АКАДЕМИЯ НАУК УССР

ДОНЕЦКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Препринт
ДонФТИ-84-6(81)

Р.Ф.Бикбаев, А.И.Бобенко, А.Р.Итс

УРАВНЕНИЕ ЛАНДАУ-ЛИФШИЦА. ТЕОРИЯ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ

(Часть I)

ДОНЕЦК

УДК 538.2I+5I7.9

Бикбаев Р.Ф., Бобенко А.И., Итс А.Р.

Уравнение Ландау-Лифшица. Теория точных решений.I

Методом обратной задачи исследуется хорошо известное в теории ферромагнетизма уравнение Ландау-Лифшица. Построены все элементарные возбуждения солитонного типа. Изучено их взаимодействие. Получены также конечнозонные (в тэта-функциях) решения, среди них выделены вещественные.

Работа выполнена в Ленинградском государственном университете и Ленинградском отделении Математического института им.В.А.Стеклова АН СССР.

Препринт Донецкого физико-технического института АН УССР, Донецк, 1984.

Bikbaev R.F., Bobenko A.I., Its A.R.

The Landau-Lifshitz equation. Theory of explicit solutions.I.

On the basis of the inverse scattering method the Landau-Lifshitz equation in the theory of ferromagnets is investigated. All soliton exitations are constructed and their intermediation is described in detail. The final formulas for the finite-gap solutions (the theta-function solutions) are obtained and real ones are isolated.

This work has been carried out in Leningrad State University and Leningrad Department Steklov Mathematical Institute.

Preprint of Donetsk Physico-Technical Institute of the Ukrainian Academy of Sciences, Donetsk, 1984.

ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известное в теории ферромагнетизма уравнение Ландау-Лифшица (уравнение Л-Л) [23] *)

$$\vec{S}_t = [\vec{S} \times \vec{S}_{xx}] + [\vec{S} \times J\vec{S}], \quad \vec{S} = (S_1, S_2, S_3), \qquad (0.I)$$

$$J = \mathrm{diag}(J_1, J_2, J_3), \quad S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = 1$$

уже несколько лет является объектом повышенного внимания со стороны специалистов по теории вполне интегрируемых нелинейных эволюционных систем. Этот особенный, по отношению к другим погружающимся в схему метода обратной задачи моделям, интерес к уравнению (0.I) объясняется, в частности, следующим обстоятельством. Представление уравнения Л-Л в виде условия совместности двух линейных уравнений (предъявление U-V пары) было получено относительно давно: в 1977 году – для полностью изотропного случая ($J_1 = J_2 = J_3$, XXX-модель) Л.А.Тахтаджяном [39], в 1978 году – для случая одноосной анизотропии ($J_1 = J_2 \neq J_3$, XXZ -модель) А.Е.Боровиком [I4] и, наконец, в 1979 году – для случая полной анизотропии ($J_1 \neq J_2 \neq J_3$, XYZ-модель) Е.К.Скляниным и, независимо, А.Е.Боровиком (см. [38]). Тем самым, казалось бы, сразу открывалась возможность применить к уравнению (0.I) традиционный аппарат метода обратной задачи со всеми его основными атрибутами: построение явных решений, исследование задачи Коши и т.п. Однако вплоть до самого последнего времени эта возможность в полной мере так и не была реализована. Трудность применения метода обратной задачи к уравнению Л-Л объяснялась тем, что уравнение Л-Л более, чем какая-либо другая интегрируемая система, требует переформулировок метода обратной задачи в "метод матричной

*) Список литературы приведен во второй части настоящего препринта.

задачи Римана". Подобная переформулировка, к моменту написания U-V пары для уравнения (0.I), окончательно еще не была осуществлена, хотя, строго говоря, переосмысление схемы метода обратной задачи в указанном направлении началось еще в 1975 году в известных работах А.Б.Шабата, В.Е.Захарова и С.В.Манакова [28], [19].

Таким образом, с 1979 года в математической теории уравнения Л-Л наблюдалась весьма странная ситуация – уравнение, казалось бы, было погружено в схему метода обратной задачи, а реальной выгоды от этого не ощущалось. Заметим, что с физической точки зрения уравнение (0.I) исключительно важно. Поэтому, независимо от "взаимоотношений" с методом обратной задачи, теория уравнения Л-Л интенсивно и вполне успешно развивалась. В частности, к 1979 году уже было известно много его частных решений как солитонного, так и более сложного типов. В этой связи в первую очередь необходимо упомянуть работы И.А.Ахиезера и А.Е.Боровика [1,2] и исследования групп А.М.Косевича (А.М.Косевич, Б.А.Иванов, А.С.Ковалев, М.М.Богдан, И.М.Бабич и др.) и В.И.Елеонского (В.М.Елеонский, Н.И.Кирова, Н.Е.Кулагин и др.). Мы позволяем себе не приводить ссылок на многочисленные публикации упомянутых авторов, отсылая читателя за ними, а также за более подробной историей вопроса к обзору А.М.Косевича [22]. Из работ, которые в той мере, в какой это было возможно в описываемый период, использовали метод обратной задачи, помимо уже упоминавшихся трудов Л.А.Тахтаджяна, Е.К.Склянина и А.Е.Боровика, следует отметить работы по конечнозонному интегрированию уравнения Л-Л, выполненные Н.Н.Боголюбовым (мл.) и А.К.Прикарпатским [12] (XXZ -случай), И.В.Чередником [26] и Е.Дэйтом, М.Дзимбо, М.Кашиварой и Т.Мивой [30] (XYZ -случай). Очень интересную статью М.М.Богдана и А.С.Ковалева [11], в которой по методу Хироты строятся N -солитонные решения уравнения Л-Л в случае полной анизотропии, мы также относим к этому кругу работ, хотя сами ее авторы и противопоставляют (на наш взгляд, не-

оправданно) метод Хироты методу обратной задачи.

Коренная эффективизация приложения метода обратной задачи к уравнению Л-Л произошла в 1982 году после того, как А.В.Михайлов [36] точно сформулировал матричную задачу Римана, аксиоматика которой адекватна структуре U-V - пары для XYZ -уравнения Л-Л. Результат не замедлил сказаться: в работах А.В.Михайлова [36] и Ю.Л.Родина [37] были регулярным образом описаны многосолитонные решения уравнения (0.I) в полностью анизотропном случае, а А.И.Бобенко [9] и А.Б.Борисовым [13] предложены "процедуры одевания" для этого уравнения, позволяющие по известным решениям строить новые. Сдвиги произошли и в алгеброгеометрическом (конечнозонном) интегрировании уравнения (0.I): авторам настоящей работы удалось погрузить в XXZ -случае уравнение (0.I) в схему Кричевера и довести конечнозонное интегрирование этого уравнения до получения явных формул в тэта-функциях [8], а двум из авторов – осуществить аналогичную программу для случая полной анизотропии [29], эффективизовав тем самым соответствующие результаты работ [12] и [26]. Подводя итог вышесказанному, можно констатировать, что в настоящий момент в теории уравнения Л-Л (0.I) существует схема, позволяющая регулярным образом как строить все ранее известные, так и предъявлять новые, существенно отличные от ранее известных, точные решения и исследовать всевозможные эффекты, связанные с их взаимодействием.

Цель настоящей работы – дать подробное описание упомянутой схемы на промежуточном по сложности примере уравнения Л-Л в случае одноосной анизотропии. Мы пытаемся адресовать нашу статью специалистам по теории ферромагнетизма, не предполагая при этом глубокого знакомства читателя с идеями метода обратной задачи и стараясь уделить как можно больше внимания конкретным результатам, физически интересным частным случаям и эффектам, извлекаемым из развиваемого нами подхода. Это намерение в существенном определило структуру самой статьи. В первых двух параграфах закладываются основы схемы – формулируется и обсуждается "обобщенная матричная задача Римана", отвечающая XXZ уравнению Л-Л. При этом мы, хотя и отталкиваемся от упоминавшейся выше работы А.В.Михайлова [36], используем, однако, нестандартную версию сведения интегрируемого уравнения к задаче Римана. Эта версия извлекается нами из работ М.Дзимбо, Т.Мива и К.Уено [33], [34] и оказывается наиболее удобной для развития на ее основе в следующих параграфах всех основных конструкций нашей схемы. Математический аппарат первых двух параграфов вполне элементарен: мы, практически, пользуемся лишь простейшими идеями линейной алгебры и комплексного анализа (алгебра матриц, размерности 2x2 и теорема Лиувилля). Не выходя за рамки этого аппарата, в следующих трех параграфах развивается процедура одевания для XXZ-уравнения Л-Л с одновременным ее применением к построению, классификации и описанию взаимодействий солитонных решений. Необходимо подчеркнуть, что хотя мы, по-видимому, и не получаем здесь новых результатов, однако в методологическом плане выводимые нами формулы обладают рядом преимуществ по сравнению с ранее известными представлениями для точных решений уравнения Л-Л. В частности, все полученные нами ответы совершенно симметричны по степени явности и компактности в отношении компонент вектора $\vec{S}$. Параметризуются наши формулы (см. § 4) точками комплексной плоскости (спектром соответствующей линейной задачи), на которые наложены весьма слабые ограничения. Последнее обстоятельство позволяет эффективно изучать различные предельные переходы в конструируемых нами решениях. В § 5 демонстрируются возможности нашего метода в задачах описания эффектов взаимодействия друг с другом различных элементарных решений. Здесь наряду с довольно простыми процессами взаимодействия двух солитонов мы описываем и такое явление, как прохождение солитона через доменную стенку.

Существенно новым типам решений XXZ-уравнения Л-Л посвящены §§ 6-9. Здесь реализация основной абстрактной теоремы § I происходит в рамках техники "конечнозонного интегрирования" на базе уже менее тривиального математического аппарата теории функций на компактных римановых поверхностях. Выдержать замкнутость изложения здесь уже, к сожалению, невозможно. Однако мы постарались свести к минимуму необходимость для читателя обращения к внешним математическим источникам. В результате, для понимания этой части работы достаточно знакомства с заключительными главами монографии [18] и вводной частью обзора [21]. Дополнительные сведения о редукциях римановых поверхностей, используемые нами в § 8, приводятся в приложении. Более детальное изложение теории римановых тэта-функций, подчиненное законам интегрирования нелинейных уравнений, читатель может найти в обзорах В.Б.Матвеева [35], Б.А.Дубровина [16] и монографии [20].

Опишем теперь кратко содержание §§ 6-9. В § 6 строятся в терминах многомерных тэта-функций комплексные почти-периодические (конечнозонные) решения уравнения Л-Л в случае одноосной анизотропии. В § 7, следуя технике работы [17], выводятся условия вещественности. С точки зрения физических приложений, результаты этих двух параграфов носят весьма символический характер – многомерная тэта-функция очень неудобный объект для количественного анализа. Упомянутый дефект преодолевается в § 8 и § 9-10 двумя возможными способами. В § 8, используя технику редукций тэта-функций высших родов к низшим, из общих формул §§ 6,7 извлекаются периодические решения, описываемые уже в эллиптических функциях – кноидальные волны и их суперпозиции. В § 9-10 общая формула § 6 подвергается определенной процедуре вырождения (попарное слияние точек ветвления исходной римановой поверхности), в результате которой возникают удобные формулы для многосолитонных решений и решений, описывающих взаимодействие солитонов с кноидальными волнами. Более точно, ограничиваясь в целях экономии места случаем анизотропии "легкая плоскость", мы строим многосолитонные формулы для решений типа "движущаяся доменная стенка" и описываем эффект взаимодействия одной движущейся доменной стенки с кноидальной волной.

В § II будет показано, что решения качественно более сложного с точки зрения метода обратной задачи XYZ -уравнения Л-Л также могут быть построены в рамках того же метода, что и XXZ -уравнения Л-Л, исследованного в предыдущих параграфах. Материал § II основан на работах [9, 10, 29]. Способ получения формул для алгеброгеометрических (конечнозонных) решений основан на нетривиальном использовании идей алгебраической геометрии, поэтому, учитывая сформулированную выше цель препринта, мы сочли целесообразным привести только окончательные результаты, отсылая за подробными доказательствами к перечисленным выше работам.

Подводя итог описанию содержания данного препринта, отметим следующее. Как мы надеемся показать, развиваемая нами на основе метода обратной задачи схема есть наиболее адекватный способ нахождения, классификации и исследования точных решений уравнения Л-Л. В последнее время интенсивному исследованию подвергаются аналогичные уравнению Л-Л динамические уравнения для намагниченности антиферромагнетика, также допускающие, как показано в работе И.В.Барьяхтара и Б.А.Иванова [4], решения солитонного типа. Было бы весьма заманчиво и, по мнению авторов, вполне реально исследовать эти уравнения способом, предложенным в настоящей работе. Разумеется, для этого необходимо сделать главное - предъявить соответствующую U-V пару.

В заключение авторы приносят свою искреннюю благодарность В.Г.Барьяхтару, чей интерес к настоящей работе существенно стимулировал ее написание.

§ I. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

XXZ -уравнение Л-Л ($J_1 = J_2$, без потери общности можно

положить $J = \mathrm{diag}(0,0,\varepsilon)$)

$$\vec{S}_t = [\vec{S} \times \vec{S}_{xx}] + [\vec{S} \times J\vec{S}], \quad J = \mathrm{diag}(0,0,\varepsilon) \qquad (1.1)$$

является условием совместности

$$U_t - V_x + [U, V] = 0 \qquad (1.2)$$

пары линейных дифференциальных уравнений

$$\Psi_x = U\Psi, \quad \Psi_t = V\Psi, \qquad (1.3)$$

где U и V задаются выражениями

$$U(\lambda) = -i\sum_{\alpha=1}^{3} S_\alpha w_\alpha \sigma_\alpha,$$

$$V(\lambda) = 2i\sum_{\alpha=1}^{3} S_\alpha w_1 w_2 w_3 w_\alpha^{-1} \sigma_\alpha - i\sum_{\alpha=1}^{3} [S \times S_x]_\alpha w_\alpha \sigma_\alpha, \qquad (1.4)$$

$$w_1 = w_2 = \sqrt{\lambda^2 - a^2}, \quad w_3 = \lambda, \quad a = i\sqrt{\varepsilon}/4. \qquad (1.5)$$

Если $\varepsilon > 0$, то мы имеем анизотропию типа оси легкого намагничивания, при $\varepsilon < 0$ - анизотропию типа легкой плоскости намагничивания. Оба случая исследуются совершенно аналогично. Пара (1.4) есть простое вырождение U-V пары Склянина - Боровика XYZ -уравнения Л-Л для случая $J_1 = J_2$. Заметим, что в рассматриваемом случае спектральный параметр λ меняется не на комплексной плоскости, а на Γ - двулистной римановой поверхности функции $\sqrt{\lambda^2 - a^2}$. Конечно, можно было бы произвести соответствующую замену переменной λ так, чтобы U и V стали бы рациональными функциями спектрального параметра, но мы этого делать не будем, так как в выбранной нами униформизации (1.5) соотношений $w_\alpha^2 - w_\beta^2 = -(J_\alpha - J_\beta)/4$ очень естественно учитывается редукция пары (1.4)

$$\sigma_3 U(\lambda^\tau)\sigma_3 = U(\lambda), \quad \sigma_3 V(\lambda^\tau)\sigma_3 = V(\lambda), \qquad (1.6)$$

где через $\lambda \to \lambda^\tau$ обозначена инволюция, переставляющая листы поверхности Γ $\left(\sqrt{(\lambda^\tau)^2-a^2}=-\sqrt{\lambda^2-a^2}\right)$. Такая редукция, связанная с перестановкой листов, легко учитывается при построении конечнозонных решений (см. § 6).

Ψ -функция является центральным объектом при построении точных формул для решений нелинейных уравнений, интегрируемых методом обратной задачи. Первоначально именно она строится конструктивно по своим аналитическим свойствам, которые следуют из вида U-V -пары, а затем уже по ней строятся формулы для решений нелинейных уравнений. Сформулируем так называемую обобщенную задачу Римана, отвечающую уравнению (I.I).

Матричнозначная (размерности 2х2) функция $\Psi(\lambda)$ определена на Γ и обладает следующими свойствами.

Точки $\infty^{1,2}$ *) – точки существенной особенности функции Ψ, которая в окрестности этих точек имеет дифференцируемую по x и t существенную особенность вида

$$\Psi(\lambda,x,t)=\left(\sum_{j=0}^{\infty}\varphi_j(x,t)\lambda^{-j}\right)\exp(-i\sigma_3 x\lambda+2i\sigma_3 t\lambda^2)C\lambda^m, \quad (I.7)$$

$\det\varphi_0(x,t)\neq 0$, C – обратима и не зависит от x,t.

$\Psi(\lambda)$ имеет также так называемые "регулярные особенности" в точках $a_1,\dots,a_N$, т.е. $\Psi(\lambda)$ голоморфна и обратима на $\Gamma\setminus\{\infty^{1,2}\}$, кроме точек $a_1,\dots,a_N$, не зависящих от x,t , в окрестности которых справедливо следующее представление:

$$\Psi(\lambda)\underset{\lambda\sim a_j}{=}\hat\Psi(\lambda)\,k^{T_j}C_j\ ,\quad j=1,\dots,N, \quad (I.8)$$

где T_j – диагональная, а C_j – обратимая постоянные матрицы (не зависят от x,t); $\hat\Psi(\lambda)$ голоморфна и обратима в окрестности a_j, k – локальный параметр в окрестности точки a_j , если $a_j\neq\pm a$,

*) $\infty^{1,2}$ – две бесконечно удаленные точки Γ в ее стандартной реализации двулистным накрытием плоскости λ $\left(\sqrt{\lambda^2-a^2}\to\pm\lambda,\ \lambda\to\infty^{1,2}\right)$.

то $k=\lambda-a_j$, если же $a_j=\pm a$, то $k=\sqrt{\lambda\mp a}$. Отметим, что в случае, когда T_j – рациональная нецелая матрица, функция $\Psi(\lambda)$ неоднозначна на Γ . В этом случае точка a_j является точкой ветвления накрытия $\hat\Gamma\to\Gamma$, функция Ψ однозначна уже на этой накрывающей поверхности $\hat\Gamma$, а как функция на Γ характеризуется следующим свойством: при обходе на Γ вокруг точки a_j в положительном направлении функция $\Psi(\lambda)$ домножается справа на матрицу монодромии

$$\Psi(\lambda)\to\Psi(\lambda)M_j\ ,\quad M_j=C_j^{-1}\exp\{2\pi i T_j\}C_j\ . \quad (I.9)$$

Пусть также имеются контуры $\mathcal{L}_i\in\Gamma$, $i=1,\dots,M$ и матрицы $G_i(\lambda)$, не зависящие от x,t . Вдоль контуров $\mathcal{L}_i$ матрицы $\Psi_+(\lambda)$ и $\Psi_-(\lambda)$ (это граничные значения Ψ с различных сторон $\mathcal{L}_i$) связаны линейными соотношениями

$$\Psi_-(\lambda)=\Psi_+(\lambda)G_i(\lambda)\big|_{\lambda\in\mathcal{L}_i}\ . \quad (I.10)$$

Справедливо редукционное ограничение

$$\sigma_3\Psi(\lambda^\tau)=\Psi(\lambda)\sigma(\lambda), \quad (I.11)$$

где $\sigma(\lambda)$ не зависит от x,t , и выполнены следующие условия нормировки:

$$\frac{\partial}{\partial x}\ln\Psi_{1i}(a)=\frac{\partial}{\partial x}\ln\Psi_{2k}(-a), \quad (I.12)$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\ln\Psi_{1j}(a)=\frac{\partial}{\partial t}\ln\Psi_{2\ell}(-a)$$

для каких-либо i,k,j,ℓ *).

<u>Теорема I</u>. Пусть построена функция Ψ , удовлетворяющая условиям (I.7)-(I.12), тогда с точностью до слагаемых, пропорциональных единичной матрице, логарифмические производные $\Psi_x\Psi^{-1}$ и $\Psi_t\Psi^{-1}$ имеют вид (I.4), где

*) Заметим, что условия (I.12) при всех i,k,j,ℓ и замене $a\to-a$ суть необходимые условия удовлетворения матричной функцией Ψ системе (I.3)-(I.4).

$$\sum_{\alpha=1}^{3} S_\alpha \sigma_\alpha = \Phi_0 \sigma_3 \Phi_0^{-1}, \qquad (I.13)$$

т.е. если

$$\Phi_0 = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \qquad (I.14)$$

то

$$S_1 = \frac{CD-AB}{AD-BC}, \quad S_2 = -i\,\frac{CD+AB}{AD-BC}, \quad S_3 = \frac{AD+BC}{AD-BC}. \qquad (I.15)$$

Функции $S_j(x,t)$, определяемые (I.13)-(I.15), удовлетворяют соотношению $\sum_{\alpha=1}^{3} S_\alpha^2 = 1$ и образуют решение XXZ -уравнения Л-Л (I.I).

<u>Доказательство</u>. Прежде всего заметим, что логарифмические производные Ψ-функции $\Psi_x \Psi^{-1}$ и $\Psi_t \Psi^{-1}$ в силу свойств (I.8)-(I.10) есть, в отличие от самой Ψ -функции, однозначные функции уже на Γ. Далее, они не имеют особенностей в точках a_j:

$$\Psi_x \Psi^{-1} \underset{\lambda\sim a_j}{=} \hat{\Psi}_x K^{T_j} C_j C_j^{-1} K^{-T_j} \hat{\Psi}^{-1} = \hat{\Psi}_x \hat{\Psi}^{-1}$$

и на контурах $\mathcal{L}_i$

$$\Psi_{+x} \Psi_+^{-1} = \Psi_{-x} \Psi_-^{-1} \Big|_{\lambda \in \mathcal{L}_i}.$$

Таким образом, из вида асимптотики (I.7) и факта отсутствия особенностей на $\Gamma \setminus \{\infty^{1,2}\}$ следует следующий вид для $\Psi_x \Psi^{-1}$ и $\Psi_t \Psi^{-1}$:

$$\Psi_x \Psi^{-1} = \lambda A_1 + \sqrt{\lambda^2-a^2}\, A_2 + A_3, \quad \Psi_t \Psi^{-1} = \lambda^2 B_1 + \lambda\sqrt{\lambda^2-a^2}\, B_2 +$$

$$+ \lambda B_3 + \sqrt{\lambda^2-a^2}\, B_4 + B_5, \quad Sp(A_1+A_2) = Sp(B_1+B_2) = Sp(B_3+B_4) = 0,$$

где A_i, B_i - матрицы, зависящие только от x и t. Далее, из редукции (I.II) следует, что A_1, A_3, B_1, B_3, B_5 диагональные, а A_2, B_2, B_4 антидиагональные. Таким образом,

$$\Psi_x \Psi^{-1} = -i\sum_{\alpha=1}^{3} S_\alpha W_\alpha \sigma_\alpha + A(x,t)\sigma_3 + \alpha(x,t) I,$$

$$\Psi_t \Psi^{-1} = 2i\sum_{\alpha} P_\alpha W_1 W_2 W_3 W_\alpha^{-1} \sigma_\alpha + i\sum_{\alpha} Q_\alpha W_\alpha \sigma_\alpha +$$

$$+ B(x,t)\sigma_3 + \beta(x,t) I.$$

Из условия нормировки (I.I2) следует $A(x,t)=B(x,t)=0$. И, наконец, подставляя асимптотическое разложение (I.7) в (I.3) и приравнивая члены при одинаковых степенях λ, убеждаемся в справедливости формулы (I.I3) и равенств $P_\alpha = S_\alpha$, $Q_\alpha = -[S \times S_x]_\alpha$. Теорема доказана.

Таким образом, Ψ -функция (а, значит, и решение XXZ-уравнения Л-Л) определяется следующими данными обобщенной задачи Римана - "данными рассеяния":

$$\Lambda = \{a_j, T_j, C_j, \ j=1,\dots,N \ \ (\text{см.}(I.8));\ G_i(\lambda), \lambda \in \mathcal{L}_i, i=1,\dots,M\}. \qquad (I.16)$$

В дальнейшем мы построим точные выражения для Ψ -функций с некоторыми конкретными данными Λ, и, таким образом, построим решения уравнения (I.I).

<u>Замечание I</u>. Пусть Ψ -функция удовлетворяет редукции

$$\sigma_2 \overline{\Psi(\bar\lambda)} = \Psi(\lambda) M(\lambda), \qquad (I.17)$$

где антиинволюция сопряжения на Γ задается естественным образом $(\lambda, \sqrt{\lambda^2-a^2}) \to (\bar\lambda, \overline{\sqrt{\lambda^2-a^2}})$, а $M(\lambda)$ - матричнозначная функция, не зависящая от x,t. Тогда решение уравнения (I.I), определяемое выражениями (I.I3)-(I.I5), будет вещественным.

<u>Замечание 2</u>. Пусть $\Psi(\lambda)$ удовлетворяет условиям (I.7)-(I.I2) и определяет решение $\vec{S}(x,t)$, тогда функция

$$\Psi_\gamma(\lambda) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \gamma^{-1} \end{pmatrix} \Psi(\lambda), \quad \gamma = const \in \mathbb{C} \qquad (I.18)$$

также удовлетворяет обобщенной задаче Римана. Соответствующее ей решение $\vec{S}_\gamma$ уравнения (I.I) отличается от $\vec{S}$ (рассматриваются только вещественные решения, $|\gamma|=1$) простым поворотом осей I и 2 в плоскости этих осей. Очевидно, что физически решения $\vec{S}$ и $\vec{S}_\gamma$ эквивалентны. Далее, функция $\Psi_\varphi(\lambda)=\varphi(x,t)\Psi(\lambda)$ (где $\varphi(x,t)$ – произвольная скалярная функция x,t) также удовлетворяет задаче Римана. Соответствующие решения уравнения (I.I) совпадают $\vec{S}_\varphi(x,t)=\vec{S}(x,t)$.

Замечание 3. Существуют некоторые априорные ограничения на матрицы $\sigma(\lambda)$ и $M(\lambda)$, входящие в определения редукционных тождеств (I.II) и (I.I7). В частности, применяя к $\Psi(\lambda)$ последовательно два преобразования (I.II), приходим к соотношению

$$\sigma(\lambda)\,\sigma(\lambda^\tau)\equiv I; \qquad (I.I9)$$

применяя к $\Psi(\lambda)$ последовательно два преобразования (I.I7), приходим к соотношению

$$M(\lambda)\,\overline{M(\bar{\lambda})}\equiv -I, \qquad (I.20)$$

а применяя к $\Psi(\lambda)$ последовательно преобразования (I.II) и (I.I7) – к соотношению

$$\sigma(\lambda)M(\lambda^\tau)+M(\lambda)\overline{\sigma(\bar{\lambda})}=0. \qquad (I.2I)$$

§ 2. ВНЕШНЕЕ ПОЛЕ

Хорошо известно, что однородное внешнее поле, направленное по оси анизотропии (в нашем случае ось 3), не нарушает интегрируемости системы. В этом параграфе мы построим некоторое обобщение задачи Римана, отвечающей уравнению (I.I), сформулированной в § I. XXZ уравнение Л-Л с внешним полем, направленным по оси анизотропии, будет погружаться в предлагаемую модель.

Теорема 2. Пусть функция $\Psi(\lambda,x,t)$ удовлетворяет свойствам (I.7)-(I.II) и условию нормировки

$$\frac{\partial}{\partial x}\ln\Psi_{1i}(a)=\frac{\partial}{\partial x}\ln\Psi_{2k}(-a)+i\frac{\partial}{\partial x}f(x,t),$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\ln\Psi_{1j}(a)=\frac{\partial}{\partial t}\ln\Psi_{2\ell}(-a)+i\frac{\partial}{\partial t}f(x,t) \qquad (2.I)$$

для каких-либо i,j,k,ℓ.

Тогда логарифмические производные $\Psi_x\Psi^{-1}$ и $\Psi_t\Psi^{-1}$ с точностью до слагаемых, пропорциональных единичной матрице, равны соответственно

$$U_f=U+\frac{i}{2}\sigma_3\frac{\partial f}{\partial x}, \quad V_f=V+\frac{i}{2}\sigma_3\frac{\partial f}{\partial t},$$

где U и V – матрицы (I.4). Уравнение Захарова – Шабата (I.2) для U_f и V_f приводит к уравнению

$$\vec{S}_t=[\vec{S}\times\vec{S}_{xx}]+[\vec{S}\times\tilde{J}\vec{S}]+[\vec{S}\times\vec{H}]-2\vec{S}_x S_3\frac{\partial f}{\partial x}, \qquad (2.2)$$

где $\tilde{J}=\mathrm{diag}\left(0,0,\varepsilon+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\right)$, $\vec{H}=\left(0,0,\frac{\partial f}{\partial t}\right)$.

Частный случай уравнения (2.2) является физически интересным, он описывает нелинейную динамику ферромагнетика во внешнем однородном магнитном поле $\vec{H}(t)$, произвольно зависящем от t.

Следствие I. Если $f(x,t)=\int^t H(s)ds$ зависит только от t, то такой задаче Римана отвечает уравнение

$$\vec{S}_t=[\vec{S}\times\vec{S}_{xx}]+[\vec{S}\times J\vec{S}]+[\vec{S}\times\vec{H}],\ \vec{H}=(0,0,H(t)). \qquad (2.3)$$

Из следствия I вытекает элементарная процедура построения решений уравнения (2.3) по решениям уравнения (I.I).

Следствие 2. Если $\vec{S}(x,t)=(S_1,S_2,S_3)$ решение уравнения Л-Л (I.I) выражается через A,B,C,D формулами (I.I5), то величины $A_f=A\exp(\int^t H(s)ds)$, $B_f=B\exp(\int^t H(s)ds)$, $C_f=C$, $D_f=D$ по тем же формулам (I.I5) определяют $\vec{S}_f(x,t)$, являющиеся решением уравнения (2.3).

Разумеется, этот чисто алгебраический факт можно проверить и непосредственно. Очевидно, что решение $\vec{S}_f$ будет вещественным, если вещественны $\vec{S}$ и $H(t)$.

§ 3. ПРОЦЕДУРА ОДЕВАНИЯ. ОБЩАЯ СХЕМА.

Нам удобно начать этот параграф с доказательства одного вспомогательного утверждения:

Лемма I. (Мива – Дзимбо – Уено [33]). Пусть $\Psi(\lambda)$ – (2x2)-матричная функция, голоморфная в окрестности некоторой точки $\lambda = a$, являющейся простым нулем $\det \Psi(\lambda)$. Тогда для матрицы $\Psi(\lambda)$ в окрестности точки a справедливо представление вида (I.8) с $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. При этом в качестве C можно взять любую обратимую матрицу, но такую, что первый столбец матрицы C^{-1} принадлежит $\ker \Psi(a)$.

Доказательство. Пусть C и T такие, как описано в лемме. Утверждение леммы эквивалентно голоморфности и матричной обратимости функции

$$\hat{\Psi}(\lambda) \equiv \Psi(\lambda) C^{-1} (\lambda - a)^{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

в некоторой окрестности точки a. Положим $C^{-1} = (X, Y)$. Тогда

$$\hat{\Psi}(\lambda) = \Psi(\lambda)(X, Y)\begin{pmatrix} (\lambda-a)^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{\lambda - a} \Psi(\lambda) X, \Psi(\lambda) Y \right) =$$

$$= \left(\frac{1}{\lambda-a}\left[\Psi(a)X + \Psi'(a)X(\lambda-a) + \ldots\right], \Psi(a)Y + (\lambda-a)\Psi'(a)Y + \ldots \right) =$$

$$= (\text{т.к. } \Psi(a)X = 0) = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda-a)^k \Psi_k \Rightarrow \hat{\Psi}(\lambda) \text{ – голоморфна в окрестности точки } a.$$

После установления голоморфности функции $\hat{\Psi}(\lambda)$ ее матричная обратимость следует из простоты нуля $\det \Psi(\lambda)$ в точке a. Лемма доказана.

Пусть теперь $\Psi_0(\lambda, x, t)$ – функция, удовлетворяющая всем условиям теоремы I и приводящая тем самым к некоторому решению $\vec{S}_0(x,t)$ уравнения Л-Л. Отвечающие Ψ_0 данные обобщенной задачи Римана обозначим через $\Lambda_0 = \{a_j^0, T_j^0, C_j^0, \mathcal{L}_j^0, G_j^0(\lambda), m^0\}$. Мы хотим по функции Ψ_0 явным образом построить новую функцию $\Psi(\lambda, x, t)$, удовлетворяющую тем же условиям (I.7)-(I.I2), но с новым набором данных $\Lambda = \Lambda_0 \oplus \Lambda'$ и тем самым по известному решению $\vec{S}_0(x,t)$ уравнения Л-Л построить его новое решение. Будем функцию Ψ искать в виде

$$\Psi(\lambda, x, t) = f(\lambda, x, t)\Psi_0(\lambda, x, t), \qquad (3.I)$$

где f – (2.2)-матричная функция, мероморфная на Γ, с простыми полюсами в точках $\infty^{1,2}$ в качестве единственных особенностей. Потребуем от f выполнения соотношения

$$\sigma_3 f(\lambda^\tau)\sigma_3 = f(\lambda). \qquad (3.2)$$

Равенство (3.2) вместе с указанной характеристикой особенностей функции $f(\lambda)$ приводит к следующему представлению для нее:

$$f(\lambda) = \sum_{\alpha=1}^{3} q_\alpha W_\alpha(\lambda)\sigma_\alpha + (q_0\lambda + p_0)I + p_3\sigma_3, \qquad (3.3)$$

где скалярные функции $q_\alpha(x,t)$ и $p_\alpha(x,t)$ подлежат еще определению. Для их фиксации зададимся парой точек $\lambda_1, \lambda_2 \notin \{a_j^0\} \cup \{a, -a\}$ парой комплексных чисел (A_1, A_2) и положим

$$\begin{cases} \Psi(\lambda_j)\begin{pmatrix} 1 \\ A_j \end{pmatrix} = 0 & j = 1,2 \\ p_3 = -a q_0 . \end{cases} \qquad (3.4)$$

Соотношения (3.4) представляют собой линейную однородную алгебраическую систему из 5 уравнений на 6 неизвестных (величины q_α и p_α). Решая эту систему, находим интересующие нас функции $q_\alpha(x,t)$ и $p_\alpha(x,t)$ с точностью до общего функционального множителя. Этот произвол, в силу замечания 2 в конце § I, для нас уже не существенен.

Теорема 3. Функция $\Psi(\lambda, x, t)$, определяемая формулами (3.I), (3.3) и (3.4), удовлетворяет всем условиям теоремы I. Отвечающие ей данные обобщенной задачи Римана отличаются от исходных данных Λ_0 увеличением на четыре числа регулярных особых точек:

$$\{a_j^0\} \to \{a_j^0\} \oplus \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1^\tau, \lambda_2^\tau\}$$

и сдвигом матрицы m^0 на единичную: $m^0 \to m^0 + I$. Соответствующее (комплексное!) решение $\vec{S}(x,t)$ уравнения Л-Л связано с затравочным решением $\vec{S}_0(x,t)$ [ж] равенством

[ж] Мы применяем обозначение $\vec{S}$ для вектора (S_1, S_2, S_3), а S – для матрицы $\sum_{\alpha=1}^{3} S_\alpha \sigma_\alpha$.

$$S = Q S_0 Q^{-1}, \tag{3.5}$$

где

$$Q = \sum_{\alpha=1}^{3} q_\alpha \sigma_\alpha + q_0 I .$$

Доказательству теоремы 3 предпошлем доказательство следующей леммы.

<u>Лемма 2</u>. Нули функции $\det f(\lambda)$ как функции на Γ просты и расположены в точках $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1^\tau$ и λ_2^τ. Во всех этих точках для функции $\Psi(\lambda)$ справедливо представление вида (I.8) с независящими от x и t матрицами T и C.

<u>Доказательство</u>. В силу (3.3) функция $\det f(\lambda)$ имеет на Γ два полюса второго порядка в точках $\infty^{1,2}$. Поэтому у нее должно быть четыре нуля. Первые два векторных равенства в (3.4) говорят о том, что среди этих нулей обязаны быть точки λ_1 и λ_2. То, что наряду с точками λ_1, λ_2 нулями $\det f(\lambda)$ обязательно будут и точки $\lambda_1^\tau, \lambda_2^\tau$, следует из редукционного тождества (3.2). Наконец, последнее утверждение леммы есть непосредственное следствие леммы I и того факта, что из (3.2) вытекает справедливость для $\Psi(\lambda)$ - редукционного равенства (I.II) с той же матрицей $\sigma_0(\lambda)$, что и для затравочной функции $\Psi_0(\lambda)$. Матрицы T и C, отвечающие точкам $\lambda_j, \lambda_j^\tau$, суть следующие:

$$\lambda_j: \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \lambda_j^\tau: \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -A_j & 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -A_j & 1 \end{pmatrix} \sigma_0 .$$

На этом, доказательство леммы 2 заканчивается.

<u>Доказательство теоремы 3</u>. В силу леммы 2 функция $f(\lambda)$ во всех "старых" регулярных особых точках a_j^0 голоморфна и матрично-обратима. Поэтому умножение функции $\Psi_0(\lambda)$ <u>слева</u> на функцию $f(\lambda)$ не портит ее поведения в точках $\{a_j^0\}$ - для функции $\Psi(\lambda)$ в этих точ-

ках остается справедливым соотношением (I.8) с теми же матрицами T_j^0 и C_j^0. То же самое относится и к условиям сопряжения на "старых" контурах $\mathcal{L}_j$, в то время как новых линий разрыва возникнуть, очевидно, не может. Далее асимптотическое условие (I.7) выполняется для функции $\Psi(\lambda)$ с матрицей $m = m^0 + I$, а, как уже отмечалось при доказательстве леммы 2, редукционное тождество (I.II) - с матрицей $\sigma(\lambda) = \sigma_0(\lambda)$. Единственными новыми особенностями функции $\Psi(\lambda)$ являются нули ее детерминанта в точках $\lambda_j, \lambda_j^\tau$, $j = 1,2$. Но в силу леммы 2 в этих точках гарантируется нужное представление (I.8) с независящими от x и t матрицами T и C. Тем самым все условия теоремы I для функции $\Psi(\lambda)$ проверены, кроме последнего - условия нормировки (I.I2). Покажем, что его выполнение следует из скалярного равенства системы (3.4). В самом деле, так как для затравочной функции $\Psi_0(x,t,\lambda)$ условия (I.I2) выполняются, то при некоторых k,ℓ и j,τ верны равенства

$$\begin{aligned} (\Psi_0)_{1k}(a) &= \alpha(\Psi_0)_{2\ell}(-a), \quad \alpha_x = 0, \\ (\Psi_0)_{1j}(a) &= \beta(\Psi_0)_{2\tau}(-a), \quad \beta_t = 0. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Матрица $f(\lambda)$ (при $\lambda = \pm a$) имеет диагональный вид. Равенство $p_3 = -a q_0$ эквивалентно соотношению

$$f_{11}(a) = f_{22}(-a).$$

Поэтому при тех же k,ℓ и j,τ, что и в (3.6), имеем

$$\Psi_{1k}(a) = f_{11}(a)[\Psi_0]_{1k}(a) = \alpha f_{11}(a)[\Psi_0]_{2\ell}(-a) =$$

$$= \alpha f_{22}(-a)[\Psi_0]_{2\ell}(-a) = \alpha \Psi_{2\ell}(-a) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\ln \Psi_{1k}(a) = \frac{\partial}{\partial x}\ln \Psi_{2\ell}(-a),$$

$$\Psi_{1j}(a) = f_{11}(a)[\Psi_0]_{1j}(a) = \beta f_{11}(a)[\Psi_0]_{2\tau}(-a) =$$

$$= \beta f_{22}(-a)[\Psi_0]_{2\tau}(-a) = \beta \Psi_{2\tau}(-a) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\ln \Psi_{1j}(a) = \frac{\partial}{\partial t}\ln \Psi_{2\tau}(-a).$$

То есть, условия нормировки (I.I2) для "одетой" функции Ψ выполняются при тех же k, ℓ и j, r , что и для затравочной функции Ψ_0. На этом доказательство теоремы 3 заканчивается.

Заметим, что с учетом соотношения $p_3 = -aq_0$ матрица $f(\lambda)$ может быть представлена в виде

$$f(\lambda) = D_1(\lambda)\left[Q + d_0 R(\lambda)\right] D(\lambda), \tag{3.7}$$

где $D_1(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{\lambda+a}{\lambda-a}} \end{pmatrix}$, $R(\lambda) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda-a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda+a} \end{pmatrix}$,

$$D(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda-a & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda^2-a^2} \end{pmatrix}, \quad d_0 = p_0 + aq_3$$

и векторные равенства системы (3.4) переписываются тогда следующим образом:

$$\left\{ Q X_j = -d_0 R(\lambda_j) X_j ; \qquad j = 1,2, \right. \tag{3.8}$$

где

$$\vec{X}_j = D(\lambda_j) \Psi_0(\lambda_j) \begin{pmatrix} 1 \\ A_j \end{pmatrix}. \tag{3.9}$$

Будем считать, что две матричные функции $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ связаны соотношением $\mathcal{X} \cong \mathcal{Y}$, если существует такая скалярная функция $d(x,t)$, что $\mathcal{X} = d\,\mathcal{Y}$. Тогда из (3.8) для матрицы Q, непосредственно участвующей в переходе (3.5) от старого решения $\vec{S}_0$ к новому решению $\vec{S}$, получается явное представление через затравочную функцию $\Psi_0(\lambda)$ и параметры преобразования (λ_j, A_j):

$$Q \cong V W^{-1}, \tag{3.10}$$

$$W = (\vec{X}_1, \vec{X}_2), \quad V = (R(\lambda_1)\vec{X}_1, R(\lambda_2)\vec{X}_2).$$

Как отмечалось в § I, уравнение Л-Л в комплексном случае выдерживает калибровочное преобразование $S \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} S \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta^{-1} \end{pmatrix}$,

$\delta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Поэтому можно сказать, что, фиксируя значения λ_j, A_j , мы выделяем не одно решение уравнения Л-Л, а целый калибровочный класс. Каждый представитель этого класса характеризуется своим значением параметра δ и описывается функцией

$$S = Q_\delta S_0 Q_\delta^{-1}, \quad Q_\delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} Q. \tag{3.11}$$

В дальнейшем нас особенно будут интересовать решения, отвечающие следующему специальному значению параметра δ :

$$\delta = \delta_0 \equiv \sqrt{\frac{(\lambda_1+a)(\lambda_2+a)}{(\lambda_1-a)(\lambda_2-a)}}.$$

Для соответствующей матрицы $Q^0 \equiv Q_{\delta_0}$ развернутая запись представления

$$Q_\delta \cong \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} V W^{-1}$$

имеет наиболее симметричный вид

$$Q^0 \cong \begin{pmatrix} \alpha_1\beta_2\sqrt{\lambda_2^2-a^2} - \alpha_2\beta_1\sqrt{\lambda_1^2-a^2}, & \alpha_1\alpha_2(\lambda_1-\lambda_2) \\ \beta_1\beta_2(\lambda_2-\lambda_1) & , \alpha_1\beta_2\sqrt{\lambda_1^2-a^2} - \alpha_2\beta_1\sqrt{\lambda_2^2-a^2} \end{pmatrix}, \tag{3.12}$$

где введены обозначения

$$\Psi_0(\lambda_j)\begin{pmatrix} 1 \\ A_j \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \alpha_j \\ \beta_j \end{pmatrix}, \quad j = 1,2. \tag{3.13}$$

Соответствующие решение уравнения Л-Л и отвечающая ему Ψ-функция суть

$$S = Q^0 S_0 (Q^0)^{-1}, \tag{3.14}$$

$$\Psi(\lambda) \cong D_1(\lambda)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta_0 \end{pmatrix}\left[V W^{-1} - R(\lambda)\right] D(\lambda) \Psi_0(\lambda). \tag{3.15}$$

Этими формулами мы заканчиваем описание процедуры одевания в комплексном случае и переходим к обсуждению тех условий на параметры (λ_j, A_j) , которые обеспечивают в преобразовании (3.12)-(3.14) сохранение вещественности вектора $\vec{S}$.

Заметим, прежде всего, что для вещественности $\vec{S}$ достаточно добиться выполнения соотношения

$$\sigma_2 \overline{Q}^\circ \sigma_2 \cong Q^\circ . \tag{3.16}$$

В самом деле, вещественность $\vec{S}$ эквивалентна выполнению равенства $\sigma_2 \overline{S} \sigma_2 = -S$. По предположению, для $\vec{S}_\circ$ это равенство выполняется. Поэтому из (3.16) имеем, что

$$\sigma_2 \overline{S} \sigma_2 = \sigma_2 \overline{Q}_\circ \overline{S}_\circ \overline{Q}_\circ^{-1} \sigma_2 = Q_\circ \sigma_2 \overline{S}_\circ \sigma_2 Q_\circ^{-1} = -Q_\circ S_\circ Q^{-1} = -S.$$

Приступим теперь непосредственно к условиям вещественности.

<u>Теорема 4</u>. Пусть затравочное решение $\vec{S}_\circ$ вещественно, и, следовательно, затравочная функция Ψ удовлетворяет тождеству (I.17) с некоторой матрицей $M_\circ$. Тогда соотношение (3.16) имеет место в следующих двух случаях:

а) $\mathrm{Im}\,\lambda_j \neq 0$, $\lambda_1 = \overline{\lambda}_2$,

$$\det\left(M_\circ(\lambda_1)\begin{pmatrix} 1 \\ \overline{A}_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ A_1 \end{pmatrix}\right) = 0 , \tag{3.17}$$

б) $a = \overline{a}$ (легкая плоскость!), $\mathrm{Im}\,\lambda_j = 0$, $|\lambda_j| < a$,

$$\det\left(\sigma_\circ(\lambda_j) M_\circ(\lambda_j^\tau)\begin{pmatrix} 1 \\ \overline{A}_j \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ A_j \end{pmatrix}\right) = 0, \tag{3.18}$$

где $\sigma_\circ(\lambda)$ – матрица, участвующая в редукционном тождестве (I.11) для функции $\Psi_\circ$.

<u>Доказательство</u>. Начнем со случая а). Равенство (3.17) означает пропорциональность векторов $M_\circ(\lambda_1)\begin{pmatrix} 1 \\ \overline{A}_2 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 \\ A_1 \end{pmatrix}$. Вспоминая априорное тождество $\overline{M}(\overline{\lambda}) M(\lambda) = -I$, убеждаемся в том, что коллинеарны также и векторы $M_\circ(\lambda_2)\begin{pmatrix} 1 \\ \overline{A}_1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 \\ A_2 \end{pmatrix}$:

$$M_\circ(\lambda_1)\begin{pmatrix} 1 \\ \overline{A}_2 \end{pmatrix} = \varkappa \begin{pmatrix} 1 \\ A_1 \end{pmatrix} \Rightarrow -\begin{pmatrix} 1 \\ \overline{A}_2 \end{pmatrix} = \varkappa \overline{M}$$

$$\Rightarrow M(\lambda_2)\begin{pmatrix} 1 \\ \overline{A}_1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{\overline{\varkappa}}\begin{pmatrix} 1 \\ A_2 \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$\sigma_2 \overline{\Psi}_\circ(\lambda_2)\begin{pmatrix} 1 \\ \overline{A}_2 \end{pmatrix} = \Psi_\circ(\lambda_1) M_\circ(\lambda_1)\begin{pmatrix} 1 \\ \overline{A}_2 \end{pmatrix} = \varkappa \Psi_\circ(\lambda_1)\begin{pmatrix} 1 \\ A_1 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_2 \overline{\Psi}_\circ(\lambda_1)\begin{pmatrix} 1 \\ \overline{A}_1 \end{pmatrix} = \Psi_\circ(\lambda_2) M_\circ(\lambda_2)\begin{pmatrix} 1 \\ \overline{A}_1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{\overline{\varkappa}} \Psi_\circ(\lambda_2)\begin{pmatrix} 1 \\ A_2 \end{pmatrix}, \tag{3.19}$$

что на языке величин α_j, β_j означает

$$\overline{\alpha}_1 = \frac{i}{\overline{\varkappa}}\beta_2 , \quad \overline{\beta}_1 = -\frac{i}{\overline{\varkappa}}\alpha_2 , \tag{3.20}$$

$$\overline{\alpha}_2 = -i\varkappa\beta_1 , \quad \overline{\beta}_2 = i\varkappa\alpha_1 .$$

Учитывая (см. в § I закон действия антиинволюции $\lambda \to \overline{\lambda}$ на Γ), что $\overline{\sqrt{\lambda_1^2 - a^2}} = \sqrt{\lambda_2^2 - a^2}$, $\overline{\sqrt{\lambda_2^2 - a^2}} = \sqrt{\lambda_1^2 - a^2}$, утверждение теоремы в случае а) получаем простой проверкой непосредственно в формуле (3.12), принимая во внимание соотношения (3.20).

Переходя к случаю б), заметим, что, при формулируемых здесь условиях на λ_j, $\mathrm{Re}\sqrt{\lambda_j^2 - a^2} = 0$. Это означает, что

$$\overline{\sqrt{\lambda_j^2 - a^2}} = -\sqrt{\lambda_j^2 - a^2} = \sqrt{(\lambda_j^\tau)^2 - a^2} , \tag{3.21}$$

т.е. на точки λ_j как точки поверхности Γ антиинволюция $\lambda \to \overline{\lambda}$ действует как инволюция τ : $\overline{\lambda}_j = \lambda_j^\tau$. Это обстоятельство как раз и учтено в условии (3.18) на параметры A_j : именно в таком виде они приводят к соотношениям, аналогичным соотношениям (3.19) предыдущего случая:

$$\sigma_2 \overline{\Psi}_\circ(\lambda_j)\begin{pmatrix} 1 \\ \overline{A}_j \end{pmatrix} = \Psi_\circ(\lambda_j^\tau) M_\circ(\lambda_j^\tau)\begin{pmatrix} 1 \\ \overline{A}_j \end{pmatrix} =$$

$$= \sigma_3 \Psi_\circ(\lambda_j) \sigma_\circ(\lambda_j) M_\circ(\lambda_j^\tau)\begin{pmatrix} 1 \\ \overline{A}_j \end{pmatrix} = \varkappa \sigma_3 \Psi_\circ(\lambda_j)\begin{pmatrix} 1 \\ A_j \end{pmatrix}.$$

Соотношения (3.20) заменяются тем самым на следующие:

$$\sigma_2 \begin{pmatrix} \overline{\alpha}_j \\ \overline{\beta}_j \end{pmatrix} = \varkappa \sigma_3 \begin{pmatrix} \alpha_j \\ \beta_j \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \overline{\beta}_j = -i\varkappa\alpha_j \\ \overline{\alpha}_j = -i\varkappa\beta_j \end{matrix} \qquad j = 1,2 . \tag{3.22}$$

Доказательство утверждения теоремы в случае б) завершается снова ссылкой на непосредственную проверку в формуле (3.12), учитывающую первое равенство в (3.21) и соотношения (3.22). На этом завершается и доказательство самой теоремы.

Замечание 4. Используя тождество $M(\lambda)\overline{M}(\bar\lambda)=-I$ можно показать, что условие вещественности запрещает в рассматриваемой нами процедуре одевания следующие две ситуации:

1) $a=\bar a$ (легкая плоскость), $\lambda_j\in R$, $|\lambda_j|>a$,

2) $a=-\bar a$ (легкая ось), $\lambda_j\in R$.

В самом деле, а обоих этих случаях точки λ_j как точки поверхности Γ суть неподвижные точки инволюции $\lambda\to\bar\lambda$. Поэтому, предположив, что $\sigma_2\overline{\Psi}(\bar\lambda)=\Psi(\lambda)M(\lambda)$, приходим к следующему противоречию:

$$\Psi(\lambda_j)\begin{pmatrix}1\\A_j\end{pmatrix}=0\Rightarrow\overline{\Psi}(\lambda_j)\begin{pmatrix}1\\\bar A_j\end{pmatrix}=0\Rightarrow\Psi(\lambda_j)M(\lambda_j)\begin{pmatrix}1\\\bar A_j\end{pmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow M(\lambda_j)\begin{pmatrix}1\\\bar A_j\end{pmatrix}=\varkappa\begin{pmatrix}1\\A_j\end{pmatrix}\Rightarrow-\begin{pmatrix}1\\\bar A_j\end{pmatrix}=\varkappa\overline{M}(\lambda_j)\begin{pmatrix}1\\A_j\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow M(\lambda_j)\begin{pmatrix}1\\\bar A_j\end{pmatrix}=-\frac{1}{\bar\varkappa}\begin{pmatrix}1\\A_j\end{pmatrix}\Rightarrow|\varkappa|^2=-1.$$

Замечание 5. Как уже отмечалось, "одетая" Ψ-функция (3.15) удовлетворяет редукционному тождеству (1.11) с той же матрицей $\sigma_0(\lambda)$, что и затравочная функция $\Psi_0(\lambda)$. Как мы сейчас убедимся, аналогичное утверждение верно и для вещественной редукции (1.17). Более точно, пусть выполнены условия теоремы 4, тогда Ψ - функция, отвечающая решению (3.12) - (3.14), удовлетворяет тождеству (1.17) с матрицей $M(\lambda)\cong M_0(\lambda)$. В самом деле, рассматривая, наряду с функцией [x]) $\Psi(\lambda)=f(\lambda)\Psi_0(\lambda)$, функцию $\tilde\Psi(\lambda)=\sigma_2\bar f(\bar\lambda)\sigma_2\times\Psi_0(\lambda)$, нетрудно убедиться, что при условиях (3.17) или (3.18) обе эти функции имеют одинаковый набор данных задачи Римана

---

[x]) Множитель $\begin{pmatrix}1&0\\0&\sigma_0\end{pmatrix}$ мы включаем в $f(\lambda)$.

($\tilde\Psi$ удовлетворяет тем же векторным равенствам системы (3.4)). Поэтому $\tilde\Psi(\lambda)=\Phi\Psi(\lambda)$, Φ - не зависит от λ. С другой стороны, $\tilde\Psi(\lambda)=\sigma_2\overline{\Psi}(\bar\lambda)M_0^{-1}(\lambda)$ и, следовательно,

$$\tilde\Psi\leftrightarrow\tilde S=S\leftrightarrow\Psi\Rightarrow S=\Phi S\Phi^{-1}. \tag{3.19}$$

Далее обе Ψ -функции удовлетворяют редукционному тождеству (1.11) с одной и той же матрицей $\sigma_0(\lambda)$. Поэтому

$$\sigma_3\Phi\sigma_3=\Phi\Leftrightarrow\Phi=\mathrm{diag}(c,d). \tag{3.20}$$

Сопоставляя (3.20) с (3.19), приходим немедленно к выводу, что

$$c=d\Leftrightarrow\Phi=c\cdot I\Rightarrow\sigma_2\overline{\Psi}(\bar\lambda)=c\Psi(\lambda)M_0(\lambda)\Leftrightarrow$$

$$M(\lambda)\cong M_0(\lambda).$$

§ 4. ПРОЦЕДУРА ОДЕВАНИЯ. СОЛИТОННЫЕ РЕШЕНИЯ

Простейшим применением развитой в предыдущем параграфе схемы является одевание двух типов "вакуумных" Ψ -функций:

а) $\Psi_0(\lambda,x,t)=\exp\{-i\sigma_3x\lambda+2i\sigma_3(\lambda^2-a^2)t\}$,

$\vec S_0=(0,0,1)$,

в) $\Psi_0(\lambda,x,t)=\exp\{-i\sigma_1\sqrt{\lambda^2-a^2}(x-2\lambda t)\}$,

$\vec S_0=(1,0,0)$.

Как уже отмечалось во введении, получающиеся при этом решения, по-видимому, включают в себя все ранее известные, выражающиеся в элементарных функциях решения уравнения Л-Л. Отметим также еще раз, что авторы не претендуют в этом параграфе на получение каких-либо новых физических результатов. Единственная наша цель здесь - методологическая: подтвердить простотой описания и широтой охвата ранее известных эффектов адекватность развиваемого нами подхода. В связи с этим авторы, полагая все ниже следующие факты хорошо известными специалистам по теории ферромагнетизма, позволят себе опустить многочисленные приоритетные ссылки, которые читатель при необходимости может восстановить по обзору А.М.Косевича [22].

Нам удобно ввести следующую "не физическую" условную терминологию. Решения уравнения Л-Л, получающиеся в результате однократного применения процедуры одевания (3.I2) - (3.I4) к затравочному решению типа а (б), будем называть S_3-солитонами (S_1-солитонами).

а) S_3-солитоны

Для $\Psi_0(\lambda,x,t)=\exp\{-i\sigma_3 x\lambda+2i\sigma_3(\lambda^2-a^2)t\}$ матрицы $\sigma_0(\lambda)$ и $M_0(\lambda)$ таковы:

$$\sigma_0(\lambda)\equiv\sigma_3\ ,\qquad M_0(\lambda)\equiv\sigma_2 .$$

Теорема 4 приводит тогда к двум типам условий на параметры (λ_j, A_j):

$a_1)$ $\lambda_1=\bar\lambda_2\equiv\mu\ ,\ \operatorname{Im}\mu>0,$

$$A_1=-\frac{1}{\bar A_2}\equiv A\ ,\quad A\in\mathbb{C}\setminus\{0\};$$

$a_2)$ $(a=\bar a!)$ $\lambda_j\in\mathbb{R},\ |\lambda_j|<a\ ,\ j=1,2,$

$$A_j=e^{2i\varphi_j}\ ,\ \varphi_j\in\mathbb{R}.$$

Соответственно этим двум случаям матрица Q° (см.(3.I2)) приобретает вид

$a_1)$
$$Q^\circ\cong\begin{pmatrix}\sqrt{\bar\mu^2-a^2}+|E|^2\sqrt{\mu^2-a^2}\ , & (\bar\mu-\mu)\bar E\\ E(\bar\mu-\mu) & ,\ \sqrt{\mu^2-a^2}+|E|^2\sqrt{\bar\mu^2-a^2}\end{pmatrix}, \tag{4.I}$$

$$E=A\exp(2ix\mu-4i(\mu^2-a^2)t),$$

$a_2)$
$$Q^\circ\cong\begin{pmatrix}i\sqrt{a^2-\lambda_2^2}\,E_1-i\bar E_1\sqrt{a^2-\lambda_1^2}\ , & \bar E_2(\lambda_1-\lambda_2)\\ E_2(\lambda_2-\lambda_1) & ,\ iE_1\sqrt{a^2-\lambda_1^2}-i\bar E_1\sqrt{a^2-\lambda_2^2}\end{pmatrix}, \tag{4.2}$$

$$E_1(x,t)=\exp(ix(\lambda_2-\lambda_1)-2i(\lambda_2^2-\lambda_1^2)t+\varphi_2-\varphi_1),$$

$$E_2(x,t)=\exp(ix(\lambda_1+\lambda_2)-2i(\lambda_2^2+\lambda_1^2-2a^2)t+\varphi_2+\varphi_1).$$

Подставляя (4.I) и (4.2) в (3.I4), получаем явные формулы для двух типов S_3-солитонов (второй тип возможен лишь в случае легкой плоскости!)

$$a_1)\quad S_3(x,t)=1-\frac{4\eta^2}{|\mu|^2-a^2+|\mu^2-a^2|\operatorname{ch}2\beta(x,t)},$$

$$S_1-iS_2=4\eta i\sqrt{|\mu^2-a^2|}\,\frac{e^{-i\theta}(\cos\varphi\operatorname{ch}\beta-i\sin\varphi\operatorname{sh}\beta)}{|\mu|^2-a^2+|\mu^2-a^2|\operatorname{ch}2\beta(x,t)}, \tag{4.3}$$

$$\beta(x,t)=2\eta(x-4\xi t)-\ln|A|,\ \mu=\xi+i\eta,\ \varphi=\frac{1}{2}\arg(\mu^2-a^2),$$

$$\theta(x,t)=2\xi x-4(\xi^2-\eta^2-a^2)t+\arg A;$$

$$a_2)\quad S_3(x,t)=1+\frac{(\lambda_1-\lambda_2)^2}{\sqrt{(a^2-\lambda_1^2)(a-\lambda_2^2)}\cos2\theta_1(x,t)+\lambda_1\lambda_2-a^2},$$

$$S_1(x,t)=\cos\theta_2(x,t)S_1^\circ(x,t)-\sin\theta_2(x,t)S_2^\circ(x,t),$$
$$S_2(x,t)=\sin\theta_2(x,t)S_1^\circ(x,t)+\cos\theta_2(x,t)S_2^\circ(x,t), \tag{4.4}$$

$$S_1^\circ(x,t)=(\lambda_2-\lambda_1)\sin\theta_1(x,t)\frac{\sqrt{a^2-\lambda_2^2}+\sqrt{a^2-\lambda_1^2}}{\sqrt{(a^2-\lambda_1^2)(a^2-\lambda_2^2)}\cos2\theta_1(x,t)+\lambda_1\lambda_2-a^2},$$

$$S_2^\circ(x,t)=(\lambda_2-\lambda_1)\cos\theta_1(x,t)\frac{\sqrt{a^2-\lambda_2^2}+\sqrt{a^2-\lambda_1^2}}{\sqrt{(a^2-\lambda_1^2)(a^2-\lambda_2^2)}\cos2\theta_1(x,t)+\lambda_1\lambda_2-a^2},$$

$$\theta_1(x,t)=(\lambda_2-\lambda_1)(x-2(\lambda_2+\lambda_1)t)+\varphi_2-\varphi_1,$$
$$\theta_2(x,t)=(\lambda_1+\lambda_2)(x-2(\lambda_2+\lambda_1)t)+4(a^2+\lambda_1\lambda_2)t+\varphi_2+\varphi_1.$$

Решение (4.3) представляет собой уединенную волну, движущуюся со скоростью $U=4\xi$. Движение сопровождается равномерным вращением вектора $\vec S$ в плоскости (S_1,S_2) с частотой

$$\omega=4\xi^2+4\eta^2+4a^2\equiv4|\mu|^2+4a^2. \tag{4.5}$$

Скорость v и частота ω являются двумя независимыми физическими параметрами, которые вместе с начальным положением

$$x_0 = \frac{1}{2\eta} \ln|A|$$

и начальной фазой вращения

$$\theta_0 = \arg A$$

однозначно характеризуют рассматриваемое солитонное решение. Заметим, что в случае легкой плоскости $a^2>0$ и вращение вектора $\vec{S}$ всегда имеет место, в то время как в случае легкой оси вращение может отсутствовать (уединенная спиновая волна). Условие отсутствия вращения имеет вид

$$\xi^2+\eta^2 = -a^2 .$$

<u>Вывод</u>: максимальная скорость, с которой могут двигаться уединенные спиновые волны, равна $4\sqrt{-a^2}$. При превышении этого значения должно возникнуть вращение вектора $\vec{S}$ в плоскости (S_1, S_2).

Решение (4.4) представляет собой бегущую <u>периодическую волну</u> с фазовой скоростью $v_\phi = 2(\lambda_1+\lambda_2)$. Так же как и в случае a_1), имеется вращение в плоскости (S_1, S_2) с частотой

$$\Omega = 4\,(a^2+\lambda_1\lambda_2).$$

Так как $|\lambda_j|<a$, то избежать вращения нельзя. Отметим еще раз, что этот тип решений возможен <u>лишь в случае легкой плоскости</u>. Укажем на следующее любопытное обстоятельство. S_3-компонента решения (4.4) может быть формально получена из S_3-компоненты решения (4.3), если в последней положить

$$\eta = \frac{i}{2}(\lambda_1-\lambda_2)\,, \qquad \xi = \frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}. \tag{4.6}$$

Более того, при условиях (4.6) частота ω переходит в частоту Ω! Таким образом, опираясь только на информацию о третьей компоненте вектора $\vec{S}$ и частоте вращения в плоскости (S_1, S_2) мы могли бы прийти к неверному заключению о возможности существования периодических

по x и t решений типа a_2) и в случае легкой оси. Имея же в руках полный набор формул (4.3), мы этой опасности избегаем – первые две компоненты вектора $\vec{S}$ становятся мнимыми при условиях (4.6).

Формулы (4.3), (4.4) показывают нам, что S_3-солитоны включают в себя и решения бризерного типа (неподвижные, осциллирующие во времени образования):

<u>a_1 -бризеры:</u> $\xi=0$

$$S_3(x,t) = 1 - \frac{4\eta^2}{\eta^2-a^2+|\eta^2+a^2|\,\mathrm{ch}\,4\eta(x-x_0)}\,,$$

$$S_1(x,t) = 4\eta\sqrt{|\eta^2+a^2|}\;\frac{\mathrm{ch}\,2\eta(x-x_0)\sin(4(\eta^2+a^2)t+\theta_0)}{\eta^2-a^2+|\eta^2+a^2|\,\mathrm{ch}\,4\eta(x-x_0)}\,, \tag{4.7}$$

$$S_2(x,t) = -4\eta\sqrt{|\eta^2+a^2|}\;\frac{\mathrm{ch}\,2\eta(x-x_0)\cos(4(\eta^2+a^2)t+\theta_0)}{\eta^2-a^2+|\eta^2+a^2|\,\mathrm{ch}\,4\eta(x-x_0)}\,;$$

<u>a_2 -бризеры:</u> $\lambda_1=-\lambda_2\equiv\lambda_0\,,\ |\lambda_0|<a$

$$S_3(x,t) = 1 + \frac{4\lambda_0^2}{(a^2-\lambda_0^2)\cos(4\lambda_0 x+2\theta_1)-\lambda_0^2-a^2}\,,$$

$$S_1(x,t) = -4\lambda_0\sqrt{a^2-\lambda_0^2}\;\frac{\sin(2\lambda_0 x+\theta_1)\cos(4(a^2-\lambda_0^2)t+\theta_2)}{(a^2-\lambda_0^2)\cos(4\lambda_0 x+2\theta_1)-\lambda_0^2-a^2}\,, \tag{4.8}$$

$$S_2(x,t) = 4\lambda_0\sqrt{a^2-\lambda_0^2}\;\frac{\sin(2\lambda_0 x+\theta_1)\sin(4(a^2-\lambda_0^2)t+\theta_2)}{(a^2-\lambda_0^2)\cos(4\lambda_0 x+2\theta_1)-\lambda_0^2-a^2}\,.$$

При всех значениях параметров $\mu\neq a$ и $A\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ формулы (4.3) описывают решения уравнения Л-Л, характеризуемые следующим поведением при больших $|x|$:

$$\vec{S} \to (0,0,1)\,, \quad |x|\to\infty. \tag{4.9}$$

Однако в случае легкой оси можно организовать такой предельный переход в параметрах μ, A, что условие (4.9) нарушится. Положим, считая $a = -\bar{a}$,

$$|A|^2 = -\frac{1}{4\gamma a^2}|\mu^2 - a^2|, \quad \gamma > 0,$$

$$\arg A = -\frac{1}{2}\arg(\mu^2 - a^2) + \psi, \quad \psi \in \mathbb{R}$$

и устремим $\mu \to a$. Формулы (4.3) перейдут тогда в формулы

$$S_3(x,t) = \operatorname{th}(2|a|x + \Delta), \quad \Delta = \frac{1}{2}\ln\gamma,$$

$$S_1(x,t) = \frac{\sin\psi}{\operatorname{ch}(2|a| + \Delta)}, \quad S_2(x,t) = \frac{-\cos\psi}{\operatorname{ch}(2|a| + \Delta)}. \qquad (4.10)$$

Решение (4.10) есть классическая "доменная стенка". При $x \to \pm\infty$ $\vec{S} \to (0, 0, \pm 1)$. В § 5 нам потребуются выражения для матрицы Q° и Ψ-функции, отвечающие решению (4.10). Соответствующие формулы легко получаются в результате предельного перехода в формулах (4.2) и (3.15) и имеют вид

$$Q^\circ \cong \begin{pmatrix} -\sqrt{\gamma}\, c_0 e^{2x|a| + i\psi} & , \; i \\ i c_0 e^{2i\psi} & , \; -\sqrt{\gamma}\, e^{2x|a| + i\psi} \end{pmatrix}, \qquad (4.11)$$

$$\Psi(\lambda) = D_1(\lambda) Q^\circ D(\lambda) \Psi_0(\lambda), \quad c_0 = \lim_{\mu \to a} \sqrt{\frac{\bar{\mu}^2 - a^2}{\mu^2 - a^2}}; \qquad (4.12)$$

в) <u>S_1-солитоны</u>

Так как

$$\exp\left(-i\sigma_1\sqrt{\lambda^2 - a^2}(x - 2\lambda t)\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\exp\left(-i\sigma_3\sqrt{\lambda^2 - a^2}(x - 2\lambda t)\right)\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix},$$

то в качестве Ψ_0 можно взять (и это оказывается удобно!) функцию

$$\Psi_0(\lambda, x, t) = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\exp\left\{-i\sigma_3\sqrt{\lambda^2 - a^2}(x - 2\lambda t)\right\}.$$

Соответствующие матрицы $\sigma_0(\lambda)$ и $M_0(\lambda)$ суть

$$\sigma_0(\lambda) \equiv \sigma_1, \quad M_0(\lambda) \equiv -\sigma_2,$$

и два типа условий вещественности таковы:

в$_1$) $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2 \equiv \mu$, $\operatorname{Im}\mu > 0$,

$$A_1 = -\frac{1}{\bar{A}_2} \equiv A, \quad A \in \mathbb{C} \setminus \{0\};$$

в$_2$) $(a = \bar{a}!)$, $\lambda_j \in \mathbb{R}$, $|\lambda_j| < a$, $j = 1, 2$,

$$A_j = -\bar{A}_j.$$

Из (3.12) для матриц Q°, отвечающих этим двум случаям, имеем:

в$_1$)

$$Q^\circ \cong \begin{pmatrix} (\operatorname{ch}\beta + \cos\theta)\sqrt{\bar{\mu}^2 - a^2} + (\operatorname{ch}\beta - \cos\theta)\sqrt{\mu^2 - a^2}, & (\bar{\mu} - \mu)(-\operatorname{sh}\beta + i\sin\theta) \\ (-\operatorname{sh}\beta - i\sin\theta)(\bar{\mu} - \mu), & (\operatorname{ch}\beta + \cos\theta)\sqrt{\mu^2 - a^2} + (\operatorname{ch}\beta - \cos\theta)\sqrt{\bar{\mu}^2 - a^2} \end{pmatrix}, \qquad (4.13)$$

$$\beta(x,t) = \operatorname{Re}\left\{2i\sqrt{\mu^2 - a^2}(x - 2\mu t)\right\} + \ln|A|,$$

$$\theta(x,t) = \operatorname{Im}\left\{2i\sqrt{\mu^2 - a^2}(x - 2\mu t)\right\} + \arg A;$$

в$_2$)

$$Q^\circ \cong \begin{pmatrix} i(1+E_1)(1-E_2)\sqrt{a^2 - \lambda_2^2} - i(1+E_2)(1-E_1)\sqrt{a^2 - \lambda_1^2}, & (1+E_1)(1+E_2)(\lambda_1 - \lambda_2) \\ (1-E_1)(1-E_2)(\lambda_2 - \lambda_1), & i(1+E_1)(1-E_2)\sqrt{a^2 - \lambda_1^2} - i(1+E_2)(1-E_1)\sqrt{a^2 - \lambda_2^2} \end{pmatrix}, \qquad (4.14)$$

$$E_j(x,t) = i\gamma_j \exp\left\{-2\sqrt{a^2 - \lambda_j}\,(x - 2\lambda_j t)\right\}, \quad \gamma_j = \operatorname{Im} A_j.$$

Собственно решения уравнения Л–Л восстанавливаются из (4.13), (4.14) по формуле

$$S = Q^\circ \sigma_1 (Q^\circ)^{-1} \qquad (4.15)$$

и имеют, при произвольных μ и λ_j, весьма громоздкий вид, приводить который мы не будем. Тем более, что вся физическая информация легко может быть извлечена непосредственно из формул (4.13)–(4.15).

В случае общего положения решение (4.13) описывает локализованный по x солитон $(\vec{S} \to (1,0,0), |x| \to \infty)$, движущийся со скоростью, определяемой из линейной функции $\beta(x,t)$. Движение, в отличие от тривиального вращения S_3-солитонов, сопровождается прецессией вектора $\vec{S}$ во времени. Частота прецессии вычисляется по линейной функпри $\theta(x,t)$. Соответствующее бризерное решение (неподвижный бион) получается из (4.I3) при условии $\operatorname{Re}\mu=0, |\mu|>|a|$ (в случае легкой оси). Формулы для $\vec{S}$ при этом сильно упрощаются, и становится возможным их привести:

B_1 -бризер: $\mu_1=i\eta,\ \eta>0$ (легкая плоскость), $\eta>|a|$ (легкая ось):

$$S_1(x,t)=\frac{\eta^2 ch^2(kx+\beta_0)-a^2\cos^2(\omega t+\theta_0)-2\eta^2}{\eta^2 ch^2(kx+\beta_0)+a^2\cos^2(\omega t+\theta_0)},$$

$$S_2(x,t)=2\eta^2\frac{\sin(\omega t+\theta_0)\,sh(kx+\beta_0)}{\eta^2 ch^2(kx+\beta_0)+a^2\cos^2(\omega t+\theta_0)}, \tag{4.16}$$

$$S_3(x,t)=-2\eta\sqrt{\eta^2+a^2}\,\frac{\cos(\omega t+\theta_0)\,sh(kx+\beta_0)}{\eta^2 ch^2(kx+\beta_0)+a^2\cos^2(\omega t+\theta_0)},$$

$$k=-2\sqrt{\eta^2+a^2},\ \omega=4\eta\sqrt{\eta^2+a^2},\ \beta_0=\ln|A|,\ \theta_0=\arg A.$$

Подчеркнем еще раз нетривиальную по сравнению с S_3 -бризером (см. (4.7)) зависимость биона (4.I6) от времени. Анализ формулы (4.I3) закончим следующим наблюдением: в случае легкой оси существует решение, убывающее по t и осциллирующее по x. Для его получения достаточно в формуле (4.I3) положить $\mu=i\eta,\ 0<\eta<|a|$. Тогда

$$\beta(x,t)=4\eta\sqrt{|a|^2-\eta^2}\,t+\beta_0,$$

$$\theta(x,t)=2\sqrt{|a|^2-\eta^2}\,x+\theta_0.$$

Формулы для самого решения таковы: $(a=-\bar{a}!)$

$$S_1(x,t)=\frac{a^2 ch^2(\Omega t+\beta_0)-\eta^2\cos^2(kx+\theta_0)+2\eta^2}{a^2 ch^2(\Omega t+\beta_0)+\eta^2\cos^2(kx+\theta_0)},$$

$$S_2(x,t)=-\frac{2\eta^2 sh(\Omega t+\beta_0)\sin(kx+\theta_0)}{a^2 ch^2(\Omega t+\beta_0)+\eta^2\cos^2(kx+\theta_0)},$$

$$S_3(x,t)=-\frac{2\eta\sqrt{|a|^2-\eta^2}\,ch(\Omega t+\beta_0)\sin(kx+\theta_0)}{a^2 ch^2(\Omega t+\beta_0)+\eta^2\cos^2(kx+\theta_0)},$$

$$k=2\sqrt{|a|^2-\eta^2},\quad \Omega=4\eta\sqrt{|a|^2-\eta^2}. \tag{4.17}$$

Переходя к обсуждению B_2-солитонов, отметим сразу, что структура формулы (4.I4) много проще структуры формулы (4.I3). Какие-либо осцилляции в формуле (4.I4) отсутствуют. По сути дела, она описывает взаимодействие двух более простых решений односолитонного типа. Это односолитонное решение может быть получено из формулы (4.I4) в результате предельного перехода

$$\lambda_1\to a,\quad A_1\to 0. \tag{4.18}$$

Матрица Q° при этом сильно упрощается:

$$Q^\circ\cong\begin{pmatrix} i(1-E_2)\sqrt{a^2-\lambda_2^2}, & (1+E_2)(a-\lambda_2)\\ (1-E_2)(\lambda_2-a), & -i(1+E_2)\sqrt{a^2-\lambda_2^2}\end{pmatrix},$$

и само решение имеет вид

$$S_1(x,t)=-th\left(2\sqrt{a^2-\lambda^2}(x-2\lambda t)+\Delta\right),$$

$$S_2(x,t)=\mp\frac{\lambda}{a}\,\frac{1}{ch\left(2\sqrt{a^2-\lambda^2}(x-2\lambda t)+\Delta\right)}, \tag{4.19}$$

$$S_3(x,t)=\pm\frac{\sqrt{a^2-\lambda^2}}{a}\,\frac{1}{ch\left(2\sqrt{a^2-\lambda^2}(x-2\lambda t)+\Delta\right)},$$

где $\lambda\equiv\lambda_2,\ \Delta=-\ln|\gamma_2|$, и в равенствах для S_2, S_3 верхний знак соответствует $\gamma_2>0$, а нижний - $\gamma_2<0$. Решение (4.I9) представляет собой движущуюся доменную стенку *) $(\vec{S}\to(\mp1,0,0), x\to\pm\infty)$. Формулу (4.I4) можно тогда интерпретировать как взаимодействие двух доменных стенок. Однако дальше развивать эту точку зрения оказывает-

*) Подчеркнем еще раз, что это решение мы получили только для случая легкой плоскости.

ся не целесообразно. В § 9 для решений (4.I9) нами будут получены общие N -солитонные формулы. Поэтому изучение взаимодействия друг с другом S_1-солитонов типа (4.I9) естественно отнести в § 9.

Все рассмотренные выше решения характеризовались либо экспоненциальным, либо тригонометрическим поведением по x . Однако как различные предельные случаи в формулах (4.3),(4.4) и (4.I3) содержатся также и решения уравнения Л-Л со степенным поведением по x ("рациональные" солитоны).

I. Рациональные солитоны в случае легкой плоскости

Положим в формуле (4.3)

$$\eta \to 0, |\xi| < a \ (a^2 > 0!)\ ; \ \theta_0, x_0 = O(1). \tag{4.20}$$

Тогда *) (см.рис.I) $\varphi \to \frac{\pi}{2}$. Более точно:

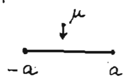

Рис.I

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2\xi\eta}{\xi^2-\eta^2-a^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\xi}{a^2-\xi^2}\eta + o(\eta) \Rightarrow \begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{\xi}{a^2-\xi^2}\eta + O(\eta^3) \\ \sin\varphi = 1 + O(\eta^2). \end{cases} \tag{4.21}$$

Оценки для остальных объектов, входящих в формулы (4.3), получаются столь же просто:

$$\begin{gathered} |\mu^2-a^2| = \sqrt{(\xi^2-\eta^2-a^2)^2+4\xi^2\eta^2} = a^2-\xi^2+\eta^2\left(1+\frac{2\xi^2}{a^2-\xi^2}\right)+O(\eta^4), \\ \operatorname{sh}\beta = 2\eta(x-4\xi t-x_0)+O(\eta^3), \\ \operatorname{ch}\beta = 1+O(\eta^2), \\ \operatorname{ch}2\beta = 1+8\eta^2(x-4\xi t-x_0)^2+O(\eta^4), \\ |\mu|^2-a^2 = \xi^2-a^2+\eta^2,\ \theta = 2\xi x-4(\xi^2-a^2)t+\theta_0+O(\eta^2). \end{gathered} \tag{4.22}$$

*) Указанный на рис.I выбор разреза согласован с законом действия антиинволюции $\lambda \to \bar{\lambda}$ на Γ (см.§ I).

Из (4.22) и (4.2I) получаем, что при предельном переходе (4.20) решение (4.3) превращается в решение вида

$$\begin{gathered} S_3(x,t) = 1 - \frac{2(a^2-\xi^2)}{a^2+4(a^2-\xi^2)^2(x-4\xi t-x_0)^2}, \\ S_1+iS_2 = -\frac{4i\sqrt{a^2-\xi^2}\left(\frac{1}{2}\xi\eta+i(a^2-\xi^2)(x-4\xi t-x_0)\right)}{a^2+4(a^2-\xi^2)^2(x-4\xi t-x_0)^2}\exp\{2i\xi x-4i(\xi^2-a^2)t+\theta_0\}. \end{gathered} \tag{4.23}$$

Решение (4.23) есть снова равномерно движущийся и равномерно вращающийся в плоскости (S_1, S_2) солитон. Однако в отличие от "экспоненциального" случая имеется ограничение на скорость движения: $|v| < 4a$.

2. Рациональные солитоны в случае легкой оси

Отталкиваясь на этот раз от S_1-солитона (4.I3)-(4.I5), и считая $a = -\bar{a}$, рассмотрим следующий предельный переход:

$$\mu = a + O(\varepsilon),\ \sqrt{\mu^2-a^2} = \varepsilon e^{i\gamma},\ \ln|A| = -\varepsilon \operatorname{Re}(2ie^{i\gamma}x_0),$$

$$\arg A = -\varepsilon \operatorname{Im}(4|a|e^{i\gamma}t_0);\ \gamma, x_0, t_0 \in \mathbb{R},\ \varepsilon \downarrow 0.$$

Предельное выражение для матрицы Q^0 из (4.I3) будет иметь, очевидно, вид

$$Q^0 \simeq \begin{pmatrix} 2e^{-i\gamma}, & -4i|a|e^{-i\gamma}[i(x-x_0)-2|a|(t-t_0)] \\ 4i|a|e^{i\gamma}[i(x-x_0)+2|a|(t-t_0)], & 2e^{i\gamma} \end{pmatrix}. \tag{4.24}$$

Подставляя (4.24) в (4.I5), получаем формулы для соответствующего решения уравнения Л-Л:

$$S_3(x,t)=\frac{4|a|(x-x_0)}{1+4|a|^2\left[(x-x_0)^2+4|a|^2(t-t_0)^2\right]},$$
$$S_1(x,t)-iS_2(x,t)=\frac{e^{-2i\gamma}\left[1-4|a|^2((x-x_0)+2i|a|(t-t_0))^2\right]}{1+4|a|^2\left[(x-x_0)^2+4|a|^2(t-t_0)^2\right]}. \qquad (4.25)$$

В отличие от (4.23) это решение бризерного типа и характеризуется полностью рациональным поведением по обеим переменным. Еще раз подчеркнем, что решение типа (4.25) существует только в случае легкой оси, в то время как решение типа (4.23) - только в случае легкой плоскости.

§ 5. ПРОЦЕДУРА ОДЕВАНИЯ. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СОЛИТОННЫХ РЕШЕНИЙ

По своей сути развиваемая нами процедура одевания есть процедура индуктивная: после ее однократного применения мы получим сразу пару $(\vec{S},\Psi)$, которую снова можем одеть по тем же формулам (3.I2)-(3.I5), считая теперь $\Psi_0\equiv\Psi$, и т.д. Существенно, что при этом, в силу замечания 5, "редукционные" матрицы $\sigma(\lambda)$ и $M(\lambda)$ сохраняются на протяжении всего возникающего итерационного ряда. То есть на каждом шаге мы имеем один и тот же спектр условий на параметры преобразования (λ_j, A_j). Поэтому если однократное использование процедуры одевания дает нам описание и классификацию всех элементарных возбуждений, порождаемых исходным "вакуумом" (S_0,Ψ_0), то все последующие итерации позволяют нам описать всевозможные процессы взаимодействия этих элементарных возбуждений между собой. В настоящем параграфе проиллюстрируем эффективность такого подхода на примере описания парного взаимодействия S_3-солитонов.

Случай I. Взаимодействие двух S_3-солитонов типа (a_1):

Рис.2

Двухсолитонное решение, схематически изображенное на рис.2, может быть получено в результате двух способов двукратного одевания:

$$\left(\Psi_0,\vec{S}_0=(0,0,1)\right)\xrightarrow{(\mu_1,A_1)}\left(\Psi_1,\vec{S}_1\right)\xrightarrow{(\mu_2,A_2)}\left(\Psi_{12},\vec{S}_{12}\right),$$
$$\left(\Psi_0,\vec{S}_0=(0,0,1)\right)\xrightarrow{(\mu_2,A_2)}\left(\Psi_2,\vec{S}_2\right)\xrightarrow{(\mu_1,A_1)}\left(\Psi_{21},\vec{S}_{21}\right). \qquad (5.I)$$

Очевидно, что $\vec{S}_{12}=\vec{S}_{21}$, ибо эти два решения обладают одинаковым набором данных задачи Римана. Для вычисления эффекта воздействия солитона (μ_1,A_1) на солитон (μ_2,A_2) будем исходить из первой строчки в (5.I). Найдем асимптотику функции Ψ_1 при условиях $t\to\pm\infty$, $x-4\xi_2 t=\mathrm{const}$. Считая, для определенности, что $\xi_2<\xi_1$, имеем (см.(3.9),(3.I0)) при $t\to+\infty$, $x-4\xi_2 t=\mathrm{const}$:

$$\left.\begin{aligned}\vec{X}_1&=\sqrt{\mu_1^2-a^2}\,A_1\exp\{-\eta_1(x-4\xi_2t)-4\eta(\xi_2-\xi_1)t\}\left[\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+o(1)\right]\\ \vec{X}_2&=(\bar{\mu}_1-a)\exp\{-\eta_1(x-4\xi_2t)-4\eta(\xi_2-\xi_1)t\}\left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+o(1)\right]\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}W=\exp\{-\eta_1(x-4\xi_2t)-4\eta(\xi_2-\xi_1)t\}\left[I+o(1)\right]\begin{pmatrix}0, & \bar{\mu}_1-a\\ A_1\sqrt{\mu_1^2-a^2}, & 0\end{pmatrix},\\ V=\exp\{-\eta_1(x-4\xi_2t)-4\eta(\xi_2-\xi_1)t\}\left[\begin{pmatrix}1/(\bar{\mu}_1-a), & 0\\ 0, & 1/(\mu_1+a)\end{pmatrix}+o(1)\right]\begin{pmatrix}0, & \bar{\mu}_1-a\\ A_1\sqrt{\mu_1^2-a^2}, & 0\end{pmatrix},\end{cases}$$

$$\Rightarrow VW^{-1}=\begin{pmatrix}1/(\bar{\mu}_1-a) & 0\\ 0 & 1/(\mu_1+a)\end{pmatrix}+o(1). \qquad (5.2)$$

Подставляя (5.2) в формулу (3.I5), получаем для $\Psi_1(\lambda)$ искомую асимптотику

$$\Psi_1(\lambda)=\frac{\lambda-\bar{\mu}_1}{\bar{\mu}_1-a}\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \delta_0\dfrac{\lambda-\mu_1}{\mu_1+a}\,\dfrac{\bar{\mu}_1-a}{\lambda-\bar{\mu}_1}\end{pmatrix}+o(1)\right\}\Psi_0(\lambda), \tag{5.3}$$

$t\to+\infty$, $x-4\xi_2 t=\mathrm{const}$, $\xi_2<\xi_1$.

Совершенно аналогичные вычисления при $t\to-\infty$ приводят к формуле

$$\Psi_1(\lambda)=\frac{\lambda-\mu_1}{\mu_1-a}\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \delta_0\dfrac{\lambda-\bar{\mu}_1}{\lambda-\mu_1}\,\dfrac{\mu_1-a}{\bar{\mu}_1+a}\end{pmatrix}+o(1)\right\}\Psi_0(\lambda), \tag{5.4}$$

$t\to-\infty$, $x-4\xi_2 t=\mathrm{const}$, $\xi_2<\xi_1$.

Асимптотика (5.3) показывает нам, что вторая стрелка в первой строчке (5.I) при $t\to+\infty$ и $x-4\xi_2 t=\mathrm{const}$ превращается в простое одевание "нулевого" затравочного решения $(\vec{S}_0, \Psi_0)$, характеризуемое параметрами

$$\mu_2,\ A_2^+=A_2\delta_0\,\frac{\bar{\mu}_1-a}{\mu_1+a}\,\frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_2-\bar{\mu}_1}.$$

Иными словами, при $t\to+\infty$, $x-4\xi_2 t=\mathrm{const}$ решение $\vec{S}_{12}$ имеет своей асимптотикой S_3 -солитон вида (4.3), характеризуемый скоростью $v_2=4\xi_2$, круговой частотой $\omega_2=4(\xi_2^2+\eta_2^2+a^2)$, начальным положением

$$x_{02}^+=\frac{1}{2\eta_2}\left\{\ln|A_2\delta_0|+\ln\left|\frac{\bar{\mu}_1-a}{\mu_1+a}\,\frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_2-\bar{\mu}_1}\right|\right\}.$$

и начальной фазой вращения

$$\theta_{02}^+=\arg A_2+\arg\delta_0+\arg\left(\frac{\bar{\mu}_1-a}{\mu_1+a}\,\frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_2-\bar{\mu}_1}\right).$$

Аналогично из асимптотики (5.4) получаем, что при $t\to-\infty$ и $x-4\xi_2 t=\mathrm{const}$ решение $\vec{S}_{12}$ асимптотически выходит на S_3 -солитон вида (4.3), характеризуемый той же скоростью v_2 и той же частотой ω_2, но иными значениями параметров x_{02} и θ_{02}:

$$x_{02}^-=\frac{1}{2\eta_2}\left\{\ln|A_2\delta_0|+\ln\left|\frac{(\mu_1-a)\,(\mu_2-\bar{\mu}_1)}{(\bar{\mu}_1+a)\,(\mu_2-\mu_1)}\right|\right\},$$

$$\theta_{02}^-=\arg A_2+\arg\delta_0+\arg\left(\frac{\mu_1-a}{\bar{\mu}_1+a}\,\frac{\mu_2-\bar{\mu}_1}{\mu_2-\mu_1}\right).$$

Вывод: результат воздействия солитона (μ_1) на солитон (μ_2) сводится к сдвигам положения центра масс и начальной фазы вращения в плоскости (S_1,S_2):

$$\Delta x_{02}=x_{02}^+-x_{02}^-=\frac{1}{\eta_2}\ln\left|\frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_2-\bar{\mu}_1}\right|,$$
$$\Delta\theta_{02}=\theta_{02}^+-\theta_{02}^-=-2\arg(\mu_1^2-a^2)+2\arg\frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_2-\bar{\mu}_1}. \tag{5.5}$$

Для получения асимптотики решения $\vec{S}_{12}=\vec{S}_{21}$ при $t\to\pm\infty$ и $x-4\xi_1 t=\mathrm{const}$ нужно отталкиваться от второй строчки в (5.I). При этом мы, очевидно, получим, что асимптотикой $\vec{S}_{12}$ при $t\to\pm\infty$ будет S_3 -солитон вида (4.3), характеризуемый на этот раз скоростью $v_1=4\xi_1$ и частотой вращения $\omega_1=4(\xi_1^2+\eta_1^2+a^2)$. Соответствующие сдвиги положения центра масс и начальной фазы вращения опишутся формулами, аналогичными формулам (5.5):

$$\Delta x_{01}=\frac{1}{\eta_1}\ln\left|\frac{\mu_1-\bar{\mu}_2}{\mu_1-\mu_2}\right|,$$

$$\Delta\theta_{01}=2\arg(\mu_2^2-a^2)+2\arg\left(\frac{\mu_1-\bar{\mu}_2}{\mu_1-\mu_2}\right).$$

В заключении анализа этого случая взаимодействия приведем выражение для сдвига центра масс солитонов через физические параметры v_j и ω_j:

$$\Delta x_{02}=-\frac{\eta_1}{\eta_2}\Delta x_{01}=$$

$$= \frac{1}{2\gamma_1} \ln \frac{2\omega_2 + 2\omega_1 - 16a^2 - \upsilon_1\upsilon_2 - \sqrt{4\omega_1 - 16a^2 - \upsilon_1^2}\sqrt{4\omega_2 - 16a^2 - \upsilon_2^2}}{2\omega_2 + 2\omega_1 - 16a^2 - \upsilon_1\upsilon_2 + \sqrt{4\omega_1 - 16a^2 - \upsilon_1^2}\sqrt{4\omega_2 - 16a^2 - \upsilon_2^2}} .$$

<u>Случай 2</u>. Взаимодействие S_3–солитона типа (a_1) с S_3–солитоном типа (a_2) (случай легкой плоскости):

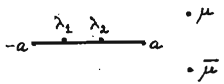

Рис.3

Решение, описывающее этот вид взаимодействия, схематически изображено на рис.3. Оно может быть реализовано как следующее двукратное одевание:

$$\left(\Psi_0, \vec{S}_0 = (0,0,1)\right) \xrightarrow{(\mu, A)} \left(\Psi_1, \vec{S}_1\right) \xrightarrow{(\lambda_1, \lambda_2, \varphi_1, \varphi_2)} \left(\Psi_{12}, \vec{S}_{12}\right). \qquad (5.6)$$

Считая $\xi > \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$ и повторяя дословно соответствующие рассуждения предыдущего пункта, мы снова приходим к формулам (5.3) (при $t \to +\infty$, $x - 2(\lambda_1 + \lambda_2)t = const$) и (5.4) (при $t \to -\infty$, $x - 2(\lambda_1 + \lambda_2)t = const$). Это обстоятельство позволяет нам сделать вывод о том, что вторая стрелка в (5.6) при $t \to \pm\infty$, $x - 2(\lambda_1 + \lambda_2)t = const$ превращается в простое a_2–одевание "нулевого" затравочного решения $(\vec{S}_0, \Psi_0)$, характеризуемое эффективными параметрами

$$\lambda_j, \ \varphi_j^+ = \varphi_j - \arg(\mu^2 - a^2) + 2\arg(\lambda_j - \mu) \qquad (t \to +\infty),$$

$$\lambda_j, \ \varphi_j^- = \varphi_j + \arg(\mu^2 - a^2) - 2\arg(\lambda_j - \mu) \qquad (t \to -\infty).$$

Тем самым при $t \to \pm\infty$, $x - 2(\lambda_1 + \lambda_2)t = const$ решение $\vec{S}_{12}$ имеет своей асимптотикой периодический S_3–солитон вида (4.4), характеризуемый фазовой скоростью $\upsilon_\varphi = 2(\lambda_1 + \lambda_2)$, круговой частотой

$\Omega = 4(a^2 + \lambda_1\lambda_2)$ и начальными значениями фаз движения и вращения:

$$\varphi_2^\pm - \varphi_1^\pm = \pm 2\arg\frac{\lambda_2 - \mu}{\lambda_1 - \mu},$$

$$\varphi_2^\pm + \varphi_1^\pm = \mp 2\arg(\mu^2 - a^2) \pm 2\arg(\lambda_2 - \mu)(\lambda_1 - \mu) + \varphi_2 + \varphi_1 .$$

Иными словами, эффект воздействия S_3–солитона типа (a_1) на периодическую волну (a_2) описывается соотношениями

$$\Delta(\varphi_2 - \varphi_1) = 4\arg\frac{\lambda_2 - \mu}{\lambda_1 - \mu}, \qquad (5.7)$$

$$\Delta(\varphi_2 + \varphi_1) = -4\arg(\mu^2 - a^2) + 4\arg(\lambda_2 - \mu)(\lambda_1 - \mu).$$

В физических параметрах (υ, ω) солитона и $(\upsilon_\varphi, \Omega)$ периодической волны формулы (5.7) могут быть записаны следующим образом:

$$\Delta(\varphi_2 - \varphi_1) = 4\arg\frac{\upsilon_\varphi + 2\sqrt{\upsilon_\varphi^2/4 - \Omega + 4a^2} - \mu}{\upsilon_\varphi - 2\sqrt{\upsilon_\varphi^2/4 - \Omega + 4a^2} - \mu},$$

$$\Delta(\varphi_2 + \varphi_1) = -4\arg(\mu^2 - a^2) + 4\arg\left(\mu^2 - \frac{1}{2}\upsilon_\varphi\mu + \frac{1}{4}\Omega - a^2\right),$$

$$\mu = \frac{1}{4}\upsilon + i\sqrt{\frac{\omega}{4} - \frac{\upsilon^2}{16} - a^2} .$$

<u>Случай 3</u>. Взаимодействие S_3–солитона типа (a_1) с доменной стенкой (случай легкой оси):

Как показано в § 4, доменная стенка (4.10) есть вырожденный случай ($\mu \to a$, $A \to c$) S_3–солитона (4.3). Поэтому, разбираемый нами сейчас случай взаимодействия можно изучить на базе взаимодействия двух S_3–солитонов, производя в соответствующих формулах предельный переход

$$\mu_2 \to a, \ A_2 \to 0 \ \left(A_2 \equiv \frac{1}{2|a|\sqrt{\gamma}}\sqrt{\bar{\mu}_2^2 - a^2}\, e^{i\psi}\right). \qquad (5.8)$$

Схематически полученное при этом решение $\vec{S}_{12}$ изображено на рис. 4.

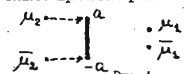

Рис.4

Оно может быть реализовано в результате выполнения следующих двух последовательностей одеваний и вырождений:

$$(\Psi_0,\vec S_0)\xrightarrow{(\mu_1,A_1)}(\Psi_1,\vec S_1)\xrightarrow{(\mu_2,A_2)}(\Psi_{12},\vec S_{12})\xrightarrow[A_2\to 0]{\mu_2\to a}(\Psi^0_{12},\vec S^0_{12}), \quad (5.9)$$

$$(\Psi_0,\vec S_0)\xrightarrow{(\mu_2,A_2)}(\Psi_2,\vec S_2)\xrightarrow[A_2\to 0]{\mu_2\to a}(\Psi^0_2,\vec S^0_2)\xrightarrow{(\mu_1,A_1)}(\Psi^0_{12},\vec S^0_{12}). \quad (5.10)$$

По аналогии с предыдущими случаями для вычисления эффекта воздействия солитона на доменную стенку нужно сравнить асимптотики при $t\to\pm\infty$, $x=\mathrm{const}$. Эти асимптотики удобно находить, опираясь на диаграмму (5.9). Напротив, воздействие доменной стенки на солитон (т.е. асимптотики $\vec S^0_{12}$ при $t\to\pm\infty$, $x-4\xi_1 t=\mathrm{const}$) легче считается, если воспользоваться диаграммой (5.10).

а) Воздействие солитона на доменную стенку.

Запишем функцию $\Psi_1(\lambda)$ в виде (см. (3.1), (3.3)):

$$\Psi_1(\lambda)=f(\lambda)\Psi_0(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda(q_0+q_3)+p_3+p_0, & (q_1-iq_2)\sqrt{\lambda^2-a^2}\\ (q_1+iq_2)\sqrt{\lambda^2-a^2}, & \lambda(q_0-q_3)-p_3+p_0\end{pmatrix}\times$$

$$\times\exp\{-i\sigma_3 x\lambda+2i\sigma_3 t(\lambda^2-a^2)\}. \quad (5.11)$$

Беря (5.11) в качестве Ψ_0 в формулах (3.12), (3.13) (вторая стрелка в (5.9)) и устраивая в последних предельный переход (5.8) (третья стрелка в (5.9)) для матрицы Q^0, отвечающей решению $\vec S^0_{12}$, получаем явное представление в виде

$$Q^0_{11}=-\Psi_{11}(a)\Psi_{22}(\bar a)\sqrt{\gamma}\,2|a|e^{i\psi}c_0,\quad Q^0_{22}=\frac{1}{c_0}Q^0_{11},$$

$$Q^0_{12}=-2i|a|(\Psi_1(a))_{11}2|a|\sqrt{\gamma}e^{i\psi}c_0(q_1-iq_2)e^{x|a|}+$$

$$+2i|a|\Psi_{11}(a)[\Psi_1(\bar a)]_{11}, \quad (5.12)$$

$$Q^0_{21}=2i|a|[\Psi_1(\bar a)]_{22}2|a|\sqrt{\gamma}e^{i\psi}(q_1+iq_2)e^{x|a|}+$$

$$+2i|a|[\Psi_1(a)]_{22}[\Psi_1(\bar a)]_{22}c_0e^{2i\psi},$$

где

$$c_0=\lim_{\mu\to a}\sqrt{\frac{\bar\mu^2-a}{\mu^2-a}}\qquad (|c_0|=1\,!).$$

Положим теперь $t\to+\infty$, $x=\mathrm{const}$. Для функции $\Psi_1(\lambda)$ можно тогда воспользоваться асимптотикой (5.3), что приводит к следующему упрощению формул (5.12):

$$Q^0_+\cong\begin{pmatrix}-\left|\frac{\mu_1+a}{\mu_1-a}\right|e^{2x|a|}\sqrt{\gamma}e^{i\psi}c_0, & i\\ ic_0e^{2i\psi}, & -\left|\frac{\mu_1+a}{\mu_1-a}\right|e^{2x|a|}\sqrt{\gamma}e^{i\psi}\end{pmatrix}. \quad (5.13)$$

В рассматриваемом пределе $\vec S_1\to(0,0,1)$. Поэтому асимптотика решения $\vec S^0_{12}$ имеет вид

$$S^0_{12}=Q^0_+\sigma_3(Q^0_+)^{-1},\quad t\to+\infty,\ x=\mathrm{const}.$$

Сопоставляя (5.13) с выражением (4.11) для матрицы Q^0 доменной стенки, приходим к выводу, что асимптотикой $\vec S^0_{12}$ при $t\to+\infty$, $x=\mathrm{const}$ является доменная стенка, характеризуемая параметрами

$$\gamma^+=\gamma\left|\frac{\mu_1+a}{\mu_1-a}\right|^2,\quad \psi^+=\psi. \quad (5.14)$$

Аналогичным образом, подставляя в (5.12) асимптотику (5.4), приходим к заключению, что при $t\to-\infty$, $x=\mathrm{const}$ решение $\vec S^0_{12}$ снова есть доменная стенка, но с параметрами

$$\gamma^-=\gamma\left|\frac{\mu_1-a}{\mu_1+a}\right|^2,\quad \psi^-=\psi.$$

Таким образом, эффект воздействия S_3-солитона (4.3), характеризуемого скоростью $v_1=4\mathrm{Re}\,\mu_1$ и частотой $\omega_1=4|\mu_1|^2+4a^2$ на доменную стенку (4.10), описывается соотношениями:

$$\Delta^{+}-\Delta^{-}=2\ln\left|\frac{\mu_1+a}{\mu_1-a}\right|,$$
$$\psi^{+}=\psi^{-}. \qquad (5.15)$$

б) Воздействие доменной стенки на солитон.

Результат выполнения первых двух стрелок в (5.7) описывается формулами (4.10) и (4.12) – это доменная стенка и ее Ψ-функция, характеризуемые параметрами γ и ψ. Положим $t\to+\infty, x-4\xi_1 t=\mathrm{const}$. Тогда $x\to+\infty$, и формулы (4.10),(4.12) переходят в

$$\Psi_2^{\circ}(\lambda)=\begin{pmatrix} c_0(\lambda-a) & 0 \\ 0 & \lambda+a\end{pmatrix}\exp\{-ix\sigma_3\lambda+2i\sigma_3(\lambda^2-a^2)t\},$$
$$\vec{S}_2^{\circ}=(0,0,1). \qquad (5.16)$$

То есть третья стрелка в (5.10) превращается в простое a_1-одевание с эффективными параметрами

$$\mu_1,\quad A_1^{+}=A_1\frac{\mu_1+a}{\mu_1-a}\frac{1}{c_0}.$$

Тем самым при $t\to+\infty, x-4\xi_1 t=\mathrm{const}$ решение $\vec{S}_{12}^{\circ}$ имеет своей асимптотикой S_3-солитон (4.3), характеризуемый параметрами

$$v_1=4\xi_1,\quad \omega_1=4|\mu_1|^2+4a^2,\quad 2\chi=\arg c_0, \qquad (5.17)$$
$$x_0^{+}=\frac{1}{2\eta_1}\ln|A_1|+\frac{1}{2\eta_1}\ln\left|\frac{\mu_1+a}{\mu_1-a}\right|,\ \theta_0^{+}=\arg A_1-2\chi+\arg\frac{\mu_1+a}{\mu_1-a}.$$

Пусть теперь $t\to-\infty, x-4\xi_1 t=\mathrm{const}$. Тогда $x\to-\infty$, и вместо (5.16) мы имеем формулы

$$\Psi_2^{\circ}(\lambda)=\sqrt{\lambda^2-a^2}\begin{pmatrix} 0 & e^{-i\psi-i\chi} \\ e^{i\psi+i\chi} & 0\end{pmatrix}\exp\{-ix\sigma_3\lambda+2i\sigma_3(\lambda^2-a^2)t\}, \qquad (5.18)$$
$$\vec{S}_2^{\circ}=(0,0,-1).$$

Обозначим через Q_{cl}° матрицу Q°, отвечающую S_3-солитону $\vec{S}_{cl}$, характеризуемому параметрами μ_1, A_1. Как нетрудно убедиться, матрица Q_{-}°, получающаяся в результате одевания по формуле (3.12) функции (5.18), связана с матрицей Q_{cl}° соотношением

$$Q_{-}^{\circ}=\mathbb{T}Q_{cl}^{\circ}\mathbb{T},\qquad \mathbb{T}=\begin{pmatrix} 0 & e^{-i(\psi+\chi)} \\ e^{i(\psi+\chi)} & 0\end{pmatrix}.$$

Отсюда для решения $\vec{S}_{12}^{\circ}$ при $t\to-\infty, x-4\xi_1 t=\mathrm{const}$ имеем

$$\vec{S}_{12}^{\circ}=\mathbb{T}Q_{cl}^{\circ}\mathbb{T}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\mathbb{T}(Q_{cl}^{\circ})^{-1}\mathbb{T}=\mathbb{T}Q_{cl}^{\circ}\sigma_3 Q_{-cl}^{\circ}=$$
$$=\mathbb{T}S_{cl}\mathbb{T}=\begin{pmatrix} -S_{3cl} & (S_{1cl}+iS_{2cl})e^{-2i(\psi+\chi)} \\ (S_{1cl}-iS_{2cl})e^{2i(\psi+\chi)}, & S_{3cl}\end{pmatrix}.$$

Вывод: при $t\to-\infty, x-4\xi_1 t=\mathrm{const}$ решение $\vec{S}_{12}^{\circ}$ превращается в S_3-солитон (4.3), повернутый в плоскости (S_2,S_3) на 180° $((S_1,S_2,S_3)\to(S_1,-S_2,-S_3))$ и характеризуемый параметрами

$$v_1=4\xi_1,\quad \omega_1=4|\mu_1|^2+4a^2,$$
$$x_0^{-}=\frac{1}{2\eta_1}\ln|A_1|,\ \theta_0^{-}=\arg A_1-2\chi-2\psi.$$

Таким образом, эффект прохождения S_3-солитона (4.3) через доменную стенку (4.10) описывается соотношениями

$$(S_1,S_2,S_3)\to(S_1,-S_2,-S_3),$$
$$\Delta x_0=x_0^{+}-x_0^{-}=\frac{1}{2\eta_1}\ln\left|\frac{\mu_1+a}{\mu_1-a}\right|, \qquad (5.19)$$
$$\Delta\theta_0=\theta_0^{+}-\theta_0^{-}=\arg\frac{\mu_1+a}{\mu_1-a}+2\psi.$$

Отметим, что в отличие от взаимодействия двух S_3-солитонов в формулах (5.15),(5.19), описывающих взаимодействие доменной стенки и солитона, имеется явная несимметрия. В частности, сдвиг солитона в два раза меньше сдвига доменной стенки.

На этом мы заканчиваем демонстрацию применения процедуры одевания к вопросам взаимодействия элементарных решений уравнения Л-Л. Заметим только, что, устраивая соответствующие предельные переходы в полученных нами формулах, можно без труда описать и процессы взаимодействия с участием рациональных солитонов (4.2I). Наконец, совершенно аналогичным образом может быть исследовано взаимодействие S_1 -солитонов. Однако в этом случае гораздо эффективнее оказывается подход, основанный на вырождении конечнозонных решений уравнения Л-Л. Этот подход будет изложен в § 9. (часть II настоящей работы).

Рамиль Фаритович Бикбаев (ЛГУ)
Александр Иванович Бобенко (ЛОМИ)
Александр Рудольфович Итс (ЛГУ)

УРАВНЕНИЕ ЛАНДАУ-ЛИФШИЦА.
ТЕОРИЯ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ
(Часть I)

Отдел научно-технической информации
ДонФТИ АН УССР

Научный редактор д-р физ.-мат.наук Д.А.Яблонский
Редактор С.С.Фомина
Корректор О.Е.Прозоровская

Подписано к печати 23.05.84г. БП № 04749.
Формат 84x108 I/16. Типографская № I. Офсетная печать.
Усл. печ.л. 2. Уч.-изд. л. I,9. Тираж I30 экз.
Заказ I49. Цена II коп.
Ротапринт ИЭП АН УССР.
Донецк-48, ул.Университетская, 77.