1986 г. март—апрель *т. 41, вып. 2(248)*
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

УДК 517. 836+517. 853+517. 833

АЛГЕБРО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИНЦИПЫ СУПЕРПОЗИЦИИ КОНЕЧНОЗОННЫХ РЕШЕНИЙ ИНТЕГРИРУЕМЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Е. Д. Белоколос, А. И. Бобенко, В. Б. Матвеев, В. З. Энольский

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

10 лет тому назад в методе обратной задачи теории рассеяния возникло новое направление, развившееся из анализа задачи Коши с квазипериодическими начальными условиями $u_0(x) = u(x, 0)$ для уравнения Кортевега—де Фриза (КдФ):

$$u_t = 6uu_x - u_{xxx}. \tag{0.1}$$

Решение задачи (0.1) показало, что наиболее интересным классом квазипериодических начальных данных являются такие функции $u_0(x)$, что спектр соответствующего оператора Шрёдингера $H = -d^2/dx^2 + u_0(x)$ содержит лишь конечное число лакун (или зон). Роль таких конечнозонных потенциалов в интегрировании КдФ была впервые осознана С. П. Новиковым, показавшим в работе [54], что решения высших стационарных уравнений КдФ (уравнений Новикова) являются конечнозонными потенциалами, а их эволюция образует линейную обмотку абелевого тора. Явные формулы для описанных в [54] конечнозонных потенциалов были выведены А. Р. Итсом и В. Б. Матвеевым [36], [37], [38], [53], использовавшим для этого решенную ранее Н. И. Ахиезером вне связи с уравнением КдФ задачу построения собственных функций оператора H, в котором $u_0(x)$ принадлежит некоторому специальному классу конечнозонных потенциалов [3]. В работах Б. А. Дубровина и С. П. Новикова [25], [32] и упомянутых работах А. Р. Итса и В. Б. Матвеева была дана исчерпывающая геометрическая и аналитическая характеризация класса конечнозонных потенциалов и соответствующих решений уравнения КдФ и уравнения Шрёдингера. Существенный вклад в теорию конечнозонных потенциалов внесли в то же время В. А. Марченко [51], [52] и П. Лакс [96], [97]; дальнейшее развитие теории подробно отображено, например, в монографии [34].

Найденные в работах [36], [37], [53], [38] формулы для конечнозонных решений¹) общего положения уравнения КдФ и решений Флоке — Блоха уравнения $H\psi = E\psi$ с конечнозонным потенциалом $u_0(x)$ имеют вид

$$u(x, t) = -2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\vartheta(Ux+Vt+W), \tag{0.2}$$

$$\psi_{1,2}(x) = e^{\pm i\omega(E)x}\frac{\vartheta(G_{1,2}(E)+Ux+W)\,\vartheta(W)}{\vartheta(G_{1,2}(E)+W)\,\vartheta(Ux+W)}, \tag{0.3}$$

где $\vartheta(v)$ есть g-мерная тэта-функция, определенная по формуле

$$\vartheta(v) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^g}\exp\{\pi i\langle Bn, n\rangle + 2\pi i\langle v, n\rangle\}. \tag{0.4}$$

В формулах (0.2), (0.3) вектор W произволен, B — матрица периодов гиперэллиптической римановой поверхности Г, векторы U, V, $G_{1,2}$ и функция $\omega(E)$ также определяются по Г. При фиксированном t формула (0.3) определяет, в частности, все конечнозонные потенциалы, для которых края спектра совпадают с точками ветвления кривой Г.

Оказавшиеся достаточно типичными, формульные структуры (0.2), (0.3) были впоследствии перенесены на другие интегрируемые методом обратной задачи теории рассеяния уравнения (с соответствующими, зачастую весьма нетривиальными, модификациями) [30], [46], [99], [35], [44], [45], [47], [29], [100], [39], [48], [19], [14], [17].

Вследствие того что конечнозонные решения нелинейных уравнений выражаются через римановы тэта-функции (0.4), вовлечение их в аппарат современной математической физики стимулировало как разработку новых алгебро-геометрических конструкций, связанных с римановыми поверхностями, так и возрождение интереса к ряду классических проблем теории абелевых функций (см. обзор [27]). С другой стороны, решенные методом конечнозонного интегрирования нелинейные уравнения позволяют рассматривать в рамках этого метода те физические явления, которые описываются многофазными волновыми пакетами, представляющими собой абелевы функции родов $g \geqslant 1$. В частности, рассмотрение задачи Пайерлса — Фрелиха [9], [10], [21], [50], последовательная теория взаимодействия волн в джозефсоновских контактах [71], [13], [81] требуют в ряде случаев привлечения абелевых функций родов $g \geqslant 2$. Решения уравнения Ландау — Лифшица для анизотропного ферромагнетика, именно общие статические и стационарные решения, уже являются двухзонными [22], [17]. В многомерных тэта-функциях интегрируется также и задача о движении n-мерного твердого тела [28].

Полученные методом конечнозонного интегрирования многофазные решения нелинейных уравнений, равно как и решения в абелевых функциях классических задач механики (см., например, [103], [43], [89]), сравнительно просто выражаются через римановы тэта-функции (0.4). Однако эта простота обманчива, так как римановы тэта-функции представляют собой многомерные ряды Фурье, коэффициенты которых связаны с периодами римановых поверхностей. Поэтому использование таких формул для аналитических

¹) Конечнозонные решения (или, что то же самое, многофазные решения) представляют собой ограничение многократно периодической функции от многих комплексных переменных на прямолинейную обмотку фундаментальной области.

вычислений оказывается нетривиальным. Это обстоятельство, возможно, объясняет тот факт, что продолжающееся в течение десятилетия интенсивное развитие теории конечнозонного интегрирования не находит достаточно сильных приложений к задачам физики, механики, гидродинамики, которые и привели к открытию этого метода.

Вместе с тем в теории солитонов [34] хорошо известно, что многосолитонное решение (которое является вырожденной абелевой функцией) есть нелинейная суперпозиция солитонов (представляющих собой вырожденные эллиптические функции). Известен также и ряд примеров, в которых невырожденная абелева функция выражается через эллиптические функции.

Одним из таких примеров является g-зонный потенциал Ламе (см., например, [4], [34], [83], [112]), $u_0(x) = g(g+1)\wp(x)$, где $\wp(x)$ — эллиптическая функция Вейерштрасса [8]. Эволюция такого потенциала в силу уравнения (0.1), найденная Б. А. Дубровиным, С. П. Новиковым [32] и Г. Мак-Кином, Ю. Мозером и Г. Эро [65] определяется по формуле

$$u(x,\ t) = 2 \sum_{j=1}^{g(g+1)/2} \wp(x - x_j(t)), \tag{0.5}$$

где $g \geqslant 2$, а функции $x_j(t)$ $(j = 1, \ldots, g(g+1)/2)$ описывают динамику интегрируемой дискретной системы частиц с парным взаимодействием вида $\wp(x_i - x_j)$ $(i \neq j,\ i,\ j = 1, \ldots, g(g+1)/2)$.

Другим примером двухзонного решения в эллиптических функциях является решение вида

$$\varphi(x,\ t) = 4\ \mathrm{arctg}\ \{F(x)G(t)\}, \tag{0.6}$$

где $F(x)$ и $G(t)$ — некоторые эллиптические функции, удовлетворяющее уравнению «sine-Gordon» [34],

$$\varphi_{xx} - \varphi_{tt} = \sin\varphi. \tag{0.7}$$

В связи с этим С. П. Новиков высказал гипотезу [54] о существовании закона суперпозиции, позволяющего выражать g-зонные решения через однозонные, являющиеся, с необходимостью, эллиптическими функциями. Несколько точнее: следует выяснить, при какой специализации римановой поверхности рода $g > 1$, по которой строятся эти решения, абелевы функции, оставаясь невырожденными, все-таки могут быть выражены через абелевы функции младших родов, в частности (что наиболее интересно) — через эллиптические функции? Сведение абелевых функций рода $g > 1$ к эллиптическим функциям является наиболее желательным не только для получения пригодных для вычислений формул, но и позволяет описать периодические по x и t решения, а в ряде случаев выяснить связь между многозонными алгебро-геометрическими решениями и различными анзацами. Отметим, что теория возмущений Боголюбова — Митропольского — Уизема [20], [114] многозонных решений нелинейных уравнений, развитая для вполне интегрируемых систем Г. Флашкой, Г. Форестом, Д. Мак-Лафлином [80], С. Ю. Доброхотовым и В. П. Масловым [23], [24], Б. А. Дубровиным и С. П. Новиковым [33], в которой в качестве нулевого приближения используются сведенные к эллиптическим функциям многозонные решения, приводит к более простым, чем в случае общего положения, уравнениям для медленных переменных.

В 1982 г. двое из авторов предложили общую программу получения решений в эллиптических функциях из алгебро-геометрических решений [11], [68]. Подход [11], [68] основан на установлении связи между проблемой нахождения законов нелинейной суперпозиции [54] и восходящей к К. Вейерштрассу проблемой редукции абелевых интегралов к эллиптическим интегралам (см. монографию [93] и статью [94]). На базе этого подхода в работах [11], [60], [74], [75], [5]—[7], [16] из формул для конечнозонных решений интегрируемых нелинейных уравнений были дедуктивным путем выведены как известные специальные решения, так и построены новые классы решений в эллиптических функциях.

Теорией редукции абелевых интегралов и соответствующих тэта-функций интенсивно занимались в XIX в. Первые результаты в этом направлении были получены учениками К. Вейерштрасса Л. Кёнигсбергером и С. В. Ковалевской, в работах которых впервые была приведена поставленная К. Вейерштрассом проблема редукции [92], [42]. Этой проблемой занимались также Х. Буркхард, О. Больца, А. Крацер, Е. Пикар, Ш. Эрмит, П. Эмбер, Е. Гурса, П. Аппель, А. Прингсхейм, А. Пуанкаре и др. Проблема редукции для рода 2 была полностью решена еще в XIX в. Это решение, будучи в достаточной степени конструктивным, позволяет описать все двухзонные решения интегрируемых нелинейных уравнений, приводящиеся к эллиптическим функциям [93], [94].

В проблеме редукции Вейерштрасса можно выделить важный частный случай, в котором редукция связана с наличием нетривиальных автоморфизмов на определяющей решение римановой поверхности. В частности, как обнаружили Г. Форест и Д. Мак-Лафлин, гиперэллиптическая риманова поверхность рода 2, по которой строится решение (0.6) уравнения (0.7), обладает отличным от гиперэллиптической инволюции автоморфзмом второго порядка [81]. Этот результат был затем развит в работах [12], [5]—[7], [16], [113].

Развивая соображения, которые были использованы при выводе решения (0.6) уравнения (0.7), М. В. Бабич и двое из авторов данной статьи предложили подход [6], [7], в основе которого лежит симметрийная специализация римановой поверхности, позволяющая выявить симметрийную структуру матрицы периодов, обусловливающую разложение соответствующей тэта-функции в конечную сумму произведений тэта-функций меньшей размерности. Если группа автоморфизмов римановой поверхности достаточно богата, то эту процедуру удается довести до разложения тэта-функции рода $g > 2$ в конечную сумму произведений тэта-функций Якоби.

Заметим, что в данной работе для редукции рассматриваемых нами решений нелинейных уравнений к эллиптическим функциям оказалось достаточным использование элементарных сведений из теории автоморфизмов римановых поверхностей. Изучение редукции более сложных типов решений может потребовать использования более глубоких результатов этой теории.

Решение нелинейного уравнения в абелевых функциях рода $g \geqslant 2$, которое удается привести к эллиптическим функциям, является, вообще говоря, квазипериодической функцией координат, так как эти эллиптические функции зависят от несоизмеримых периодов. Выделение из редуцированных решений периодических решений представляет собой особую задачу. Эта задача была решена И. М. Кричевером [49], а связь данного в работе [49] критерия с проблемой редукции Вейерштрасса была прояснена А. Р. Итсом и одним из авторов [40].

Предлагаемая работа состоит из двух глав. В первой главе излагаются элементарные сведения из теории редукции абелевых интегралов и римановых тэта-функций. Во второй главе обсуждаются приложения этой теории к ряду нелинейных уравнений, интегрируемых методом конечнозонного интегрирования.

Авторы признательны С. П. Новикову за обсуждения различных вопросов нелинейной суперпозиции решений интегрируемых уравнений. Авторы благодарны В. Г. Барьяхтару за поддержку и внимание при написании обзора и И. М. Гельфанду за интерес к работе. Авторы также благодарны М. В. Бабичу, П. И. Голоду, Б. А. Дубровину, А. Р. Итсу, И. М. Кричеверу и А. М. Переломову за обсуждения и сотрудничество.

ГЛАВА I

РЕДУКЦИЯ АБЕЛЕВЫХ ИНТЕГРАЛОВ И ТЭТА-ФУНКЦИЙ

§ 1. Абелевы интегралы и тэта-функции Римана

В этом параграфе, с целью фиксации обозначений, будет дан ряд определений и приведено несколько утверждений из теории римановых поверхностей [77], [27]. Мы ограничимся рассмотрением только компактных римановых поверхностей, поэтому термины «алгебраическая кривая Г» и «риманова поверхность Г» будут употребляться в качестве синонимов.

Алгебраическая кривая Г определяется уравнением $\mathcal{P}(z, w) = 0$, в котором $\mathcal{P}$ — многочлен от переменных z и w. Гиперэллиптическая кривая Г рода $g \geqslant 1$ записывается в виде

$$w^2 = \prod_{j=1}^{l} (z - e_j), \qquad l = 2g+1 \text{ или } 2g+2, \tag{1.1}$$

где e_j — различные комплексные числа, $e_j \in \mathbb{C}^1$, $e_i \neq e_j$ $(i, j = 1, \ldots, l)$.

Обозначим через $H_1(\Gamma, \mathbb{Z})$ группу одномерных целочисленных гомологий на Г. Фиксируем канонический базис в $H_1(\Gamma, \mathbb{Z})$, т. е. $2g$ циклов $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_{2g}) = (a_1, \ldots, a_g; b_1, \ldots, b_g)$ с матрицей пересечения C_0,

$$C_0 = \begin{pmatrix} 0_g & 1_g \\ -1_g & 0_g \end{pmatrix}, \tag{1.2}$$

где 1_g и 0_g — соответственно $g \times g$ единичная и нулевая матрицы.

Абелевым дифференциалом du на Г называется выражение вида

$$du = \mathcal{R}(z, w)dz, \tag{1.3}$$

где $\mathcal{R}$ — рациональная функция от переменных z и w, а $w(z)$ — алгебраическая функция от z. Каждый абелевый дифференциал (1.3) представим в виде линейной комбинации абелевых дифференциалов I, II и III типов, к которым соответственно относятся: I) голоморфные дифференциалы du_j, которые представимы в каждой точке $Q \in \Gamma$ в виде $du_j = f_j(t)dt$, где t — локальная координата и $f_j(t)$ — голоморфная функция; II) дифференциалы du_Q^n с одним полюсом в точке $Q \in \Gamma$ кратности $n+1$; III) дифференциалы du_{PQ}, имеющие пару простых полюсов в точках $P, Q \in \Gamma$ с вычетами 1 и —1.

Абелевым интегралом называется интеграл от дифференциала (1.3), взятый вдоль спрямляемой кривой на Г. Абелевы интегралы подразделяются на абелевы интегралы I, II, III типов в зависимости от типа подынтегрального абелевого дифференциала. В каноническом базисе гомологий $\gamma \in H_1(\Gamma, \mathbb{Z})$ величины

$$\left\{\begin{aligned} \mathcal{A}_i &= \int_{a_i} \mathcal{R}(z, w)\, dz \qquad (i = 1, \ldots, g), \\ \mathcal{B}_i &= \int_{b_i} \mathcal{R}(z, w)\, dz \qquad (i = 1, \ldots, g) \end{aligned}\right. \tag{1.4}$$

называются $\mathcal{A}$- и $\mathcal{B}$-периодами абелевого дифференциала.

Обозначим через $\mathcal{H}^1(\Gamma, \mathbb{Z})$ g-мерное векторное пространство голоморфных дифференциалов на Г. Для гиперэллиптической кривой (1.1) базис в $\mathcal{H}^1(\Gamma, \mathbb{Z})$ образуют дифференциалы

$$du_j = \frac{z^{j-1}\, dz}{w(z)} \qquad (j = 1, \ldots, g). \tag{1.5}$$

Базис $du \in \mathscr{H}^1(\Gamma, \mathbb{Z})$ называется дуальным каноническому базису $\gamma \in H_1(\Gamma, \mathbb{Z})$, если $\mathscr{A}$-периоды нормированы следующим образом:

$$\int_{a_j} du_i = \delta_{ij} \qquad (i, j = 1, \ldots, g). \tag{1.6}$$

Комплексная $g \times 2g$ матрица Ω называется матрицей Римана порядка g, если существует такая антисимметрическая целочисленная $2g \times 2g$ матрица C, называемая главной матрицей, что

$$\Omega C^t \Omega = 0, \qquad (1/2i)\, \Omega C^t \bar{\Omega} > 0, \qquad i = \sqrt{-1}. \tag{1.7}$$

Вторoе из условий (1.7) означает, что эрмитова матрица $(1/2i)\Omega C^t \bar{\Omega}$ является положительно определенной. Матрица периодов (1.4) абелевых интегралов алгебраической кривой рода g является матрицей Римана (1.7) с матрицей (1.2) в качестве главной матрицы. Так как при $C = C_0$ левая подматрица $\mathscr{A}$ матрицы Ω о ратима, то можно записать $\Omega = \mathscr{A}\,(1_g, B_g)$, причем

$$^tB = B, \qquad \mathrm{Im}[B] > 0, \tag{1.8}$$

где второе из условий (1.8) означает, что мнимая часть матрицы B положительно определена. В базисе $du \in \mathscr{H}^1(\Gamma, \mathbb{Z})$, дуальном к каноническому базису $\gamma \in H_1(\Gamma, \mathbb{Z})$, матрица $B = (B_{ij})$ определяется следующим образом:

$$B_{ij} = \int_{b_i} du_j \qquad (i, j = 1, \ldots, g). \tag{1.9}$$

Множество $\mathscr{S}_g$ удовлетворяющих условиям (1.8) B-матриц образует открытый выпуклый конус в векторном пространстве симметрических комплексных матриц порядка g, называемый верхней полуплоскостью Зигеля порядка g. Если σ есть действительная $2g \times 2g$-матрица, удовлетворяющая условию $^t\sigma C_0 \sigma = C_0$ с $g \times g$-подматрицами a, b, c, d,

$$\sigma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \tag{1.10}$$

тогда равенство

$$\sigma \cdot B = (aB + b)(cB + d)^{-1} \tag{1.11}$$

определяет действие вещественной симплектической группы $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{R})$ в $\mathscr{S}_g$. Матрицы $\sigma \cdot B$ и $B \in \mathscr{S}_g$ называются эквивалентными. Мы будем далее рассматривать также и группы $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Q})$, $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$.

Пусть Λ — решетка, порожденная векторами $1_g n_1 + Bn_2$, $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}^g$, B есть B-матрица (1.8). Фактор $\mathbb{C}^g/\Lambda$ является $2g$-мерным тором $T^{2g}(B)$, называемым абелевым тором. Построенный по матрице периодов B римановой поверхности Γ абелев тор $T^{2g}(B)$ называется многообразием Якоби (или якобианом) и обозначается через $J(\Gamma)$,

$$J(\Gamma) = T^{2g}(B) = \mathbb{C}^g/\{1_g n_1 + Bn_2\}. \tag{1.12}$$

Отображением Абеля называется отображение

$$u\colon \Gamma \to J(\Gamma), \tag{1.13}$$

где

$$u(\mu) = \left(\int_{\mu_{01}}^{\mu_1} du_1, \ldots, \int_{\mu_{0g}}^{\mu_g} du_g \right), \qquad du \in \mathscr{H}^1(\Gamma, \mathbb{Z}).$$

Тэта-функцией Римана первого порядка с характеристикой $[\alpha;\ \beta]$, $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}^g$, называется функция

$$(1.14)\qquad \vartheta[\alpha;\ \beta](z|B) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^g} \exp \pi i\{\langle B(n+\alpha),\ n+\alpha\rangle + 2\langle z+\beta,\ n+\alpha\rangle\},$$

$$\vartheta(z) \equiv \vartheta(z|B) \equiv \vartheta[0,\ 0](z|B),$$

где $z \in \mathbb{C}^g$ и матрица $B \in \mathcal{S}_g$, угловые скобки $\langle\ ,\ \rangle$ обозначают евклидово скалярное произведение. Суммирование в формуле (1.14) ведется по решетке целочисленных g-мерных векторов. Тэта-функция, построенная по матрице периодов римановой поверхности Г, называется тэта-функцией Римана поверхности Г. При $g = 1$ и $\alpha,\ \beta = 0,\ {}^1/_2$ выражение (1.4) определяет четыре тэта-функции Якоби $\vartheta_i(z|\tau)$, $i = 1, \ldots, 4$, [58] : $\vartheta[0;\ 0]\ (z \mid B) = \vartheta_3(z \mid B)$, $\vartheta[{}^1/_2;\ 0]\ (z \mid B) = \vartheta_2(z \mid B)$, $\vartheta[0;\ {}^1/_2]\ (z \mid B) = \vartheta_4\ (z \mid B)$, $\vartheta[{}^1/_2;\ {}^1/_2](z \mid B) = -\vartheta_1(z \mid B)$.

Если $B \in \mathcal{S}_g$, $z \in \mathbb{C}^g$, то при действии $\sigma \in \mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$ тэта-функция (1.14) с характеристикой $[\alpha;\ \beta] = [\varepsilon]$, $\varepsilon = (\alpha,\ \beta) \in \mathbb{R}^{2g}$ преобразуется следующим образом [86]:

$$(1.15)\qquad \vartheta[\varepsilon'](z'|B') = \chi \exp\frac{i\pi}{2}\langle z(cB+d)^{-1}c,\ z\rangle \det(cB+d)^{1/2}\vartheta[\varepsilon](z|B),$$

$$z' = z(cB+d)^{-1},\quad B' = \sigma\cdot B,\ \varepsilon' = (\alpha',\ \beta') = \varepsilon\sigma^{-1} + \frac{1}{2}\operatorname{diag}[c^t d,\ a^t b],$$

где матрица B' определяется по формуле (1.14), а χ есть некоторая постоянная, не зависящая от z и B.

Рассмотрим две римановы поверхности Γ_i $(i = 0{,}1)$ родов $g_1 \geqslant 2$ и $g_0 \geqslant 0$, а также накрытие (т. е. голоморфное отображение) $\pi\colon \Gamma_1 \to \Gamma_0$. Накрытие π обладает следующим свойством: для каждой точки $P^* \in \Gamma_1$ на Γ_1 существует такая исчезающая в P^* локальная координата z^* и исчезающая в точке $\pi(P^*)$ локальная координата z на Γ_0, что отображение π локально представимо в виде $z = z^{*n}$, где n — зависящее только от точки P натуральное число. Если $n > 1$, то точка P называется точкой ветвления порядка $r_\pi(P) = n - 1$. Если $n = 1$ для всех $P \in \Gamma_1$, то накрытие называется неразветвленным. Число

$$(1.16)\qquad R = \sum_{P\in\Gamma_1} r_\pi(P),$$

где суммирование распространяется на все точки $P \in \Gamma$, называется полным числом ветвления. Если $R > 0$, то накрытие называется разветвленным. Число

$$N = \sum_{P\in\pi^{-1}(Q)} \{r_\pi(P) + 1\},$$

где Q — произвольная точка Γ_0, называется степенью отображения π или числом листов накрытия π. Введенные таким образом числа R и N связаны с родами g_i $(i = 0,\ 1)$ по формуле Римана — Гурвица

$$(1.17)\qquad 2g_1 - 2 = N(2g_0 - 2) + R.$$

Обозначим через G группу автоморфизмов алгебраической кривой Г (т. е. группу конформных гомеоморфизмов $\Gamma \to \Gamma$). Если род $g \geqslant 2$, то порядок $\operatorname{ord} G$ группы G конечен. Пространство орбит G, Γ_1/G, является компактной римановой поверхностью, которую обозначим Γ_0. Накрытие

$$(1.18)\qquad \pi^*\colon \Gamma_1 \to \Gamma_0,\quad \Gamma_0 = \Gamma_1/G,$$

называется нормальным. Степень накрытия (1.18) $N = \operatorname{ord} G$, его точками ветвления являются неподвижные точки $P_1, \ldots, P_s$ группы G, причем если $G_P \subset G$ есть группа преобразований, оставляющая неподвижной точку P, то порядок точки ветвления $r_\pi(P) = \operatorname{ord} G_P - 1$. Полное число ветвления (1.16) нормального накрытия (1.18) определяется по формуле

$$R = N \sum_{j=1}^{s} \left(1 - \frac{1}{\nu_j}\right), \tag{1.19}$$

в которой обозначено $\nu_j = \operatorname{ord} G_{P_j}$ $(j = 1, \ldots, s)$.

В качестве примера алгебраической кривой, обладающей инволюциями (т. е. автоморфизмами второго порядка) рассмотрим гиперэллиптическую кривую (1.1). Гиперэллиптическая инволюция I представляет собой преобразование

$$I\colon (z, w) \to (z, -w). \tag{1.20}$$

Очевидно, что I обладает $2g+2$ неподвижными точками $P_j = z^{-1}(e_j)$ $(j = 1, \ldots, 2g+2)$. Введем дополнительную симметрию, положив $e_{g+1+j} = -e_j$ $(j = 1, \ldots, g+1)$, предполагая при этом, что $e_j \neq 0$ для всех j. Кривая (1.1) в этом случае представляется в виде

$$w^2 = (z^2 - e_1^2) \ldots (z^2 - e_{g+1}^2). \tag{1.21}$$

Кривая (1.21) обладает автоморфизмом второго порядка T:

$$T\colon (z, w) \to (-z, w). \tag{1.22}$$

Алгебраическая кривая Γ/T определяется по формуле

$$w^2 = (z - e_1^2) \ldots (z - e_{g+1}^2) \tag{1.23}$$

и имеет род $(g-1)/2$, если g нечетное, и $g/2$, если g четное. Число неподвижных точек в первом из этих случаев есть 2 (над 0) и 4 — во втором (над 0 и ∞ по две точки).

Наконец, определим многообразие Прима $\operatorname{Prym}_T(\Gamma)$ (см., например, [62], [82]) для кривых, обладающих инволюциями (более общие многообразия Прима рассмотрены в [78]). Пусть Γ — алгебраическая кривая, обладающая инволюцией $T\colon \Gamma \to \Gamma$, переставляющей листы, $\Gamma_0 = \Gamma/T$ и $\pi\colon \Gamma \to \Gamma_0$ — разветвленное двулистное накрытие. Многообразием Прима $\operatorname{Prym}_T(\Gamma)$ называется подмногообразие якобиана $J(\Gamma)$, являющееся образом множества дивизоров $\mu = \sum_{j=1}^{g} \mu_j$, для которого выполнено сравнение

$$u(\mu) + u(T\mu) = 0 \pmod{\Lambda}. \tag{1.24}$$

$\operatorname{Prym}_T(\Gamma)$ — абелево многообразие, причем $J(\Gamma) \sim \operatorname{Prym}_T(\Gamma) + J(\Gamma_0)$, а в пересечении $\operatorname{Prym}_T(\Gamma) \cap J(\Gamma_0)$ содержится конечное множество точек. Конструктивное описание такого многообразия Прима будет дано в § 3, 7.

§ 2. Редукция абелевых интегралов и тэта-функций рода 2

Первый пример редукции абелевого интеграла рода 2 к эллиптическому интегралу был построен А. Лежандром и обобщен К. Якоби [93]. Разберем этот пример подробно. Производя в эллиптическом интеграле

$$\int \frac{d\xi}{\sqrt{\xi(1-\xi)(1-c^2\xi)}}$$

рациональную замену переменных порядка $N = 2$,

$$\xi = \frac{(1-\alpha)(1-\beta)z}{(z-\alpha)(z-\beta)}, \tag{2.1}$$

получаем

$$\int \frac{d\xi}{\sqrt{\xi(1-\xi)(1-c^2\xi)}} = -\sqrt{(1-\alpha)(1-\beta)} \int \frac{(z^2-\alpha\beta)\,dz}{\sqrt{z(z-1)(z-\alpha)(z-\beta)(z-\alpha\beta)\varphi(z)}}, \tag{2.2}$$

где $\varphi(z) = (z-\alpha)(z-\beta) - c^2(1-\alpha)(1-\beta)z$.

Если выбрать постоянную c таким образом, чтобы функция $\varphi(z)$ оказалась полным квадратом, т. е. положить

$$c^2 = c_\pm^2 = -\frac{(\sqrt{\alpha} \pm \sqrt{\beta})^2}{(1-\alpha)(1-\beta)}, \tag{2.3}$$

то равенство (2.2) приобретает вид

$$\int \frac{d\xi}{\sqrt{\xi(1-\xi)(1-c_\pm^2\xi)}} = -\sqrt{(1-\alpha)(1-\beta)} \int \frac{(z \mp \sqrt{\alpha\beta})\,dz}{\sqrt{z(z-1)(z-\alpha)(z-\beta)(z-\alpha\beta)}}. \tag{2.4}$$

Равенство (2.4) представляет собой пример приведения (редукции) гиперэллиптических интегралов к эллиптическим интегралам рациональной заменой переменных. Другими словами, равенство (2.4) означает существование разветвленных двулистных накрытий $\pi_\pm$

$$\begin{tikzcd} & \Gamma \arrow[dl, "\pi_+"'] \arrow[dr, "\pi_-"] & \\ \Gamma_+ & & \Gamma_- \end{tikzcd} \tag{2.5}$$

(здесь степень N каждого из отображений $\pi_\pm$, $N = 2$, а полное число ветвления (1.16) $R = 2$), где алгебраические кривые $\Gamma = (z, w)$ и $\Gamma_\pm = (\xi, w_\pm)$ определяются по формулам

$$w^2 = z(z-1)(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)(z-\lambda_3), \tag{2.6}$$

$$\lambda_1 = \alpha, \quad \lambda_2 = \beta, \quad \lambda_3 = \alpha\beta;$$

$$w_\pm^2 = \xi(1-\xi)(1-c_\pm^2\xi), \tag{2.7}$$

причем модули $c_\pm$ имеют вид (2.3). Равенства (2.4) (или (2.5) — (2.7)) возможны лишь при выполнении определенных условий на матрицу Римана (1.7) или, что эквивалентно, на точки ветвления λ_j ($j = 1, 2, 3$). Выведем эти условия. Построим матрицу $B \in \mathscr{S}_2$ (1.9) в базисе гомологий $\gamma = (a_1, a_2; b_1, b_2) \in H_1(\Gamma, \mathbb{Z})$, изображенном на рис. 1. Используя при вычислении B-матрицы равенства (2.4), получаем [1])

$$B = \frac{1}{2} \begin{Vmatrix} \tau^{(-)} + \tau^{(+)} & \tau^{(-)} - \tau^{(+)} \\ \tau^{(-)} - \tau^{(+)} & \tau^{(-)} + \tau^{(+)} \end{Vmatrix}, \tag{2.8}$$

где $\tau^{(\pm)} = \omega^{(\pm)\prime}/\omega^{(\pm)}$ — параметры Якоби, а $\omega^{(+)\prime}$, $\omega^{(+)}$, $\omega^{(-)\prime}$, $\omega^{(-)}$ — периоды эллиптических кривых (2.7). Нетрудно убедиться, что поскольку B-матрица (2.8) удовлетворяет условию

$$B_{11} = B_{22}, \tag{2.9}$$

[1]) В работе одного из авторов [75] в формуле (2.8) вместо множителя 1/2 ошибочно поставлен множитель 2, на что указал М. В. Бабич.

то тэта-функции $\vartheta[\alpha;\ \beta]\ (v \mid B)$ факторизуются на сумму произведений тэта-функций Якоби

$$(2.10)\qquad \vartheta[\alpha;\ \beta](v|B)=$$
$$=\vartheta\left[\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2);\ \beta_1+\beta_2\right](v_1+v_2|2\tau^{(+)})\,\vartheta\left[\frac{1}{2}(\alpha_1-\alpha_2);\ \beta_1-\beta_2\right](v_1-v_2|2\tau^{(-)})+$$
$$+\vartheta\left[\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2+1);\ \beta_1+\beta_2\right](v_1+v_2|2\tau^{(+)})\times$$
$$\times\ \vartheta\left[\frac{1}{2}(\alpha_1-\alpha_2+1);\ \beta_1-\beta_2\right](v_1-v_2|2\tau^{(-)}).$$

Отметим, что специальный вид (2.9) матрицы периодов B определяется выбранным нами базисом гомологий $\gamma \in H_1(\Gamma,\ \mathbb{Z})$ (см. рис. 1). Переходя к другому

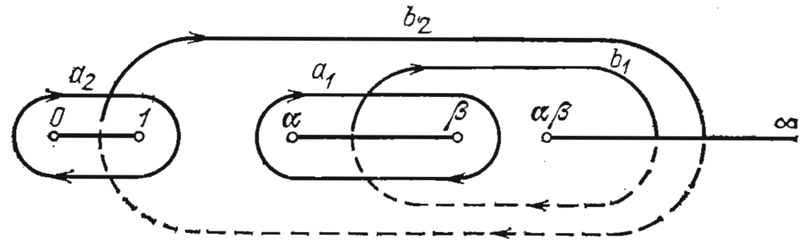

Рис. 1. Базис гомологий в $H_1(\Gamma,\ \mathbb{Z})$, $g=2$, α, $\beta \in \mathbb{R}$

базису циклов $\gamma'=(a_1',\ a_2';\ b_1',\ b_2') \in H_1(\Gamma,\ \mathbb{Z})$ с помощью преобразования $\sigma \in \mathrm{Sp}_4\ (\mathbb{Z})$ по формулам (1.11), в которых следует положить

$$\sigma=\begin{Vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 0 & 0\end{Vmatrix},$$

получаем эквивалентную матрицу $B'=\sigma\cdot B$ в виде

$$(2.11)\qquad B'=\begin{Vmatrix} \tau^{(+)}/2 & 1/2\\ 1/2 & -1/2\tau^{(-)}\end{Vmatrix}.$$

Завершая разбор примера К. Якоби [93], покажем, как, исходя из B-матрицы в виде (2.11), получить кривую (2.6). Действительно, матрице периодов (2.11) соответствует гиперэллиптическая кривая рода 2, точки ветвления которой можно без ограничения общности расположить в точках 0, 1, λ_1, λ_2, λ_3. Для чисел $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3 \in \mathbb{C}$ справедливы формулы ([77], с. 326—328)

$$(2.12)\qquad \begin{cases} \lambda_1=\dfrac{\vartheta^2[0,\ 0;\ 0,\ ^1/_2](0\mid B)\,\vartheta^2[0,\ 0;\ 0,\ 0](0\mid B)}{\vartheta^2[0,\ 0;\ ^1/_2,\ ^1/_2](0\mid B)\,\vartheta^2[0,\ 0;\ ^1/_2,\ 0](0\mid B)},\\[2ex] \lambda_2=\dfrac{\vartheta^2[0,\ 0;\ 0,\ ^1/_2](0\mid B)\,\vartheta^2[0,\ ^1/_2;\ 0,\ 0](0\mid B)}{\vartheta^2[0,\ 0;\ ^1/_2,\ ^1/_2](0\mid B)\,\vartheta^2[0,\ ^1/_2;\ ^1/_2,\ 0](0\mid B)},\\[2ex] \lambda_3=\dfrac{\vartheta^2[0,\ 0;\ 0,\ 0](0\mid B)\,\vartheta^2[0,\ ^1/_2;\ 0,\ 0](0\mid B)}{\vartheta^2[0,\ 0;\ 0,\ ^1/_2](0\mid B)\,\vartheta^2[0,\ ^1/_2;\ ^1/_2,\ 0](0\mid B)}.\end{cases}$$

Рассмотрим тэта-функцию $\vartheta[^1/_2,\ ^1/_2;\ ^1/_2,\ ^1/_2]\ (u\mid \widetilde{B})$, построенную по B-матрице $\widetilde{B}$ с нулевыми недиагональными элементами,

$$\widetilde{B}=\begin{Vmatrix} \widetilde{B}_{11} & 0\\ 0 & \widetilde{B}_{22}\end{Vmatrix}.$$

Поскольку

$$\vartheta[{}^1/_2,\ {}^1/_2;\ {}^1/_2,\ {}^1/_2](u|\widetilde{B}) = \vartheta[{}^1/_2;\ {}^1/_2](u_1|\widetilde{B}_{11})\,\vartheta[{}^1/_2;\ {}^1/_2](u_2|\widetilde{B}_{22}),$$

то эта тэта-функция обращается в нуль при $u = 0$ (несмотря на четность характеристики). Используя очевидное соотношение

$$\vartheta[\alpha,\ \beta]\left(u\left|\begin{matrix}\widetilde{B}_{11} & 0\\ 0 & \widetilde{B}_{22}\end{matrix}\right.\right) = e^{2\pi i\alpha_1\alpha_2}\vartheta[\alpha_1,\ \alpha_2;\ \beta_1-\alpha_2,\ \beta_2-\alpha_1]\left(u\left|\begin{matrix}\widetilde{B}_{11} & 1\\ 1 & \widetilde{B}_{22}\end{matrix}\right.\right)$$

и формулу преобразований второго порядка ([93], [86], [78], [27])

$$(2.13)\qquad 4\vartheta[\alpha+\beta;\ 0](0|2B)\,\vartheta[\beta;\ 0](2u|2B) = \sum_{2\chi_1,\ 2\chi_2=0,\ 1}(-1)^{4\langle\beta,\ \chi\rangle}\vartheta^2[\alpha;\ \chi](u|B)$$

при $\alpha = ({}^1/_2,\ 0)$, $\beta = (0,\ {}^1/_2)$, приведем равенство

$$\vartheta[{}^1/_2,\ {}^1/_2;\ {}^1/_2,\ {}^1/_2]\left(0\left|\begin{matrix}\widetilde{B}_{11} & 1\\ 1 & \widetilde{B}_{22}\end{matrix}\right.\right) = 0$$

к виду

$$(2.14)\qquad \vartheta^2[0,\ {}^1/_2;\ 0,\ 0](0\mid B) = \vartheta^2[0,\ {}^1/_2;\ {}^1/_2,\ 0](0\mid B),$$

где 2×2-матрица B имеет недиагональный элемент $B_{12} = B_{21} = {}^1/_2$. Из равенства (2.14) и формул (2.12) немедленно следует требуемое соотношение: $\lambda_1\lambda_2 = \lambda_3$.

Описанный нами пример обобщается до постановки проблемы редукции абелевых интегралов к эллиптическим интегралам и тэта-функций Римана к тэта-функциям Якоби, которая принадлежит К. Вейерштрассу. Формулировка проблемы Вейерштрасса была опубликована в работах Л. Кёнигсбергера [91], [92], который рассмотрел при роде $g = 2$ случаи редукции преобразованиями второго и третьего порядков, и С. В. Ковалевской [42], впервые изучившей случай редукции преобразованиями второго порядка при роде $g = 3$. Наиболее полный список редуцируемых абелевых интегралов к эллиптическим интегралам содержится в монографии А. Крацера [93] (см. также справочник [70]).

Теорема 2.1 (теорема Вейерштрасса для рода 2 [93]. *Для того чтобы риманова поверхность* Γ *рода* $g = 2$ N*-листно накрывала эллиптическую кривую, необходимо и достаточно существования такого элемента* $\sigma \in \mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z})$ *и точки* $B \in \mathcal{S}_2$, *что*

$$(2.15)\qquad \sigma\cdot B = \left\|\begin{matrix} a & 1/N\\ 1/N & b\end{matrix}\right\|,\qquad N > 1,\quad N \in \mathbb{N}.$$

Теорема 2.1 была доказана К. Вейерштрассом и для случая, в котором риманова поверхность рода $g > 2$ накрывает эллиптическую кривую [93].

Отметим, что поскольку формулы (2.12) справедливы для любой матрицы периодов B, то с их помощью можно, в принципе, получить полное описание римановых поверхностей рода 2, для которых гиперэллиптические интегралы редуцируются к эллиптическим интегралам. Вместе с тем получение явных формул для накрытий (2.5) при степенях отображения $N > 4$ представляет собой громоздкую задачу.

Из теоремы 2.1 можно извлечь ряд следствий.

Следствие 2.1 [93]. *Если один из независимых абелевых интегралов первого типа на римановой поверхности* Γ *рода* $g = 2$ *приводится к эллиптическому интегралу, то приводится также и второй независимый интеграл.*

Следствие 2.2 [93]. *Для того чтобы абелевый интеграл первого типа, определенный на римановой поверхности* Γ *рода* 2, *приводился к эллиптическо-*

му интегралу, необходимо и достаточно, чтобы B-матрица римановой поверхности Γ удовлетворяла условию

$$q_1+q_2B_{11}+q_3B_{12}+q_4B_{22}+q_5(B_{11}B_{22}-B_{12}^2)=0, \tag{2.16}$$

где $q_1, \ldots, q_5 \in \mathbb{Z}$ — такие целые числа, что определяемое по формуле

$$N^2=q_3^2+4(q_1q_5-q_2q_4) \tag{2.17}$$

число N является натуральным $N \in \mathbb{N}$.

Следствие 2.2 оказывается полезным для приложений, поскольку позволяет проверить, может ли данная B-матрица быть приведена к виду (2.15) преобразованием $\sigma \in \mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z})$. Заметим, что процедура построения преобразования σ, приводящая B-матрицу, которая удовлетворяет условиям (2.16), (2.17), к виду (2.15) описана А. Крацером ([93], с. 473).

Замечание 2.1. В разобранном выше примере редукции Якоби оба независимых гиперэллиптических интеграла приводятся к эллиптическим интегралам одной и той же подстановкой (2.1). Это обстоятельство связано с наличием на римановой поверхности (2.6) отличного от гиперэллиптической инволюции (1.20) автоморфизма второго порядка

$$T^*:\ (z,\ w)\to\left(\frac{\alpha\beta}{z},\ \frac{w}{z^3}\sqrt{\alpha^3\beta^3}\right). \tag{2.18}$$

Поскольку преобразование

$$z\mapsto\frac{(z+e_1)(e_1+e_2)}{(z-e_1)(e_1-e_2)}$$

устанавливает конформную эквивалентность кривой (2.6) и кривой (1.21) при $g=2$, то автоморфизмы (2.18) и (1.22) оказываются эквивалентными. Непосредственной подстановкой (2.18) в выражения (1.5) для базисных голоморфных дифференциалов $du=(du_1,\ du_2)\in\mathscr{H}^1(\Gamma,\ \mathbb{Z})$ получаем

$$T^*:\ du_1(z)=-du_2(\zeta),\qquad \zeta=\frac{\alpha\beta}{z}. \tag{2.19}$$

Из (2.19) следует, что подстановка, приводящая один из независимых гиперэллиптических интегралов, приводит также и второй независимый гиперэллиптический интеграл.

Если степень отображения $N>2$, то независимые абелевые интегралы приводятся к эллиптическим интегралам, вообще говоря, разными подстановками. В связи с этим замечанием приведем найденный Ш. Эрмитом пример редукции $g=2$, $N=3$ ([84], с. 251), который будет использован в дальнейшем:

$$\int\frac{dz}{\sqrt{(z^2-a)(8z^3-6az-b)}}=\frac{1}{3}\int\frac{d\xi_1}{\sqrt{(2a\xi_1-b)(\xi_1^2-a)}}, \tag{2.20}$$

$$\xi_1=(4z^3-3az)/a, \tag{2.20a}$$

$$\int\frac{z\,dz}{\sqrt{(z^2-a)(8z^3-6az-b)}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}\int\frac{d\xi_2}{\sqrt{\xi_2^3-3a\xi_2+b}}, \tag{2.21}$$

$$\xi_2=\frac{2z^3-b}{3(z^2-a)}. \tag{2.21a}$$

Обозначив $a=3g_2$, $b=-54g_3$, где g_2 и g_3 — параметры теории эллиптических функций Вейерштрасса [8], заметим, что в этом примере алгебраическая кривая $\hat{\Gamma}=(z,\ w)$,

$$w^2=(z^2-3g_2)(z+3e_1)(z+3e_2)(z+3e_3) \tag{2.22}$$

является трехлистным разветвленным накрытием

$$\begin{tikzcd} \Gamma_2 & \hat{\Gamma} \arrow[l, "\pi_2"'] \arrow[r, "\pi_1"] & \Gamma_1 \end{tikzcd} \tag{2.23}$$

над эллиптическими кривыми Γ_1 и Γ_2,

$$\Gamma_1 = (\xi_1, w_1), \quad w_1^2 = (\xi_1^2 - 3g_2)(\xi_1 + 9g_3/g_2), \tag{2.24}$$

$$\Gamma_2 = (\xi_2, w_2), \quad w_2^2 = 4\xi_2^3 - g_2\xi_2 - g_3. \tag{2.25}$$

B-матрица в базисе гомологий $\gamma \in H_1(\Gamma, \mathbb{Z})$, изображенном на рис. 1, имеет вид

$$B = \frac{1}{3}\begin{Vmatrix} \tau^{(1)} + \tau^{(2)} & -\tau^{(1)} + 2\tau^{(2)} \\ -\tau^{(1)} + 2\tau^{(2)} & \tau^{(1)} + 4\tau^{(2)} \end{Vmatrix}, \tag{2.26}$$

где $\tau_i^{(i)} = \omega_i'/\omega_i$ $(i = 1, 2)$ и ω_i', ω_i $(i = 1, 2)$ — периоды кривых (2.24) и (2.25). Преобразованием $\sigma \in \mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z})$,

$$\sigma = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

B-матрица (2.26) приводится к виду (2.15):

$$\sigma \cdot B = \begin{Vmatrix} \tau^{(1)}/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1/3\tau^{(2)} \end{Vmatrix}.$$

В оставшейся части параграфа опишем кратко обобщение теоремы 2.1 на случай родов $g \geqslant 2$. Для этого, следуя [61], дадим ряд определений.

Пусть Γ_0 и Γ_1 — римановы поверхности родов $g_0 \geqslant 0$ и $g_1 \geqslant 2$ и ξ: $\Gamma_1 \to \Gamma_0$ N-листное накрытие над Γ_0. Фиксируем на Γ_i $(i = 0, 1)$ канонические базисы гомологий $\gamma^{(i)} \in H_1(\Gamma_i, \mathbb{Z})$ с матрицами пересечений вида (1.2). Каждое отображение M: $H_1(\Gamma_1, \mathbb{Z}) \to H_1(\Gamma_0, \mathbb{Z})$ описывается $2g_0 \times 2g_1$ целочисленной матрицей $\| m_{ij} \|$ по формуле

$$M\gamma_i^{(1)} = \sum_{j=1}^{2g_0} m_{ij}\gamma_j^{(0)}. \tag{2.27}$$

Определим дуальные к базисам $\gamma^{(i)} \in H_1(\Gamma_i, \mathbb{Z})$ базисы голоморфных дифференциалов $du^{(i)} = (du_{i1}, \ldots, du_{ig_i}) \in \mathscr{H}^1(\Gamma_i, \mathbb{Z})$ $(i = 0, 1)$ и обозначим через Ω_i $(i = 1, 0)$ соответствующие матрицы Римана. Тем самым определяются отображения Абеля (1.13) u_1 и u_0:

$$\begin{tikzcd} \Gamma_1 \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\xi"'] & J(\Gamma_1) \\ \Gamma_0 \arrow[r, "u_0"] & J(\Gamma_0). \end{tikzcd}$$

Зададим отображение φ по формуле

$$\varphi \int_{\gamma^{(1)}} du^{(1)} = \int_{M\gamma^{(0)}} du^{(0)}. \tag{2.28}$$

Поскольку M есть отображение гомологий, то отображение φ переводит периоды в периоды и, следовательно, является отображением якобианов

$\varphi\colon J(\Gamma_1)\to J(\Gamma_0)$. Это отображение можно охарактеризовать следующим из формулы (2.28) матричным равенством (ср. с работой [61], с. 32—35):

$$\varphi\Omega_1 = \Omega_0{}^tM. \tag{2.29}$$

В равенстве (2.29) φ есть $g_0 \times g_1$ комплексная матрица, а M — $2g_1 \times 2g_0$ целочисленная матрица. При этом матрица M удовлетворяет соотношению

$$NC_0^{(0)} = MC_0^{(1)t}M, \tag{2.30}$$

в котором $C_0^{(i)}$ $(i = 0, 1)$ — матрицы пересечений (1.2).

Пример. Вернемся к случаю родов $g_1 = 2$, $g_0 = 1$. Равенство (2.29) в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned}
\varphi_{11} &= m_{11} + B_0m_{12},\\
\varphi_{12} &= m_{21} + B_0m_{22},\\
\varphi_{11}B_{11} + \varphi_{12}B_{12} &= m_{31} + B_0m_{32},\\
\varphi_{11}B_{12} + \varphi_{12}B_{22} &= m_{41} + B_0m_{42}.
\end{aligned}$$

Обозначим $B_0 = \omega'/\omega$, где ω и ω' — периоды эллиптической кривой. Непосредственным вычислением можно показать (см. [93], с. 483—485), что условие совместности этой линейной системы уравнений относительно неизвестных $\omega\varphi_{11}$, $\omega\varphi_{12}$, ω, ω' имеет вид (2.16), (2.17). Матрица ${}^tM$ преобразованием $\sigma \in \mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z})$ приводится к виду (см. [93], с. 473)

$$\begin{Vmatrix} N & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{Vmatrix},$$

где непосредственно проверяется условие (2.30).

В заключение сформулируем, следуя И. Игусе [87], теорему Пуанкаре о «полной приводимости».

Теорема 2.2. (А. Пуанкаре [106].) *Пусть Ω_1 — такая матрица Римана порядка g_1 с главной матрицей C_0, что для некоторой комплексной $g_0 \times 2g_0$-матрицы Ω_0 и некоторой $2g_1 \times 2g_0$ целочисленной матрицы M, где $1 \leqslant g_0 < g_1$, верхняя $g_0 \times 2g_1$ подматрица матрицы Ω_1 может быть записана как $\Omega_0{}^tM$. Тогда существует элемент $\sigma \in \mathrm{Sp}_{2g_1}(\mathbb{Q})$ и точка $B_0 \in \mathcal{S}_{g_0}$ такие, что матрица $(1_{g_0}, B_0)$ эквивалентна необходимо римановой матрице Ω_0 и*

$$\sigma\cdot B_1 = \begin{Vmatrix} B_0 & 0\\ 0 & B_0'\end{Vmatrix}, \tag{2.31}$$

где $\Omega_1 = \mathcal{A}\,(1_{g_1}, B_{g_1})$.

Заметим, что условие теоремы 2.2 эквивалентно условию (2.29). В простейшем случае, когда $g_0 = 1$, теорема 2.2 утверждает, что матрица B_1 может быть пребразованием $\sigma \in \mathrm{Sp}_{2g_1}(\mathbb{Z})$ приведена к виду, в котором ее первый столбец есть $(B_0, k/N, 0, \ldots, 0)$, где $0 < k < N$ и N определяется по формуле (2.30). В этом случае теорема 2.2 совпадает с теоремой Вейерштрасса [93].

Из теоремы 2.2 следует, что класс эквивалентности, к которому принадлежит произвольная риманова матрица Ω, содержит одну из матриц вида

$$\begin{Vmatrix} \Omega_0 & & & 0\\ & \Omega_0' & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \Omega_0^r\end{Vmatrix},$$

где $\Omega_0, \ldots, \Omega_0^r$—неприводимые матрицы Римана (вопрос о единственности такого представления рассмотрен в [62]). В работе [87] И. Игуса поставил вопрос об описании модулярных форм, исчезающих в приводимых точках $B \in \mathcal{S}_g$, который был недавно разрешен Р. Сасаки [110]. Другим важным следствием теоремы 2.2 является то, что $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Q})$ орбиты $(1_g, \sqrt{-1})$ являются плотными в $\mathcal{S}_g$ ([87], с. 165; [105], с. 340).

§ 3. Нормальные накрытия и редукция тэта-функций

В предыдущем параграфе было показано, что подход, основанный на приведении (редукции) абелевых интегралов, позволяет ответить, в принципе, на вопрос о том, когда многомерные тэта-функции Римана редуцируются к тэта-функциям меньших размерностей. Однако, в то время как можно описать все алгебраические кривые рода 2, накрывающие эллиптические кривые (см. § 2), для римановых поверхностей родов $g > 2$ столь же эффективное описание отсутствует. Поэтому обратимся к изучению некоторого важного для приложений частного класса алгебраических кривых, тэта-функции которых редуцируются. Это кривые Γ, обладающие нетривиальной группой G бирациональных автоморфизмов и являющиеся вследствие этого нормальными накрытиями $\pi^*\colon \Gamma \to \Gamma/G$ (см. § 1) над Γ/G.

Для алгебраических кривых рода $g \geqslant 2$ порядок N группы G конечен, причем, в силу теоремы Гурвица, $N \leqslant 84\,(g-1)$ [77]. Верхняя грань в этом неравенстве достигается для кривых рода $g \leqslant 7$ лишь при $g = 3$ (кривая Клейна [90], для которой $N = 168$) и $g = 7$ (кривая Макбета [98], для которой $N = 504$). Для родов $g \leqslant 3$ имеется полная классификация римановых поверхностей с нетривиальными группами автоморфизмов, которая была получена для рода $g = 3$ А. Курибаяши и К. Комийя сравнительно недавно [95]. Важные примеры гиперэллиптических кривых с нетривиальными симметриями, в качестве которых используются конечные подгруппы группы вращения, даны Р. Хориучи [85].

Приведем простое рассуждение, показывающее, что в случае, когда кривая Γ обладает автоморфизмом T, возникают дополнительные ограничения на матрицу периодов B, которые и приводят к редукции соответствующих тэта-функций Римана.

Пусть на Γ с фиксированным базисом гомологий $\gamma = (a_1, \ldots, a_g; b_1, \ldots, b_g) \in H_1(\Gamma, \mathbb{Z})$ действует автоморфизм T, $T\colon H_1(\Gamma, \mathbb{Z}) \to H_1(\Gamma, \mathbb{Z})$ по формулам

$$(3.1)\qquad \begin{cases} Ta_i = \sum\limits_{j=1}^{g} \{a_{ij}a_j + c_{ij}b_j\} \qquad (i = 1, \ldots, g), \\[2ex] Tb_i = \sum\limits_{j=1}^{g} \{b_{ij}a_j + d_{ij}b_j\} \qquad (i = 1, \ldots, g), \end{cases}$$

в которых a, b, c, d — такие $g \times g$ целочисленные матрицы, что составленная из них матрица (1.10) $\sigma = \begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix} \in \mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$. Пусть $du = (du_1, \ldots, du_g) \in \mathcal{H}^1(\Gamma, \mathbb{Z})$ — дуальный к каноническому базису гомологий γ базис голоморфных дифференциалов. Представление T^* автоморфизма T в $\mathcal{H}^1(\Gamma, \mathbb{Z})$ действует по правилу $T^*du(P) = du(TP)$, $P \in \Gamma$. Поскольку при этом матрица периодов B не изменяется, то, в силу формулы (1.11), должно выполняться равенство

$$(3.2)\qquad B(d + cB) = aB + b.$$

Соотношения (3.2) между матричными элементами B дают ограничения на матрицу периодов алгебраической кривой, обладающей нетривиальным автоморфизмом.

Если на алгебраической кривой Γ действует группа автоморфизмов G с образующими T_k $(k = 1, \ldots, s)$, представление которой в $H_1(\Gamma, \mathbb{Z})$ задается образующими матрицами $a^{(k)}$, $b^{(k)}$, $c^{(k)}$, $d^{(k)}$, $\sigma^{(k)} = \begin{Vmatrix} a^{(k)} & b^{(k)} \\ c^{(k)} & d^{(k)} \end{Vmatrix} \in \mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$, то B-матрица такой римановой поверхности должна удовлетворять системе равенств

$$B(d^{(k)} + c^{(k)}B) = a^{(k)} + b^{(k)}B \qquad (k = 1, \ldots, s). \tag{3.3}$$

Для некоторых кривых, исходя только из подобных соображений симметрии (т. е. из равенств (3.2), (3.3)), удается получить численное значение B-матриц. При этом существует два способа вывода соотношений (3.1) между «старым» и «новым» базисами. При первом из них риманова поверхность представляется как накрытие над комплексной плоскостью, при втором — как фундаментальный многоугольник фуксовой группы, и необходимые соотношения (3.1) вытекают из анализа действия автоморфизма на канонический базис этого многоугольника. Первый способ особенно удобен и нагляден в случае гиперэллиптической кривой; именно таким образом численные значения B-матриц получены в работах [6], [7], [109]. Автоморфный подход, по-видимому, впервые применил А. Пуанкаре [107] для вычисления матрицы периодов кривой Клейна. Сравнительно недавно были устранены допущенные в работе [107] технические ошибки и получен правильный ответ [109]. Другое решение задачи о вычислении B-матрицы кривой Клейна получено в работе [6], основываясь на вычислениях Г. Бейкера [67]. В [6] также указана редукция соответствующих тэта-функций к одномерным.

Существует несколько способов представления тэта-функций, построенных по матрице B, удовлетворяющей условию теоремы 2.2 Пуанкаре, через тэта-функции меньшей размерности (см., например, [78], [93], [66], [107]). Способ доказательства этих разложений во всех случаях одинаков: пользуясь специальным видом матрицы периодов B, удается заменить суммирование по решетке $\mathbb{Z}^g$ в формуле (1.14) на суммирование по некоторым подрешеткам. Далее мы воспользуемся удобной для вычислений теоремой Аппеля [66] (см. также [6]), позволяющей при некоторых условиях на матрицу периодов (эти условия являются частным случаем условий (2.29) теорем Вейерштрасса и Пуанкаре) выразить g-мерную тэта-функцию Римана через $g-1$-мерные тэта-функции Римана и тэта-функции Якоби. Для того чтобы сформулировать эту теорему, дадим ряд определений.

Допустим, что последний столбец матрицы периодов B удовлетворяет соотношениям

$$\left\{\begin{array}{ll} m_j B_{jg} = q_j & (j = 1, \ldots, \nu), \\ m_j B_{jg} = m_g B_{gg} + q_j & (j = \nu + 1, \ldots, g-1), \end{array}\right. \tag{3.4}$$

где m_k, $q_j \in \mathbb{Z}$. Заметим, что всегда можно выбрать $m_g > 0$, $m_j > 0$ $(j = 1, \ldots, \nu)$. Если $m_k < 0$ для $k > \nu$, то выполним следующее преобразование: заменим на противоположные знаки у z_k (аргумент тэта-функции) и у n_k (значок суммирования в формуле (1.14)). При этом преобразовании тэта-функция (1.14) не изменится, а m_k в формулах (3.4) изменит знак и станет положительным. Таким образом, всегда можно считать, что в (3.4) $m_k \subset \mathbb{N}$ $(k = 1, \ldots, g)$, т. е. описанная выше замена знаков уже произведена. Кроме того, условимся выбирать числа m_k наименьшими из возможных, для которых еще выполняются равенства (3.4), в частности, если $B_{kg} = 0$, то будем полагать $m_k = 1$.

Теорема 3.1 (П. Аппель [66]). *Пусть последний столбец матрицы B удовлетворяет условиям* (3.4). *Тогда*

$$\vartheta^{(g)}(z|B) = \sum_{r \in \mathbb{Z}^g(m)} \exp \pi i \{2\langle r, z\rangle + \langle Br, r\rangle\} \, \vartheta^{(g-1)}(y|A) \, \vartheta_3(y_g | B_{gg} m_g^2),$$

где суммирование по r означает конечную сумму по $r \in \mathbb{Z}^g(m)$: $r = (r_1, \ldots, r_g)$, $0 \leqslant r_k \leqslant m_k - 1$ $(k = 1, \ldots, g)$, индексы (g) и $(g-1)$ указывают размерность соответствующей тэта-функции, остальные параметры задаются следующими формулами:

$$
\begin{gathered}
y = (y_1, \ldots, y_{g-1}) = (\widetilde{y}_1, \ldots, \widetilde{y}_\nu, \widetilde{y}_{\nu+1} - \widetilde{y}_g, \ldots, \widetilde{y}_{g-1} - \widetilde{y}_g),\\
\widetilde{y}_k = m_k z_k + \frac{1}{2} m_k \frac{\partial}{\partial r_k} \langle Br, r\rangle \quad (k = 1, \ldots, g), \qquad (3.5)\\
A_{ii} = \begin{cases} m_i^2 B_{ii}, & \text{если } i \leqslant \nu,\\ m_i^2 B_{ii} - m_g^2 B_{gg}, & \text{если } i > \nu,\end{cases}\\
A_{ij} = \begin{cases} m_i m_j B_{ij}, & \text{если } i \text{ или } j \leqslant \nu,\\ m_i m_j B_{ij} - m_g^2 B_{gg}, & \text{если } i, j > \nu.\end{cases}
\end{gathered}
$$

В дальнейшем мы будем пользоваться частным случаем этой теоремы в котором $q_j = 0$ $(j = 1, \ldots, g)$.

Т е о р е м а 3.2 [6]. *Пусть последний столбец матрицы B удовлетворяет условиям (3.4), причем $q_j = 0$ $(j = 1, \ldots, g)$. Тогда*

$$
\vartheta^{(g)}(z|B) = \sum_{r \in \mathbb{Z}^g(m)} \vartheta^{(g-1)}[\alpha; 0](y|A)\, \vartheta[\delta, 0](m_g z_g | m_g^2 B_{gg}), \qquad (3.6)
$$

где

$$
\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{g-1}), \quad \alpha_j = \frac{r_j}{m_j} \, (j = 1, \ldots, g-1), \quad \delta = \sum_{j=\nu+1}^{g} r_j/m_j,
$$

матрица A задается, как и прежде, выражением (3.5), *а*

$$
y_j = \begin{cases} m_j z_j, & \text{если } j = 1, \ldots, \nu,\\ m_j z_j - m_g z_g, & \text{если } j = \nu + 1, \ldots, g-1.\end{cases} \qquad (3.7)
$$

Отметим, что условие теоремы Аппеля зависит от выбора канонического базиса гомологий, т. е. B-матрица, удовлетворяющая условию теоремы (3.4) в одном каноническом базисе, перестает, вообще говоря, удовлетворять ему в другом базисе. Мы не будем здесь обсуждать вопрос о построении общего преобразования [1]) $\sigma \in \mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$, с помощью которого может быть достигнут необходимый для применения теоремы Аппеля базис гомологий. Отметим только, что в ряде случаев этот базис может быть легко найден. В частности, в работах [6], [7], используя только приведенные в начале этого параграфа элементарные рассуждения о матрицах периодов алгебраических кривых, снабженных нетривиальными автоморфизмами, и теорему 3.2, удалось указать некоторый класс кривых с редуцируемыми тэта-функциями.

Для некоторых определенных классов нормальных накрытий можно единым образом указать некоторый базис гомологий и проследить в нем редукцию соответствующих тэта-функций. В частности, в монографии Дж. Фея [78] рассматриваются два редуцируемых случая: 1) инволюция $T\colon \Gamma \to \Gamma$ имеет n пар неподвижных точек; 2) циклический автоморфизм $T\colon \Gamma \to \Gamma$ p-го порядка $(T^p = 1)$ неподвижных точек не имеет.

Мы рассмотрим здесь первый случай. Пусть Γ_1 — риманова поверхность рода g_1, снабженная инволюцией $T\colon \Gamma_1 \to \Gamma_1$ с неподвижными точками $Q_1, \ldots, Q_{2n}$. Обозначим через Γ_0 фактор $\Gamma_0 = \Gamma_1/T$ и через g_0 — род римановой поверхности Γ_0. Определим двулистное разветвленное накрытие

---

[1]) Отметим, что теория таких преобразований была развита еще в прошлом веке. В частности, доказательство теоремы Вейерштрасса 2.1 для родов $g \geqslant 2$ основывается на конструктивном построении преобразования $\sigma \in \mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$, приводящего первый столбец B-матрицы к виду $(B_0, k/N, 0, 0, \ldots, 0)$ (см. [93]).

$\pi\colon \Gamma_1 \to \Gamma_0$ над Γ_0. Согласно формуле Римана — Гурвица (1.17) род g_1 равен $g_1 = 2g_0 + n - 1$. Канонический базис гомологий в $H_1(\Gamma_1, \mathbb{Z})$, $(a_1, \ldots, a_{g_0}, a_{g_0+1}, \ldots, a_{g_0+n-1}, a'_1, \ldots, a'_{g_0}; b_1, \ldots, b_{g_0}, b_{g_0+1}, \ldots, b_{g_0+n-1}, b'_1, \ldots, b'_{g_0})$ можно выбрать так, что $(a_1, \ldots, a_{g_0}; b_1, \ldots, b_{g_0})$ есть канонический базис в $H_1(\Gamma_0, \mathbb{Z})$ и

$$a'_\nu + Ta_\nu = b'_\nu + Tb_\nu = 0, \quad 1 \leqslant \nu \leqslant g_0,$$
$$a_i + Ta_i = b_i + Tb_i = 0, \quad g_0 + 1 \leqslant i \leqslant g_0 + n - 1.$$

(При $g = 3$, $g_0 = 1$, $p = 2$ см. рис. 2.) Для дуальных нормированных голоморфных дифференциалов

$$du_1, \ldots, du_{g_0}, du_{g_0+1}, \ldots, du_{g_0+n-1},$$
$$du'_1, \ldots, du'_{g_0} \in \mathscr{H}^1(\Gamma_1, \mathbb{Z})$$

справедливы при $1 \leqslant \nu \leqslant g_0$ и $g_0 + 1 \leqslant i \leqslant g_0 + n - 1$ равенства

$$du_\nu(P) = -du'_\nu(TP), \qquad (3.8)$$
$$du_i(P) = -du_i(TP), \quad P \in \Gamma_1.$$

Дуальные каноническому базису $(a_1, \ldots, a_{g_0}, b_1, \ldots, b_{g_0}) \in H_1(\Gamma_0, \mathbb{Z})$ голоморфные дифференциалы на Γ_0 равны $dv_\nu = du_\nu - du'_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, g_0)$, а выражениями

$$dw_\nu = du_\nu + du'_\nu, \quad 1 \leqslant \nu \leqslant g_0;$$
$$dw_i = du_i, \quad g_0 + 1 \leqslant i \leqslant g_0 + n - 1$$

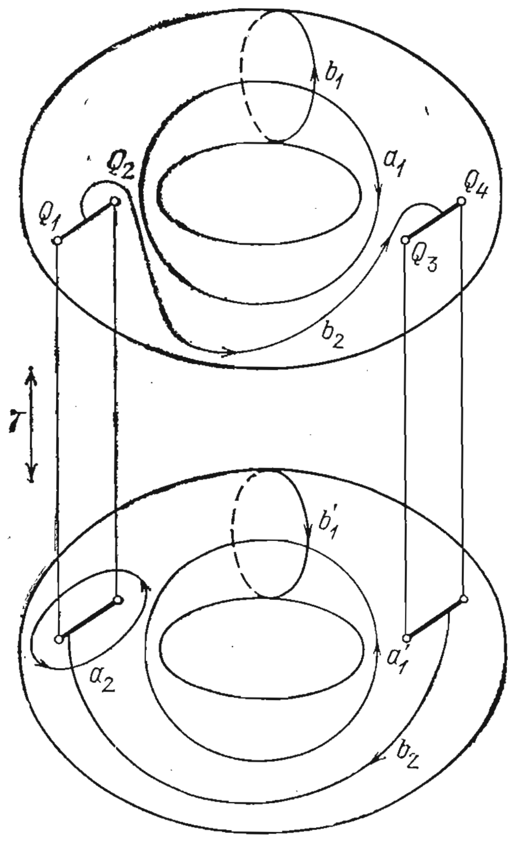

Рис. 2. Базис гомологий в $H_1(\Gamma, \mathbb{Z})$, где Γ — риманова поверхность рода 3, двулистно накрывающая тор

задаются $g_0 + n - 1$ линейно независимых нормированных дифференциалов Прима,

$$dv_\nu(P) = dv_\nu(TP), \quad dw_\nu(P) = -dw_\nu(TP).$$

Из (3.8) следует, что матрица периодов B_1 римановой поверхности Γ_1 имеет вид

$$B_1 = \left\| \begin{matrix} (\Pi_{\nu\lambda} + B^0_{\nu\lambda})/2 & \Pi_{\nu j} & (\Pi_{\nu\lambda} - B^0_{\nu\lambda})/2 \\ \Pi_{i\nu} & 2\Pi_{ij} & \Pi_{i\nu} \\ (\Pi_{\nu\lambda} - B^0_{\nu\lambda})/2 & \Pi_{\nu j} & (\Pi_{\nu\lambda} + B^0_{\nu\lambda})/2 \end{matrix} \right\|, \qquad (3.9)$$

где $1 \leqslant \lambda, \nu \leqslant g_0$, $g_0 + 1 \leqslant i, j \leqslant g_0 + n - 1$, B^0 — матрица периодов римановой поверхности Γ_0, Π — симметрическая $(g_0 + n - 1) \times (g_0 + n - 1)$ матрица Прима

$$\Pi = \left\| \begin{matrix} \Pi_{\nu\lambda} & \Pi_{\nu j} \\ \Pi_{i\lambda} & \Pi_{ij} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \int\limits_{b_\lambda} dw_\nu & \dfrac{1}{2} \int\limits_{b_j} dw_\nu \\ \int\limits_{b_\lambda} dw_i & \dfrac{1}{2} \int\limits_{b_j} dw_i \end{matrix} \right\|. \qquad (3.10)$$

Обозначим через $z = (z_1 \mid z_2 \mid z_3)$ g_1-мерный вектор, где z_1 и z_3 — g-мерные векторы, а z_2 — $n - 1$-мерный вектор; $z' = (z'_1 \mid z'_2) \in \mathbb{C}^{g_0+n-1}$, $z'_1 \in \mathbb{C}^{g_0}$, $z'_2 \in \mathbb{C}^{n-1}$.

Теорема 3.3. *Пусть матрица B_1 задана по формуле* (3.9). *Тогда справедливо равенство*

$$(3.11)\qquad \vartheta((z_1|z_2|z_3)|B_1)= \sum_{\delta\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}^{g_0}/2\mathbb{Z}^{g_0}} \vartheta[(\delta|0);\ 0]((z_1+z_3|z_2)|2\Pi)\,\vartheta[\delta;\ 0](z_1-z_3|2B^0),$$

где суммирование распространяется на все g_0-мерные векторы с компонентами 0 и $^1/_2$, первый сомножитель под знаком суммы есть g_0+n-1-мерная тэта-функция, а второй сомножитель — g_0-мерная тэта-функция.

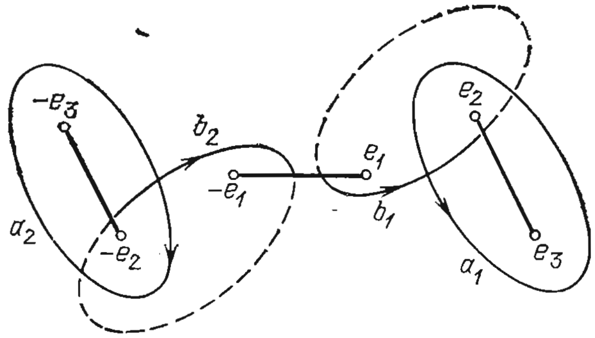

Рис. 3. Базис гомологий кривой (3.12)

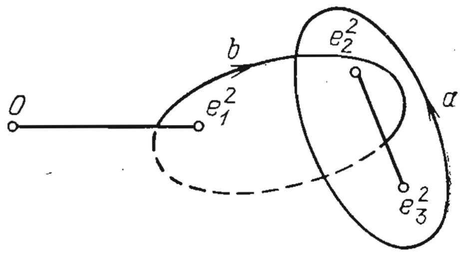

Рис. 4. Базис гомологий кривой (3.13)

Доказательство этой теоремы приведено в [78] (см. также приложение в работе [7]). Отметим, что формула (3.11) является обобщением приведенной в § 2 формулы (2.10). В случае, когда π: $\Gamma\to\Gamma/\langle T\rangle$ — циклическое неразветвленное накрытие, справедливо аналогичное (3.12) разложение [78].

Рассмотрим простейшую кривую Γ, в которой применима теорема 3.3, а именно кривую (1.21) при $g=g_0=2$ (см. рис. 3).

$$(3.12)\qquad w^2=(z^2-e_1^2)(z^2-e_2^2)(z^2-e_3^2).$$

Как уже отмечалось (см. замечание 2.1), эта кривая конформно эквивалентна кривой (2.6), рассматривавшейся в § 2. Рассмотрим действующую на кривой (3.12) инволюцию T: $(z,\ w)\to(-z,\ -w)$. Инволюция T не меняет листы, ее неподвижные точки лежат над ∞ на обоих листах, т. е. $n=1$. Кривая $\Gamma_1=\Gamma/T$ (см. рис. 4) задается уравнением

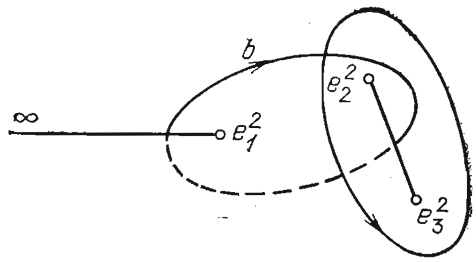

Рис. 5. Базис гомологий кривой (3.14)

$$(3.13)\qquad w_1^2=\xi(\xi-e_1^2)(\xi-e_2^2)(\xi-e_3^2).$$

Нормированные голоморфные дифференциалы на Γ и Γ_1 есть

$$du_1=\frac{-c_1z+c_2}{w(z)}\,dz,\qquad du_1'=\frac{-c_1z-c_2}{w(z)}\,dz,$$

$$dv=du_1-du_1'=\frac{2c_2\,dz}{w(z)}=\frac{c_2\,d\xi}{w_1(\xi)}.$$

Нормированный дифференциал Прима

$$dw=du_1+du_1'=\frac{-2c_1z\,dz}{w(z)}=-\frac{c_1\,d\eta}{w_2(\eta)}$$

также определен на эллиптической кривой Γ_2 (рис. 5),

$$(3.14)\qquad w_2^2=(\eta-e_1^2)(\eta-e_2^2)(\eta-e_3^2).$$

Кривые (3.13) и (3.14) конформно эквивалентны кривым (2.7). Постоянные c_1 и c_2 определяются из нормировки $\int\limits_a dv = 1$, $\int\limits_a dw = 1$, где интегрирование ведется по a-циклам соответственно римановых поверхностей Γ_1 и Γ_2, кроме того, $B^0 = \int\limits_b dv$, $\Pi = \int\limits_b dw$. Тэта-функция кривой (3.12) представляется, согласно (3.11), через одномерные тэта-функции (ср. с формулой (2.10)):

$$(3.15)\qquad \vartheta((z_1 \mid z_2) \mid B) = \vartheta_3(z_1 + z_2 \mid 2\Pi)\vartheta_3(z_1 - z_2 \mid 2B^0) + \\ + \vartheta_2(z_1 + z_2 \mid 2\Pi)\vartheta_2(z_1 - z_2 \mid 2B^0).$$

Рассмотрим теперь кривую Γ рода $g = 3$ (см. рис. 6)

$$(3.16)\qquad w^2 = z(z-e_1)(z-e_1^{-1})(z-e_2)(z-e_2^{-1})(z-e_3)(z-e_3^{-1}).$$

Она обладает инволюцией T_1: $z \to z^{-1}$ (мы будем рассматривать не меняющую листы инволюцию). Под действием этой инволюции базис гомологий меняется согласно (3.1), где

$$T_1 b' = d_1' b', \quad c_1' = b_1' = 0, \quad T_1' a = ({}^tS_1')^{-1} a', \quad S_1' = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Здесь $b' = (b_1', b_2', b_3')$ означает вектор, компонентами которого являются b-циклы, изображенные на рис. 6. Отсюда, согласно (3.2), уже можно полу-

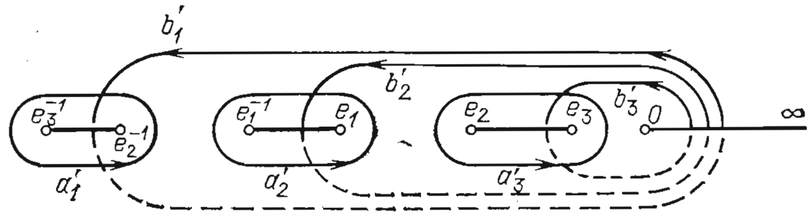

Рис. 6. Базис гомологий кривой (3.16)

чить ограничение на матрицу периодов B кривой (3.16), но нам будет удобно перейти к другому каноническому базису $b = \Phi b'$, $a = ({}^t\Phi)^{-1} a'$,

$$(3.17)\qquad \Phi = \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{Vmatrix}.$$

Этот новый базис $(a, b) \in H_1(\Gamma, \mathbb{Z})$ под действием инволюции T_1 преобразуется при помощи матрицы S_1, связанной с S_1' преобразованием подобия $S_1 = \Phi S_1' \Phi^{-1}$, $T_1 b = S_1 b$, $T_1 a = ({}^tS_1)^{-1} a$, где

$$(3.18)\qquad S_1 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}.$$

С учетом (3.2) матрица периодов, вычисленная в базисе (a, b), имеет вид:

$$(3.19)\qquad B = \begin{Vmatrix} \tau_3 & \tau_2 & 0 \\ \tau_2 & \tau_4 & \tau_1 \\ 0 & \tau_1 & 2\tau_1 \end{Vmatrix}.$$

Последний столбец матрицы (3.19) удовлетворяет условиям теоремы 3.2 ($\nu = 1$, $m_1 = 1$, $m_2 = 2$, $m_3 = 1$), поэтому

$$(3.20)\qquad \vartheta(z \mid B) = \vartheta(z_1, 2z_2 - z_3 \mid A)\vartheta_3(z_3 \mid 2\tau_1) + \\ + \vartheta[0, 1/2; 0, 0](z_1, 2z_2 - z_3 \mid A)\vartheta_2(z_3 \mid 2\tau_1).$$

Если параметры e_1, e_2, e_3 кривой (3.16) связаны соотношением $e_2 - e_1 = e_3(e_1e_2 - 1)$, в силу которого она обладает еще и инволюцией

$$(3.21)\qquad T_2\colon\ z \to \frac{z-e_1}{e_1z-1},$$

то аналогично тому, как рассматривалась инволюция T_1, получаем

$$(3.22)\qquad T_2 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad \tau_3 = 2\tau_2.$$

Отсюда следует, что двумерная тэта-функция в формуле (3.20) есть, согласно теореме 3.2 (в этом случае $\nu = 0$, $m_1 = m_2 = 1$, а при применении следует в условии теоремы заменить последний столбец на первый), просто произведение одномерных [1])

$$(3.23)\qquad \begin{aligned} \vartheta(z \mid B) = \vartheta_3(z_1 \mid 2\tau_2)\vartheta_3(2z_2 - z_1 - z_3 \mid 4\tau_4 - 2\tau_1 - 2\tau_2) \times \\ \times \vartheta_3(z_3 \mid 2\tau_1) + \vartheta_2(z_1 \mid 2\tau_2)\vartheta_2(z_3 \mid 2\tau_1) \times \\ \times \vartheta_2(2z_2 - z_1 - z_3 \mid 4\tau_4 - 2\tau_2 - 2\tau_1). \end{aligned}$$

В этом случае все базисные голоморфные дифференциалы приводятся к эллиптическим дифференциалам, а величины τ_i выражаются через эллиптические интегралы (см. [5], где рассматривается кривая, конформно эквивалентная кривой (3.16) с инволюцией (3.21)).

ГЛАВА II

МНОГОФАЗНЫЕ (КОНЕЧНОЗОННЫЕ) РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА КдФ РОДА $g \geqslant 2$, ВЫРАЖАЮЩИЕСЯ ЧЕРЕЗ ТЭТА-ФУНКЦИИ ЯКОБИ

§ 4. Решения в эллиптических функциях уравнения «sine-Gordon»

Конечнозонные решения уравнения (0.7), $\varphi_{xx} - \varphi_{tt} = \sin\varphi$, где $\varphi = \varphi(x, t) \pmod{2\pi}$, были найдены В. А. Козелом, В. П. Котляровым ([44], [45]) и А. Р. Итсом [99] и определяются по формуле

$$(4.1)\qquad \varphi(x, t) = 2i \ln \frac{\vartheta[\alpha;\ \beta](Ux+Vt+W \mid B)}{\vartheta[0;\ 0](Ux+Vt+W \mid B)} + C + 2\pi m,$$
$$U, V, W \in \mathbb{C}^g, \quad C \in \mathbb{R}^1, \quad m \in \mathbb{Z}^1,$$

в которой g-мерные тэта-функции (1.14) определены на римановой поверхности Γ рода g:

$$(4.2)\qquad w^2 = z\prod_{j=1}^{2g}(z - E_j), \quad E_i \neq E_j, \ E_k \in \mathbb{C} \quad (i, j, k = 1, \ldots, 2g).$$

Характеристика $[\alpha;\ \beta]$ определена коэффициентами α, $\beta \in \mathbb{Z}^g/2$ в разложении пути $[0, \infty)$ по базису гомологий $(a_1, \ldots, a_g;\ b_1, \ldots, b_g) \in H_1(\Gamma, \mathbb{Z})$, $[0, \infty) = \sum_{j=1}^{g}\{\alpha_jb_j + \beta_ja_j\}$, в частности в базисе гомологий, изображенном на рис. 1, $g = 2$, $[\alpha;\ \beta] = [0, 0;\ ^1/_2, {}^1/_2]$. Если $du = (du_1, \ldots, du_g) \in \mathcal{H}^1(\Gamma, \mathbb{Z})$ — дуальный базис в пространстве голоморфных дифференциалов, причем

$$(4.3)\qquad du_j = \sum_{i=0}^{g-1}\frac{c_{ij}z^j}{w(z)}\,dz \qquad (j = 1, \ldots, g),$$

[1]) Тэта-функция с ненулевой характеристикой рассматривается аналогично (см. [7]).

то g-мерные векторы U, V (обмоточные векторы) выражаются через нормировочные постоянные c_{ij} по формулам

$$\left\{\begin{aligned} & U_k = \frac{i}{2}\left(c_{g-1,\,k} + \frac{c_{0,\,k}}{\sqrt{p_0}}\right) \quad (k=1,\,\ldots,\,g), \\ & V_k = \frac{i}{2}\left(c_{g-1,\,k} - \frac{c_{0,\,k}}{\sqrt{p_0}}\right) \quad (k=1,\,\ldots,\,g), \\ & p_0 = \prod_{j=1}^{2g} E_j. \end{aligned}\right. \tag{4.4}$$

Определенные по формулам (4.3), (4.4) векторы U и V являются b-периодами нормированных условиями

$$\int_{a_j} du_P^{(j)} = 0 \qquad (j=1,\,\ldots,\,g, \quad i=1,\,2)$$

абелевых интегралов II типа $u_P^{(i)} = \int du_P^{(i)}$ $(i = 1,\ 2)$

$$U_j = \frac{1}{2\pi}\int_{b_j} du_P^{(1)}, \quad V_j = \frac{1}{2\pi}\int_{b_j} du_P^{(2)}, \tag{4.4a}$$

обладающих следующей асимптотикой в особых точках $z = 0$ и $z = \infty$:

$$\left\{\begin{aligned} & u_P^{(i)} \to \frac{1}{4}\sqrt{z} + \ldots, && z\to\infty, \\ & u_P^{(i)} \to \frac{1}{4}(-1)^i\,\frac{1}{\sqrt{z}} + \ldots, && z\to 0. \end{aligned}\right. \tag{4.5}$$

Постоянная C определяется по формуле

$$C = i\left\{\sum_{j=1}^{g}\int_{a_j} \ln z\, du_j(z) - \ln\left[(-1)^g p_0^{1/2}\right]\right\}$$

и равна 0 или π [12]. Если рассматриваются вещественные решения (4.1), то g-вектор W определяется из этих условий. Условия вещественности решений уравнения (0.7) изучены в ряде работ: [45], [12], [13], [31], [72], [81], [113], [76] и резюмированы в работах [33], [55]. Для рода $g = 2$ условия вещественности выделяют три типа вещественных решений:

$$\text{I тип: } E_4 < E_3 < E_2 < E_1 < 0;$$

$$\text{II тип: } E_2 < E_1 < 0, \quad E_3 = \bar{E}_4 \neq E_4;$$

$$\text{III тип: } E_1 = \bar{E}_2 \neq E_2, \quad E_3 = \bar{E}_4 \neq E_4.$$

При этом если характеристика $[\alpha;\ \beta]$ в формуле (4.1) равна $[0;\ ^1/_2]$, то

$$W = \left\{\begin{array}{ll} (\pm 1/4;\ \pm 1/4) & \text{для решений I типа;} \\ (\pm 1/4,\ 0) \text{ или } (0;\ \pm 1/4) & \text{для решений II типа;} \\ (0;\ 0) & \text{для решений III типа.} \end{array}\right.$$

Опишем простейшие классы двух- и трехзонных решений в эллиптических функциях уравнения (0.7).

1°. $g = 2$, $N = 2$. В этом случае точки ветвления $E_1,\ \ldots,\ E_4$ кривой (4.2) удовлетворяют соотношению

$$E_1 E_4 = E_2 E_3 = s. \tag{4.6}$$

П р е д л о ж е н и е 4.1. *Если точки ветвления $E_1, \ldots, E_4$ кривой (4.2) связаны соотношением (4.6), то двухзонные решения* I, II *и* III *типов уравнения* (0.7) *являются эллиптическими и определяются по формуле*

$$(4.7)\quad \operatorname{tg}\{\varphi(x,\,t)/4\} = i\,\frac{\vartheta_2(U^+x+V^+t+W^+\mid 2\tau^+)\,\vartheta_2(U^-x+V^-t+W^-\mid 2\tau^-)}{\vartheta_3(U^+x+V^+t+W^+\mid 2\tau^+)\,\vartheta_3(U^-x+V^-t+W^-\mid 2\tau^-)},$$

в которой

$$U^\pm = \frac{\sqrt{2}}{\omega^\pm}\,(s^{1/4} \pm s^{-1/4}),\quad V^\pm = \frac{\sqrt{2}}{\omega^\pm}\,(s^{1/4} \mp s^{-1/4}),\quad W^\pm = W_1 \pm W_2$$

и периоды $\omega^\pm$, $\omega^{\pm\prime} = \tau^\pm\omega^\pm$ *определены по эллиптическим кривым* (2.7).

Для доказательства заметим, что в случае решений I и III типов B-матрица соответственно в базисах гомологий, изображенных на рис. 1 и рис. 7, имеет вид (2.8). Поэтому формула (4.7) следует немедленно из (3.10). Для решения II типа определим базис гомологий на рис. 8. Матрица периодов в этом базисе имеет вид (2.11), $\tau^\pm$, как и ранее, обозначают параметры Якоби кривых (2.7), характеристика $[\alpha;\ \beta]$ в формуле (4.1) равна $[\alpha;\ \beta] = [0,\ 0;\ {}^1/_2,\ {}^1/_2]$. Формулу (4.7) получаем после редукции 2-мерной тэта-функции и ряда стандартных преобразований тэта-функций Якоби [1]).

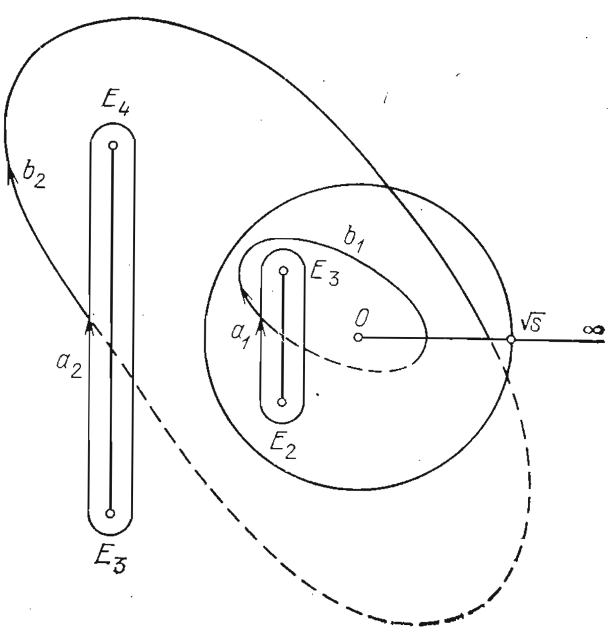

Рис. 7. Базис гомологий кривой (4.2) при $g = 2$, $E_1 = \bar{E}_2$, $E_3 = \bar{E}_4$

Решение (4.7) обладает важным свойством: после преобразования Лоренца $(x,\ t) \to (x',\ t')$,

$$x' = \frac{x - \varkappa t}{\sqrt{1-\varkappa^2}},$$

$$t' = \frac{t - \varkappa x}{\sqrt{1-\varkappa^2}},\quad \varkappa = \frac{\sqrt{s}-1}{\sqrt{s}+1},$$

где параметр s определен равенством (4.6), оно приводится к виду (0.6), где эллиптические функции $F(x)$ и $G(t)$ удовлетворяют уравнениям $F_x^2 = cF^4 + (1+d)F^2 - e$ и $G_t^2 = eG^4 + dG^2 - c$ с постоянными c, d, e [71].

Отметим, что ряд интересных алгебро-геометрических свойств решения (4.7) был выявлен в работах [81], [76].

2°. $g = 2$, $N = 3$. В этом случае мы ограничимся рассмотрением решений I типа. Воспользуемся формулами (2.20), (2.21). Для этого наложим на точки ветвления E_1, E_2, E_3, E_4 кривой (4.2) условия

$$(4.8)\qquad \begin{cases} 2(E_1+E_2+E_3) = 3E_4, \\ E_1^2+E_2^2+E_3^2 = 2(E_1E_2+E_1E_3+E_2E_3), \end{cases}$$

при выполнении которых кривая (4.2) оказывается конформно эквивалентной кривой (2.22). Поэтому в изображенном на рис. 1 базисе гомологий B-матрица имеет вид (2.26). Справедливо следующее

---

[1]) Авторы благодарны М. В. Бабичу за проведение вычислений, связанных с изучением решения II типа.

Предложение 4.2. *Если нули многочлена* (4.2) *связаны соотношением* (4.8), *то двухзонное решение* I *типа уравнения* (0.7) *выражается по формуле*

$$(4.9)\qquad \varphi(x,t)=2i\ln\left\{\left[\sum_{\nu=0}^{2}\prod_{i=1}^{2}\vartheta\left[\frac{\nu}{3};\ \delta^{(i)}\right](z^{(i)}|3\tau^{(i)})\right]\times\right.$$
$$\left.\times\left[\sum_{\nu=0}^{2}\prod_{i=1}^{2}\vartheta\left[\frac{\nu}{3};\ \bar\delta^{(i)}\right](z^{(i)}|3\tau^{(i)})\right]^{-1}\right\},$$

в которой обозначено

$$\delta^{(1)}=W_1-W_2,\quad \delta^{(2)}=2W_1+W_2,\quad \bar\delta^{(1)}=\delta^{(1)},\quad \bar\delta^{(2)}=\frac{1}{2}+\delta^{(2)},$$
$$z^{(1)}=\frac{3i}{8\omega^{(1)}}(x+t)+\frac{3i\sqrt{3g_2}}{8\omega^{(1)}\rho}(x-t),\qquad z^{(2)}=\frac{3i\sqrt{3g_2}}{16\omega^{(2)}\rho}(x-t),$$
$$\rho^2=\frac{1}{2}\sqrt{3g_2}\,[27g_3+(\sqrt{3g_2})^3],$$

а $\tau^{(i)}=\omega^{(i)\prime}/\omega^{(i)}$ — *модули Якоби эллиптических кривых* (2.20а) *и* (2.21а).

Отметим, что решение (4.9) является новым, насколько известно авторам, квазипериодическим решением уравнения (0.7) в эллиптических функциях.

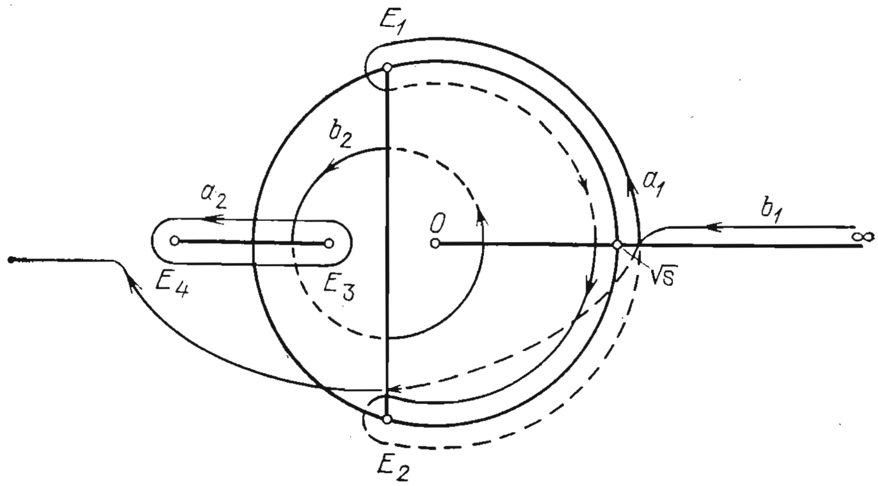

Рис. 8. Базис гомологий кривой (4.2) при $g=2$, $E_4<E_3<0$, $E_1=\bar E_2$

3°. $g=3$, $N=2$. Зададим кривую (4.2) в виде (3.16), т. е. потребуем, чтобы точки ветвления $E_1,\ \ldots,\ E_6$ удовлетворяли условиям

$$(4.10)\qquad \begin{cases} E_1=E_2^{-1}=e_1, & E_3=E_4^{-1}=e_2,\\ E_5=E_6^{-1}=e_3; & e_1,\ e_2,\ e_3\in\mathbb{C}.\end{cases}$$

(Отметим, что двулистные накрытия гиперэллиптической кривой рода 3 рассматривались еще С. В. Ковалевской [42]). Поскольку B-матрица такой кривой вычислена в § 3 (см. (3.19)), то для вывода редуцированного решения уравнения (0.7) остается найти векторы U, V, W, причем вектор W, как и в случае рода $g=2$, определяется из условия вещественности решения. Заметим, что поскольку инволюция T_1 не меняет листы Г (см. (3.16)), то равны следующие абелевы дифференциалы II типа:

$$(4.11)\qquad du^{(1)}_{T_1P}=du^{(1)}_P,\quad du^{(2)}_{T_1P}=-du^{(2)}_P.$$

Из равенств (4.11), (4.4а) и (3.18) следует, что

$$(4.12)\qquad \begin{cases} U=T_1U=(U_1,\ U_2,\ 0),\\ V=-T_1V=(0,\ V_2,\ 2V_2).\end{cases}$$

Отсюда и из разложения (3.20) следует

Предложение 4.3 [16]. *Если точки ветвления $E_1, \ldots, E_6$ кривой (4.2) удовлетворяют условиям (4.10), то решение (4.1) уравнения (0.7) имеет вид*

$$(4.13)\qquad \varphi(x, t) = 2i \ln \left\{\left[\vartheta\left[0, 0; \frac{1}{2}, 0\right](y_1, y_2|A)\,\vartheta_3(y_3|2\tau_1) - \vartheta\left[0, \frac{1}{2}; \frac{1}{2}, 0\right](y_1, y_2|A)\vartheta_2(y_3|2\tau_1)\right][\vartheta[0, 0; 0, 0](y_1, y_2|A) \times \vartheta_3(y_3|2\tau_1) + \vartheta\left[0, \frac{1}{2}; 0, 0\right](y_1, y_2|A)\,\vartheta_2(y_3|2\tau_1)\right]^{-1},$$

где параметр τ_1 и 2×2-матрица A определены в равенствах (3.19) *и* (3.20), *а*

$$y_1 = U_1x + W_1,\quad y_2 = U_2x + 2W_2 - W_3,\quad y_3 = V_2t + W_3,$$

Решение (4.13) есть 6-параметрическое (параметры $e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{C}$, $W \in \mathbb{C}^3$) семейство двоякопериодических по t решений (заменой $x \to it$, $t \to ix$ получаем двоякопериодическое по x решение). В этой связи заметим, что общие конечнозонные решения рода g уравнения (0.7) параметризуются $3g-1$ независимыми параметрами ($2g - 1$ точка ветвления и $W \in \mathbb{C}^g$); условие периодичности приводит дополнительно (период не фиксируется) к $g - 1$ ограничению. Таким образом, построенное семейство решений (4.13) по числу независимых параметров совпадает с общим периодическим решением рода 3.

Для выделения из конечнозонных решений уравнения (0.7) вещественных решений используем подход [31], основанный на прямом анализе трехзонной формулы (4.13). Оказывается, что в рассматриваемом случае, когда $e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{R}$, $[\alpha; \beta] = [0, 0, 0, {}^1/_2, {}^1/_2, 0]$, $\mathrm{Re}U = \mathrm{Re}V = 0$, $B = -\bar{B}$, существуют четыре компоненты вещественных решений $\mathrm{Re}W = \mathrm{Re}(W_1, W_2, W_3) = \{({}^1/_4, {}^1/_4, 0), ({}^3/_4, {}^1/_4, 0), ({}^1/_4, {}^1/_4, {}^1/_2), ({}^3/_4, {}^1/_4, {}^1/_2)\}$, нетривиально отличающиеся друг от друга. При этом формулой (4.13) описывается вещественное периодическое по t решение. Уравнение (0.7) инвариантно относительно преобразования $x \to t$, $t \to x$, $\varphi \to \varphi + \pi$, при помощи которого из (4.13) получается вещественное периодическое по x решение. Пользуясь результатами [31], можно выделить также и вещественные решения для поверхностей (3.16) с комплексными точками ветвления.

Если кривая Γ имеет диэдральную группу автоморфизмов, $T_1^2 = T_2^2 = 1$, $T_1T_2 = T_2T_1$ (см. (3.21)), то исходная трехмерная тэта-функция выражается через одномерные по формуле (3.23), и, таким образом, из (4.13) получаем решение в тета-функциях Якоби

$$(4.14)\qquad \varphi(x, t) = 2i\ln\{[\vartheta_4(y_1 \mid 2\tau_2)\vartheta_4(y_4 \mid 4\tau_4 - 2\tau_1 - 2\tau_2)\vartheta_3(y_3 \mid 2\tau_1) + \vartheta_1(y_1 \mid 2\tau_2)\vartheta_1(y_4 \mid 4\tau_4 - 2\tau_1 - 2\tau_2)\vartheta_2(y_3 \mid 2\tau_1)] \times [\vartheta_3(y_1 \mid 2\tau_2)\vartheta_3(y_4 \mid 4\tau_4 - 2\tau_1 - 2\tau_2)\vartheta_3(y_3 \mid 2\tau_1) + \vartheta_2(y_1 \mid 2\tau_2)\vartheta_2(y_4 \mid 4\tau_4 - 2\tau_1 - 2\tau_2)\vartheta_2(y_3 \mid 2\tau_1)]^{-1}\},$$

где обозначено

$$y_4 = y_2 - y_1 = (2U_2 - U_1)x + 2W_2 - W_3 - W_1.$$

Заметим, что из факта существования инволюции T_2 не вытекает ограничений на векторы U и V, подобных (4.12), так как особенности дифференциалов $du_P^{(i)}$ не инвариантны относительно этой инволюции.

При конформном преобразовании

$$(4.15)\qquad \zeta = \frac{z+1}{z-1}\sqrt{\frac{1-e_1}{1+e_1}}$$

кривая (3.16) перейдет в кривую

$$(4.16)\qquad \omega^2 = (\zeta^2 - u^2)(\zeta^2 - v^2)(\zeta^2 - u^{-2})(\zeta^2 - v^{-2}),$$

инволюции T_1 и T_2 которой выглядят наиболее просто:

$$(4.17)\qquad T_1\colon (\zeta,\ \omega)\to(-\zeta,\ \omega),\quad T_2\colon (\zeta,\ \omega)\to(\zeta^{-1},\ \omega\zeta^{-3}).$$

Решение уравнения (0.7), отвечающее римановой поверхности (4.16), построено в работах [5], [7]. В силу конформной эквивалентности (4.15) кривых (3.16) и (4.17) решения, построенные в [5], [7], совпадают с (4.14). Поэтому мы не приводим здесь выражений через точки ветвления Γ и полные эллиптические интегралы для постоянных в решении (4.14). Для кривой (4.16) они получены в работе [5].

В связи с приведенными выше специальными решениями 1°—3° уравнения (0.7) отметим, что для их получения, помимо B-матрицы, необходимо было вычислить и «обмоточные векторы» U, V, которые выражаются через периоды голоморфных дифференциалов $du\in\mathscr{H}^1(\Gamma,\mathbb{Z})$. Непосредственная подстановка анзаца (4.1) в уравнение (0.7) приводит к следующему утверждению:

Предложение 4.4 [12]. *Параметры U, V, B решения (4.1) уравнения (0.7) удовлетворяют уравнениям*

$$(4.18)\qquad 4\sum_{i,\ j=1}^{g}(U_iU_j-V_iV_j)\,\vartheta_i[\varepsilon+\tilde\varepsilon]\,\vartheta_j[\varepsilon+\tilde\varepsilon]=\cos C\vartheta^2[\varepsilon],$$

где $C=0$ *или* π, $\tilde\varepsilon=[0;\ ^1/_2]\in{}^1/_2\mathbb{Z}^{2g}$, $\vartheta[\varepsilon]=\vartheta[\varepsilon](0\mid B)$, $\vartheta_i[\varepsilon]=(\partial/\partial z_i)\times$ $\times\ \vartheta[\varepsilon](z\mid B)\mid_{z=0}$ $(i=1,\ldots,g)$, *а характеристики* $[\varepsilon]$ *пробегают множество* $\mathscr{E}_g=\{[\varepsilon]\mid\sum\alpha_\nu={}^1/_2\,(\mathrm{mod}1),\ \sum\alpha_\nu\beta_\nu=0(\mathrm{mod}1)\}$, *число элементов которого* $|\mathscr{E}_g|=2^{2(g-1)}$.

Доказательство предложения 4.4 основано на использовании теоремы сложения для римановых тэта-функций. Отметим в связи с этим, что важные теоремы сложения для тэта-функций римановых поверхностей были недавно получены Дж. Феем [78] и эффективно использованы Д. Мамфордом [102] в теории интегрируемых нелинейных уравнений.

В случае рода $g=2$ при условии (4.6) из уравнений (4.18) и анзаца (4.1) можно вывести с помощью формул (2.10), (2.12) формулу (4.7) ([13], [12]).

Соотношения типа (4.18) связаны с решением важной проблемы Римана — Шоттки [108], состоящей в определении условий, которые выделяют среди римановых матриц матрицы периодов римановых поверхностей. (Современное изложение см. в [88], [79].) Согласно гипотезе С. П. Новикова [26], соотношения типа (4.18), записанные для уравнения Кадомцева — Петвиашвили, как раз и являются такими условиями. Доказательство гипотезы Новикова см. в работах [26], [64] [1]).

§ 5. Двухзонные потенциалы Ламе и связанная с ними редукция гиперэллиптических интегралов

Эволюция g-зонного потенциала Ламе $u_0(x)=g\,(g+1)\,\wp\,(x)$ в силу уравнения КдФ (0.1), как уже упоминалось во введении, описывается по формуле (0.5). При этом функции $x_j(t)$ $(j=1,\ldots,n=g(g+1)/2)$ эволюционируют под действием третьего потока F_3 интегрируемой системы частиц Калоджеро — Мозера [104],

$$(5.1)\qquad H=F_2=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}y_j^2-\sum_{i\neq j}\wp_{ij},\qquad \wp_{ij}=\wp\,(x_i-x_j),\qquad n=g\,(g+1)/2,$$

ограниченного на «локус» $\mathscr{L}_n$, т. е. на множество неподвижных точек второго потока F_2,

$$(5.2)\qquad \mathscr{L}_n=\{(x,\ y)\mid \mathrm{grad}\ F_2=0\}.$$

1) Гиперэллиптический случай рассмотрен в [56].

С другой стороны, потенциал u_0, будучи конечнозонным, выражается по формуле (0.2), в которой $t = 0$, а тэта-функция построена по гиперэллиптической кривой рода g с точками ветвления в краях зон $E_1, \ldots, E_{2g+1}$ [1]). При таком сопоставлении возникает вопрос, каким образом g-зонные потенциалы Ламе, которые являются порождающими в классе эллиптических конечнозонных потенциалов, выводятся из формулы (0.2)? Этот вопрос тривиален для рода $g = 1$ и, насколько известно авторам, не обсуждался в литературе для родов $g > 1$; его выяснение актуально как ввиду важности потенциалов Ламе для приложений, так и для построения их аналогов для отличных от КдФ интегрируемых нелинейных уравнений. В этом параграфе мы, следуя работе [40], рассмотрим случай рода $g = 2$.

Рассмотрим алгебраическую кривую $\Gamma_3 = (\alpha, \lambda)$,

$$\lambda^3 - 3\lambda\wp(\alpha) + \wp'(\alpha) = 0, \qquad \wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3, \tag{5.3}$$

трехлистно накрывающую тор $M_2 = (\wp, \wp')$: $\pi_2\colon \Gamma_3 \to M_2$. Кривая (5.3) представляет собой одну из введенных И. М. Кричевером алгебраических кривых [49] Γ_n,

$$\Gamma_n = \{(\alpha, \lambda) \mid \det \| L + \lambda E \| = 0, \quad E_{ij} = \delta_{ij},$$

$$L_{ij} = \frac{1}{2} y_i\delta_{ij} + (1 - \delta_{ij})\Phi_{ij}, \quad \Phi_{ij} = \Phi(x_i - x_j;\ \alpha),$$

$$\Phi(x;\ \alpha) = \sigma(x - \alpha)\exp[\zeta(\alpha)x]/\sigma(x)\sigma(\alpha)\},$$

коэффициенты которых $I_1, \ldots, I_n$ являются интегралами движения системы (5.1). Если величины $I_j(x, y)$ $(j = 1, \ldots, n)$ определены на локусе (5.2), то при $n = 3$ кривая Γ_n имеет вид (5.3).

Лемма 5.1. *Кривая Γ_3 бирационально эквивалентна гиперэллиптической кривой* (2.22) $\hat{\Gamma}_3$.

Доказательство. Число ветвления (1.16) накрытия π_2 равно двум, поэтому, по формуле Римана — Гурвица (1.17), род кривой Γ_3 $g = 2$. В окрестности бесконечно удаленных точек $P_j \in \Gamma_3$ $(j = 1, 2, 3)$ (расположенных над $\alpha = 0$) разложение $\lambda(\alpha)$ имеет соответственно вид

$$\lambda(\alpha) = -\frac{1}{\alpha} \pm \alpha\sqrt{\frac{g_2}{12}} + o(\alpha^3), \qquad \lambda(\alpha) = \frac{2}{\alpha} - \alpha^3\frac{g_2}{36} + o(\alpha^5).$$

Поэтому мероморфная функция второго порядка

$$z = 3(\lambda^2 - \wp(\alpha)) \tag{5.4}$$

устанавливает на Γ_3 каноническую гиперэллиптическую структуру (точка P_3 является точкой Вейерштрасса). Исключая из (5.3) и (5.4) λ, получаем

$$\wp = \frac{z^3 + 27g_3}{9(z^2 - 3g_2)}. \tag{5.5}$$

Нетрудно также получить и равенства

$$\lambda = \frac{2w}{3(z^2 - 3g_2)}, \qquad w = \frac{3}{2}\lambda[9(\lambda^2 - \wp)^2 - 3g_2],$$

из которых вместе с (5.4), (5.5) следует бирациональная эквивалентность кривых (2.22) и (5.3).

Замечание 5.1. Образы $z(\hat{P}_j)$ $(j = 1, \ldots, 6)$ точек ветвления $\hat{P}_j \in \hat{\Gamma}_3$, $z(\hat{P}_1) = \infty$, $z(\hat{P}_{2,3}) = \pm\sqrt{3g_2}$, $z(\hat{P}_{3+k}) = -3e_k$ $(k = 1, 2, 3)$ совпадают с краями зон 2-зонного потенциала Ламе $u_0(x) = 6\wp(x)$. Изоспектральная деформация $u_0(x)$,

$$u(x;\ x_1, x_2, x_3) = 2\sum_{j=1}^{3}\wp(x - x_j), \qquad (x_1, x_2, x_3) \in \mathscr{L}_3 \tag{5.6}$$

[1]) Выражения для E_j $(j = 1, \ldots, 2g + 1)$ при родах $g \geqslant 2$ можно найти в [83], [112].

определяет эллиптическое 2-зонное решение $u(x, t)$ уравнения КдФ (0.1) тогда и только тогда, когда динамика вектора $(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{L}_3$ индуцирована третьим потоком $3\mathrm{tr}L^3 - 24\mathrm{tr}L$, суженным на $\mathcal{L}_3$, т. е.

$$\dot{x}_j = 12\wp_{ik} \quad (i, j, k = 1, 2, 3, \quad i \neq j \neq k). \tag{5.7}$$

Обозначим через $\tau^{(2)}$ параметр Якоби тора M_2 и через $B = (B_{11}, B_{12}, B_{22})$ — 2×2-матрицу периодов (1.9) кривой $\hat{\Gamma}$; $u^{(2)}$: $M_2 \to J(M_2)$ и u: $\hat{\Gamma} \to J(\hat{\Gamma})$ — отображения Абеля (1.13) кривых M_2 и $\hat{\Gamma}$ в их якобианы (1.12) $J(M_2)$ и $J(\hat{\Gamma})$.

Следующая теорема описывает специальные свойства кривой $\hat{\Gamma}_3$ и отображения u: $\hat{\Gamma}_3 \to J(\hat{\Gamma}_3)$, благодаря которым построенное по Γ_3 решение (0.2) уравнения КдФ (0.1) в случае рода $g = 2$ имеет вид (5.6).

Теорема 5.1. *Диаграмма*

$$\begin{array}{ccccc}
M_2 & \xleftarrow{\pi_2} & \Gamma_3 \cong \hat{\Gamma}_3 & \xrightarrow{\pi_1} & M_1 \\
{\scriptstyle u^{(2)}}\downarrow & & {\scriptstyle u}\downarrow & & {\scriptstyle u^{(1)}}\downarrow \\
J(M_2) & \xleftarrow{\varphi_2} & J(\hat{\Gamma}_3) & \xrightarrow{\varphi_1} & J(M_1)
\end{array}$$

в которой накрытия π_2 *и* π_1 *над торами* $M_2 = (\wp, \wp')$, $M_1 = (\tilde{\wp}, \tilde{\wp}')$, *где* $\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3$, $\tilde{\wp}'^2 = 4\tilde{\wp}^3 - \tilde{g}_2\tilde{\wp} - \tilde{g}^3$, $\tilde{g}_2 = 4(3g_2^3 + 27g_3^2)/g_2^2$, $\tilde{g}_3 = 72(g_3g_2^3 - 3g_3^3)/g_2^3$ *описываются формулами*

$$(\wp, \wp') = \left(\frac{z^3+27g_3}{9(z^2-3g_2)}, \frac{2w}{27}\frac{z^3-9g_2z-54g_3}{(z^2-3g_2)^2}\right), \tag{5.8}$$

$$(\tilde{\wp}, \tilde{\wp}') = \left(\frac{4z^3-9g_2z+9g_3}{3g_2}, \sqrt{\frac{2}{27g_2^3}}\, w\,(4z^2-3g_2)\right), \tag{5.9}$$

является коммутативной.

Доказательство. Равенства (5.8) выведены при доказательстве леммы 5.1. Поскольку $\deg \pi_2 = 3$, то существует такой базис одномерных гомологий на $\hat{\Gamma}$, что матрица Римана приобретает вид (2.15), где $N = 3$, $a = \tau^{(1)}/3$, $b = -1/3\tau^{(2)}$, откуда следует, что $\hat{\Gamma}_3$ трехлистно накрывает также и (отличный от M_2) тор M_1. Для определения накрытия π_1: $\hat{\Gamma}_3 \to M_1$ рассмотрим отображение Абеля u: $\hat{\Gamma}_3 \to J(\Gamma_3)$. Так как каждый 2-зонный потенциал, построенный по кривой $\hat{\Gamma}_3$, имеет вид (5.6), то возникает взаимно однозначное соответствие между неспециальными дивизорами $(\mu) \in \hat{\Gamma}_3$ и траекториями третьего потока $x_j(t)$ системы (5.2) на локусе $\mathcal{L}_3$. Явное описание этого соответствия дается следующим соотношением:

$$\sum_{j=1}^{2} \int_{\infty}^{\mu_j} (du_1, du_2) = (8t, -2x_1(t)) + \int_{\infty}^{-3\wp_{23}} (du_1, du_2), \tag{5.10}$$

где $du_1 = dz/\sqrt{w}$, $du_2 = z\, dz/\sqrt{w}$, а частицы x_1, x_2, x_3 могут быть подвергнуты циклической перестановке. Учитывая независимость от времени левой части равенства (5.10), получаем

$$\int_{\infty}^{-3\wp_{23}} (du_1, du_2) = (8(t-t_0), -2(x_1(t)-x_1(t_0))). \tag{5.11}$$

Второе из равенств (5.11) удовлетворяется тождественно ввиду формулы (5.5).

Для анализа первого из равенств (5.11), следуя [65], выведем из уравнений (5.7) соотношения $\zeta^2 = 4\xi^3 - g_2\xi - g_3$, $\zeta^2 = 36\,(g_2^3 - 27\,(\zeta^2 + g_3)^2)$, где $\zeta = \wp'_{12} = \wp'_{31} = \wp'_{23}$, которые запишем в виде одного равенства

$$(5.12)\qquad 4\xi^3 - g_2\xi - \frac{1}{3}\,g_3 + \frac{1}{9}\,g_2\tilde{\wp}\,(6\sqrt{3g_2}t) = 0,$$

обозначив через $\tilde{\wp}$ $\wp$-функцию Вейерштрасса с инвариантами $\tilde{g}_2$ и $\tilde{g}_3$, определенными выше. Нетрудно убедиться, что $M_1 = (\tilde{\wp},\ \tilde{\wp}')$. Сравнивая (5.12) при $\xi = \wp_{23}$ с первым из равенств (5.11), приходим к формулам (5.9) для накрытия π_1.

Формула (5.12) позволяет описать якобиан $J(\hat{\Gamma}_3)$ как расслоенное пространство, базой и слоем которого являются M_2 и M_1, и определить тем самым отображения φ_1 и φ_2.

Отметим, что обсуждаемые нами накрытия — это в точности найденные Ш. Эрмитом накрытия в виде подстановок (2.20а), (2.21а), приводящих гиперэллиптические интегралы к эллиптическим интегралам ([84], с. 251).

Замечание 5.2. Формулы типа (5.8) можно вывести и для родов $g > 2$. Рассмотрим с этой целью уравнение Ламе

$$(5.13)\qquad \left(\frac{d^2}{dx^2} - g\,(g+1)\,\wp\,(x)\right)\Psi\,(x) = z\Psi\,(x).$$

Следуя Ш. Эрмиту, зададим анзац для решения Ψ уравнения (5.13) в виде [1])

$$(5.14)\qquad \Psi\,(x) = e^{\lambda x}\left\{a_0\Phi\,(x;\ \alpha) + \sum_{j=1}^{g-1} a_j \frac{\partial^j\Phi\,(x;\ \alpha)}{\partial x^j}\right\},$$

где функции $\lambda(\alpha)$, $a_i(\alpha)$ подлежат определению, а $\Phi(x;\ \alpha)$, как и выше, является решением (5.13) при $g = 1$. Используя разложения $\wp\,(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{g_2x^2}{20} + \frac{g_3x^4}{28} + \ldots$ и $\Phi(x;\ \alpha) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\wp\,(\alpha)x + \frac{1}{6}\wp'\,(\alpha)x^2 - \frac{1}{8}\wp^2\,(\alpha)x^3 + \frac{1}{40}g_2x^3 + \ldots$, получим после приравнивания в (5.13) главных частей полюсов $x^{-g-1}, \ldots, x^{-1}$ переопределенную систему уравнений для a_j ($j = 0, \ldots, g-1$). Из условий совместности такой системы можно вывести накрывающую $\Gamma_{g(g+1)/2} = (\lambda,\ \alpha)$, ее гиперэллиптическую реализацию $\hat{\Gamma}_{g(g+1)/2} = (z,\ w)$ и накрытие π_2: $\Gamma_{g(g+1)/2} \to M_2 = (\wp,\ \wp')$.

В частности, для рода $g = 3$ описанная система уравнений для a_0, a_1, a_2 имеет вид

$$(5.15)\qquad \begin{cases} a_1 = 2\lambda a_2, \quad 5a_0 - 2\lambda a_1 = (\lambda^2 - z)\,a_2, \\ 2\lambda a_0 - (6\wp\,(\alpha) - \lambda^2 + z)\,a_1 + 4\wp'\,(\alpha)\,a_2 = 0, \\ (z - \lambda - 6\wp\,(\alpha))\,a_0 + 4\wp'\,(\alpha)\,a_1 + (3g_2 - 9\wp^2\,(\alpha))\,a_2 = 0. \end{cases}$$

Условия совместности системы (5.15) таковы:

$$(5.16)\qquad \begin{aligned} &z = \frac{3}{5\lambda}\,(\lambda^3 - 3\wp\,(\alpha)\,\lambda + \wp'(\alpha)), \\ &5\lambda^4 + 6\lambda^2\,(5\wp\,(\alpha) - z) - 40\lambda\wp'\,(\alpha) - \\ &\qquad\qquad - 6\wp\,(\alpha)\,z + 45\wp^2\,(\alpha) + z^2 - 15g_2 = 0. \end{aligned}$$

[1]) Авторы благодарны И. М. Кричеверу, любезно указавшему им на такую возможность вывода формул типа (5.8).

Первое из уравнений (5.16) задает гиперэллиптическую структуру z на накрывающей $\Gamma_6 = (\lambda, \ \alpha)$. Непосредственным исключением находим из (5.16) явный вид кривых Γ_6 и $\hat{\Gamma}_6$:

$$4\lambda^6 - 60\wp(\alpha)\lambda^4 + 80\wp'(\alpha)\lambda^3 - (180\wp^2(\alpha) - 27g_2)\lambda^2 + \\ + 48\wp(\alpha)\wp'(\alpha)\lambda - 5\wp'^2(\alpha) = 0,$$

$$w^2 = z\prod_{j=1}^{3}(z^2 - 6e_jz + 45e_j^2 - 15g_2)$$

и накрытие $\pi_2\colon \hat{\Gamma}_6 = (z, \ w) \to M_2 = (\wp, \ \wp')$:

$$\wp = \frac{16z^6 + 360g_2z^4 + 8\cdot 15^3z^3 - 15^3g_2^2z^2 - 6\cdot 15^4g_2g_3z + 25\cdot 15^3(27g_3^2 - g_2^3)}{36z(4z^2 - 75g_2)^2},$$

$$\wp' = 2w\,\frac{-z(4z^2 + 75g_2) + 30\wp(\alpha)(4z^2 - 75g_2) - 15^3g_2}{9z(4z^2 - 75g_2)^2}.$$

Базисные голоморфные дифференциалы (1.5) на кривых M_2 и $\hat{\Gamma}_6$ связаны соотношением

$$du_0(M_2) = -3du_2(\hat{\Gamma}_6) + \frac{45}{4}g_2\,du_0(\hat{\Gamma}_6). \tag{5.17}$$

Обозначив, как и в формулах (2.20), (2.21), $a = 3g_2$, $b = -54g_3$, а также $x = \frac{2}{5}z$, $y = 6\wp$, запишем формулу (5.17) в том виде, в котором ее приводит Ш. Эрмит ([84], с. 399; см. также [91], с. 276)

$$\int\frac{dy}{\sqrt{y^3 - 3ay + b}} = 2\sqrt{3}\int\frac{5x^2 - a}{\sqrt{x\varphi(x)}}\,dx,$$

$$y(x) = \frac{\psi(x)}{12x(x^2 - a)^2}, \quad \psi(x) = \varphi(x) - 12x(x^2 - a)(10x^3 - 8ax - b),$$

$$\varphi(x) = 125x^6 - 210ax^4 - 22bx^3 + 93a^2x^2 + 18abx + b^2 - 4a^3.$$

Отметим, что аналоги накрытий типа (5.9) для родов $g > 2$, вообще говоря, не существуют.

§ 6. Об одном периодическом решении задачи С. В. Ковалевской

После открытия С. В. Ковалевской нового интегрируемого в абелевых функциях рода 2 случая движения тяжелого твердого тела с закрепленной точкой [43] выдвинулась проблема описания специальных классов решений этой задачи, в частности периодических и рациональных решений. В обширной монографической литературе, посвященной задаче С. В. Ковалевской (см. например, [2], [1], [41]) представлены случаи периодических движений гироскопа Ковалевской, которые возникают при вырождении определяющей решение римановой поверхности. Подробная классификация этих случаев содержится в работах Г. Г. Аппельрота [1] и А. Ф. Ипатова [41].

Очевидно, что, используя изложенную выше теорию редукции абелевых интегралов к эллиптическим интегралам, можно и в случае невырожденной римановой поверхности построить классы решений задачи Ковалевской в эллиптических функциях, которые соответствуют различным степеням $N = 2, 3, \ldots$ накрытия над эллиптической кривой. Эти специальные решения, насколько известно авторам, не обсуждались в литературе. В этом параграфе будет описано одно из таких решений, а именно эллиптическое решение, соответствующее $N = 3$.

Напомним, что уравнения Ковалевской в интегральной форме есть уравнения (5.17), в которых переменные μ называются переменными Ковалевской и обозначаются $\mu = s = (s_1, s_2)$. Точки $\zeta \in J(\Gamma)$ параметризованы так, что $\zeta = (c_0, -\sqrt{2}i(t-t_0))$, где t — время, c_0, t_0 — постоянные. Алгебраическая кривая, по которой строится решение задачи Ковалевской, определяется по формуле

$$w^2(z) = \varphi(z)(z-E_4)(z-E_5) = \prod_{j=1}^{5}(z-E_j), \tag{6.1}$$

$$E_4 = 3h-k, \quad E_5 = 3h+k,$$

$$\varphi(z) = \prod_{j=1}^{3}(z-E_j) = z^3-6hz^2+(9h^2-k^2+1)z-2l^2,$$

где h, l, k — значения соответственно интегралов энергии, момента импульсов и интеграла Ковалевской [43]. Как известно, движение гироскопа Ковалевской вещественно, если оно принадлежит одному из следующих типов ([1], [41]):

тип 1: $-\infty \leqslant s_2 \leqslant E_3 < E_2 < E_1 < E_4 \leqslant s_1 \leqslant E_5$;

тип 2: $-\infty \leqslant s_2 \leqslant E_3 < \min(E_2, E_4) < \max(E_2, E_4) < E_1 \leqslant s_1 \leqslant E_5$;

тип 3: $-\infty \leqslant s_2 \leqslant E_4 < E_3 < E_2 < E_1 \leqslant s_1 \leqslant E_5$;

$$\left.\begin{array}{l}\text{тип 4: } -\infty \leqslant s_2 \leqslant E_1 < E_4 \leqslant s_1 \leqslant E_5,\\ \text{тип 5: } -\infty \leqslant s_2 \leqslant E_4 < E_1 \leqslant s_1 \leqslant E_5\end{array}\right\} \bar{E}_2 = E_3 \neq E_2,$$

причем для параметров h, k, l выполняется неравенство

$$3h+k \geqslant 2l^2. \tag{6.2}$$

Далее мы ограничимся рассмотрением движений, принадлежащих типу 1. Справедливо следующее

Предложение 6.1. *Если* $k \geqslant 0$,

$$\begin{cases} h = \frac{5}{99}\left(7k+2\sqrt{4k^2+33}\right), \\ 2l^2 = \left(\frac{9}{5}h-k\right)\left(\frac{36}{25}h^2+\frac{12}{5}hk+1\right), \end{cases} \tag{6.3}$$

а начальные условия выбраны в виде $s_1(0) = E_5 = E_5(h, k, l)$, $s_2(0) = E_3 = E_3(h, k, l)$, *то движение гироскопа Ковалевской, действительно, периодично и описывается эллиптическими функциями по формуле*

$$s_{1,2}(t) = \frac{12}{5}h + \frac{1}{2}\left\{\sum_{j=1}^{3}\wp_j \pm \sqrt{9g_2+\sum_{j=1}^{3}\wp_j^2-10\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 3}\wp_i\wp_j}\right\}, \tag{6.4}$$

в которой $\wp_j = \wp\left(\frac{it}{\sqrt{2}}+\omega_j \mid \omega, \omega'\right)$, $\omega_1 = \omega$, $\omega_2 = \omega+\omega'$, $\omega_3 = \omega'$, *а периоды* 2ω *и* $2\omega'$ *определяются по эллиптической кривой* $w^2 = 4(\xi-e_1)\times(\xi-e_2)(\xi-e_3)$, *параметры которой следующим образом связаны с параметрами* h *и* k:

$$e_{1,2} = \frac{1}{2}\left(\frac{h}{5}-\frac{k}{3}\right) \pm \sqrt{\frac{hk}{5}}, \quad e_3 = \frac{k}{3}-\frac{h}{5}.$$

Доказательство основано на том, что при $k > 0$ и $E_4 > E_1 > E_2 > E_3$ при выполнении условий

$$\varphi\left(\frac{9h}{5}-k\right) = 0, \quad \frac{99}{50}h^2-\frac{7}{5}hk+\frac{1}{6}k^2-\frac{2}{3} = 0$$

можно преобразованием $z \to z' - \frac{12}{5}h$ совместить нули многочлена (6.1) с краями зон (5.2б) двухзонного потенциала Ламе. Эти условия совместны с условиями (6.2) при всех $k \geqslant 0$ и могут быть записаны в виде (6.3). Равенство (6.4) следует из (5.6), формул следов, приведенных в § 5, и условий вещественности для решений типа 1. Более подробное доказательство содержится в [59], [60].

Аналогичные решения в эллиптических функциях можно вывести и для других интегрируемых в абелевых функциях рода 2 классических задач механики (например, [103], [89]).

§ 7. Решения уравнения Ландау — Лифшица

До сих пор мы рассматривали специальные конечнозонные решения нелинейных уравнений, задаваемые симметричными кривыми. Вместе с тем для некоторых нелинейных уравнений рассматривавшаяся в первой главе теория редукции тэта-функций позволяет строить весь класс конечнозонных решений.

Как уже отмечалось, тэта-функции связаны с произвольным абелевым тором. Для подавляющего большинства нелинейных уравнений, интегрируемых в тэта-функциях, абелев тор является якобианом кривой, и только в самое последнее время появились примеры, в которых это не так. Мы имеем ввиду уравнения, линеаризующиеся на многообразии Прима $\mathrm{Prym}_T(\Gamma)$ кривой Γ по инволюции $T:\Gamma\to\Gamma$. К этому классу относятся некоторые механические системы: уравнения Эйлера на алгебрах $\mathrm{so}(N)$ ([62], [28], [82]), уравнения движения твердого тела в поле сил квадратичного потенциала [69] и др. Для этих систем известны формулы решений в тэта-функциях соответствующих римановых поверхностей Γ ([28], [69]). Эволюции по переменным исходного нелинейного уравнения и в этом случае отвечает равномерное движение по обмоткам якобиана $J(\Gamma)$, только это движение весьма специально — оно ограничено на соответствующий примиан $\mathrm{Prym}_T(\Gamma)$. Для получения окончательных формул в этих случаях следует разложить с помощью (3.11) исходную тэта-функцию якобиана $J(\Gamma)$ на тэта-функции якобиана $J(\Gamma/T)$ и примиана $\mathrm{Prym}_T(\Gamma)$. Нетрудно заметить, что зависимость от времени будет входить только в аргумент последней, а тэта-функции, отвечающие $J(\Gamma/T)$, являются в данной ситуации тэта-константами.

Другой важный пример — это уравнения, обладающие представлением нулевой кривизны с параметром на эллиптической кривой Γ_0. Таковыми являются рассматриваемое в этом параграфе уравнение Ландау — Лифшица в случае двухосной анизотропии [111], а также уравнение асимметричного кирального $O(3)$ поля [58] и связанные с этими уравнениями конечномерные классические системы [22]. Их конечнозонные решения, выражающиеся только через тэта-функции примиана $\mathrm{Prym}_T(\Gamma)$, где Γ двулистно накрывает $\Gamma_0 = \Gamma/T$, получены в работах [17], [18]. Следует отметить, что впервые утверждение о том, что конечнозонные решения уравнения Ландау — Лифшица выражаются в тэта-функциях многообразий Прима, сделано в работе [73].

Уравнение Ландау — Лифшица

$$(7.1)\qquad \begin{cases} S_t = S\times S_{xx} + S\times JS, & S=(S_1,\ S_2,\ S_3),\\ S_1^2+S_2^2+S_3^2=1, & J=\mathrm{diag}\,(J_1, J_2, J_3),\quad J_1\leqslant J_2\leqslant J_3\end{cases}$$

описывает динамику нелинейных волн намагниченности в магнетиках. Если две из величин J_i совпадают (что отвечает случаю одноосной анизотропии типа «оси легкого намагничивания» или типа «легкая плоскость») эллиптическая $L - A$ пара, построенная в работе [111], вырождается в рациональную. Формулы в тэта-функциях Римана для конечнозонных решений такого вырожденного случая были получены в [14]. В последующих работах [15] были выделены вещественные решения, а также при помощи техники редукции тэта-функций построены двухфазные решения (стоячие волны), выражающиеся через тэта-функции Якоби.

Приведем конструкцию конечнозонных решений уравнения (7.1) в случае двухосной анизотропии ($J_1 < J_2 < J_3$). Воспользуемся параметризацией, введенной в работе [111]. Обозначим $\rho = \frac{1}{2}\sqrt{J_3 - J_1}$, $k = \sqrt{J_2 - J_1}/\sqrt{J_3 - J_1}$, K — полный эллиптический интеграл модуля k, K' — дополнительного модуля k'.

Рассмотрим кривую Γ рода $n+1$, задаваемую равенством

$$(7.2)\qquad y^2 = \prod_{j=1}^{n}\left(z^2\left(u - \frac{p_j+q_j}{2}\right) - z^2\left(\frac{p_j-q_j}{2}\right)\right), \qquad z(u) = 1/\mathrm{sn}(u, k),$$

где $\mathrm{sn}(u, k)$ — эллиптическая функция Якоби модуля k [8]. Эта риманова поверхность двулистно накрывает тор Γ_0 со сторонами соответствующего параллелограмма периодов $2K$ и $2iK'$, причем точки p_j, q_j ($j = 1, \ldots, n$) являются точками ветвления накрытия $\pi\colon \Gamma \to \Gamma_0$. Для построения Γ возьмем два экземпляра тора Γ_0 и склеим их по разрезам $[p_1, q_1], \ldots, [p_n, q_n]$. Полученная поверхность в случае $n = 2$ вместе с каноническим базисом циклов на ней изображена на рис. 9. При этом части циклов, лежащие на «верхнем» торе, изображены сплошной линией, а на «нижнем»— пунктирной. Кривая (7.2) называется 1-гиперэллиптической и обладает нетривиальной инволюцией $T\colon \Gamma \to \Gamma$, меняющей листы. Отметим, что существуют четыре различные накрывающие Γ_0 римановы поверхности с одними и теми же точками ветвления накрытий (три другие получаются, например, заменами в (7.2) $p_1 \to p_1 + 2K$, $p_1 \to p_1 + 2iK'$, $p_1 \to p_1 + 2K + 2iK'$ и отличаются способом проведения разреза $[p_1, q_1]$). Этот факт связан с нетривиальностью группы $H_1(\Gamma_0, \mathbb{Z})$. Согласно § 3 канонический базис циклов $a_1, \ldots, a_n$, a_{n+1}, $b_1, \ldots, b_n$, b_{n+1} в $H_1(\Gamma, \mathbb{Z})$ можно выбрать так, что инволюция T действует на него следующим образом (см. рис. 9): $Ta_1 = a_{n+1}$, $Tb_1 = b_{n+1}$, $Ta_i = -a_i$, $Tb_i = -b_i$ ($i = 2, \ldots, n$). Обозначим через $du_1, \ldots, du_n$, du_{n+1} дуальные голоморфные дифференциалы. Определим дифференциалы dv_j

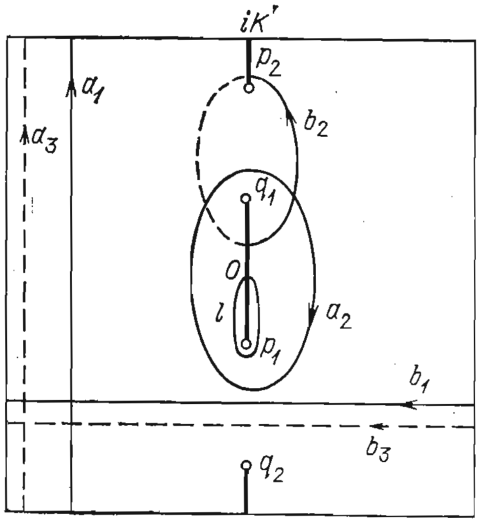

Рис. 9. Базис гомологий кривой (7.2) при $n = 2$

$$(7.3)\quad \begin{cases} dv_1 = \dfrac{1}{2}(du_1 - du_{n+1}), \\ dv_i = du_i \quad (i = 2, \ldots, n), \\ dv_j = \dfrac{1}{y(u)}\left\{\displaystyle\sum_{i=2}^{n}\left(c_{ij}z\left(u - \frac{p_j+q_j}{2}\right)z\left(u - \frac{p_1+q_1}{2}\right)\right) + c_j\right\} \\ \hfill (j = 1, \ldots, n). \end{cases}$$

Это дифференциалы Прима кривой Γ относительно инволюции T: $T^*dv = -dv$. Они не нормированы (см. § 3). Отметим, что в работе [17] дифференциалы dv определялись другим путем, а именно как нормированные дифференциалы Прима двулистного неразветвленного накрытия (см. [78]) $\hat\Gamma \to \Gamma$, где $\Gamma = \hat\Gamma/T$, $TP = P + 2iK'$, $P \in \hat\Gamma$. Матрица Прима определяется следующим образом:

$$(7.4)\qquad \Pi_{ij} = \int_{b_i} dv_j \quad (i, j = 1, \ldots, n)$$

и несколько отличается от матрицы (3.10). Тэта-функция многообразия Прима $\vartheta(z \mid \Pi)$ определяется обычным выражением (1.14).

Будем обозначать u^+ и $u^- = Tu^+$ точки соответственно на верхнем и нижнем листах Г такие, что $\pi u^+ = \pi u^- = u$. Рассмотрим нормированные интегралы Прима второго типа $w_P^{(i)}$

$$T^* dw_P^{(i)} = -dw_P^{(i)}, \qquad \int_{a_j} dw_P^{(i)} = 0, \qquad (j=1,\dots,n),$$

однозначно определяемые видом асимптотики в полюсах

$$w_P^{(1)} \to \mp i\rho u^{-1}, \quad w_P^{(2)} \to \pm 2i\rho^2 u^{-2} \qquad (u \to 0^\pm). \tag{7.5}$$

Векторы $U, V \in \mathbb{C}^n$ — их b-периоды

$$U_i = \int_{b_i} dw_P^{(1)}, \quad V_i = \int_{b_i} dw_P^{(2)} \qquad (i=1,\dots,n). \tag{7.6}$$

Теорема 7.1. *Конечнозонные (алгебро-геометрические) решения полностью анизотропного уравнения Ландау — Лифшица задаются следующими выражениями:*

$$\left\{\begin{aligned}
&S_1 = \frac{CD-AB}{AD-BC}, \quad S_2 = -i\frac{CD+AB}{AD-BC}, \quad S_3 = \frac{AD+BC}{AD-BC},\\
&A = \vartheta(\omega+\mathscr{D}\mid\Pi), \quad B = \vartheta(\omega+\mathscr{D}+r\mid\Pi), \quad C = \vartheta(\omega+\mathscr{D}+\Delta\mid\Pi),\\
&D = \vartheta(\omega+\mathscr{D}+r+\Delta\mid\Pi), \quad \omega = \frac{1}{2\pi i}(Ux+Vt),\\
&\Delta = \int_{a_1} d\nu = \left(\frac{1}{2}, 0, \dots, 0\right),\\
&d\nu = (d\nu_1, \dots, d\nu_n), \quad r = \int_l d\nu = \int_{0+}^{0-} d\nu, \quad \mathscr{D} \in \mathbb{C}^n.
\end{aligned}\right. \tag{7.7}$$

Здесь $\mathscr{D}$ — произвольный вектор, а проекция пути интегрирования l в интеграле r должна быть гомологична нулю в $H_1(\Gamma_0, \mathbb{Z})$.

Из выражений (7.7) следует, что при добавлении к ω вектора

$$\tilde\Omega_T \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1_{n-1} \end{pmatrix}, \Pi\right)\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}, \qquad m_1, m_2 \in \mathbb{Z}^n,$$

(1_{n-1} — единичная матрица размерности $(n-1)\times(n-1)$) сохраняются лишь квадраты S_α^2 и произведение $S_1S_2S_3$, сами же величины S_α могут менять знак. Решетка периодов для S_α в 4 раза реже. Она задается $n \times 2n$-матрицей

$$\Omega_T = \left(1_n, \Pi\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1_{n-1} \end{pmatrix}\right).$$

Нормализуя эту матрицу, заменив базис в $\mathbb{C}^n$, получаем

$$\Omega_T = \left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1_{n-1} \end{pmatrix}, \Pi_T\right), \tag{7.8}$$

где $\frac{1}{2}\Pi_T$ — нормированная матрица Прима, задаваемая равенством (3.10). Абелев тор, определяемый как фактор пространства $\mathbb{C}^n$ по решетке (7.8), есть многообразие Прима $\mathrm{Prym}_T(\Gamma) = \mathbb{C}^n/\Lambda_T$,

$$\Lambda_T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1_{n-1} \end{pmatrix} m_1 + \Pi_T m_2, \qquad m_{1,2} \in \mathbb{Z}^n$$

(см. [62], [82]).

Следствие 7.1. *Алгебро-геометрические решения уравнения Ландау — Лифшица отвечают условно-периодическому движению на многообразии* $\mathrm{Prym}_T(\Gamma)$.

Вещественные решения выделяются условиями двух типов на риманову поверхность Г:

1) $\mathrm{Im}\,p_k = \mathrm{Im}\,q_k = K'$,

2) $\bar{p}_k = q_k$

и некоторыми простыми ограничениями на $\mathscr{D}$ (см. [17]).

Как уже отмечалось выше, полностью анизотропное уравнение Ландау—Лифшица обладает рядом свойств, отличных от свойств других интегрируемых нелинейных уравнений. В работе [22] было замечено, что общее решение типа бегущей волны совпадает с решением классического случая Клебша интегрируемости движения твердого тела в идеальной жидкости, оно не является периодическим и выражается через двумерные тэта-функции (см. также [17], [18]). Однако теория редукции тэта-функций § 3 применима и для многообразий Прима. Рассмотрим простейший случай $n = 2$, когда центры зон $[p_1, q_1]$, $[p_2, q_2]$ римановой поверхности Г расположены в двух из четырех точек $0, K, iK', K+iK'$, например так, как изображено на рис. 9. Г обладает дополнительной инволюцией $\Lambda u = -u$. Вычислим матрицу П, отвечающую этой поверхности. В базисе циклов, указанном на рис. 9, инволюция Λ действует по правилу

$$\Lambda a_1 = -a_1,\quad \Lambda a_2 = a_2,\quad \Lambda b_1 = -b_1 - a_2,\quad \Lambda b_2 = b_2 + 2a_1. \tag{7.9}$$

Повторяя рассуждения, уже неоднократно использовавшиеся в этом обзоре, получаем

$$\Lambda^* dv_1 = -dv_1,\quad \Lambda^* dv_2 = dv_2,\quad \Lambda^* dw_P^{(1)} = dw_P^{(1)},\quad \Lambda^* dw_P^{(2)} = -dw_P^{(2)},$$

$$\Pi = \begin{pmatrix} \Pi_1 & 1/2 \\ 1/2 & \Pi_2 \end{pmatrix},\quad \omega = \begin{pmatrix} vt \\ ux \end{pmatrix},\quad r = \begin{pmatrix} s \\ 1/2 \end{pmatrix}. \tag{7.10}$$

Подставляя (7.10) в (7.7) и применяя соответствующие формулы редукции, получаем следующее решение уравнения Ландау — Лифшица в тэта-функциях Якоби:

$$\begin{aligned}
A &= \vartheta_3(z_1 \mid 4\Pi_1)\vartheta_3(z_2 \mid \Pi_2) + \vartheta_2(z_1 \mid 4\Pi_1)\vartheta_4(z_2 \mid \Pi_2),\\
B &= \vartheta_3(z_1 + 2s \mid 4\Pi_1)\vartheta_4(z_2 \mid \Pi_2) + \vartheta_2(z_1 + 2s \mid 4\Pi_1)\vartheta_3(z_2 \mid \Pi_2),\\
C &= \vartheta_3(z_1 \mid 4\Pi_1)\vartheta_3(z_2 \mid \Pi_2) - \vartheta_2(z_1 \mid 4\Pi_1)\vartheta_4(z_2 \mid \Pi_2),\\
D &= \vartheta_3(z_1 + 2s \mid 4\Pi_1)\vartheta_4(z_2 \mid \Pi_2) - \vartheta_2(z_1 + 2s \mid 4\Pi_1)\vartheta_3(z_2 \mid \Pi_2),\\
&\qquad z_1 = 2vt + d_1,\quad z_2 = ux + d_2.
\end{aligned}$$

Это двоякопериодическое и по x, и по t решение, аналогичное по своим свойствам решению (4.7) уравнения «sine-Gordon».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Аппельрот Г. Г. Простейшие случаи движения тяжелого несимметричного гироскопа С. В. Ковалевской.— Мат. сб., 1903, т. 27, № 4, с. 477—561.

[2] Архангельский Ю. А. Аналитическая динамика твердого тела.— М. Наука, 1977.

[3] Ахиезер Н. И. Континуальный аналог ортогональных многочленов на системе интервалов.— ДАН СССР, 1961, т. 141, № 2, с. 263—266.

[4] Ахиезер Н. И. К спектральной теории уравнения Ламе.— В кн.: Историко-математические исследования, вып. 23.—М.: Наука, 1978, с. 77—86.

[5] Бабич М. В. Эффективизация формул конечнозонного интегрирования уравнения «sine-Gordon» для одной кривой рода 3.— Функцион. анализ и его прил., 1985, т. 19, вып. 3.

[6] Бабич М. В., Бобенко А. И., Матвеев В. Б. Редукции многомерных тэта-функций и симметрии алгебраических кривых.— ДАН СССР, 1983, т. 272, № 1, с. 13—17.

[7] Бабич М. В., Бобенко А. И., Матвеев В. Б. Решении нелинейных уравнений, интегрируемых методом обратной задачи в тэта-функциях, и симметрия алгебраических кривых. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1985, т. 49, № 13, с. 511—529.

[8] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, т. 3.— М.: Наука, 1967.

[9] Белоколос Е. Д. Задача Пайерлса — Фрелиха и конечнозонные потенциалы. I, II.— ТМФ, 1980, т. 45, № 2, с. 268—275; т. 48, № 1, с. 60—69.

[10] Белоколос Е. Д., Петрина Д. Я. О связи методов аппроксиммирующего гамильтониана и конечнозонного интегрирования.— ТМФ, 1984, т. 58, № 1, с. 61—71.

[11] Белоколос Е. Д., Энольский В. З. О решениях в эллиптических функциях нелинейных уравнений в частных производных, интегрируемых методом обратной задачи теории рассеяния.— УМН, 1982, т. 37, вып. 4, с. 89.

[12] Белоколос Е. Д., Энольский В. З. Обобщенный анзац Лэмба.— ТМФ, 1982, т. 53, № 2, с. 271—282.

[13] Белоколос Е. Д., Энольский В. З. Классификация нелинейных волн в контакте Джозефсона.— Физика многочастичных систем, 1982, т. 2, с. 3—25.

[14] Бикбаев Р. Ф., Бобенко А. И., Итс А. Р. О конечнозонном интегрировании уравнения Ландау — Лифшица.— ДАН СССР, 1983, т. 272, № 6, с. 1293—1298.

[15] Бикбаев Р. Ф., Бобенко А. И., Итс А. Р. Уравнение Ландау — Лифшица. Теория точных решений. I, II.— Препринт ДонФТИ, 1984; ДонФТИ-84-6 (81), Донецк 1984; ДонФТИ-84-7 (82), Донецк, 1984.

[16] Бобенко А. И. О периодических конечнозонных решениях уравнения «sine-Gordon».— Функцион. анализ и его прил., 1984, т. 18, вып. 3, с. 74—75.

[17] Бобенко А. И. Вещественные алгебро-геометрические решения уравнения, Ландау — Лифшица в тэта-функции Прима.— Функцион. анализ и его прил. 1985, т. 19, вып. 1, с. 6—19.

[18] Бобенко А. И. Об интегрировании уравнений Эйлера на e (3) и so (4).— Функцион. анализ и его прил., 1986, т. 20, вып. 1.

[19] Бобенко А. И., Матвеев В. Б., Салль М. А. Нелокальные уравнения Кортевега — де Фриза и Кадомцева — Петвиашвили. II.— ДАН СССР, 1982, т. 265, № 6, с. 1357—1360.

[20] Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории колебаний.— М.: Наука, 1974.

[21] Бразовский С. А., Дзялошинский И. Е., Кричевер И. М. Точно решаемые дискретные модели Пайерлса.— ЖЭТФ, 1982, т. 83, № 1 (7), с. 389—415.

[22] Веселов А. П. Уравнение Ландау — Лифшица и интегрируемые системы классической механики.— ДАН СССР, 1983, т. 270, № 5, с. 1094—1097.

[23] Доброхотов С. Ю., Маслов В. П. Асимптотика решения смешанной задачи для нелинейного волнового уравнения.— УМН, 1979, т. 34, вып. 3, с. 225—226.

[24] Доброхотов С. Ю., Маслов В. П. Конечнозонные почти периодические решения в ВКБ-приближениях.— В кн.: Современные проблемы математики, т. 15. Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР.— М.: ВИНИТИ, 1980, с. 3—94.

[25] Дубровин Б. А. Периодическая задача Кортевега — де Фриза в классе конечнозонных потенциалов.— Функцион. анализ и его прил., 1975, т. 9, вып. 3, с. 41—52.

[26] Дубровин Б. А. Уравнение Кадомцева — Петвиашвили и соотношения между периодами голоморфных дифференциалов на римановых поверхностях.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1981, т. 45, № 5, с. 1015—1020.

[27] Дубровин Б. А. Тэта-функции и нелинейные уравнения.— УМН, 1981, т. 36, вып. 2, с. 11—80.

[28] Дубровин Б. А. Матричные конечнозонные операторы.— В кн.: Современные проблемы математики т. 23. Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР.— М.: ВИНИТИ, 1983, с. 33—78.

[29] Дубровин Б. А., Кричевер И. М., Новиков С. П. Уравнение Шрёдингера в магнитном поле и римановы поверхности.— ДАН СССР, 1976, т. 229, № 1, с. 15—19.

[30] Дубровин Б. А., Матвеев В. Б., Новиков С. П. Нелинейные уравнения типа Кортевега — де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия.— УМН, 1976, т. 31, вып. 1, с. 55—136.

[31] Дубровин Б. А., Натанзон С. М. Вещественные двухзонные решения уравнения «sine-Gordon»— Функцион. анализ и его прил., 1982, т. 16, вып. 1, с. 27—43.

[32] Дубровин Б. А., Новиков С. П. Периодический и условно периодический аналоги многосолитонных решений уравнения Кортевега — де Фриза.— ЖЭТФ, 1974, т. 67, № 6, с. 2131—2143.

[33] Дубровин Б. А., Новиков С. П. Алгебро-геометрические скобки Пуассона для вещественных конечнозонных решений уравнения «sine-Gordon» и нелинейного уравнения Шрёдингера.— ДАН СССР, 1982, т. 267, № 6, с. 1295—1300.

[34] Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П. Теория солитонов: метод обратной задачи/Под ред. С. П. Новикова.— М.: Наука, 1980, 320 с.

[35] Итс А. Р. Обращение гиперэллиптических интегралов и интегрирование нелинейных дифференциальных уравнений.— Вестн. ЛГУ, 1976, т. 7, с. 28—39.

[36] Итс А. Р., Матвеев В. Б. Операторы Хилла с конечным числом лакун и многосолитонные решения уравнения Кортевега — де Фриза.— ТМФ, 1975, т. 23, № 1, с. 51—67.

[37] Итс А. Р., Матвеев В. Б. Об операторах Хилла с конечным числом лакун.— Функцион. анализ и его прил., 1975, т. 9, вып. 1, с. 60—70.

[38] Итс А. Р., Матвеев В. Б. Об одном классе решений уравнения КдФ.— В кн.: Проблемы математической физики.— Л.: Изд-во, ЛГУ, 1976, вып. 8.

[39] Итс А. Р., Матвеев В. Б. Алгебро-геометрическое интегрирование уравнения МНШ, конечнозонные решения и их вырождения.— Зап. научн. сем. ЛОМИ, 1981, т. 101, с. 64—76.

[40] Итс А. Р., Энольский В. З. О динамике системы Калоджера — Мозера и редукции гиперэллиптических интегралов к эллиптическим интегралам.— Функцион. анализ и его прил., 1986, т. 20, вып. 1.

[41] Ипатов А. Ф. Движение гироскопа С. В. Ковалевской на границе области ультраэллиптичности.— Уч. зап. Петрозаводского ун-та, 1970, т. 28, № 2, с. 5—93.

[42] Ковалевская С. В. О приведении некоторого класса абелевых интегралов третьего ранга к эллиптическим интегралам. Научные работы.— М.: Изд-во АН СССР, 1948, с. 51—74.

[43] Ковалевская С. В. Задача о вращении твердого тела около неподвижной точки. Научные работы.— М.: Изд-во АН СССР, 1946, с. 153—220.

[44] Козел В. А., Котляров В. П. Почти периодические решения уравнения «sine-Gordon».— ДАН УССР, сер. А., 1976, т. 10, с. 878—881.

[45] Козел В. А., Котляров В. П. Конечнозонные решения уравнения «sine-Gordon».— В кн.: Дифференциальные уравнения и некоторые методы функционального анализа.— Киев: Наукова думка, 1978, с. 89—103.

[46] Кричевер И. М. Коммутирующие дифференциальные операторы и конечнозонные решения уравнения Кадомцева — Петвиашвили.— ДАН СССР, 1976, т. 227, № 2, с. 291—294.

[47] Кричевер И. М. Интегрирование нелинейных уравнений методами алгебраической геометрии.— Функцион. анализ и его прил., 1977, т. 11, вып. 1, с. 15—31.

[48] Кричевер И. М. Алгебраические кривые и нелинейные разностные уравнения.— УМН, 1978, т. 33, вып. 4, с. 215—216.

[49] Кричевер И. М. Эллиптические решения уравнения Кадомцева — Петвиашвили и интегрируемые системы частиц.— Функцион. анализ и его прил., 1980, т. 14, вып. 3, с. 45—54.

[50] Кричевер И. М. Модель Пайерлса.— Функцион. анализ и его прил., 1982, т. 16, вып. 4, с. 10—26.

[51] Марченко В. А. Периодическая задача Кортевега — де Фриза.— ДАН СССР, 1974, т. 217, № 2, с. 276—279.

[52] Марченко В. А. Периодическая задача Кортевега — де Фриза.— Мат. сб. 1974, т. 95, № 3, с. 331—356.

[53] Матвеев В. Б. Новая схема интегрирования уравнения Кортевега — де Фриза, Докл. на семинаре им. И. Г. Петровского 26 марта 1975 г.— УМН, 1975, т. 30, вып. 6, с. 201—203.

[54] Новиков С. П. Периодическая задача для уравнения Кортевега — де Фриза. I.— Функцион. анализ и его прил., 1974, т. 8, вып. 3, с. 54—66.

[55] Новиков С. П. Алгебро-топологический подход в проблемах вещественности. Вещественные переменные действия в теории конечнозонных решений уравнения «sine-Gordon».— В кн.: Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика.— Зап. научн. семин. ЛОМИ, 1984, т. 133, с. 177—196.

[56] Хорозов Е. И. Задача К. Неймана и уравнения, опеределяющие матрицы периодов гиперэллиптических римановых поверхностей.— Докл. Болг. АН, 1984, т. 37, № 3, с. 277—380.

[57] Чередник И. В. Об условиях вещественности, в конечнозонном интегрировании.— ДАН СССР, 1980, т. 225, № 5, с. 1104—1108.

[58] Чередник И. В. Об интегрируемости уравнений двумерного асимметричного кирального O (3)-поля и его квантового аналога.— Ядерная физика, 1981, т. 33, № 1, с. 278—282.

[59] Энольский В. З. О решениях в эллиптических функциях интегрируемых нелинейных уравнений, связанных с двухзонными потенциалами Ламе.— ДАН СССР, 1984, т. 278, № 2, с. 305—309.

[60] Энольский В. З. Редукция двухзонного решения уравнения Кортевега — де Фриза к эллиптическим функциям преобразованиями третьего порядка.— Препринт ИТФ, 1983, ИТФ-83-112Р, Киев, 1983.

[61] Accola R. D. M. Riemann surfaces, theta-functions and abelian automorphisms Groups.— Lect. Notes in Math., Berlin: Springer, 1975, v. 483.

[62] Adler M., van Moerbeke P. Linearization of Hamiltonian systems, Jacobi varieties and representation theory.— Adv. Math., 1980, v. 38, No. 3, p. 318—379.

[63] Albert A. A. A note on the Poincare theorem on impure Riemann matrices.— Ann. of Math., (2), 1935, v. 36, p. 151—156.

[64] Arbarello E., de Concini C. On a set of equations characterizing Riemann matrices.— Math. Ann., 1984 v. 120, № 1, p. 119—140.

[65] Airault H., McKean H., Moser J. Rational and elliptic solutions of the KdV equation and related many-body problem.— Comm. on Pure and Appl. Math., 1977, v. 30, p. 95—125.

[66] Appell P. Sur des cas de réduction de fonction ϑ de plusieurs variables à de fonctions ϑ d'un moindre nombre de variables.— Bull. de la Sos Math. de France, 1882, v. 10, p. 59—67.

[67] Baker H. Multiply periodic functions.— Cambridge, 1907.

[68] Belokolos E. D., Enol'skii V. Z. On the solutions in terms of elliptic functions of the nonlinear equations integrable within the inverse scattering method and reduction problem of hyperelliptic integrals.— Preprint ITP-82-36E. Kiev. 1982.

[69] Bogoyavlensky O. I. New integrable problem of classical mechanics.— Commun. Math. Phys., 1984, v. 94, p. 255—269.

[70] Byrd P. F., Friedman M. D. Handbook of elliptic integrals for engineers and scientists.— 2-nd ed.— Springer, 1971, p. 252—271.

[71] Costabile G., Parmentier R. D., Savo B., McLaughlin D. W., Scott A. C. Exact solutions of the sine-Gordon equation describing oscillations in a long (but finite) Josephson function.— Appl. Phys. Lett., 1978, v. 32, p. 587—589.

[72] Date E. Multi-soliton solutions of nonlinear equations of sine-Gordon type.— Preprint, 1980.

[73] Date E., Jimbo M., Kashiwara M., Miwa T. Landau — Lifshitz equation: solutions, quasi-periodic solutions and infinite dimensional Lie algebras.— Preprint RIMS, № 395, Kyoto: RIMS, 1982.

[74] Enol'skii V. Z. On the two gap Lame potentials and elliptic solutions of Kovalevskaja problem connected with them.— Phys. Lett., 1984, v. 100A, № 9, p. 463—466.

[75] Enol'skii V. Z. On the solution in elliptic functions of the integrable nonlinear equations.— Phys. Lett., 1983, v. 96A, № 7, c. 327—330.

[76] Ercolani N. M., Forest M. G. The geometry of real two-phase sine-Gordon wavetrains.— Comm. Math. Phis., 1985, v. 99, p. 1—49.

[77] Farkas H. M., Kra I. Riemann surfaces.— New York, Springer, 1980.

[78] Fay J. D. Theta-functions on Riemann surfaces.— Lect. Notes in Math, Springer, 1973, v. 352.

[79] Fay J. D. On the even-order vanishing of Jacobian theta-functions.— Duke Math J., 1984, v. 51, № 1, p. 109—132.

[80] Flashka H., Forest G., McLaughlin D. Multi-phase averaging and the inverse spectral solution of the Korteweg — de Vries equation.— Comm. on Pure and Appl. Math, 1980, v. 33, № 6, p. 739—784.

[81] Forest G., McLaughlin D. Spectral theory for the periodic sine-Gordon equation: a concrete view point.— J. Math. Phys., 1982, v. 23, № 7, p. 1248—1277.

[82] Haine L. Geodesic flow on SO (4) and Abelian surfaces.— Math. Ann., 1983, v. 263, p. 435—372.

[83] Halphen M. Mémoire sur la réduction des équations différentielles linéaires aux formes intégrables.— Mem. Acad. Sci. Inst. France, 1884, v. 28, № 1, p. 1—301.

[84] Hermite C. Oeuvres de Charles Hermite, t. III.— Paris: Gauthier-Villars, 1912.

[85] Horiuchi R. Normal coverings of hyperelliptic Riemann surfaces.— J. of Mat. of Kyoto Univ., 1979, v. 19, No. 3, p. 497—524.

[86] Igusa J. Theta-functions.— Grund. Math. Wiss., Springer, 1972, v. 194.

[87] Igusa J. Problems on Abelian functions at the time of Poincare and some present.— Bull. of the AMS, 1982, v. 6, № 2, p. 161—174.

[88] Igusa J. On the irreducibility of Schottky's divisor.— J. Fac. Sci. Tokyo, 1983, v. 28, p. 531—545.

[89] Ketter F. Ueber die Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit.— J. reine und angew. Math., 1892, v. 109, p. 51—81.

[90] Klein F. Gesammelte Mathematische Abhandlungen. Dritter Band.— Berlin, 1923.

[91] Königsberger L. Ueber die Reduction Hyperelliptischer Integrale auf elliptische.— J. reine und angew. Math., 1882, v. 85, № 4, p. 273—294.

[92] Königsberger L. Ueber die Transformation des zweiten Grades fur die Abel'sche Funktionen der ersten Ordnung.— J. reine und angew. Math., 1863, v. 67, № 1, p. 71—85.

[93] Krazer A. Lehrbuch der Thetafunktionen.— Leipzig: Teubner, 1903.

[94] Krazer A., Wirtinger W. Abelsche Funktionen und allgemeine Thetafunktionen.— In: Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, Band II (2), Heft 7.— Leipzig: Teubner, 1915, S. 603—873.

[95] Kuribayashi A., Komiya L. On Weierstrass points and automorphisms of curves of genus three.— Lect. Notes in Math., Springer, 1979, v. 732, p. 252—299.

[96] Lax P. D. Periodic solutions of Korteweg — de Vries equation.— Comm. Pure and Appl. Math., 1975, v. 28, p. 141—188.

[97] Lax P. D. Periodic solutions of KdV equation.— Lect. in Appl. Math., 1974, v. 15, p. 85—96.

[98] Macbeth A. M. On a curve of genus 7.— Proc. of the London Math. Soc., third ser., 1965, v. 25, № 3, p. 537—542.

[99] Matveev V. B. Abelian functions, an solitons.— Preprint № 373, Univ. of Wroclaw, 1976.

[100] Matveev V. B., Yavor M. I. Solutions presque périodique et N-solutions de l'équation hydrodynamique non linéaire de Kaup.-Ann. Inst. H. Poincare, Ser. A, 1979, v. 31, № 1, p. 25—41.

[101] Mikhailov A. V. The Landau — Lifshitz equation and the Riemann boundary problem on a torus.— Phys. Lett., 1982, v. 92A, № 2, p. 51—55.

[102] Mumford D. Tata lectures on theta, vol. I.— Birkhäuser, 1983, vol. II.— Birkhäuser, 1984.

[103] Neumann C. De problemate quadam mechanico, quod and primam integralium ultraellipticorum classem revacatur.— J. reine und angew. Math., 1859, v. 56, p. 46—63.

[104] Olshanetsky M. A., Perelomov A. M. Classical integrable finitedimensional systems related to Lie algebras.— Phys. Reports, 1981, v. 71, № 5, p. 313—400.

[105] Poincare H. Sur les fonctions abélinnes.— Amer. Math. J., 1886, v. 8, p. 239—342; Oeuvres, IV, p. 318—378.

[106] Poincare H. Sur la réduction des intégrales abélinnes.— Bull. Soc. Math. France, 1884, v. 12, p. 124—143; Oeuvres, III, p. 333—351.

[107] Poincare H. Sur l'intégration algèbrique des équation linéaires et les périodes des intégrales abéliennes.— J. de Math., ser. 5, 1903, v. 9, p. 139—212.

[108] Rauch H. E., Farkas H. M. Theta-functions with applications to Riemann surfaces.— Baltimore, Maryland, 1974.

[109] Rauch H. E., Lewittes J. The Riemann surfaces of Klein with 168 automorphisms.— Problem in Analysis, Princeton, 1970, p. 297—308.

[110] Sasaki R. Modular forms vanishing at the reducible points of the Siegel upper-half space.— J. reine und angew. Math., 1983, v. 345, p. 111—121.

[111] Sklyanin E. K. On complete integrability of the Landau — Lifshitz equation.— LOMI preprint, 1979, E-3-79, Leningrad, 1979.

[112] Strutt M.J.O. Lamesche — Matheiusche und Veraundte Funktionen in Physik und Technik.— Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Berlin: Springer, 1932, B. 1, № 3.

[113] Zagrodzinski J. Dispersion equations and a comparison of different quasi-periodic solutions of the sine-Gordon equation.—J. Phys. A, Math., 1982, v. 15, p. 3109—3118.

[114] Whitham G. B. Nonlinear dispersive waves.— Proc. Roy. Soc., 1965, v. 139, p. 283—291.

Институт теоретической физики АН УССР
Ленинградское отделение МИАН СССР,
Ленинградский государственный университет,
Институт металлофизики АН УССР

Поступила в редакцию
14 сентября 1984 г.