АКАДЕМИЯ НАУК УССР

ДОНЕЦКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Препринт

ДонФТИ-84-7(82)

Р.Ф.Бикбаев, А.И.Бобенко, А.Р.Итс

УРАВНЕНИЕ ЛАНДАУ-ЛИФШИЦА.
ТЕОРИЯ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ
(Часть II)

ДОНЕЦК

УДК 538.2I+5I7.9

Бикбаев Р.Ф., Бобенко А.И., Итс А.Р.

Уравнение Ландау-Лифшица. Теория точных решений.П.

Методом обратной задачи исследуется хорошо известное в теории ферромагнетизма уравнение Ландау-Лифшица. Построены все элементарные возбуждения солитонного типа. Изучено их взаимодействие. Получены также конечнозонные (в тэта-функциях) решения, среди них выделены вещественные.

Работа выполнена в Ленинградском государственном университете и Ленинградском отделении Математического института им.В.А.Стеклова АН СССР.

Препринт Донецкого физико-технического института АН УССР, Донецк, I984.

Bikbaev R.P., Bobenko A.I., Its A.R.

The Landau-Lifshitz equation. Theory of explicit solutions.II.

On the basis of the inverse scattering method the Landau-Lifshitz equation in the theory of ferromagnets is inverstigated. All soliton exitations are constructed and their intermediation is described in detail. The final formulas for the finite-gap solutions (the theta-function solutions) are obtained and real ones are isolated.

This work has been carried out in Leningrad State University and Leningrad Department Steklov Mathematical Institute.

Preprint of Donetsk Physico-Technical Institute of the Ukrainian Academy of Sciences, Donetsk, 1984.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЧАСТЬ I

ЧАСТЬ II

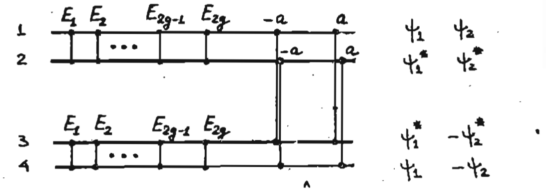


Рис.5. Поверхность $\hat{\Gamma}$.

Бейкера - Ахиезера, являясь (аналогично нашему случаю) ее двулистным накрытием, т.е. гиперэллиптической поверхностью.

$\Psi(\lambda)$ строится по векторной функции Бейкера - Ахиезера $\vec{\psi}(\lambda)=(\psi_1(\lambda),\psi_2(\lambda))$ по формуле

$$\Psi(\lambda)=\begin{pmatrix}\psi_1(\lambda) & \psi_1^*(\lambda)\\ \psi_2(\lambda) & \psi_2^*(\lambda)\end{pmatrix}, \qquad (6.4)$$

где $\psi_1(\lambda)$ и $\psi_2(\lambda)$ - однозначные функции на $\hat{\Gamma}$, $\psi^*(\lambda)=\psi(\lambda^*)$, $\lambda\to\lambda^*$ - инволюция $\hat{\Gamma}$, переставляющая листы I $\leftrightarrow$ 2 и 3 $\leftrightarrow$ 4. Такая структура Ψ-функции диктуется данными монодромии (6.3). Интересным является вопрос об удовлетворении редукции (6.2). Прежде всего определим инволюцию $\lambda\to\lambda^\tau$ поверхности $\hat{\Gamma}$ естественным перенесением с Γ как инволюцию, меняющую листы I $\leftrightarrow$ 3 и 2 $\leftrightarrow$ 4. В терминах ψ_1 и ψ_2 редукция (6.2) записывается следующим образом:

$$\psi_1(\lambda^\tau)=\psi_1(\lambda^*), \quad \psi_2(\lambda^\tau)=-\psi_2(\lambda^*). \qquad (6.5)$$

Для построения функций $\psi_1(\lambda)$ и $\psi_2(\lambda)$ рассмотрим вспомогательную гиперэллиптическую поверхность Γ_0 рода g, схематически изображенную на рис.6, и две функции на ней:

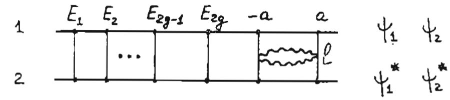


Рис.6. Поверхность Γ_0.

однозначную $\psi_1(\lambda)$, $\lambda\in\Gamma_0$ и функцию $\psi_2(\lambda)$, меняющую знак при пересечении замкнутого контура ℓ, проходящего через точки a и $-a$ (изображен на рис.6 волнистой линией):

$$\psi_2^+(\lambda)=-\psi_2^-(\lambda)\big|_{\lambda\in\ell}, \qquad (6.6)$$

где ψ_2^+ и ψ_2^- - соответственно на верхней и нижней границах контура. Построенные таким образом функции ψ_1 и ψ_2 легко определяются на поверхности $\hat{\Gamma}$ ($\hat{\Gamma}$ - естественная область аналитического продолжения $\psi_2(\lambda)$). Обозначим значения $\psi_1(\lambda)$ и $\psi_2(\lambda)$ на первом листе Γ_0 через ψ_1 и ψ_2, а на втором - через ψ_1^* и ψ_2^*. Определим $\psi_1(\lambda)$ и $\psi_2(\lambda)$ на первом листе $\hat{\Gamma}$ (см. рис.5) равными их значениями на первом листе Γ_0 (см. рис.6). Листы I и 2 поверхности $\hat{\Gamma}$ склеены по разрезам $[E_{2i-1},E_{2i}]$, поэтому, продолжая аналитически $\psi_1(\lambda)$ и $\hat{\psi}_2(\lambda)$ через эти разрезы, получим их значения на втором листе $\hat{\Gamma}$ равными ψ_1^* и ψ_2^*. Значения на 3-м листе $\hat{\Gamma}$ получаются при продолжении с I-го листа через разрез $[-a,a]=\ell$, на котором $\psi_2(\lambda)$ как функция на Γ_0 меняет знак (6.6), поэтому значения на 3-м листе $\hat{\Gamma}$ равны соответственно ψ_1^* и $-\psi_2^*$. Аналогично на 4-м листе $\hat{\Gamma}$ равны ψ_1 и $-\psi_2$.

Очевидно, что построенные таким образом на $\hat{\Gamma}$ функции $\psi_1(\lambda)$ и $\psi_2(\lambda)$ удовлетворяют редукции (6.5), и, следовательно, $\Psi(\lambda)$, определенная по ним выражением (6.4), - требуемой редукции (6.2).

Теорема 5. Пусть функции $\psi_1(\lambda)$ и $\psi_2(\lambda)$ как функции на Γ_0 обладают следующими свойствами:

I) $$\psi_1(\lambda,x,t)=(A+A_1\lambda^{-1}+\dots)\exp\{-ix\lambda+2it\lambda^2\},\ \lambda\to\infty^+,$$

$$\psi_1(\lambda,x,t)=(B+B_1\lambda^{-1}+\dots)\exp\{ix\lambda-2it\lambda^2\},\ \lambda\to\infty^-,$$

$$\psi_2(\lambda,x,t)=(C+C_1\lambda^{-1}+\dots)\exp\{-ix\lambda+2it\lambda^2\},\ \lambda\to\infty^+, \tag{6.7}$$

$$\psi_2(\lambda,x,t)=(D+D_1\lambda^{-1}+\dots)\exp\{ix\lambda-2it\lambda^2\},\ \lambda\to\infty^-,$$

где A, B, C, D – неизвестные функции x и t; ∞^+ и ∞^- – две бесконечноудаленные точки Γ_0 соответственно на верхнем и нижнем листе;

2) $\psi_1(\lambda)$ и $\psi_2(\lambda)$ мероморфны на $\Gamma\setminus\{\infty^\pm\}$ и имеют неспециальный дивизор полюсов $\mathcal{D}=\mu_1+\mu_2+\dots+\mu_g$.

3) $\psi_1(\lambda)$ однозначна на Γ_0, $\psi_2(\lambda)$ удовлетворяет соотношению (6.5);

4) $\psi_1(a)$ и $\psi_2(-a)$ не зависят от x, t.

Тогда функция $\Psi(\lambda)$, определенная на $\hat{\Gamma}$ по функциям $\psi_1(\lambda)$ и $\psi_2(\lambda)$ формулой (6.4) и процедурой, описанной выше, удовлетворяет обобщенной задаче Римана о данных $\Lambda=\Lambda_1\oplus\Lambda_2$ (см. (6.I)) и редукции (6.2), а ее первый коэффициент разложения (I.7) в окрестности бесконечноудаленной точки Φ_0 задается формулой (I.I4), где A, B, C, D определяются равенствами (6.7).

Доказательство этой теоремы несложно и мы его приводить не будем.

Итак, для построения конечнозонных решений уравнения (I.I) осталось конструктивно построить функции $\psi_1(\lambda)$ и $\psi_2(\lambda)$, $\lambda\in\Gamma_0$, удовлетворяющие условиям теоремы 5.

Определим на Γ_0 канонические объекты конечнозонного интегрирования (подробно этот материал изложен в обзорах [I6,20,35]). Канонический базис циклов a_i, b_i, $i=1,\dots,g$ выберем так, чтобы цикл $\sum a=a_1+a_2+\dots+a_g$ обходил вокруг разреза $[-a,a]$, т.е. совпадал с контуром ℓ. $dU_i(\lambda)$, $i=1,\dots,g$ – соответствующий нормированный базис абелевых дифференциалов (нормировка $\oint_{a_i} dU_j=\delta_{ij}$), B – матрица периодов Γ_0,

$$\theta[\alpha,\beta](z|B)=\sum_{m\in\mathbb{Z}^g}\exp\{\pi i\langle B(m+\alpha),m+\alpha\rangle+2\pi i\langle z+\beta,m+\alpha\rangle\} \tag{6.8}$$

– тета-функция Римана с характеристиками $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^g$, $\theta[0,0](z|B)\equiv\theta(z|B)$, $z\in\mathbb{C}^g$. Определим также два нормированных (нулевые a-периоды) абелевых интеграла второго рода $\Omega_1(\lambda)$ и $\Omega_2(\lambda)$ их асимптотиками на $\infty^\pm$:

$$\Omega_1(\lambda)\to\mp(\lambda+b+\dots),\ \Omega_2(\lambda)\to\pm(2\lambda^2+c+\dots),\ \lambda\to\infty^\pm. \tag{6.9}$$

$V, W\in\mathbb{C}^g$ – векторы их b-периодов.

Функции $\psi_1(\lambda)$ и $\psi_2(\lambda)$ задаются традиционными формулами

$$\psi_1=\frac{\theta(U(\lambda)+\Omega+\mathcal{D})}{\theta(U(\lambda)+\mathcal{D})\,\theta(U(a)+\Omega+\mathcal{D})}\exp\left[i\{(\Omega_1(\lambda)-\Omega_1(a))x+(\Omega_2(\lambda)-\Omega_2(a))t\}\right], \tag{6.10}$$

$$\psi_2=\frac{\theta[0,n](U(\lambda)+\Omega+\mathcal{D})}{\theta(U(\lambda)+\mathcal{D})\,\theta[0,n](U(-a)+\Omega+\mathcal{D})}\exp\left[i\{(\Omega_1(\lambda)-\Omega_1(-a))x+(\Omega_2(\lambda)-\Omega_2(-a))t\}\right],$$

где $n=\frac{1}{2}(1,1,\dots,1)$, $U(\lambda)=\left(\int_{P_0}^{\lambda}dU_1,\dots,\int_{P_0}^{\lambda}dU_g\right)$, $\Omega=\frac{1}{2\pi}(Vx+Wt)$, $\mathcal{D}\in\mathbb{C}^g$ – произвольный вектор общего положения, являющийся с точностью до вектора римановых констант отображением Абеля от дивизора $\mathcal{D}$. Нетрудно видеть, что функция $\psi_2(\lambda)$ неоднозначна: при обходе по циклам $b_1, b_2,\dots,b_g$, т.е. при пересечении контура ℓ она меняет знак, как и предписывается условиями теоремы 5. Функцию $\psi_2(\lambda)$ можно привести к более удобному виду, если учесть, что β – характеристика сводится лишь к сдвигу аргумента тэта-функции и, что $U(a)-U(-a)=n$, так как $dU(\lambda^*)=-dU(\lambda)$ и $\int_{\Sigma a} dU = 2n$:

$$\psi_2=\frac{\theta(U(\lambda)+\Omega+\mathcal{D}+n)}{\theta(U(\lambda)+\mathcal{D})\theta(U(a)+\Omega+\mathcal{D})}\exp\left[i\{(\Omega_1(\lambda)-\Omega_1(-a))x+(\Omega_2(\lambda)-\Omega_2(-a))t\}\right]. \quad (6.11)$$

Далее, если выбрать начальную точку интегрирования точкой ветвления Γ_0, то

$$\Omega_i(a)=\Omega_i(-a), \quad (6.12)$$

так как $\oint_{\Sigma a} d\Omega_i=0$, $d\Omega_i(\lambda^*)=-d\Omega_i(\lambda)$.

Таким образом, функция $\Psi(\lambda)$ построена. Величины A,B,C,D (6.7) задаются выражениями

$$A=\theta(U(\infty^+)+\Omega+\mathcal{D})\exp\left[i\{(-b-\Omega_1(a))x+(c-\Omega_2(a))t\}\right]/f(\infty^+),$$

$$B=\theta(U(\infty^+)+\tau+\Omega+\mathcal{D})\exp\left[i\{(b-\Omega_1(a))x+(-c-\Omega_2(a))t\}\right]/f(\infty^-);$$

$$C=\theta(U(\infty^+)+\Omega+\mathcal{D}+n)\exp\left[i\{(-b-\Omega_1(-a))x+(c-\Omega_2(-a))t\}\right]/f(\infty^+),$$

$$D=-\theta(U(\infty^+)+\Omega+\mathcal{D}+n+\tau)\exp\left[i\{(b-\Omega_1(-a))x+(-c-\Omega_2(-a))t\}\right]/f(\infty^-),$$

$$f(s)=\theta(U(s)+\mathcal{D})\theta(U(a)+\Omega+\mathcal{D}),$$

где $\tau=\int_{\infty^+}^{\infty^-}dU$ по пути на поверхности Γ_0, пересекающем контур ℓ; b, c определяются из (6.9). Поясним наличие знака минус в выражении для D. Дело в том, что если значение функции ψ_2 на первом листе $\hat{\Gamma}$ равно B, то D – это ее значение на втором листе $\hat{\Gamma}$ (см. (6.4)), добавление же в аргумент тэта-функции интеграла τ по пути, пересекающему контур ℓ, дает значение $\psi_2(\lambda)$ в бесконечно удаленной точке 3-го листа $\hat{\Gamma}$ (так как этот путь связывает листы I и 3, а не I и 2). Функция $\psi_2(\lambda)$ на листах 2 и 3 отличается

знаком.

Заметим, что выражения для спинов (I.15) инвариантны относительно преобразования $A\to\alpha A$, $B\to\beta B$, $C\to\alpha C$, $D\to\beta D$ (или, что то же, Ψ -функцию можно домножить справа на произвольную диагональную матрицу). Произведя соответствующее сокращение и учитывая равенство (6.12), получаем следующую теорему.

Теорема 6. Общие конечнозонные решения XXZ уравнения Л-Л (I.1) определяются формулами (I.15), где

$$A=\theta(\Omega+\mathcal{D}),\ B=\theta(\Omega+\mathcal{D}+\tau),\ C=\theta(\Omega+\mathcal{D}+n),$$
$$D=-\theta(\Omega+\mathcal{D}+\tau+n),\ n=\tfrac{1}{2}(1,1,\dots,1). \quad (6.13)$$

Здесь тэта-функция определяется римановой поверхностью Γ_0 $\omega^2=(\lambda^2-a^2)\prod_{i=1}^{2g}(\lambda-E_i)$, цикл $\Sigma a=a_1+a_2+\dots+a_g$ которой окружает разрез $[-a,a]$; $\tau=\int_{\infty^+}^{\infty^-}dU$, где путь интегрирования пересекает цикл Σa, $\mathcal{D}\in\mathbb{C}^g$, $\Omega=\frac{1}{2\pi}(Vx+Wt)$.

Замечание 6. Легко показать, что если канонический базис выбран так, что контур ℓ равен $\ell=\sum_{i=1}^{g}(\beta_i a_i+\alpha_i b_i)$; $\alpha_i,\beta_i\in\mathbb{Z}$, то

$$A=\theta(\Omega+\mathcal{D}),\quad B=\theta(\Omega+\mathcal{D}+\tau),\ \tau=\int_{\infty^+}^{\infty^-}dU,$$
$$C=\theta\left[\tfrac{\alpha}{2},\tfrac{\beta}{2}\right](\Omega+\mathcal{D}),\ D=-\theta\left[\tfrac{\alpha}{2},\tfrac{\beta}{2}\right](\Omega+\mathcal{D}+\tau), \quad (6.14)$$

где путь интегрирования пересекает контур ℓ.

Замечание 7. Мы видим, что формулы для решений зависят от выбора базиса циклов. Таким образом, может показаться, что решение определяется не только данными задачи Римана Λ (6.1), т.е. точками ветвления и дивизором полюсов ψ, но и зависит от выбора канонического базиса циклов на Γ_0. Приведем простое рассуждение, показывающее, что это не так. Действительно, хотя формальная реализация Ψ-функции и зависит от выбора базиса циклов, но очевидно, что Ψ -функция единственным образом строится по Λ (доказательство от противного: пусть Ψ и $\widetilde{\Psi}$ отвечают Λ, тогда

$$\Psi\widetilde{\Psi}^{-1} = \varphi(x,t)\begin{pmatrix}\gamma & 0\\ 0 & \gamma^{-1}\end{pmatrix}, \quad \gamma = \mathrm{const}$$

из голоморфности на $\overline{\mathbb{C}}$, нормировки (I.I2) и редукции (I.II). Такие функции мы не различаем (см. замечание 2 § I). Поэтому определяемое ею по формулам (I.I4), (I.I5) решение уравнения Л-Л также единственно.

Также простое рассуждение показывает, что определяемое гиперэллиптической поверхностью Γ_0 решение зависит только от точек ветвления Γ_0 и не зависит от способа проведения разрезов между ними.

В различных случаях нам будет удобно различным образом выбирать разрезы и базис циклов Γ_0 (см. §§ 7-I0). При этом будут описываться одни и те же решения уравнения Л-Л.

<u>Замечание 8</u>. Для подсчета вектора b-периодов Ω удобно воспользоваться следующим простым фактом (см., например, [I6]). Пусть z - локальная координата в окрестности точки $P_0 \in \Gamma$ ($z \to 0, P \to P_0$) и базисные голоморфные дифференциалы записываются в окрестности P_0 в виде $dU = f(z)\,dz$. Тогда нормированный абелев интеграл второго рода с единственной особенностью в точке P_0 вида $\Omega(P) \to z^{-n} + O(1)$, $z \to 0$ имеет вектор b-периодов, равный

$$\Omega = -\frac{2\pi i}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} f(z)\Big|_{z=0}. \tag{6.I5}$$

Для гиперэллиптической поверхности Γ, задаваемой уравнением $\omega^2 = \prod_{i=1}^{2g+2}(\lambda - E_i)$ с нормированным базисом $dU_i = \frac{1}{\omega} \times \sum_{j=1}^{g} c_{ij}\lambda^{g-j}$, $i=1,\dots,g$, получаем, что абелевы интегралы второго рода $\Omega_1(P), \Omega_2(P)$ с особенностями (6.9) имеют вектора b-периодов V и W, равные

$$V_k = -4\pi i c_{k,1}, \quad W_k = 8\pi i\Big(c_{k,2} + \frac{c_{k,1}}{2}\sum_{i=1}^{2g+2} E_i\Big), \quad k=1,\dots,g. \tag{6.I6}$$

§ 7. ВЫДЕЛЕНИЕ ВЕЩЕСТВЕННЫХ КОНЕЧНОЗОННЫХ РЕШЕНИЙ

Выделим из полученных в § 6 общих конечнозонных решений вещественные. Мы не будем приводить достаточно громоздкое строгое доказательство того, что выделены все вещественные решения, которое основано на требовании выполнения редукции (I.I7). Вместо этого применим технику, предложенную первоначально в работе [I7] для уравнения синус-Гордон и основанную на анализе только окончательных формул для решений в тэта-функциях Римана.

Отметим сначала простой алгебраический факт, который легко доказывается прямым вычислением.

<u>Лемма 3</u>. Формулы (I.I5) определяют вещественное решение уравнения (I.I) тогда и только тогда, когда выполняется соотношение

$$D\overline{C} = -B\overline{A}. \tag{7.I}$$

Ψ - функция, отвечающая вещественным решениям уравнения (I.I), обладает редукцией (I.I7), следовательно, кривая Γ_0 обладает антиинволюцией сопряжения. Из замечания 2 § I, теоремы 6 и леммы 3 следует второе ограничение на параметры решения, в этом случае уже и на вектор $\mathcal{D}$: величина

$$|\gamma|^4 = \frac{\theta(\Omega+\mathcal{D}+n+\tau)\,\overline{\theta(\Omega+\mathcal{D}+n)}}{\theta(\Omega+\mathcal{D}+\tau)\,\overline{\theta(\Omega+\mathcal{D})}} = \mathrm{const} > 0 \tag{7.2}$$

должна быть положительной константой, не зависящей от x и t.

Проведем подробный анализ двух этих ограничений сначала в случае анизотропии типа легкая плоскость $(\varepsilon < 0)$. Рассмотрим кривую $\Gamma_{ЛП}$, изображенную вместе с базисом циклов на рис.7. Пусть кроме пары точек ветвления a и $-a$ на вещественной оси находится еще $\mu+\nu$ пар точек ветвления, μ пар из которых лежат на отрезке $[-a, a]$, и $\Gamma_{ЛП}$ имеет еще $g-\mu-\nu$ пар сопряженных точек ветвления. Антиинволюция

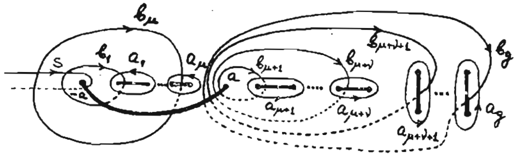


Рис.7. Базис циклов и контур S на римановой поверхности $\Gamma_{\text{АП}}$. Штриховыми линиями изображены части циклов, лежащие на нижнем листе римановой поверхности.

сопряжения $\tau(\lambda,\omega)=(\bar\lambda,\bar\omega)$, не меняющая листов $\Gamma_{\text{АП}}$, действует на эти циклы так:

$$a_i=\tau a_i,\ i=1,\dots,\mu;\ a_i=-\tau a_i,\ i=\mu+1,\dots,g;$$
$$b_i=-\tau b_i,\ i=1,\dots,\mu;\ b_i=\tau b_i,\ i=\mu+1,\dots,\mu+\nu,\ b_i=\tau b_i+\tau a_i,\ i=\mu+\nu+1,\dots,g, \tag{7.3}$$

(равенство в группе гомологий $H_1(\Gamma,\mathbb{Z})$), следовательно, нормированные голоморфные дифференциалы при действии τ преобразуются по закону

$$\tau^* dU_i(\lambda)=dU_i(\tau(\lambda))=dU_i(\bar\lambda)=\overline{dU_i(\lambda)},\ i=1,\dots,\mu,$$
$$\tau^* dU_i(\lambda)=dU_i(\tau(\lambda))=dU_i(\bar\lambda)=-\overline{dU_i(\lambda)},\ i=\mu+1,\dots,g, \tag{7.4}$$

поэтому матрица периодов имеет следующую структуру:

$$\operatorname{Re}B_{ij}=0,\ i,j=1,\dots,\mu;\ B_{ij}\in\mathbb{R},\ i=1,\dots,\mu,\ j=\mu+1,\dots,g;$$
$$\operatorname{Re}B_{ij}=0,\ i=\mu+1,\dots,\mu+\nu;\ j=\mu+1,\dots,g;$$

$$\operatorname{Re}B_{ij}=0,\ ij=\mu+\nu+1,\dots,g,\ i\neq j;\ \operatorname{Re}B_{ii}=-1/2.$$

Будем обозначать g-мерный вектор $z=\begin{pmatrix}z'\\z''\end{pmatrix}$, $z'\in\mathbb{C}^\mu$, $z''\in\mathbb{C}^{g-\mu}$, где z' – первые μ координат вектора z, а z'' – последние $g-\mu$ координат. Тэта-функция, определяемая такой B-матрицей, обладает симметрией

$$\overline{\theta(z)}=\overline{\theta\begin{pmatrix}z'\\z''\end{pmatrix}}=\theta\begin{pmatrix}-\bar z'\\ \bar z''+\lambda\end{pmatrix},\ \lambda=\tfrac12(0,\dots,0,1,\dots,1),\ \lambda\in\mathbb{R}^{g-\mu} \tag{7.5}$$

(нули на первых ν местах). Нетрудно также убедиться, что компоненты вектора $\Omega=\begin{pmatrix}\Omega'\\\Omega''\end{pmatrix}$, $\operatorname{Re}\Omega'=0$, $\Omega''\in\mathbb{R}$, а интеграл $\mathcal{T}$, вычисленный по пути S $(\tau S=S)$, указанному на рис.7,

$$\mathcal{T}=\begin{pmatrix}\mathcal{T}'\\\mathcal{T}''\end{pmatrix}=\int_S dU(\lambda)=\int_{\tau S=S} dU(\bar\lambda)=\begin{pmatrix}\bar{\mathcal{T}}'\\-\bar{\mathcal{T}}''\end{pmatrix},\quad \mathcal{T}'\in\mathbb{R},\ \operatorname{Re}\mathcal{T}''=0. \tag{7.6}$$

Пользуясь (7.5), перепишем условие (7.2) в виде

$$|\gamma|^4=\frac{\theta\begin{pmatrix}\Omega'+\mathcal{D}'+n'+\mathcal{T}'\\\Omega''+\mathcal{D}''+n''+\mathcal{T}''\end{pmatrix}\theta\begin{pmatrix}\Omega'-\bar{\mathcal{D}}'+n'\\\Omega''+\bar{\mathcal{D}}''+n''+\lambda\end{pmatrix}}{\theta\begin{pmatrix}\Omega'+\mathcal{D}'+\mathcal{T}'\\\Omega''+\mathcal{D}''+\mathcal{T}''\end{pmatrix}\theta\begin{pmatrix}\Omega'-\bar{\mathcal{D}}''\\\Omega''+\bar{\mathcal{D}}''+\lambda\end{pmatrix}}=\text{const}>0,$$
$$\mathcal{D}=\begin{pmatrix}\mathcal{D}'\\\mathcal{D}''\end{pmatrix},\ n=\begin{pmatrix}n'\\n''\end{pmatrix}. \tag{7.7}$$

Оно может быть выполнено, только если

$$\begin{pmatrix}\mathcal{D}'+n'+\mathcal{T}'\\\mathcal{D}''+n''+\mathcal{T}''\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\bar{\mathcal{D}}'\\\bar{\mathcal{D}}''+\lambda\end{pmatrix}+M+BN\qquad M,N\in\mathbb{Z}^g, \tag{7.8}$$

откуда следует $N=0$, $\nu=0$, $\lambda=n''$,

$$\mathcal{D}'=\mathcal{D}_0'-\tfrac12(\mathcal{T}'+n'+\delta),\ \delta\in\mathbb{Z}^\mu/2\mathbb{Z}^\mu,\ \operatorname{Re}\mathcal{D}_0'=0, \tag{7.9}$$

$$\mathcal{D}'' = \mathcal{D}_0'' - \frac{1}{2}\tau'', \quad \mathcal{D}_0'' \in \mathbb{R},$$

где векторы $\mathcal{D}_0'$ и $\mathcal{D}_0''$ - произвольны. В этом случае $|\gamma|^4 = 1$. Таким образом, поверхность $\Gamma_{\Lambda\Pi}$ описывается уравнением

$$\omega^2 = (\lambda^2 - a^2)\prod_{j=1}^{2\mu}(\lambda - e_j)\prod_{i=1}^{g-\mu}(-c_i + \lambda)(\lambda - \bar{c}_i), \ \mathrm{Im}\, c_i \neq 0, \tag{7.10}$$

$$e_j \in \mathbb{R}, \quad |e_j| < a.$$

При этом имеется 2^μ топологически различных компонент решений (которые не переходят друг в друга при динамике по динамическим переменным). Они отвечают 2^μ различным возможностям выбора вектора δ (7.9), состоящего из 0 и I.

Замечание 9. Используя теорему сложения для тета-функций (см., например, [I6])

$$\theta(z_1|B)\theta(z_2|B) = \sum_{2\alpha\in\mathbb{Z}^g/2\mathbb{Z}^g} \theta[\alpha,0](z_1+z_2|2B)\,\theta[\alpha,0](z_1-z_2|2B) \tag{7.11}$$

и формулы (I.I5), (6.I3), легко показать, что решения, определяемые векторами $\delta_1 \in \mathbb{Z}^g$ и $\delta_2 = 2n' - \delta_1$, отличаются только преобразованием $(S_1, S_2, S_3) \to (S_1, -S_2, -S_3)$, сводящимся к выбору осей координат. Мы не будем различать такие решения (хотя во внешнем поле (см.§2) они эволюционируют по-разному). Следовательно, в действительности число компонент вдвое меньше и равно $2^{\mu-1}$.

Аналогично рассматривается и случай легкой оси $(\varepsilon > 0)$. Соответствующая риманова поверхность $\Gamma_{\Lambda O}$ изображена на рис.8. У этой поверхности кроме точек $-a$ и a есть еще ν пар сопряженных точек и $g-\nu$ пар вещественных точек ветвления. Справедливы равенства

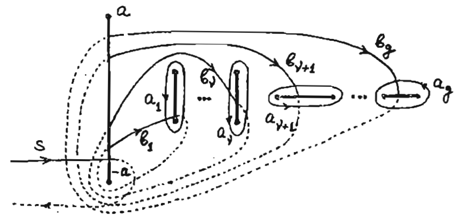


Рис.8

$$a_i = -\tau a_i, \qquad i = 1,\dots,g;$$
$$b_i = \tau b_i - \tau a_i + \sum_{k=1}^{g} \tau a_k, \quad i = 1,\dots,\nu;$$
$$b_i = \tau b_i + \sum_{k=1}^{g} \tau a_k, \quad i = \nu+1,\dots,g;$$

$$B = -\bar{B} + J; \ J_{ii} = 0, \ i \le \nu; \ J_{ii} = -1, \ i \ge \nu+1; \ J_{ij} = -1, \ i \ne j;$$

$$\overline{\theta(z)} = \theta(\bar{z} + \lambda), \ \lambda = \frac{1}{2}(0,0,\dots,0,1,\dots,1),$$

$$\tau_0 = -\bar{\tau}_0 - 2n, \ \mathrm{Re}\,\tau_0 = -n, \ \Omega \in \mathbb{R}^g, \ n = \frac{1}{2}(1,1,\dots,1),$$

где в формуле для λ нули стоят на ν первых местах, а τ_0 означает интеграл τ по пути S на рис.8. Так же, как и в случае легкой плоскости, условие (7.2) с необходимостью приводит к равенству

$$\mathcal{D} + n + \tau = \bar{\mathcal{D}} + \lambda + M + BN \qquad M, N \in \mathbb{Z}^g, \tag{7.12}$$

при этом

$$|\gamma|^4 = \exp\{2\pi i \langle N, n\rangle\}, \ \langle N, n\rangle = \sum_{i=1}^{g} N_i n_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{g} N_i. \tag{7.13}$$

Возможны два случая:

1) $\nu = g$, $\lambda = 0$, $N = 0$, следовательно, $|\gamma|^4 = 1$. $\mathcal{D}$ определяется равенством

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_0 - \frac{1}{2}\tau, \quad \mathcal{D}_0 \in \mathbb{R}; \tag{7.14}$$

2) $\nu < g$. Возьмем вещественную часть от равенства (7.12)

$$O = \lambda + M + \mathrm{Re}\, BN = \lambda + M + \tfrac{1}{2}\mathrm{Im} N \text{ или}$$

$$-M = \lambda - \langle N, n\rangle 2n + \frac{1}{2}LN, \tag{7.15}$$

где $L = \mathrm{diag}(1,\dots,1,0,\dots,0)$ (единицы на ν первых местах). В равенстве (7.15) слева стоит целый вектор, а справа $-(LN)_i = 0$, $\lambda_i = 1/2$, $i \geq \nu + 1$, следовательно, $\langle N, n\rangle$ – полуцелое, поэтому из выражения (7.13) получаем $|\gamma|^4 = -1$, и вещественных решений нет.

Таким образом, поверхность $\Gamma_{\lambda o}$, определяющая вещественные решения, задается уравнением

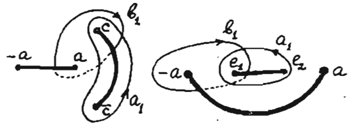
$$\omega^2 = (\lambda^2 - a^2)\prod_{i=1}^{g}(\lambda - c_i)(\lambda - \bar{c}_i), \quad \mathrm{Im}\, c_i \neq 0, \tag{7.16}$$

и доказана

Теорема 7. Для того чтобы конечнозонные решения XXZ уравнения Л-Л (1.1), определяемые в теореме 6, были вещественными, необходимо и достаточно, чтобы римановы поверхности $\Gamma_{\lambda n}$ и $\Gamma_{\lambda o}$ задавались соответственно уравнениями (7.10) и (7.16), вектор $\mathcal{D}$ – определялся соответственно условиями (7.9) и (7.14), $\tau = \int_S dU$, где пути интегрирования S при $\varepsilon < 0$ и $\varepsilon > 0$ изображены на рис. 7 и 8.

§ 8. ПРОСТЕЙШИЕ КОНЕЧНОЗОННЫЕ РЕШЕНИЯ В ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ

Простейшим невырожденным конечнозонным решением является решение в случае $g = 1$. Рассмотрим кривые $\Gamma_{\lambda n}$ (рис.9, а и б) и $\Gamma_{\lambda o}$ (рис.10).



а б

Рис.9

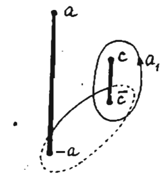
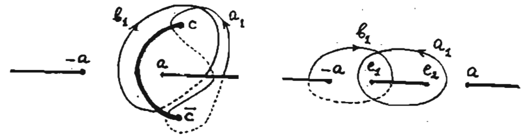


Рис.10

Как уже отмечалось в замечании 7 § 6, хотя формульные представления для конечнозонных решений уравнения Л-Л и зависят от выбора разрезов и базиса циклов Γ_0, сами решения определяются только точками ветвления Γ_0. В дальнейшем нам будет удобно пользоваться различными представлениями Γ_0. В этой связи отметим, например, что поверхности $\Gamma_{\lambda n}$ с базисами циклов, изображенные на рис.9а,б, эквивалентны поверхностям с базисами, изображенными соответственно на рис.11а,б.



а б

Рис.11

Во всех случаях имеется единственный голоморфный дифференциал

$$dU(\lambda) = N \frac{d\lambda}{\sqrt{(\lambda^2-a^2)(\lambda-E_1)(\lambda-E_2)}},$$

$(E_1, E_2) = (c, \bar{c})$ или (e_1, e_2). Постоянная N находится из условия нормировки $\oint_{a_1} dU = 1$. Период кривой Γ_0 равен $B = \oint_{b_1} dU$. Периоды V и W интегралов второго рода определяются равенствами (6.16), откуда $V = -4\pi i N$, $W = 4\pi i N(c+\bar{c})$. Интеграл $\tau = 2S_0$ вычисляется непосредственно. Таким образом, как обычно, решение $\vec{S}(x,t) = \vec{Q}_X(x-vt)$ рода $g=1$ имеет вид кноидальной волны – периодической бегущей волны. Для поверхностей, изображенных на рис.9 а и 10, получаем волну

$$\begin{aligned}
A &= \theta[0,0](2iN(-x+vt)+d-s_0|B),\\
B &= \theta[0,0](2iN(-x+vt)+d_0+s_0|B),\\
C &= \theta[0,\tfrac{1}{2}](2iN(-x+vt)+d-s_0|B),\\
D &= -\theta[0,\tfrac{1}{2}](2iN(-x+vt)+d+s_0|B),\quad d\in\mathbb{R},
\end{aligned} \tag{8.1}$$

скорость которой равна

$$v = c+\bar{c}, \tag{8.2}$$

а вещественный период по x

$$X = \frac{i}{2N}. \tag{8.3}$$

По поверхности $\Gamma_{АП}$ (рис.9, б) строятся решения $\vec{Q}^{+}_X(x-vt)$ и $\vec{Q}^{-}_X(x-vt)$, отвечающие различному выбору $\delta\in\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ в формуле (7.9). Из замечания 9 § 7 следует, что эти решения отличаются тривиальным преобразованием $(S_1,S_2,S_3)\to(S_1,-S_2,-S_3)$.

$\vec{Q}^{+}_X(x-v^{+})$ также задается выражениями (8.1), причем $d = d_0 + \frac{1}{4}$, где d_0 – произвольное мнимое число. Это кноидальная волна со скоростью

$$v = e_1+e_2 \tag{8.4}$$

и вещественным периодом

$$X = iB/N, \quad N\in\mathbb{R}. \tag{8.5}$$

Используя формулу (7.11), легко получить следующее представление для $\vec{Q}$:

$$\begin{aligned}
Q_1 &= \frac{\theta[0,0](z|2B)\,\theta[0,0](2s_0|2B)}{\theta[0,\frac{1}{2}](z|2B)\,\theta[0,\frac{1}{2}](2s_0|2B)} = \frac{\theta_3(z)\theta_3(2s_0)}{\theta_4(z)\theta_4(2s_0)},\\
Q_2 &= i\,\frac{\theta[\frac{1}{2},0](z|2B)\,\theta[\frac{1}{2},0](2s_0|2B)}{\theta[0,\frac{1}{2}](z|2B)\,\theta[0,\frac{1}{2}](2s_0|2B)} = i\,\frac{\theta_2(z)\theta_2(2s_0)}{\theta_4(z)\theta_4(2s_0)},\\
Q_3 &= \frac{\theta[\frac{1}{2},\frac{1}{2}](z|2B)\,\theta[\frac{1}{2},\frac{1}{2}](2s_0|2B)}{\theta[0,\frac{1}{2}](z|2B)\,\theta[0,\frac{1}{2}](2s_0|2B)} = \frac{\theta_1(z)\theta_1(2s_0)}{\theta_4(z)\theta_4(2s_0)},
\end{aligned} \tag{8.6}$$

$z = 4iN(-x+vt)+2d$, $\theta_1(z) = \theta[0,0](z)$, $\theta_2(z) = \theta[\frac{1}{2},0](z)$, $\theta_3(z) = \theta[0,0](z)$, $\theta_4(z) = \theta[0,\frac{1}{2}](z)$ – тэта-функции Якоби [5].

Отметим также, что решения $\vec{Q}_X(x-vt) = (Q_1,Q_2,Q_3)$ обладают свойством $\vec{Q}_X(x+\frac{X}{2}-vt) = (Q_1,-Q_2,-Q_3)$, а решения $\vec{Q}^{\pm}_X(x-vt)$ – свойством $\vec{Q}^{\pm}_X(x+\frac{X}{2}-vt) = (-Q^{\pm}_1,-Q^{\pm}_2,Q^{\pm}_3)$.

Решение $\vec{Q}_X(x-vt)$ построено по римановой поверхности, определяемой "свободными" краями зон c и $\bar{c}$ (соответственно $\vec{Q}^{\pm}_X(x-vt)$ – по краям зон e_1 и e_2). По кривой Γ_0 с краями зон $-c$ и $-\bar{c}$ строится решение, равное $\vec{Q}_X(-x-vt)$ (соответственно по $-e_1$ и $-e_2$ строится $\vec{Q}^{\pm}_X(-x-vt)$), описывающее точно такую же волну, движущуюся навстречу волне $\vec{Q}_X(x-vt)$. Если же $c=-\bar{c}$ $(e_1=-e_2)$, то, как видно из формул (8.2), (8.4), получаются стационарные периодические с периодами (8.3), (8.5) решения, которые обозначим $\vec{Q}_X(x)$, $\vec{Q}^{\pm}_X(x)$. Разумеется, решения типа (8.I), (8.6) легче найти прямой подстановкой выражения $\vec{S}(x-vt)$ в формулу (I.I). Однако заметим, что кроме решений (8.I), (8.6) мы нашли и соответствующие Ψ-функции, которые позволяют применить процедуру "одевания" (см. § 3), т.е. построить решения, описывающие взаимодействие кноидальных волн $\vec{Q}$ с солитонами, бризерами и доменными стенками.

Решение, строящееся по кривой Γ_0 рода $g=2$, есть двухфазное решение, описывающее взаимодействие двух кноидальных волн $\vec{Q}_{X_1}(x-v_1t)$ и $\vec{Q}_{X_2}(x-v_2t)$. В общем случае оно выражается в терминах двумерных тэта-функций Римана и довольно сложно поддается исследованию. Однако, как совсем недавно было выяснено, в некоторых случаях невырожденные (т.е. не сводящиеся к взаимодействию кноидальных волн и солитонов) многофазные решения также выражаются в эллиптических функциях [6,32]. В работах [3,6,7,I7,40] было предложено несколько различных способов выделения решений в эллиптических функциях и тэта-функциях меньшей размерности из общих конечнозонных. Так, Е.Д.Белоколос и В.З.Энольский [7] предложили схему, основанную на приведении абелевых интегралов к эллиптическим, а В.Б.Матвеев, М.В.Бабич и один из авторов [3] – схему, основанную на редукциях многомерных тэта-функций, отвечающих римановым поверхностям с богатыми группами автоморфизмов. Мы рассмотрим простейшие такие поверхности рода $g=2$ и $g=3$.

Кривые $\Gamma_{\Lambda\Pi}$ (рис.I2) и $\Gamma_{\Lambda O}$ (рис.I3)

$$\omega^2=(\lambda^2-a^2)(\lambda^2-c^2)(\lambda^2-\bar{c}^2) \qquad (8.7)$$

обладают инволюцией $\phi:(\lambda,\omega)\to(-\lambda,-\omega)$ *), т.е. Γ_0 являет-

*) Отметим, что ϕ не меняет листы Γ_0.

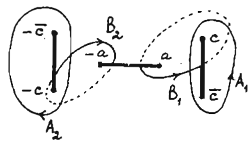


Рис.I2

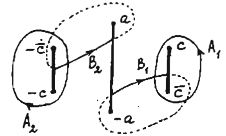


Рис.I3

ся накрытием кривой Γ_0/ϕ рода $g=1$. Это разветвленное двулистное накрытие. Общая схема редукции тэта-функций таких накрытий приведена в приложении. В обозначениях приложения $\Gamma_0=\hat{C}$, $C=\hat{C}/\phi$, C задается уравнением

$$\omega_1^2=z(z-a^2)(z-c^2)(z-\bar{c}^2), \qquad (8.8)$$

неподвижные точки ϕ – это $\lambda=\infty$ на обоих листах $(n=1)$. Циклы $A_1=a_1$, $B_1=b_1$, $A_2=a_{1'}$, $B_2=b_{1'}$. Нормированные голоморфные дифференциалы $\hat{C}$ равны

$$dU_1=u_1=\frac{-\alpha\lambda+\beta}{\omega}d\lambda, \quad dU_2=u_{1'}=\frac{-\alpha\lambda-\beta}{\omega}d\lambda.$$

Нормированный голоморфный дифференциал v кривой C (8.8) равен

$$v=u_1-u_{1'}=\frac{2\beta\,d\lambda}{\omega}=\frac{\beta\,dz}{\omega_1} \qquad (z=\lambda^2). \qquad (8.9)$$

Нормированный дифференциал Прима

$$w=u_1+u_{1'}=-\frac{2\alpha\lambda\,d\lambda}{\omega}=-\frac{\alpha\,dz}{\omega_2} \qquad (8.I0)$$

также эллиптический, он задан на кривой C_*, определяемой уравнением

$$\omega_2^2=(z-a^2)(z-c^2)(z-\bar{c}^2). \qquad (8.II)$$

Кривые $\mathcal{C}$ (рис. I4) и $\mathcal{C}_{\pi}$ (рис. I5) для случая легкой плоскости изображены вместе с базисом, отвечающим дифференциалам υ и W (для кривой $\Gamma_{\Lambda 0}$ рисунки совершенно аналогичны)

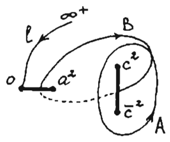


Рис. I4 $\mathcal{C}$

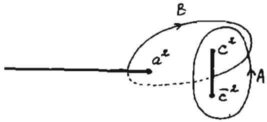


Рис. I5 $\mathcal{C}_{\pi}$

Константы α и β находятся из нормировки

$$\oint\limits_A \upsilon = 1 \ , \quad \oint\limits_A w = 1 \ , \tag{8.I2}$$

где интегрирование ведется по A -циклам соответственно поверхностей $\mathcal{C}$ (8.8) и $\mathcal{C}_{\pi}$ (8.II). Матрица периодов кривой $\hat{\mathcal{C}}$ равна (см. П.4)

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\Pi+T}{2} & \frac{\Pi-T}{2} \\ \frac{\Pi-T}{2} & \frac{\Pi+T}{2} \end{pmatrix}, \quad T = \oint\limits_B \upsilon \ , \quad \Pi = \oint\limits_B w \ . \tag{8.I3}$$

Определяемая ею тэта-функция представляется согласно (П.8) через одномерные тэта-функции

$$\Theta((z_1, z_2)|B) = \theta[0,0](z_1+z_2|2\Pi)\,\theta[0,0](z_1-z_2|2T) + \\ + \theta[\tfrac{1}{2},0](z_1+z_2|2\Pi)\,\theta[\tfrac{1}{2},0](z_1-z_2|2T) = \\ = \theta_3(z_1+z_2|2\Pi)\,\theta_3(z_1-z_2|2T) + \theta_2(z_1+z_2|2\Pi)\,\theta_2(z_1-z_2|2T) \ , \tag{8.I4}$$

где θ_3 и θ_2 - тэта-функции Якоби. V , W и τ_0 (см. теорему 6 § 6) также обладают определенной симметрией. Из тождества (6.I6) следует, что

$$V = 4\pi i \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \quad W = 8\pi i \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{8.I5}$$

Для интеграла τ_0 получаем

$$\tau_0 = \int\limits_S d\vec{U} = \int\limits_S {}^{u_1}_{u_{1'}} = \int\limits_{\varphi S} {}^{\varphi(u_1)}_{\varphi(u_{1'})} = -\int\limits_{\varphi S} {}^{u_{1'}}_{u_1} = -\int\limits_S {}^{u_{1'}}_{u_1} \ ,$$

откуда

$$\tau_0 = S_0 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \ , \quad S_0 = \int\limits_{\ell} w \ , \tag{8.I6}$$

где контур ℓ изображен на рис. I4. Подставляя (8.I4)-(8.I6) в (6.I3), получаем окончательное выражение для решения $\vec{S}(x,t) = \vec{Q}_{X,\tau}(x,t)$ (см. (I.I5))

$$\begin{aligned} A &= \theta_3(z_1|2\Pi)\theta_3(z_2-S_0|2T) + \theta_2(z_1|2\Pi)\theta_2(z_2-S_0|2\Pi), \\ B &= \theta_3(z_1|2\Pi)\theta_3(z_2+S_0|2T) + \theta_2(z_1|2\Pi)\theta_2(z_2+S_0|2\Pi), \\ C &= \theta_3(z_1|2\Pi)\theta_3(z_2-S_0|2T) - \theta_2(z_1|2\Pi)\theta_2(z_2-S_0|2\Pi), \\ D &= -\theta_3(z_1|2\Pi)\theta_3(z_2+S_0|2T) + \theta_2(z_1|2\Pi)\theta_2(z_2+S_0|2\Pi), \\ z_1 &= 4\alpha i x + d_1 , \quad z_2 = 8\beta i t + d_2 \ , \end{aligned} \tag{8.I7}$$

где $d_1, d_2 \in R$ - произвольные. При выводе этой формулы мы учли условие (7.9) $(\mu = 0)$ и то, что $h = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Величины α, β определяются из (8.9),(8.I0),(8.I2), где υ и W - дифференциалы кривых $\mathcal{C}$ (8.8) и $\mathcal{C}_{\pi}$ (8.II), периоды которых задаются равенством (8.I3), S_0 - интеграл (8.I6).

Решение $\vec{Q}_{X,\tau}(x,t)$ (8.I5) – это периодическая по x с периодом $X = \frac{1}{4di}$ и периодическая по t с периодом $\tau = \frac{1}{8\beta i}$ стоячая волна, которая описывает нетривиальное взаимодействие двух бегущих с одинаковыми скоростями навстречу друг другу волн $\vec{Q}(x-vt)$ $\vec{Q}(-x-vt)$ (см. (8.2)). Величины $A \pm C$ и $B \pm D$ представляют собой просто произведение двух функций, одна из которых зависит только от x, а другая – только от t. В этом смысле, решение (8.I7) является аналогом известного анзаца Лэмба (см. [32]) для уравнения Sine-Gordon.

Другое интересное решение в случае легкой плоскости отвечает $\Gamma_{\text{ЛП}}$ (см. рис. I6). Анализ проводится совершенно параллельно слу-

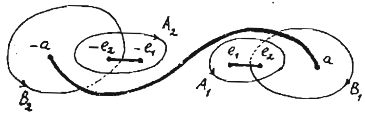


Рис. I6

чаю, разобранному выше. Окончательно получаем, что $2^{\mu} = 4$ стоячие волны, описывающие взаимодействие различных пар волн $\vec{Q}^{\pm}_{X}(x-vt)$ и $\vec{Q}^{\pm}_{X}(-x-vt)$ (4 комбинации), задаются выражениями (8.I7), где $z_1 = 4idx + d_1 + \frac{\delta_1}{2}$, $z_2 = 8i\beta t + d_2 + \frac{\delta_2}{2}$; $id_1, id_2 \in R$ – произвольные числа, δ_1 и δ_2 могут принимать значения 0 и I.

Из замечания 9 § 7 следует, что существенно отличными являются только 2 решения, отвечающие, например, следующему выбору δ: $\delta = (0,0)$, $\delta = (1,0)$, т.е. решения, описывающие взаимодействие Q^+ с Q^+ и Q^+ с Q^-; другие 2 стоячие волны отличаются от них тривиально.

Отметим также, что решению, описывающему взаимодействие стацио-

нарной волны $\vec{Q}(x)$ и кноидальной волны $\vec{Q}(x-vt)$, отвечает поверхность рода 2 $\omega^2 = (\lambda^2-a^2)(\lambda-c)(\lambda-\bar{c})(\lambda^2+d^2)$, $d \in R$, не обладающая дополнительной симметрией, поэтому данное взаимодействие сложнее и описывается двумерными тэта-функциями.

И, наконец, рассмотрим специальное решение рода $\hat{g}=3$, отвечающее поверхности $\hat{C}$

$$\omega^2 = (\lambda^2-a^2)(\lambda^2-c^2)(\lambda^2-\bar{c}^2)(\lambda^2+d^2), \; d \in R. \tag{8.I8}$$

Как видно из рис. I7 (в случае легкой оси все абсолютно аналогично), решение, отвечающее такой поверхности, описывает взаимодействие трех

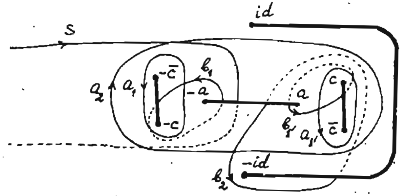


Рис. I7

волн: $\vec{Q}(x)$, $\vec{Q}(x-vt)$ и $\vec{Q}(-x-vt)$. Такая поверхность (8.I8) обладает инволюцией $\phi:(\lambda,\omega) \to (-\lambda,\omega)$, которая не переставляет бесконечноудаленные точки ∞^+ и ∞^- и действует на базис $H_1(\hat{C}, Z)$ (см. рис. I7) так, как это указано в приложении. Здесь $C = \hat{C}/\phi$, т.е. задается уравнением

$$\omega_1^2 = (z-a^2)(z-c^2)(z-\bar{c}^2)(z+d^2), \tag{8.I9}$$

$\hat{g}=3$, $g=1$, $n=2$, неподвижные точки 0 и ∞. Нормированный дифференциал C равен

$$\Upsilon = u_1 - u_{1'} = \frac{\alpha\lambda d\lambda}{\omega} = \frac{\alpha dz}{2\omega_1}, \quad z = \lambda^2,$$

нормированные дифференциалы Прима

$$W_1 = u_1 + u_{1'} = \frac{(\beta_1\lambda^2+\gamma_1)d\lambda}{\omega} = \frac{(\beta_1 z+\gamma_1)dz}{2\omega_2},$$

$$W_2 = u_2 = \frac{(\beta_2\lambda^2+\gamma_2)d\lambda}{\omega} = \frac{(\beta_2 z+\gamma_2)dz}{2\omega_2},$$

$$\omega_2^2 = z(z-a^2)(z-c^2)(z-\bar{c}^2)(z+d^2), \tag{8.20}$$

откуда из равенства (6.I6) следует, что векторы V и W равны

$$V = -2\pi i\begin{pmatrix}\beta_1\\ 2\beta_2\\ \beta_1\end{pmatrix}, \quad W = 4\pi i\begin{pmatrix}\alpha\\ 0\\ \alpha\end{pmatrix}. \tag{8.2I}$$

Для матрицы $\mathcal{B}$-периодов согласно (П.4) получаем

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix}\frac{\Pi_{11}+T}{2} & \Pi_{12} & \frac{\Pi_{11}-T}{2}\\ \Pi_{21} & 2\Pi_{22} & \Pi_{21}\\ \frac{\Pi_{11}-T}{2} & \Pi_{12} & \frac{\Pi_{11}+T}{2}\end{pmatrix}. \tag{8.22}$$

Выкладка, аналогичная (8.I6), показывает, что интеграл

$$\tau_0 = \int_S d\vec{U} = \int_S \begin{matrix}u_1\\ u_2\\ u_{1'}\end{matrix} = -\oint_S \begin{matrix}u_{1'}\\ u_2\\ u_1\end{matrix} = -\int_S \begin{matrix}u_{1'}\\ u_2\\ u_1\end{matrix} - \int_{-2b_2+a_2} \begin{matrix}u_{1'}\\ u_2\\ u_1\end{matrix}$$

(путь S указан на рис.I7) равен

$$\tau_0 = \begin{pmatrix}S_0\\ -\frac{1}{2}\\ S_0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\Pi_{12}\\ 2\Pi_{22}\\ \Pi_{12}\end{pmatrix}, \quad S_0 = \int_{\infty}^{0} \upsilon. \tag{8.23}$$

И окончательно, проводя необходимые вычисления (см.(П.8)), получаем, что при любых вещественных d_1, d_2, d_3 решение уравнения (I.I) по формулам (I.I5) определяется величинами

$$A = \theta[(0,\tfrac{1}{2}),(0,0)]\left(\begin{matrix}z_1\\ z_2\end{matrix}\Big|2\Pi\right)\theta[0,0](z_3-S_0|2T) + \theta[(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}),(0,0)]\left(\begin{matrix}z_1\\ z_2\end{matrix}\Big|2\Pi\right)\theta[\tfrac{1}{2},0](z_3-S_0|2T),$$

$$B = \theta[(0,\tfrac{1}{2}),(0,0)]\left(\begin{matrix}z_1\\ z_2\end{matrix}\Big|2\Pi\right)\theta[0,0](z_3+S_0|2T) + \theta[(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}),(0,0)]\left(\begin{matrix}z_1\\ z_2\end{matrix}\Big|2\Pi\right)\theta[\tfrac{1}{2},0](z_3+S_0|2T),$$

$$C = \theta[(0,\tfrac{1}{2}),(0,\tfrac{1}{2})]\left(\begin{matrix}z_1\\ z_2\end{matrix}\Big|2\Pi\right)\theta[0,0](z_3-S_0|2T) + \theta[(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}),(0,\tfrac{1}{2})]\left(\begin{matrix}z_1\\ z_2\end{matrix}\Big|2\Pi\right)\theta[\tfrac{1}{2},0](z_3-S_0|2T), \tag{8.24}$$

$$D = \theta[(0,\tfrac{1}{2}),(0,\tfrac{1}{2})]\left(\begin{matrix}z_1\\ z_2\end{matrix}\Big|2\Pi\right)\theta[0,0](z_3+S_0|2T) + \theta[(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}),(0,\tfrac{1}{2})]\left(\begin{matrix}z_1\\ z_2\end{matrix}\Big|2\Pi\right)\theta[\tfrac{1}{2},0](z_3+S_0|2T).$$

Здесь $z_1 = -2i\beta_1 x + d_1$, $z_2 = -2i\beta_2 x + d_2$, $z_3 = 4i\alpha t + d_3$. Это решение периодическое с периодом $\tau = \frac{1}{4i\alpha}$ по t и непериодическое сложнозависящее от x.

Аналогично, для любой кривой рода $\hat{g} = 2g+n-1$, обладающей инволюцией с неподвижными точками ∞^+ и ∞^-, динамика по x ограничена на прямая Π размерности $g+n-1$, а динамика по t – на якобиан T размерности g.

§ 9. N –СОЛИТОННЫЕ РЕШЕНИЯ В СЛУЧАЕ "ЛЕГКАЯ ПЛОСКОСТЬ"

Рассмотрим кривую $\Gamma_{A\Pi}$, изображенную вместе с базисом циклов на рис.I8 и подвергнем точки ветвления E_j, $j=1,\dots,2g$ следующему предельному переходу:

$$E_{2k-1}, E_{2k} \to \lambda_k \in (-a,a), \; k=1,\dots,g. \quad \lambda_1<\lambda_2<\dots<\lambda_g. \tag{9.I}$$

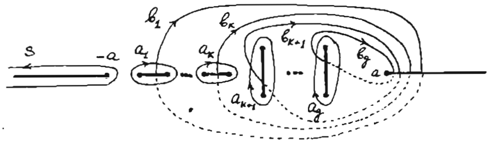


Рис. 18

Кривая $\Gamma_{\Lambda\Pi}$ вырождается при этом в кривую рода нуль – риманову поверхность функции $\sqrt{\lambda^2-a^2}$, а голоморфные дифференциалы $dU_\nu(\lambda)$ – в дифференциалы с особенностями в точках λ_k:

$$dU_\nu(\lambda) \to d\mathring{U}_\nu(\lambda) = \frac{\mathring{\varphi}_\nu(\lambda)}{\sqrt{\lambda^2-a^2}\prod_{k=1}^{g}(\lambda-\lambda_k)}\,d\lambda,$$

$$\mathring{\varphi}_\nu(\lambda) = \sum_{k=1}^{g}\mathring{c}_\nu^k\lambda^{g-k}.$$

Полиномы $\mathring{\varphi}_\nu(\lambda)$ определяются из условий нормировки

$$\delta_\mu^\nu = \int_{a_\mu} d\mathring{U}_\nu(\lambda) = -2\pi i\,\mathrm{res}\,(d\mathring{U}_\nu(\lambda);\lambda_\mu) =$$

$$= -\frac{2\pi i}{\sqrt{\lambda_\mu^2-a^2}}\,\mathring{\varphi}_\nu(\lambda_\mu)\Big/\prod_{k\neq\mu}(\lambda_\mu-\lambda_k)$$

и, следовательно, равны $\mathring{c}_\nu^1\prod_{k\neq\nu}(\lambda-\lambda_k)$, где

$$\mathring{c}_\nu^1 = \frac{i}{2\pi}\sqrt{\lambda_\nu^2-a^2} = -\frac{1}{2\pi}\varkappa_\nu\,,\quad \varkappa_\nu = \sqrt{a^2-\lambda_\nu^2} > 0. \tag{9.2}$$

Поэтому дифференциалы $d\mathring{U}_\nu(\lambda)$ можно записать в виде

$$d\mathring{U}_\nu(\lambda) = -\frac{1}{2\pi}\,\frac{\varkappa_\nu}{\sqrt{\lambda^2-a^2}\,(\lambda-\lambda_\nu)}\,d\lambda. \tag{9.3}$$

В силу (9.3) предельные значения для коэффициентов $\mathring{c}_\nu^2$ суть

$$\mathring{c}_\nu^2 = -\mathring{c}_\nu^1\sum_{k\neq\nu}\lambda_k = \frac{1}{2\pi}\varkappa_\nu\sum_{k\neq\nu}\lambda_k\,,\quad \nu=1,\dots,g.$$

Отсюда для компонент векторов V и W имеем

$$V_\nu \to \mathring{V}_\nu = -4\pi i\,\mathring{c}_\nu^1 = 2i\varkappa_\nu\,,$$

$$W_\nu \to \mathring{W}_\nu = 8\pi i\Big(\mathring{c}_\nu^1\sum_{k=1}^{g}\lambda_k + \mathring{c}_\nu^2\Big) = -4i\varkappa_\nu\lambda_\nu\,. \tag{9.4}$$

Приступим теперь к вычислению предельных значений для матрицы b-периодов базиса $d\mathring{U}$. Пусть $\nu>\mu$. Тогда

$$B_{\nu\mu} \to \mathring{B}_{\nu\mu} = 2\int_{\lambda_\nu}^{a} d\mathring{U}_\mu = -\frac{i}{\pi}\ln\frac{\gamma_\mu-\gamma_\nu}{\gamma_\mu+\gamma_\nu}\,, \tag{9.5}$$

где $\gamma_\nu = \sqrt{\dfrac{a-\lambda_\nu}{a+\lambda_\nu}} > 0$. В силу симметричности матрицы B при $\nu<\gamma$ для $\mathring{B}_{\nu\mu}$ из (9.5) следует, что

$$\mathring{B}_{\nu\mu} = -\frac{i}{\pi}\ln\frac{\gamma_\nu-\gamma_\mu}{\gamma_\nu+\gamma_\mu}\,. \tag{9.6}$$

Диагональные элементы матрицы B конечных пределов не имеют. Несложные выкладки показывают, что

$$\mathrm{Re}(iB_{\nu\nu}) = \frac{1}{\pi}\ln|E_{2\nu+1}-E_{2\nu}| + O(1),$$

т.е. при рассматриваемом предельном переходе

$$\mathrm{Re}(iB_{\nu\nu}) \to -\infty. \tag{9.7}$$

Нам осталось обсудить поведение векторов τ и $\mathcal{D}$. Для вектора τ имеем

$$\tau_\nu \to \frac{1}{2\pi i}\mathring{\tau}_\nu + 1\,,\quad \mathring{\tau}_\nu = -4\pi i\int_a^{\infty^+} dU_\nu(\lambda) = -2\ln\frac{i\gamma_\nu+1}{i\gamma_\nu-1}\,. \tag{9.8}$$

Заметим, что

$$\operatorname{Re}\mathring{\tau}_\nu = 0. \tag{9.9}$$

Что же касается вектора $\mathcal{D}$, то это – свободный параметр, и мы вправе задать его поведение при предельном переходе (9.I) по своему усмотрению. Положим, что

$$\mathcal{D}_\nu = \frac{1}{2}B_{\nu\nu} + \frac{1}{2\pi i}\mathring{\eta}_\nu + o(1), \tag{9.I0}$$

где $\mathring{\eta}_\nu$ – пока произвольные комплексные числа. На этом вычисление предельных значений всех входящих в формулы (6.I3) параметров заканчивается, и мы оказываемся в состоянии написать предельные выражения для соответствующих решений уравнения Л-Л.

Представим показатель экспоненты, входящей в определение ряда $\theta(\Omega+\mathcal{D}+\ell\tau+\kappa n)$ $(\ell=0,1;\ \kappa=0,1)$, в виде

$$\pi i\sum_{\nu=1}^{g} B_{\nu\nu}m_\nu(m_\nu+1) + 2\pi i\sum_{\nu>\mu} B_{\nu\mu}m_\nu m_\mu +$$

$$+\sum_{\nu=1}^{g} m_\nu\left(V_\nu x + W_\nu t + \mathring{\eta}_\nu + \ell\mathring{\tau}_\nu + \kappa\pi i + o(1)\right).$$

В силу (9.7), при предельном переходе (9.I), из всей бесконечной суммы, входящей в определение $\theta(\Omega+\mathcal{D}+\ell\tau+\kappa n)$, остаются только члены, отвечающие векторам m, принадлежащим множеству вершин $\{0,-1\}^g$ куба $[0,-1]^g$. Таким образом, учитывая формулы (9.4)–(9.8), мы приходим к выводу, что при предельном переходе (9.I), (9.I0) $\theta(\Omega+\mathcal{D}+\ell\tau+\kappa n)\to\theta^\ell_\kappa(x,t)$, где

$$\theta^\ell_\kappa(x,t) = \sum_{m\in\{0,-1\}^g}\exp\Big\{\sum_{\nu>\mu}\ln\left|\frac{\gamma_\nu-\gamma_\mu}{\gamma_\nu+\gamma_\mu}\right|^2 m_\nu m_\mu + \tag{9.II}$$

$$+\sum m_\nu\left(-2\varkappa_\nu x + 4\varkappa_\nu\lambda_\nu t + \mathring{\eta}_\nu + \ell\mathring{\tau}_\nu + \kappa\pi i\right)\Big\},$$

а получающиеся в результате рассматриваемого предельного перехода решения уравнения Л-Л описываются формулами

$$A = \theta^0_0(x,t),\ B = \theta^1_0(x,t),\ C = \theta^0_1(x,t),\ \mathcal{D} = -\theta^1_1(x,t). \tag{9.I2}$$

Последнее, что осталось выяснить, – это условия на вектор $\mathring{\eta}_\nu$, гарантирующие вещественность решения (9.I2). Так как все величины $\gamma_\nu,\ \varkappa_\nu,\ \lambda_\nu$ вещественны, а $\mathring{\tau}_\nu$ – чисто мнимо, то действие сопряжения на $\theta^\ell_\kappa(x,t)$ сводится лишь к замене в правой части (9.II) $\mathring{\eta}_\nu$ на $\bar{\mathring{\eta}}_\nu$ и $\mathring{\tau}_\nu$ на $-\mathring{\tau}_\nu$. Отсюда легко понять, что соотношение (7.I) эквивалентно в рассматриваемой ситуации требованию

$$\overline{\mathring{\eta}}_\nu - \mathring{\eta}_\nu = \pi i + \mathring{\tau}_\nu + 2\pi i z,\quad z = 0,-1. \tag{9.I3}$$

Итак, формулами (9.II), (9.I2) при условии (9.I3) описывается вещественное решение уравнения Л-Л, параметризуемое $2g$-вещественными параметрами $(\lambda_\nu, \operatorname{Re}\eta_\nu)^g_{\nu=1}$. При $g=1$ получается простой солитон, найденный ранее в § 4 с помощью метода "одевания":

$$\theta^\ell_\kappa = 1+\exp\{-2\varkappa x + 4\varkappa\lambda t - \mathring{\eta} - \ell\mathring{\tau} - \pi i\kappa\} \Rightarrow,$$

$$S_3(x,t) = \pm\frac{\sqrt{a^2-\lambda^2}}{a}\,\frac{1}{\operatorname{ch}(2\varkappa x - 4\varkappa\lambda t + \Delta)},$$

$$S_1(x,t) = -\operatorname{th}\left(2\sqrt{a^2-\lambda^2}\,(x-2\lambda t)+\Delta\right), \tag{9.I4}$$

$$S_2(x,t) = \mp\frac{\lambda}{a}\,\frac{1}{\operatorname{ch}\left(2\sqrt{a^2-\lambda^2}\,(x-2\lambda t)+\Delta\right)},$$

где $\Delta = -\operatorname{Re}\mathring{\eta}$, знак "+" в S_3 и "–" в S_2 соответствует выбору в (9.I3) $z=-1$. При $g>1$ формулы (9.II), (9.I2) описывают процесс взаимодействия g простых солитонов (9.I4) между собой. Простой стандартный анализ (см., например, [25]) суммы, стоящей в правой части равенства (9.II), при $t\to\pm\infty$ и $x-2\lambda_j t = \mathrm{const}$ показывает, что j-й солитон, имевший при $t\to-\infty$ скорость λ_j и фазу Δ^-_j, при $t\to+\infty$ имеет ту же скорость λ_j и фазу

$$\Delta^+_j = \Delta^-_j + 2\sum_{\nu=j+1}^{g}\ln\left|\frac{\gamma_j-\gamma_\nu}{\gamma_j+\gamma_\nu}\right| - 2\sum_{\nu=1}^{j-1}\ln\left|\frac{\gamma_j-\gamma_\nu}{\gamma_j+\gamma_\nu}\right|. \tag{9.I5}$$

§ 10. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПРОСТОГО СОЛИТОНА С КНОИДАЛЬНОЙ ВОЛНОЙ (СЛУЧАЙ "ЛЕГКОЙ ПЛОСКОСТИ")

Рассмотрим "частичное" вырождение кривой $\Gamma_{\Lambda\Pi}$ предыдущего параграфа, считая $g=2$:

$$E_1 \to E_2 \to \lambda_0 \in (-a, a)$$
$$E_3 = \bar{E}_4 \equiv c \,, \quad \operatorname{Im} c \neq 0 . \tag{10.1}$$

"Предельная" кривая изображена на рис. 19.

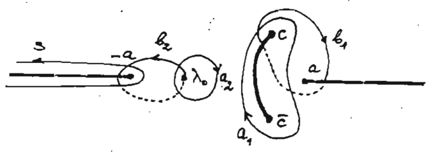


Рис. 19

В отличие от ситуации § 9 род предельной кривой уменьшился не до нуля. Из двух голоморфных дифференциалов один и в пределе остается голоморфным

$$dU_1(\lambda) \to d\overset{\circ}{U}_1(\lambda) = \frac{\overset{\circ}{c}{}^1_1 \, d\lambda}{\sqrt{(\lambda^2-a^2)(\lambda-c)(\lambda-\bar{c})}} \,,$$

$$dU_2(\lambda) \to d\overset{\circ}{U}_2(\lambda) = \frac{\overset{\circ}{c}{}^1_2 \lambda + \overset{\circ}{c}{}^2_2}{(\lambda-\lambda_0)\sqrt{(\lambda^2-a^2)(\lambda-c)(\lambda-\bar{c})}} \, d\lambda \,. \tag{10.2}$$

Условия нормировки в пределе принимают вид

$$\overset{\circ}{c}{}^1_1 = \left[\int_{a_1} \frac{d\lambda}{\sqrt{(\lambda^2-a^2)(\lambda-c)(\lambda-\bar{c})}} \right]^{-1}$$

$$\overset{\circ}{c}{}^1_2 \lambda_0 + \overset{\circ}{c}{}^2_2 = -\frac{1}{2\pi i} \sqrt{(\lambda_0^2 - a)(\lambda_0 - c)(\lambda_0 - \bar{c})} \,,$$

$$\int_{a_1} \frac{\overset{\circ}{c}{}^1_2 \lambda + \overset{\circ}{c}{}^2_2}{(\lambda-\lambda_0)\sqrt{(\lambda^2-a^2)(\lambda-c)(\lambda-\bar{c})}} \, d\lambda = 0 . \tag{10.3}$$

Отсюда для компонент векторов V и W получаем представления

$$V_1 = 4\pi i N \,, \qquad W_1 = -4\pi i N \upsilon \,,$$
$$V_2 = -2i \hat{\varkappa}_0 \,, \qquad W_2 = 4i \hat{\varkappa}_0 \hat{\lambda}_0 \,, \tag{10.4}$$

где

$$N = \overset{\circ}{c}{}^1_1 = \left[\int_{a_1} \frac{d\lambda}{\sqrt{(\lambda^2-a^2)(\lambda-c)(\lambda-\bar{c})}} \right]^{-1}, \quad \upsilon = c + \bar{c}, \quad \hat{\lambda}_0 = \lambda_0 + \frac{\upsilon}{2} + \Lambda_0 ,$$

$$\Lambda_0 = -\left(\int_{a_1} \frac{\lambda \, d\lambda}{(\lambda-\lambda_0)\sqrt{(\lambda^2-a^2)(\lambda-c)(\lambda-\bar{c})}} \right) \Big/ \left(\int_{a_1} \frac{d\lambda}{(\lambda-\lambda_0)\sqrt{(\lambda^2-a^2)(\lambda-c)(\lambda-\bar{c})}} \right),$$

$$\hat{\varkappa}_0 = -2\pi \overset{\circ}{c}{}^1_2 = 2\pi \, \frac{\frac{1}{2\pi i}\sqrt{(\lambda_0^2-a^2)(\lambda_0-c)(\lambda_0-\bar{c})}}{\lambda_0 + \Lambda_0} .$$

Вектор τ и элементы B_{1j} матрицы $\mathcal{b}$-периодов также в пределе выразятся через эллиптические интегралы

$$\tau \to \overset{\circ}{\tau} = \int_S d\overset{\circ}{U}(\lambda) \,, \quad \overset{\circ}{B}_{1j} = \int_{b_1} d\overset{\circ}{U}_j(\lambda) \,, \; j = 1,2 .$$

В отличие от ситуации § 9 только элемент B_{22} матрицы $\mathcal{b}$-периодов стремится к $i\infty$. Поэтому условие типа (9.10) естественно наложить на вторую компоненту вектора $\mathcal{D}$, оставляя первую ограниченной

$$\mathcal{D}_1 \equiv d^\circ , \quad \mathcal{D}_2 = \frac{1}{2\pi i} \overset{\circ}{\eta} + \frac{1}{2} B_{22} + o(1) \,, \quad d^\circ, \overset{\circ}{\eta} \in \mathbb{C} . \tag{10.5}$$

В результате исходное суммирование в тэта-ряде $\theta(\Omega+\mathcal{D}+\ell\tau+kn)$ по $m\in\mathbb{Z}^2$ при рассматриваемом предельном переходе заменится на суммирование по $m\in\mathbb{Z}\times\{0,-1\}$, и для $\theta_k^{\ell}(x,t)=\lim\theta(\Omega+\mathcal{D}+\ell\tau+m)$ получится формула

$$\theta_k^{\ell}(x,t)=\theta_3(2iN(x-vt)+\overset{\circ}{d}+\ell\overset{\circ}{\tau}_1+\tfrac{k}{2}\,|\,\overset{\circ}{B}_{11})+$$
$$+\theta_3(2iN(x-vt)+\overset{\circ}{d}+\ell\overset{\circ}{\tau}_1+\tfrac{k}{2}-\overset{\circ}{B}_{12}\,|\,\overset{\circ}{B}_{11})\exp\{-2\hat{\varkappa}_0(x-2\hat{\lambda}_0t)-$$
$$-\overset{\circ}{\eta}-2\pi i\ell\overset{\circ}{\tau}_2-k\pi i\}. \qquad (10.6)$$

Обсудим теперь вопрос вещественности. Антиинволюция сопряжения τ в рассматриваемой нами реализации кривой $\Gamma_{\Lambda\Pi}$ меняет листы и действует на циклы a_ν и b_1 следующим образом:
$\tau a_\nu=a_\nu$, $\nu=1,2$; $\tau b_1=-b_1+a_1$. Рассуждая так же, как и в § 7, приходим отсюда к заключению о вещественности всех $\overset{\circ}{c}{}^j_\nu$ и, следовательно, вещественности величин N, v, $\hat{\varkappa}_0$, $\hat{\lambda}_0$. Что касается матрицы b-периодов и вектора τ, то для них имеем

$$\overline{\overset{\circ}{B}_{11}}=-\overset{\circ}{B}_{11}+1,\quad \overline{\overset{\circ}{B}_{12}}=-\overset{\circ}{B}_{12},$$
$$\overline{\tau}_\nu=\tau_\nu,\ \nu=1,2. \qquad (10.7)$$

Таким образом, рассматривая $\overline{C}=\overline{\theta_1^{0}(x,t)}$, получаем

$$\overline{C}=\theta_3(2iN(x-vt)-\overline{\overset{\circ}{d}}\,|\,\overset{\circ}{B}_{11})+\theta_3(2iN(x-vt)-\overline{\overset{\circ}{d}}-\overset{\circ}{B}_{12}\,|\,\overset{\circ}{B}_{11})\times$$
$$\times\exp\{-2\hat{\varkappa}_0(x-2\hat{\lambda}_0t)-\overline{\overset{\circ}{\eta}}+\pi i\}.$$

Полагая

$$-\overline{\overset{\circ}{d}}=\overset{\circ}{d}+\overset{\circ}{\tau}_1,$$
$$-\overline{\overset{\circ}{\eta}}=-\overset{\circ}{\eta}-2\pi i\overset{\circ}{\tau}_2-\pi i, \qquad (10.8)$$

мы, как легко видеть, достигаем равенства $\overline{C}=B$. Нетрудно проверить, что соотношения (10.8) гарантируют также и выполнение равенства $\overline{A}=-D$, т.е. вещественность соответствующего решения уравнения Л-Л.

Подведем итог. Положим

$$\overset{\circ}{d}=id-\tfrac{1}{2}\overset{\circ}{\tau}_1\equiv id-s,$$
$$\overset{\circ}{\eta}=\Delta-i\pi\overset{\circ}{\tau}_2-\frac{i\pi}{2},\quad \overset{\circ}{B}_{11}=B,$$

где Δ, d – произвольные вещественные числа, а $s=\frac{\overset{\circ}{\tau}_1}{2}$. Тогда формулами

$$A=\theta_0^{0}(x,t),\ B=\theta_0^{1}(x,t),\ C=\theta_1^{0}(x,t),\ D=-\theta_1^{1}(x,t),$$
$$\theta_k^{\ell}(x,t)=\theta_3(2iN(x-vt)+id-s+2\ell s+\tfrac{k}{2}\,|\,B)+$$
$$+\theta_3(2iN(x-vt)+id-s+2\ell s+\tfrac{k}{2}-B_{12}\,|\,B)\times \qquad (10.9)$$
$$\times\exp\{-2\hat{\varkappa}_0(x-2\hat{\lambda}_0t)-\Delta+i\pi\overset{\circ}{\tau}_2+\frac{i\pi}{2}-2\pi i\ell\overset{\circ}{\tau}_2-k\pi i\}$$

задается вещественное решение уравнения Л-Л.

Решение (10.9) может быть проинтерпретировано как описывающее процесс взаимодействия простого солитона, характеризуемого скоростью $\hat{\lambda}_0$, с кноидальной волной $Q_X(x-vt)$, характеризуемой вещественным периодом $X=\frac{i}{2N}(2B-1)$ и фазовой скоростью v. Опишем этот процесс подробнее. Из (10.9) следует, что присутствие солитона существенно сказывается, как и следовало ожидать, лишь в узкой полосе на плоскости (x,t) вокруг "солитонного" луча $x-2\hat{\lambda}_0t=0$. В областях

$$\Omega^+=\{(x,t):\ \hat{\varkappa}_0(x-2\hat{\lambda}_0t)\ll0\},$$
$$\Omega^-=\{(x,t):\ \hat{\varkappa}_0(x-2\hat{\lambda}_0t)\gg0\},$$

в частности, при фиксированном t (x) и $x\to\pm\infty$ $(t\to\pm\infty)$ формула (10.9) переходит в формулы *) (8.1) для невозмущенной кноидальной

*) При сравнении формул (10.10) и (8.1) следует учитывать замечание 7 § 6.

волны

$$\Omega^-:\qquad\qquad \Omega^+:$$

$$
\begin{array}{l|l}
A=\theta_3(2iN(x-vt)+id-s|B), & A=\theta_3(2iN(x-vt)+id-s-B_{12}|B),\\
B=\theta_3(2iN(x-vt)+id+s|B), & B=\theta_3(2iN(x-vt)+id+s-B_{12}|B),\\
C=\theta_4(2iN(x-vt)+id-s|B), & C=-\theta_4(2iN(x-vt)+id-s-B_{12}|B),\\
D=-\theta_4(2iN(x-vt)+id+s|B), & D=\theta_4(2iN(x-vt)+id+s-B_{12}|B).
\end{array}
\qquad (10.10)
$$

Таким образом, воздействие на кноидальную волну сводится к двум эффектам.

I. Возникает сдвиг фазы (параметра id) на величину

$$B_{12}=B_{21}=\int_{b_2} d\overset{\circ}{U}_1(\lambda)=-2\int_{-a}^{\lambda_0}\frac{N\,d\lambda}{\sqrt{(\lambda^2-a^2)(\lambda-c)(\lambda-\bar c)}}\ .$$

2. Происходит поворот на 180° в плоскости (S_1,S_2):

$$(S_1,S_2,S_3)\to(-S_1,-S_2,-S_3).$$

С другой стороны, как показывают формулы (10.9), (10.4), наличие "кноидального" фона приводит к аддитивной добавке $2\Lambda_0$ к скорости свободного солитона $2\lambda_0$.

Замечание 10. Рассматривая вместо кривой, изображенной на рис.19, кривую $\Gamma'_{\Lambda\Pi}$, у которой все точки ветвления вещественны (см.рис.20),

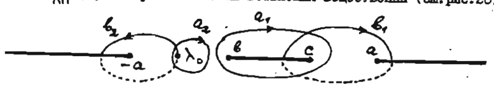


Рис.20

мы снова придем к тем же формулам (10.6) для комплексного решения уравнения Л-Л - нужно лишь всюду считать $\bar c\to b$ и $\operatorname{Im} c=\operatorname{Im} b=0$. Разбор условий вещественности отличается от уже разобранного нами случая лишь тем, что теперь

$$\tau b_1=-b_1$$

и, следовательно, $\overline{\overset{\circ}{B}_{11}}=-\overset{\circ}{B}_{11}$ вместо того, что было в (10.7). Последнее обстоятельство приводит лишь к изменению условий на параметр

$$-\bar{\overset{\circ}{d}}=\overset{\circ}{d}+\overset{\circ}{\tau}_1-\frac12\ ,$$

т.е.

$$\overset{\circ}{d}=id-\frac12\overset{\circ}{\tau}_1+\frac14=id-s+\frac14\ ,$$

что, в свою очередь, означает, что в формулах (10.9), (10.10) следует произвести замену

$$id\to id+\frac14\ .$$

§ II. XYZ-УРАВНЕНИЕ ЛАНДАУ-ЛИФШИЦА

XYZ -уравнение Л-Л (0.1) $J_1<J_2<J_3$ является условием совместности пары (1.3), (1.4), однако, в этом случае W_i - эллиптические функции спектрального параметра u [38] , пробегающего тор $\hat T$ с решеткой $4K,4iK'$ ($4K,4iK'$ - периоды эллиптических функций Якоби модуля k)

$$W_1(u)=\rho\frac{1}{sn(u,k)}\ ,\ W_2(u)=\rho\frac{dn(u,k)}{sn(u,k)}\ ,\ W_3(u)=\rho\frac{cn(u,k)}{sn(u,k)}\ , \qquad (11.1)$$

$$k=\sqrt{\frac{J_2-J_1}{J_3-J_1}}\ ,\quad \rho=\frac12\sqrt{J_3-J_1}\ .$$

Формулы (11.1) униформизуют соотношения $W_\alpha^2-W_\beta^2=-(J_\alpha-J_\beta)/4$.

Приведем формулировку соответствующей задачи Римана. Пусть $\Psi(u)$ -матричнозначная (размерности 2x2) функция, мероморфная на $\hat T\setminus\{0,2K,2iK',2K+2iK'\}$, обладающая в точке $u=0$ асимптотическим поведением

$$\Psi(u) \underset{u\to 0}{=} \Big(\sum_{j=0}^{\infty}\phi_j(x,t)u^j\Big)\exp(-i\varsigma x u^{-1}\sigma_3 + 2i\varsigma^2 t u^{-2}\sigma_3)C \qquad (II.2)$$

и удовлетворяющая редукциям

$$\sigma_1\Psi(u+2iK')M_1(u) = \Psi(u), \qquad (II.3)$$

$$\sigma_3\Psi(u+2K)M_3(u) = \Psi(u) \qquad (II.4)$$

(ср. (I.II) и (I.I2) в XXZ-случае). Пусть выполняются и должным образом переформулированные условия (I.8)-(I.I0). В этом случае справедлива теорема, полностью аналогичная теореме I, и формулы (I.I3)-(I.I5). Условия вещественности переписываются следующим образом (см. (I.I7)):

$$\sigma_2\overline{\Psi(\bar{u})} = \Psi(u)M_R(u). \qquad (II.5)$$

Почти полностью переносится с XXZ -случая и процедура одевания, позволяющая по функции $\Psi_0(u)$ с данными задачи Римана Λ_0 строить новую функцию $\Psi(u)$ с данными $\Lambda = \Lambda_0 \oplus \Lambda'$, $\Lambda' = \{u_1, u_2, A_1, A_2\}$ (см. § 3). Для этого ищем Ψ в том же виде (3.I), где теперь уже

$$f(u) = aW_1(u-v)\sigma_1 + bW_2(u-v)\sigma_2 + cW_3(u-v)\sigma_3 + d, \qquad (II.6)$$

$v\in\hat{T}$ - некоторая точка, не зависящая от x, t. Функции $a(x,t)$, $b(x,t)$, $c(x,t)$, $d(x,t)$ определяются из уравнений

$$\Psi(u_1)\begin{pmatrix}1\\A_1\end{pmatrix} = 0, \quad \Psi(u_2)\begin{pmatrix}1\\A_2\end{pmatrix} = 0. \qquad (II.7)$$

$\det f(u)$ - эллиптическая функция от u, имеющая полюс второго порядка в точке $u=v$ (II.6) и два простых нуля в точках u_1 и u_2 (II.7), поэтому необходимо удовлетворить условию, справедливому для нулей и полюсов любых эллиптических функций (теорема Абеля)[*]

[*] Необходимость учитывать теорему Абеля (II.8) - единственное отличие метода одевания для XYZ уравнения Л-Л от XXZ случая.

$$u_1 + u_2 = 2v. \qquad (II.8)$$

Равенство (II.8) определяет точку v. Система (II.7) представляет собой линейную однородную систему из четырех уравнений относительно четырех неизвестных a, b, c, d. Ранг этой системы равен 3 (из $\det f(u_1) = 0$, (II.6), (II.8) следует, что $\det f(u_2) = 0$). Тем самым система (II.7) полностью определяет интересующие нас три величины a/d, b/d, c/d. Конкретные вычисления, связанные с системой (II.7), никаких проблем, разумеется, не представляют. Затем из Ψ по формулам (I.I3)-(I.I5) находится "одетое" решение XYZ уравнения Л-Л $\vec{S}(x,t)$, описывающее взаимодействие $\vec{S}_0(x,t)$ с солитонами, определяемыми данными "одевания" Λ'.

Таким образом определяются, вообще говоря, комплексные решения, для получения вещественных необходимо наложение некоторых ограничений на Λ'. Возможны две ситуации

1) $\mathrm{Im}\, u_1 = -\mathrm{Im}\, u_2 = K'$, (II.9)

2) $u_1 = \bar{u}_2$. (II.I0)

Мы не приводим соответствующие ограничения на A_i, которые получаются методом, аналогичным § 3.

У XYZ -уравнения Л-Л имеется уже 3 "вакуумных" решения

$$\vec{S}_0 = (1,0,0),\ \Psi_0 = \exp\{-ixW_1(u)\sigma_1 + 2itW_2(u)W_3(u)\sigma_1\}, \qquad (II.II)$$

$$\vec{S}_0 = (0,1,0),\ \Psi_0 = \exp\{-ixW_2(u)\sigma_2 + 2itW_1(u)W_3(u)\sigma_2\}, \qquad (II.I2)$$

$$\vec{S}_0 = (0,0,1),\ \Psi_0 = \exp\{-ixW_3(u)\sigma_3 + 2itW_1(u)W_2(u)\sigma_3\}. \qquad (II.I3)$$

Решение (II.I3) минимизирует функционал энергии. Одевая его, получаем многосолитонные решения. В частности, если u_1, u_2 вида (II.9) и $A_2 = 0$, $\mathrm{Re}\,A_1 = 0$, то получаем солитон; если $\mathrm{Re}\,A_1 = \mathrm{Re}\,A_2 = 0$,

$A_1 \neq 0$, $A_2 \neq 0$ – двухсолитонное решение, описывающее столкновение солитонов, отвечающих спектральным данным u_1 и u_2. Если u_1, u_2 вида (II.I0), то получаем движущийся бризер (если $\operatorname{Re} u_1 = 0, 2K$, то его импульс равен нулю). В терминологии § 4 все эти решения являются S_3-солитонами. Одевая неустойчивые основные состояния (II.II) и (II.I2), получаем соответственно S_1 и S_2-солитоны. При этом аналогично XXZ случаю (см. § 4) оказывается, что среди таких решений содержатся периодические по x и t решения, а также решения, периодические по x и "быстроубывающие" по t. Можно сказать, что физическая причина их существования заключается в том, что взаимодействие с солитонным спектром приводит к глобальной перестройке неустойчивых "вакуумных" решений (II.II), (II.I2).

Менее тривиален перенос с XXZ-случая техники построения конечнозонных решений. Поэтому приведем здесь только окончательные формулы для решений, отсылая за подробными доказательствами к работе [I0]:

Рассмотрим риманову поверхность Γ, представляющую собой двулистное накрытие над тором T (его стороны $2K, 4iK'$). Для построения Γ возьмем два экземпляра тора T и склеим их по разрезам $[p_j, q_j]$, $[p_j + 2iK', q_j + 2iK']$, $j = 1, \dots, g$. Полученная поверхность рода $\hat{g} = 2g+1$ вместе с каноническим базисом циклов на ней (цикл b_0 состоит из двух компонент) изображена на рис.2I. При этом части циклов, лежащие на "верхнем" торе (верхнем листе), изображены сплошной линией, а части, лежащие на "нижнем" листе – штриховой.

Γ обладает инволюцией $\tau P = P + 2iK'$, а также коммутирующей с ней инволюцией $\pm P = P^*$, меняющей листы. Инволюция τ не имеет неподвижных точек. Базис $a_0, b_0, a_1, b_1, \dots, a_{\hat{g}-1}, b_{\hat{g}-1}$ группы гомологий $H_1(\Gamma, \mathbb{Z})$ можно выбрать так, что τ действует на него следующим образом (такой базис указан на рис.2I):

$$\tau a_0 = a_0, \ \tau b_0 = b_0, \ \tau a_i = a_{i+g}, \ \tau b_i = b_{i+g}. \qquad \text{(II.I4)}$$

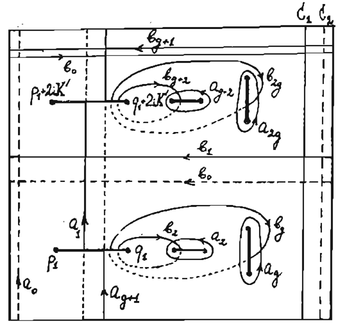


Рис.2I

Здесь за τa обозначен цикл, получающийся из цикла a под действием τ. В этом базисе матрица периодов имеет простую структуру

$$B = \begin{pmatrix} T_\infty & T_0 & T_0 \\ T_0^t & M & M' \\ T_0^t & M' & M \end{pmatrix}, \qquad \text{(II.I5)}$$

где $T_\infty \in \mathbb{C}$, T_0 – g-мерная строка, а M и M' – матрицы размерности $g \times g$. Дифференциалами Прима кривой Γ по инволюции τ называются дифференциалы $d\omega$, удовлетворяющие условию

$$\tau^* d\omega(P) = d\omega(\tau P) = -d\omega(P). \qquad \text{(II.I6)}$$

Пространство голоморфных дифференциалов Прима – g-мерно. Нормированный базис в нем образуют dw_j:

$$\int_{a_i} dw_j = \delta_{ij} \qquad i,j = 1, \dots, g. \qquad \text{(II.I7)}$$

При этом $\Pi = M - M'$, $\Pi_{ij} = \int_{b_i} dw_j$. Дифференциал Прима называется дифференциалом Прима второго рода, если он имеет только полюса кратности больше I в некоторых точках Γ. Тэта-функция Прима $\theta(z|\Pi)$ определяется выражением (6.8), где надо матрицу периодов B заменить на матрицу Π.

Рассмотрим нормированные интегралы Прима второго рода $\Omega_i(P)$; $\int_{a_j} d\Omega_i = 0$, $i=1,2$, $j=1,\ldots,g$ с особенностями в точках $P=O$ и $P=O^* = \pm O$, $P\in\Gamma$ вида

$$\Omega_1(P) \underset{P\sim O}{=} -\rho u^{-1} - a + O(u), \quad \Omega_1(P) \underset{P\sim O^*}{=} \rho u^{-1} + a + O(u),$$

$$\Omega_2(P) \underset{P\sim O}{=} 2\rho^2 u^{-2} + b + O(u), \quad \Omega_2(P) \underset{P\sim O^*}{=} -2\rho^2 u^{-2} - b + O(u). \tag{II.18}$$

Здесь u – естественная проекция точки $P\in\Gamma$ на тор T. $U\in\mathbb{C}^g$ и $V\in\mathbb{C}^g$ – векторы b -периодов

$$U_i = \int_{b_i} d\Omega_1, \qquad V_i = \int_{b_i} d\Omega_2. \tag{II.19}$$

Функции $\psi_1(P)$ и $\psi_2(P)$ определяются формулами

$$\psi_1(P) = \frac{\theta(w(P)+\Omega+A|\Pi)}{\theta(w(P)+A|\Pi)} \exp\{i\Omega_1(P)x + i\Omega_2(P)t\},$$

$$\psi_2(P) = \frac{\theta(w(P)+\Omega+A+n|\Pi)}{\theta(w(P)+A|\Pi)} \exp\{i\Omega_1(P)x + i\Omega_2(P)t\}, \tag{II.20}$$

$A\in\mathbb{C}^g$, $w(P) = \int_{P_0}^{P} dw$, $dw = (dw_1,\ldots,dw_g)$, $\Omega = (Ux+Vt)\frac{1}{2\pi}$,
$n = (\frac{1}{2}, 0, 0, \ldots, 0)$.

<u>Теорема</u>. Функция

$$\Psi(u) = \begin{pmatrix} \psi_1(P) & \psi_1(P^*) \\ \psi_2(P) & \psi_2(P^*) \end{pmatrix} \tag{II.21}$$

является решением обобщенной задачи Римана для XYZ уравнения Л-Л. Величины

$$A = \theta(\Omega+\mathcal{D}|\Pi), \qquad B = \theta(\Omega+\mathcal{D}+\tau|\Pi),$$
$$C = \theta(\Omega+\mathcal{D}+n|\Pi), \qquad D = \theta(\Omega+\mathcal{D}+\tau+n|\Pi), \tag{II.22}$$
$$\mathcal{D}\in\mathbb{C}^g, \quad \tau = \int_0^{O^*} dw$$

по формулам (I.15) определяют решение XYZ уравнения Л-Л. Здесь $\mathcal{D}$ произволен, путь интегрирования в интеграле, определяющем τ, не должен пересекать циклов C_1 и C_2 (см. рис. 2I).

Вещественные решения выделяются ограничениями на зоны двух типов:

$$1. \quad \operatorname{Im} p_k = \operatorname{Im} q_k = \pm K', \tag{II.23}$$

$$2. \quad \bar{p}_k = q_k + 2iK' \tag{II.24}$$

и условиями на вещественную или мнимую компоненту вектора $\mathcal{D}$ (в зависимости от выбора базиса $H_1(\Gamma,\mathbb{Z})$), которые подробно разбираются в [I0].

Для решений рода $g=1$, применяя теорему сложения тэта-функций (7.11), можно получить более компактный вид

$$S_1 = \frac{\theta[\frac{1}{2},0](z)\theta[\frac{1}{2},0](\tau)}{\theta[\frac{1}{2},\frac{1}{2}](z)\theta[\frac{1}{2},\frac{1}{2}](\tau)}, \quad S_2 = -i\frac{\theta[0,0](z)\theta[0,0](\tau)}{\theta[\frac{1}{2},\frac{1}{2}](z)\theta[\frac{1}{2},\frac{1}{2}](\tau)},$$

$$S_3 = \frac{\theta[0,\frac{1}{2}](z)\theta[0,\frac{1}{2}](\tau)}{\theta[\frac{1}{2},\frac{1}{2}](z)\theta[\frac{1}{2},\frac{1}{2}](\tau)}, \; z = 2\Omega+2\mathcal{D}+\tau, \; \theta(z)\equiv\theta(z|2\Pi). \tag{II.25}$$

Как показано в работе [I5], решения XYZ уравнения Л-Л, не зависящие от t, являются также решениями задачи Неймана о движении частицы на двумерной сфере [I6], а зависящие только от комбинации $x+vt$ (простые волны) – классического интегрируемого случая Клебша движения твердого тела в жидкости [I6,24]. Все решения (II.25)

– простые волны. Оказывается, некоторые из решений рода $g=2$ – также простые волны. Необходимое и достаточное условие этого – равенство на центры зон

$$\frac{p_1+q_1}{2}+\frac{p_2+q_2}{2}=K. \qquad (II.26)$$

При этом из формул (II.22) получаются формулы Кеттера [24] для случая Клебша и формулы Веселова (см. [16]) для решений задачи Неймана. Выражения (II.25) описывают частные периодические решения этих задач классической механики.

Приложение

РАЗВЕТВЛЕННЫЕ ДВУЛИСТНЫЕ НАКРЫТИЯ И РЕДУКЦИЯ ТЭТА-ФУНКЦИЙ РИМАНА

В этом приложении приведем результаты о редукции тэта-функций Римана, содержащиеся в монографии [31] .

Пусть $\hat{C}\xrightarrow{2:1}C$ – разветвленное двулистное накрытие рода $\hat{g}=2g+n-1$ компактной римановой поверхности C рода g, $Q_1,\dots,Q_{2n}\in C$ – точки ветвления накрытия. Обозначим $\phi:\hat{C}\to\hat{C}$ инволюцию с неподвижными точками $Q_1,\dots,Q_{2n}$, переставляющую листы накрытия $(C=\hat{C}/\phi)$. Канонический базис $H_1(\hat{C},\mathbb{Z})$

$$a_1,b_1,\dots,a_g,b_g,a_{g+1},b_{g+1},\dots,a_{1'},b_{1'},\dots,a_{g'},b_{g'} \qquad (П.1)$$

можно выбрать так, что $\pi a_1,\pi b_1,\dots,\pi a_g,\pi b_g$ – канонический базис $H_1(C,\mathbb{Z})$ и

$$\begin{aligned} a_{\alpha'}+\phi a_\alpha &= b_{\alpha'}+\phi b_\alpha=0, && 1\le\alpha\le g,\\ a_i+\phi a_i &= b_i+\phi b_i=0, && g+1\le i\le g+n-1. \end{aligned} \qquad (П.2)$$

Здесь за ϕa_α обозначены циклы, получающиеся из a_α под действием инволюции ϕ . Для соответствующих нормированных голоморфных дифференциалов

$$u_1,\dots,u_g,u_{g+1},\dots,u_{g+n-1},u_{1'},\dots,u_{g'}$$

справедливы равенства при $1\le\alpha\le g$ и $g+1\le i\le g+n-1$

$$u_\alpha(x)=-u_{\alpha'}(\phi(x)),\ u_i(x)=-u_i(\phi(x)),\ x\in\hat{C}. \qquad (П.3)$$

Нормированные в базисе $\pi a_1,\pi b_1,\dots,\pi a_g,\pi b_g$ голоморфные дифференциалы на C равны

$$v_\alpha=u_\alpha-u_{\alpha'} \qquad 1\le\alpha\le g\ ,$$

а выражениями

$$w_\alpha=u_\alpha+u_{\alpha'},\ 1\le\alpha\le g;\ w_i=u_i\ ,\ g+1\le i\le g+n-1$$

задаются $g+n-1$ линейно независимых нормированных дифференциалов Прима на $\hat{C}$. $v_\alpha(\phi(x))=v_\alpha(x),\ w_\beta(\phi(x))=-w_\beta(x)$.

Из (П.3) следует, что матрица периодов $\hat{C}$ имеет вид

$$B=\begin{pmatrix} \frac{\Pi_{\alpha\beta}+T_{\alpha\beta}}{2} & \Pi_{\alpha i} & \frac{\Pi_{\alpha\beta}-T_{\alpha\beta}}{2}\\ \Pi_{i\alpha} & 2\Pi_{ij} & \Pi_{i\alpha}\\ \frac{\Pi_{\alpha\beta}-T_{\alpha\beta}}{2} & \Pi_{\alpha i} & \frac{\Pi_{\alpha\beta}+T_{\alpha\beta}}{2} \end{pmatrix}, \qquad (П.4)$$

где $1\le\alpha,\beta\le g$, $g+1\le i,j\le g+n-1$, T – матрица периодов C (дифференциалы v_α в базисе $\pi a_1,\pi b_1,\dots,\pi a_g,\pi b_g$), а Π симметричная $(g+n-1)\times(g+n-1)$ матрица

$$\Pi=\begin{pmatrix} \Pi_{\alpha\beta} & \Pi_{\alpha j}\\ \Pi_{i\beta} & \Pi_{ij} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \int_{b_\beta} w_\alpha & \frac{1}{2}\int_{b_j} w_\alpha\\ \int_{b_\beta} w_i & \frac{1}{2}\int_{b_j} w_i \end{pmatrix}. \qquad (П.5)$$

Рассмотрим тэта-функцию с нулевыми характеристиками, определяемую матрицей (П.4)

$$\theta(z|B)=\sum_{m\in\mathbb{Z}^{\hat g}} \exp\{\pi i<Bm,m>+2\pi i<z,m>\}, \tag{П.6}$$

где $<,>$ означает обычное скалярное произведение. Обозначим за $S=(S_1|S_2|S_3)$ $\hat g$-мерный вектор, где S_1 и S_3 – g-мерные, а S_2 – $(n-1)$-мерный векторы. $t=(t_1|t_2)$ – $(g+n-1)$-мерный вектор, t_1 – g-мерный, t_2 – $(n-1)$-мерный.

Заметим, что если вектор K пробегает всю решетку $\mathbb{Z}^{\hat g}$, а $\hat\delta=(\delta|0|\delta)$, где δ пробегает всевозможные векторы, состоящие из чисел 0 и $\frac{1}{2}$, то вектор

$$m=N(K+\delta), \quad N=\begin{pmatrix} I & 0 & I \\ 0 & I & 0 \\ I & 0 & -I \end{pmatrix} \tag{П.7}$$

также пробегает $\mathbb{Z}^{\hat g}$ (размерность блоков N совпадает с размерностью блоков B (П.4)). Таким образом, суммирование по m в формуле (П.6) можно заменить на суммирование по K и δ

$$<Bm,m>=<BN(K+\hat\delta),N(K+\hat\delta)>=<NBN(K+\hat\delta),K+\hat\delta>.$$

Нетрудно заметить, что матрица NBN – блочная

$$NBN=\begin{pmatrix} 2\Pi & 0 \\ 0 & 2T \end{pmatrix}$$

(отсюда, в частности, следует положительная определенность мнимой части Π). Следовательно,

$$<Bm,m>+2<z,m>=<NBN(K+\hat\delta),K+\hat\delta>+2<Nz,K+\hat\delta>=$$

$$=<2\Pi(K_1+(\delta|0)),K_1+(\delta|0)>+<2T(K_2+\delta),K_2+\delta>+$$

$$+2<(z_1+z_3|z_2),K_1+(\delta|0)>+2<z_1-z_3,K_2+\delta>,$$

где $K=(K_1'|K_1''|K_2)$, $K_1=(K_1'|K_1'')$, $z=(z_1|z_2|z_3)$.

Подставляя это в выражения (П.6), получаем представление $\hat g$-мерной тэта-функции через конечную сумму произведений g-мерной и $(g+n-1)$-мерной тэта-функций

$$\theta((z_1|z_2|z_3)|B)=\sum_{\delta\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}^g/2\mathbb{Z}^g}\theta[(\delta|0),0]((z_1+z_3|z_2)|2\Pi)\,\theta[\delta,0](z_1-z_3|2T). \tag{П.8}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахиезер И.А., Боровик А.Е. К теории спиновых волн конечной амплитуды. – ЖЭТФ, 1967, т.52, № 2, с.508–513.
2. Ахиезер И.А., Боровик А.Е. О нелинейных спиновых волнах в ферромагнетиках и антиферромагнетиках. – ЖЭТФ, 1967, т.52, № 5, с. 1332–1344.
3. Бабич М.В., Бобенко А.И., Матвеев В.Б. Редукции тэта-функций Римана рода g к тэта-функциям младших родов и симметрии алгебраических кривых. – ДАН СССР, 1983, т.272, № 1, с.13–17.
4. Барьяхтар И.В., Иванов Б.А. Нелинейные волны намагниченности антиферромагнетиков. – ФНТ, 1979, т.5, № 7, с.759–770.
5. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, т.3. – М.: Наука, 1967.– 384 с.
6. Белоколос Е.Д., Энольский В.З. Обобщенный анзац Лэмба. – ТМФ, 1982, т.53, № 2, с.271–282.
7. Белоколос Е.Д., Энольский В.З. О решениях в эллиптических функциях нелинейных уравнений в частных производных, интегрируемых методом

обратной задачи теории рассеяния. - УМН, 1982, т.37, № 4, 89 с.
8. Бикбаев Р.Ф., Бобенко А.И., Итс А.Р. О конечнозонном интегрировании уравнения Ландау-Лифшица. - ДАН СССР, 1983, т.272, № 6, с.1293-1298.
9. Бобенко А.И. Уравнение Ландау - Лифшица. Процедура "одевания". Элементарные возбуждения. - Зап.научн.семин.ЛОМИ, 1983, т.123, с.58-66.
10. Бобенко А.И. Вещественные алгеброгеометрические решения уравнения Ландау-Лифшица в тэта-функциях Прима. - Функц.анализ и его прил., 1984, т.18, № 4, с.15-31.
11. Богдан М.М., Ковалев А.С. Точные многосолитонные решения одномерных уравнений Ландау-Лифшица для неизотропного ферромагнетика. - Письма в ЖЭТФ, 1980, № 8, с.453-457.
12. Боголюбов Н.Н. (мл.), Прикарпатский А.К. О конечнозонных решениях уравнения типа Гейзенберга. - В кн.: Математические методы и физико-механические поля. - Киев: Наук.думка, 1983, № 18, с.7-13.
13. Борисов А.Б. Многосолитонные решения уравнений неизотропного магнетика. - ФММ, 1983, т.55, № 2, с.230-234.
14. Боровик А.Е. N -солитонные решения нелинейного уравнения Ландау-Лифшица. - Письма в ЖЭТФ, 1978, т.28, № 10, с.629-632.
15. Веселов А.П. Уравнение Ландау-Лифшица и интегрируемые системы классической механики. - ДАН СССР, 1983, т.270, № 5, с.1094-1097.
16. Дубровин Б.А. Тэта-функции и нелинейные уравнения. - УМН, 1981, т.36, № 2, с.9-80.
17. Дубровин Б.А., Натанзон С.М. Вещественные двухзонные решения уравнения Sine-Gordon. - Функц.анализ и его прил., 1982, т.16, № 1, с.27-43.
18. Гурвиц А., Курант Р. Теория функций. - М.: Наука, 1968.
19. Захаров В.Е., Манаков С.В. О резонансном взаимодействии волновых пакетов в нелинейных средах. - Письма в ЖЭТФ, 1973, т. 18, № 7, с.413-417.
20. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Под ред. С.П.Новикова. - Теория солитонов: метод обратной задачи. М.: Наука, 1980. - 320 с.
21. Зверович Э.И. Краевые задачи теории аналитических функций. - УМН, 1971, т.26, № 1, с.113-181.
22. Косевич А.М. Нелинейная динамика намагниченности в ферромагнетиках. Динамические и топологические солитоны. - ФММ, 1982, т.53, № 3, с.420-446.
23. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. К теории дисперсии магнитной проницаемости ферромагнитных тел. - В кн.: Ландау Л.Д. Собр.трудов в 2-х т. - М. Наука, 1969, т.1, с.128-143.
24. Стеклов В.А. О движении твердого тела в жидкости. - Харьков, 1983, 234 с.
25. Тахтаджян Л.А. Точная теория распространения ультракоротких оптических импульсов в двухуровневых средах. - ЖЭТФ, 1974, т. 66, в. 2, с. 476-489.
26. Чередник И.В. Интегрируемые дифференциальные уравнения и накрытия алгебраических кривых. - Изв.АН СССР, сер.матем., 1983, т.47, № 2, с.384-406.
27. Чередник И.В. Об условиях вещественности в "конечнозонном интегрировании". - ДАН СССР, 1980, т.252, № 5, с.1104-1108.
28. Шабат А.Б. Обратная задача рассеяния для системы дифференциальных уравнений. - Функц.анализ и его прил., 1975, т.9, № 3, с.75-78.
29. Bikbaev R.P., Bobenko A.I. On finite-gap integration of the Landau-Lifshitz equation. XYZ case. - Preprint LOMI, E-8-83. Leningrad: LOMI, 1983, 27 p.
30. Date E., Jimbo M., Kashiwara M., Miwa T. Landau-Lifshitz equation: solitons, quasi-periodic solutions and infinite dimensional Lie

УДК 538.2I+5I7.9

Бикбаев Р.Ф., Бобенко А.И., Итс А.Р.

Уравнение Ландау-Лифшица. Теория точных решений.II.

Методом обратной задачи исследуется хорошо известное в теории ферромагнетизма уравнение Ландау-Лифшица. Построены все элементарные возбуждения солитонного типа. Изучено их взаимодействие. Получены также конечнозонные (в тэта-функциях) решения, среди них выделены вещественные.

Работа выполнена в Ленинградском государственном университете и Ленинградском отделении Математического института им.В.А.Стеклова АН СССР.

Препринт Донецкого физико-технического института АН УССР, Донецк, I984.

Bikbaev R.P., Bobenko A.I., Its A.R.

The Landau-Lifshitz equation. Theory of explicit solutions.II.

On the basis of the inverse scattering method the Landau-Lifshitz equation in the theory of ferromagnets is inverstigated. All soliton exitations are constructed and their intermediation is described in detail. The final formulas for the finite-gap solutions (the theta-function solutions) are obtained and real ones are isolated.

This work has been carried out in Leningrad State University and Leningrad Department Steklov Mathematical Institute.

Preprint of Donetsk Physico-Technical Institute of the Ukrainian Academy of Sciences, Donetsk, 1984.

ОГЛАВЛЕНИЕ