процедура повторяется пока не будет достигнуто требуемой малости невязок $\Delta U, \Delta V$ (везде полагалось $\Delta V = \Delta U = 0.001$). По вычисленным таким образом A_n, μ_n окончательно определяются все величины U, W, V, c . При вычислениях суммируются все во всех рядах производится по элементам группы $\sigma = \sigma_{n_1} \dots \sigma_{n_k}$ (σ_{n_k} - генераторы G) с длиной $l = |j_1 + \dots + j_k|$ меньшей некоторого фиксированного числа L . Во всех приведенных здесь примерах $L=4$, этого достаточно для требуемой точности.

n	A_n	$\sqrt{\mu_n}$	Z_n	R_n	U_n	W_n
1	0.493	0.2068	0.538	0.213	1.000	0.286
2	1.112	0.0330	1.115	0.074	2.000	2.539
3	1.585	0.0078	1.585	0.025	3.000	7.723

$$B = -2\pi \begin{pmatrix} 0.500 & 0.304 & 0.210 \\ 0.304 & 1.000 & 0.501 \\ 0.210 & 0.501 & 1.500 \end{pmatrix}, c = 0.0562.$$

Для всех приведенных здесь вычислений потребовалось менее 1 мин. процессорного времени на ЭВМ ЕС-1033. В целом счет показал, что вычисления можно проводить при значениях $N=4$ и даже больших практически на всем множестве (35) параметров униформизации. В большинстве случаев при этом достаточно приближений $L=1$ или $L=2$.

§ 10. Решения уравнения Sine-Gordon.

До сих пор мы рассматривали только вещественные римановы поверхности разделимого типа (см. § I). Но при конечно-зонном интегрировании ряда уравнений встречаются вещественные римановы поверхности неразделимого типа. Наиболее известным среди них является уравнение Sine-Gordon. Иончозонные решения этого уравнения были построены В.А.Козлом, В.П.Котляровым [10] и А.Р.Итсом [32]. Оказавшаяся нетривиальной проблема вещественности была решена значительно позднее [6], [22]. Униформизация Шоттки позволяет эффективно описать все вещественные конечнозонные решения и в этом случае.

Приведем сначала хорошо известную формулу для решений уравнения Sine-Gordon. Пусть Γ - гиперэллиптическая кривая

$$\omega^2 = E \prod_{i=1}^{2N} (E - E_i), \quad (43)$$

причем точки ветвления располагаются двумя способами:

- 1) $E_1 < E_2 < \dots < E_{2k} < 0$ на вещественной оси,
 - 2) $E_{2k+j}, j=1, \dots, 2(N-k)$ сопряжены парами $\bar{E}_{2k+2n+1} = E_{2k+2n}$.
- Если $k \neq N$, то Γ - неразделимого типа. Выберем, как обычно, канонический базис циклов α_n, β_n на Γ так, чтобы цикл, обходящий разрез $[0, +\infty]$ был гомологичен сумме $\sum_{n=1}^{N-1} \alpha_n$,

Здесь Z_n - центры, а R_n - радиусы изометрических окружностей C_n . Формулой (37) описывается периодическое решение, описывающее взаимодействие первой, второй и третьей гармоник.

Приведем также для одного из того же решения два описания, обобщающиеся в §§ 7,8. Представление этого решения в виде (37) взаимодействующих первой и второй гармоник выглядит следующим образом:

n	A'_n	$\sqrt{\mu'_n}$	Z'_n	R'_n	U'_n	W'_n
1	0.494	0.2068	0.538	0.213	1.000	0.282
2	1.113	0.0331	1.116	0.074	2.000	2.532

$$B' = -2\pi \begin{pmatrix} 0.500 & 0.304 \\ 0.304 & 1.000 \end{pmatrix}, \quad c' = 0.0556.$$

Переход (П 3) - (П 5) к описанию этого решения солитонными цепочками (36) дает

$$B'' = -2\pi \cdot 1.227, \quad B_{22} = -2\pi \cdot 2.188, \quad U_1 = 1.708, \quad U_2 = 2.669.$$

По ним описанными выше итерациями определяются остальные параметры:

n	A_n	$\sqrt{\mu_n}$	Z_n	R_n	U_n	W_n
1	0.853	0.0212	0.855	0.036	1.708	1.245
2	1.338	0.0010	1.338	0.002	2.669	4.775

$$B = -2\pi \begin{pmatrix} 1.227 & 0.481 \\ 0.481 & 2.188 \end{pmatrix}, \quad c = 0.0013.$$

Следовно, что описание солитонными цепочками для этого решения более удачно ($R_n \ll R'_n$). A_n, μ_n и A'_n, μ'_n униформизируют одну и ту же кривую Γ двумя различными группами Шоттки G и G' .

а антиинволюция $\tau: (E, \omega) \rightarrow (\bar{E}, -\bar{\omega})$, не меняющая листы, действовала на базис следующим образом

$$\tau a_i = -a_i \quad i=1, \dots, N$$

$$\tau \tau_j = \tau_j \quad j=1, \dots, k, \quad \tau \tau_j = \tau_j - a_j \quad j=k+1, \dots, N. \quad (44)$$

Тогда матрица периодов вся вещественная за исключением только части диагонали $\int_{\gamma_j} \tau_j \tau_j = \tau_j$, $j=k+1, \dots, N$.

Пусть Ω_1 и Ω_2 абелевы интегралы второго рода с полюсами в точках ветвления $E=0$ и $E=\infty$ вида

$$\Omega_1 \rightarrow i\sqrt{E}, \quad \Omega_2 \rightarrow i\sqrt{E} \quad E \rightarrow \infty$$

$$\Omega_1 \rightarrow \frac{1}{16i\sqrt{E}}, \quad \Omega_2 \rightarrow -\frac{1}{16i\sqrt{E}} \quad E \rightarrow 0, \quad (45)$$

а $U, V \in \mathbb{R}^N$ - соответственно их векторы ϕ -периодов. Все вещественные конечноразмерные решения уравнения Sine-Gordon

$$u_{xx} - u_{tt} = \sin u \quad (46)$$

описываются формулой

$$u(x, t) = 2i \ln \frac{\theta(Ux + Vt + \tau i \Delta + D|B)}{\theta(Ux + Vt - \tau i \Delta + D|B)}. \quad (47)$$

Здесь $\Delta = \frac{1}{2}(0, \dots, 0, 1, \dots, 1)$ (нули на первых k местах), $D = D_0 + \tau i(\epsilon_1, \dots, \epsilon_k, 0, \dots, 0)$, где $D_0 \in \mathbb{R}^N$ - любой, а $\epsilon_1, \dots, \epsilon_k$ принимают значения 0, 1 и нумеруют различные мнимые компоненты якобиана.

Кривая (43), так же как и гиперэллиптическая M -кривая § 7, может быть униформизована группой Шоттки G с образующими b_1, \dots, b_N , которая является подгруппой индекса 2 группы с образующими a_n и $\tau \tau_j = \tau_j$: $\alpha_n^2 = 1$, $\sigma_n = \alpha_n \tau$. Редукция $B_n = -A_n$ опять имеет место. На этот раз среди A_n имеются как положительные $0 < \mu_1, \dots, \mu_k < 1$, так и отри-

цельные $-1 < \mu_{k+1}, \dots, \mu_N < 0$. Это приводит к тому, что образующие b_{k+1}, \dots, b_N отображают верхнюю полуплоскость H на нижнюю \bar{H} , следовательно, группа G - не фуксова, хотя вещественная ось, по прежнему, - инвариантная окружность G . неподвижные точки гиперэллиптической инволюции $\tau \tau_j = \tau_j$ в этом случае, не считая $z=0, \infty$, лежат по две на каждой окружности C_k , причем при $k \leq k$ - это точки пересечения C_k с вещественной осью, а при $k > k$ они комплексно сопряжены. $\tau \tau_j = \tau_j$ - антиинволюция сопряжения Γ . Базис циклов такой униформизации удовлетворяет условию (44). В случае $N=2$, $k=1$ он указан на рис.14.

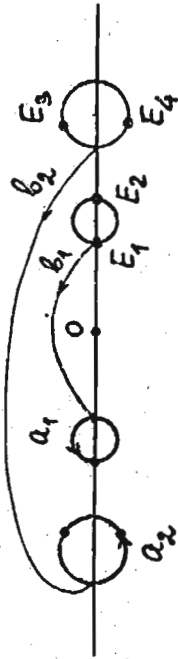


Рис.14

Хотя G теперь уже не является фуксовой группой второго рода, она обладает инвариантной окружностью и точно падает под действие признака б) Бернсайда (см. § 2) сходимость тега-рядов Пуанкаре, что доказывает сходимость всех рядов, фигурирующих в этом параграфе.

Матрица периодов задается тем же выражением (33), а для того чтобы определить обмоточные векторы необходимо согласованно (45) выбрать локальные параметры в точках $z=0$ и $z=\infty$. Локальные параметры в этих точках определяются через функцию $f(p) = i\sqrt{E}$, $p \in \Gamma$ на римановой поверхности кривой (43). В реализации этой римановой поверхности как двулистного накрытия плоскости (два экземпляра комплексной плоскости, склеенные между собой по разрезам $[0, \infty], [E_{2n-1}, E_{2n}]$, $n=1, \dots, N$) функция $f(p)$ неоднозначна на Γ . Она

имеет простой полюс в ∞ , простой ноль в 0 и отличается знаком на различных берегах петель Ω_n , "висящих" над $[E_{2n-1}, E_{2n}]$, $n=1, \dots, N$. Кроме того, $f(cP) = f(P)$ и $f^2(P) = -E$ - однозначная функция на Γ . Следовательно, в реализации $\Gamma = \Omega/G$ $f(z)$ должна иметь простой полюс в ∞ и простой ноль в 0 . При конформном отображении описанного вкле двудлистного накрытия на фундаментальную область F , как отмечалось в §2, петли $\Omega_n = \Omega_n$ отображаются на граничные окружности C_n, C'_n . $f(z)$ - однозначная функция на Ω/G , $f(\sigma_n z) = -f(z)$, $n=1, \dots, N$, а ее квадрат - автоморфная функция. Кроме того $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$. Из этих условий получаем

$$-E(z) = f^2(z) = \sum_{b \in G} ((\sigma z)^2 - \frac{b^2}{\sigma^2}).$$

Вспользовавшись наличием автоморфизма $b \rightarrow \sigma b = \pm b \sigma$ у группы G , нетрудно показать, что

$$f(z) \rightarrow z + O(1), z \rightarrow \infty$$

$$f(z) \rightarrow cz + O(z^2), z \rightarrow 0, c = \sqrt{\sum_{b \in G} b^{-4} (1-2\beta)}, c > 0. \quad (48)$$

Перечисленными выше условиями $f(z)$ определяется с точностью до умножения на вещественную постоянную, которое несущественно, ибо, в результате, приводит к решениям, отличающимся только преобразованием Лоренца, относительно которого уравнение (46) инвариантно. Покажем, почему следует выбирать положительный знак корня в (48), $c > 0$. Это следствие того, что $\int_{\Gamma} f'(iy) > 0$ при достаточно больших $y \rightarrow +\infty$, и $f(z)$ на мнимой оси принимает чисто мнимые значения, не обращаясь в ноль нигде, кроме $z=0$. Последнее вытекает из того, что $E(z)$ не обращается в ноль на мнимой оси и принимает на ней вещественные значения, поскольку $E(-z) = E(z)$, $E(\bar{z}) = E(z)$.

Сравнивая (45) и (48), получаем следующую асимптотику интегралов Ω_1 и Ω_2 :

$$\Omega_1 \rightarrow z \quad \Omega_2 \rightarrow z \quad z \rightarrow \infty,$$

$$\Omega_1 \rightarrow \frac{1}{16cz} \quad \Omega_2 \rightarrow -\frac{1}{16cz} \quad z \rightarrow 0. \quad (49)$$

Для подсчета векторов \mathcal{V} -периодов удобно воспользоваться следующим простым фактом (см., например, [4]). Пусть K - локальная координата в окрестности точки $P \in \Gamma (K \rightarrow P \rightarrow P_0)$, и базисные голоморфные дифференциалы записываются в окрестности P_0 в виде $du = g(k)dk$. Тогда нормированный абелев интеграл второго рода с единственной особенностью в точке P_0 вида $\Omega(P) \rightarrow k^{-1} + O(1)$, $K \rightarrow 0$ имеет вектор \mathcal{V} -периодов $\omega = -g(0)$. Из асимптотик (49) и выражений для дифференциалов (12) следует, что обмоточные векторы равны

$$V_n = \sum_{b \in G/G_n} (\sigma(-A_n) - \sigma A_n + \frac{1}{16c} (\frac{1}{\sigma(-A_n)} - \frac{1}{\sigma A_n})), \quad (50)$$

$$V_n = \sum_{b \in G/G_n} (\sigma(-A_n) - \sigma A_n - \frac{1}{16c} (\frac{1}{\sigma(-A_n)} - \frac{1}{\sigma A_n})).$$

ТЕОРЕМА 6. Все вещественные гладкие конечнозонные решения уравнения Sine-Gordon задаются формулами (47), (50), (48), (33).

В реализации Γ как двудлистного накрытия плоскости разрезы $[E_i, E_i]$ можно выбирать пересекающимися вещественную ось в различных точках, что, однако, приводит к одной и той же римановой поверхности. Подобно этому, порядок расположения неподвижных точек обрезающих \mathcal{B}_n с отрицательными и положительными μ_n несущественен, он может быть выбран любым при помощи подходящей замены системы образующих G , причем условие $\mathcal{V}_n = -A_n$ сохраняется.

Мы рассматривали унитаризацию кривой (43), связанную с фиксированным выбором на ней полубазиса циклов $\Omega_1, \dots, \Omega_N$. В некоторых случаях, например, при построении перемешанных действие-углов [14], более удобным может оказаться другой полубазис.

Литература

1. Белокозос Е.Д., Бобенко А.И., Матвеев В.Б., Энодский В.З. Алгеброгеометрические принципы суперпозиции конечных решений интегрируемых нелинейных уравнений, УМН, 1986, т.41, № 2, с.3-42.
2. Бобенко А.И. Униформизация Шоттки и конечнозонное интегрирование, ДАН СССР, 1986.
3. Бобенко А.И., Кубенский Д.А. Качественный анализ и вычисления конечнозонных решений уравнения КдФ. Автоморфный подход, ТМФ, 1986.
4. Дубровин Б.А. Тэта-функции и нелинейные уравнения, УМН, 1981, т.36, № 2, с.11-80.
5. Дубровин Б.А., Матвеев В.Б., Новиков С.П. Нелинейные уравнения типа Кортевега-де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия, УМН, 1976, т.31, № 1, с.55-136.
6. Дубровин Б.А., Натанзон С.М. Вещественные двухзонные решения уравнения *Sine-Gordon*, Функциональный анализ и его приложения, 1982, т.16, № 1, с.27-43.
7. Дубровин Б.А., Натанзон С.М. Вещественные тэта-функциональные решения уравнения Кадомотца-Петвиашвили, Изв. АН СССР, сер.мат., 1986.
8. Итс А.Р., Матвеев В.Б. Операторы Хилла с конечным числом лакун и многосолитонные решения уравнения Кортевега-де Фриза, ТМФ, 1975, т.23, № 1, с.51-67.
9. Кадомотцев Б.Б., Петвиашвили В.И. Об устойчивости уединенных волн в слабо диспергирующих средах, ДАН СССР, 1970, т.192, № 4, с.753-756.
10. Козел В.А., Котляр В.П. Почти периодические решения уравнения *Sine-Gordon*, ДАН УССР, 1976, сер.А, 10, с.878-881.
11. Кричевер И.М. Методы алгебраической геометрии в теории нелинейных уравнений, УМН, 1977, т.32, № 6, с.183-203.

12. Натанзон С.М. Инвариантные прямые фуксовых групп, УМН, 1972, т.27, № 4, с.145-160.
13. Натанзон С.М. Пространства модулей вещественных кривых, Труды ММО, I, 13, т.37, с.219-253.
14. Новиков С.П. Алгебро-топологический подход в теории вещественности. Вещественные переменные действия в теории конечнозонных решений уравнения *Sine-Gordon*, Зап. научн.семина.ЛОМИ, 1984, т.133, с.177-196.
15. Форд Л.Р. Автоморфные функции, 1936.
16. Akaza T. Singular sets of some Kleinian groups (II), Nagoya Math.J., 1967, v.29, p.145-162.
17. Baker H.r. Abel's theorem and the allied theory including the theory of theta functions, 1897, Cambridge.
18. Boyu J.P. The double snoidal wave of the Korteweg-de Vries equation, Journ.of Math.Phys., 1984, N 12, p.3390-3423.
19. Burnside W. On a class of automorphic functions, Proc. of the London Math.Soc., 1892, v.23, p.49-88.
20. Burnside W. Further note on automorphic function, Proc.of the London Math.Soc., 1892, v.23, p.281-295.
21. Chukrow V. On Schottky groups with applications to Kleinian groups, Ann.of Math., 1968, v.88, p.47-61.
22. Ercolani N., Forest M.G. The Geometry of Real Sine-Gordon Wave trains, Comm.Math.Phys., 1985, v.99, N 1, p.3-48.
23. Fay J. Theta-functions on Riemann surfaces, Lect.Notes in Math., 1973, v.352, 137 p.
24. Fricke R., Klein F. Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen 1, 2, 1965, Johnson R.C., New York.
25. Hirota R. Recent developments of direct methods in soliton theory, Preprint of Hiroshima University, 1979.
26. Igusa J. Theta-functions, Grund.Math.Wiss., 194, Springer, 1972, 231 p.
27. Keen L. Canonical polygons for finitely generated Fuchs-

- sian groups, Acta Math., 1966, v.115, p.1-16.
28. Keen L. Intrinsic moduli on Riemann surfaces, Ann.of Math., 1966, v.84, p.404-420.
29. Keen L. On Fricks moduli. Advances in the theory of Riemann surfaces, Ann.of Math.Studies, 1971, v.66, p.205-224.
30. Marden A. Schottky groups and circles. Contrib. to Analysis, New York and London, Academic Press, 1974, p.273-278.
31. Maskit B. A characterization of Schottky groups, J.Analyse Math., 1967, v.19, p.227-230.
32. Matveev V.B. Abelian functions and solitons. Preprint N 73, Univ.of Wroclaw, 1976, 98 p.
33. Myrberg P.J. Zur Theorie der Konvergenz der Poincareschen Reihen, Ann.Acad.Sci.Fennicae, (A), 1916, 9, N 4, p.1-75.
34. Nakamura A. A direct method of calculating periodic wave solutions to nonlinear evolution equations I, II, J.Phys. Soc. Japan, 1979, v.47, p.1701; 1980, v.48, p.1365.
35. Phillips R.S., Sarnak P. The Laplacian for domains in hyperbolic space and limit sets of Kleinian groups., Acta Math., 1985, v.155, N 3-4, p.173-241.
36. Schottky F. Über eine Function, welche bei einer bestimmten linearen Transformation ihres Argumentes unverändert bleibt, J.Reine Angew.Math., 1887, Bd.101, S.227-272.
37. Segur H. Some Physical Applications of Solitons, Lect. Notes in Phys., N 189, 1983, p.210-262.
38. Shiota T. Characterization of Jacobian varieties in terms of soliton equations, Invent.Math., 1986, v.83, N 2, p.333-382.
39. Zarrow R. Classical and non-classical Schottky groups, Duke Math.J., 1975, v.42, N 4, p.717-724.