

MATHEMATIK FÜR INFORMATIKER 3

1. Funktionenreihen	
1.1. Konvergenz von Reihen	1
1.2. Uneigentliche Integrale	4
1.3. Funktionenreihen	8
2. Fourieranlysis	
2.1. Die komplexe Exponentialfunktion	13
2.2. Die diskrete Fouriertransformation	16
2.3. Fourierreihen	22
2.4. Eine Anwendung der Fourierreihen	32
2.5. Approximation im quadratischen Mittel	35
2.6. Fourierintegrale	38
3. Funktionen mehrerer Variabler	
3.1. Mengen und Funktionen	44
3.2. Partielle Ableitungen	50
3.3. Zweite partielle Ableitungen	57
3.4. Doppelintegrale und Nullmengen	64
3.5. Die Berechnung von Doppelintegralen	69
4. Kurven und Flächen	
4.1. Kurven	73
4.2. Flächen	82
5. Gewöhnliche Differentialgleichungen	
5.1. Differentialgleichungen erster Ordnung	89
5.2. Lineare Differentialgleichungen	95
5.3. Konstante Koeffizienten	100
6. Partielle Differentialgleichungen	
6.1. Typeneinteilung	107
6.2. Hyperbolische Differentialgleichungen	109
6.3. Elliptische Differentialgleichungen	111
6.4. Parabolische Differentialgleichungen	115

3. Funktionen mehrerer Variabler

3.1. Mengen und Funktionen

Sei $n = 1, 2, \dots$ gegeben. Wir schreiben

$$\vec{a} = (a_1, \dots, a_n), \quad \vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \text{ usw.}$$

Der n -dimensionale Raum ist dann

$$\mathbb{R}^n = \{ \vec{x} = (x_1, \dots, x_n) : x_1 \in \mathbb{R}, \dots, x_n \in \mathbb{R} \}$$

Wir haben also die Punkte in \mathbb{R}^n mit den von $O = (0, \dots, 0)$ angesetzten Vektoren identifiziert.

Der Betrag (oder Norm) von \vec{x} ist definiert durch

$$(3.1.1) \quad |\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

Für $\lambda \in \mathbb{R}$ ist $|\lambda \vec{x}| = |\lambda| |\vec{x}|$. Weiter gilt die Dreiecksungleichung

$$(3.1.2) \quad |\vec{x} + \vec{y}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}|$$

allgemeiner

$$(3.1.3) \quad \left| \sum_{k=1}^m \vec{x}_k \right| \leq \sum_{k=1}^m |\vec{x}_k|$$

Der Abstand zweier Punkte \vec{x} und \vec{y} im \mathbb{R}^n ist gegeben durch

$$|\vec{x} - \vec{y}| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

Nun wollen wir Punktengen A, B, \dots im \mathbb{R}^n betrachten. Für $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$ und $r > 0$ setzen wir

$$(3.1.4) \quad \begin{aligned} B_r(\vec{a}) &= \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n : |\vec{x} - \vec{a}| < r \} \\ &= \{ (x_1, \dots, x_n) : (x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2 < r^2 \} \end{aligned}$$

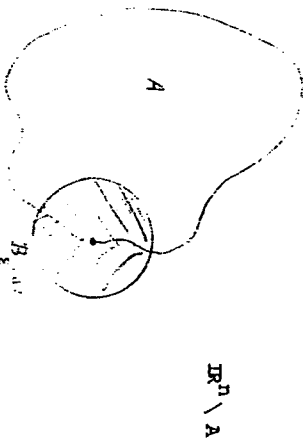
Im Fall $n = 2$ ist das eine Kreisscheibe ~~mit~~ dem Mittelpunkt \vec{a} und Radius r . Im Fall $n = 3$ ist $B_r(\vec{a})$ das Innere einer Kugel vom Radius r um \vec{a} . Allgemein wollen wir deshalb $B_r(\vec{a})$ als Kugel im \mathbb{R}^n vom Radius r und Mittelpunkt \vec{a} bezeichnen.

Zur Vereinfachung der Schreibweise lassen wir jetzt den Vektorpfeil weg, schreiben also z. B.

$$x \in A \text{ statt } \vec{x} \in A$$

Der Rand ∂A der Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ besteht aus allen Punkten $x \in \mathbb{R}^n$, so daß $B_\epsilon(x)$ für jedes $\epsilon > 0$ sowohl Punkte aus A und Punkte nicht aus A enthält. Also gilt

$$(3.1.5) \quad \begin{aligned} x \in \partial A &\iff \\ &\left\{ \begin{array}{l} B_\epsilon(x) \cap A \neq \emptyset \text{ für jedes } \epsilon > 0 \\ B_\epsilon(x) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \emptyset \text{ für jedes } \epsilon > 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$



Beide schraffierte Mengen müssen nicht-leer sein

Die Menge A heißt offen, wenn sie keinen ihrer Randpunkte enthält, sie heißt abgeschlossen, wenn sie alle ihre Randpunkte enthält. Also ist

$$(3.1.6) \quad A \text{ offen} \iff A \cap \partial A = \emptyset$$

$$(3.1.7) \quad A \text{ abgeschlossen} \iff \partial A \subset A$$

Aus (3.1.5) folgt leicht

$$(3.1.8) \quad A \text{ offen} \iff \forall (a \in A) \exists (\epsilon > 0) : B_\epsilon(a) \subset A$$

Beispiel 1

Sei $n=2$ und A die rechte Halbebene

$$A = \{(x_1, x_2) : x_1 > 0, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

Der Rand ist dann die Gerade

$$\partial A = \{(x_1, x_2) : x_1 = 0, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

Wegen $A \cap \partial A = \emptyset$ ist A offen. Für

$$\bar{A} = \{(x_1, x_2) : x_1 \geq 0, x_2 \in \mathbb{R}\} = A \cup \partial A$$

ist $\partial \bar{A} = \partial A$, also $\partial \bar{A} \subset \bar{A}$ und \bar{A} somit abgeschlossen.

Beispiel 2

Es ist

$$\partial B_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x-a| = r\}$$

Nach (3.1.6) ist also $B_r(a)$ offen.

Beispiel 3

Sei $A = B_r(a) \cup \{b\}$, $b \notin B_r(a)$. Dann ist

$$\partial A = \{x : |x-a| = r\} \cup \{b\}$$

Es ist $A \cap \partial A = \{b\} \neq \emptyset$ und $\partial A \not\subset A$. Also ist A weder offen noch abgeschlossen.

Nun betrachten wir Funktionen

$$f : A \rightarrow \mathbb{R}$$

wo A eine Menge in \mathbb{R}^n ist. Man hat also die Zuordnung

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in A \mapsto u = f(x) \in \mathbb{R}$$

oder kürzer

$$u = f(x_1, \dots, x_n)$$

Der Graph von f ist die Menge

$$\{(x_1, \dots, x_n, u) : (x_1, \dots, x_n) \in A, u = f(x_1, \dots, x_n)\}$$

im \mathbb{R}^{n+1} , also

$$\{(x, u) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in A, u = f(x)\}$$

Im Fall $n=2$ schreibt man meist (x, y) statt (x_1, x_2) . Der Graph von f ist dann

$$\{(x, y, u) : (x, y) \in A, u = f(x, y)\}$$

also eine Fläche im (x, y, u) -Raum \mathbb{R}^3 , die über A liegt.

Die Funktion $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ heißt stetig im Punkt $a \in A$, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass

$$(3.1.9) \quad |f(x) - f(a)| < \epsilon \text{ f\u00fcr } |x - a| < \delta, \quad x \in A$$

ist, d. h. es soll gelten

$$f(a) - \epsilon < f(x) < f(a) + \epsilon \text{ f\u00fcr } x \in B_\delta(a) \cap A$$

Etwas vage kann man die Stetigkeit im Punkt a schreiben als

$$x \rightarrow a \Rightarrow f(x) \rightsquigarrow f(a).$$

Die Funktion f hei\u00dft stetig in A , wenn sie in jedem Punkt $a \in A$ stetig ist. Ohne Beweis erw\u00e4hnen wir

$$(3.1.10) \quad f, g \text{ stetig} \Rightarrow f + g, \quad fg \text{ stetig}$$

$$(3.1.11) \quad f, g \text{ stetig}, g(x) \neq 0 \quad (x \in A) \Rightarrow \frac{f}{g} \text{ stetig}$$

$$(3.1.12) \quad f: A \rightarrow B \subset \mathbb{R} \text{ stetig}, g: B \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig} \Rightarrow g \circ f: A \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig}$$

Beispiel 4

Das Polynom $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 x_2 + 5x_3$ ist stetig in \mathbb{R}^3 , wie man durch wiederholte Anwendung von (3.1.10) zeigt. Ebenso ist

$$g(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1$$

stetig. Wegen $g(x_1, x_2, x_3) \geq 1 > 0$ folgt nach (3.1.11), dass die rationale Funktion

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x_1^3 x_2 + 5x_3}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1}$$

in \mathbb{R}^3 stetig ist.

Beispiel 5

Sei $n = 2$ und $A = \{x^2 + y^2 < 1\}$,

$$h(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \text{ f\u00fcr } (x, y) \in A$$

Nun ist $f(x, y) := 1 - x^2 - y^2$ stetig und ≥ 0 in A . Die Werte liegen in $B = \{v \in \mathbb{R} : 0 \leq v < 1\}$. Da $g(v) = \sqrt{v}$ in B stetig ist, folgt aus (3.1.12), dass $h = g \circ f$ in A stetig ist.

Beispiel 6

Sei

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \text{ in } A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

Z\u00e4hler und Nenner sind stetig in \mathbb{R}^2 nach (3.1.11). Der Nenner ist $\neq 0$ in A . Aus (3.1.11) folgt also, dass f in A stetig ist. Nun wollen wir versuchen, $f(0, 0)$ so zu definieren, dass f in ganz \mathbb{R}^2 stetig wird; in $\frac{xy}{x^2 + y^2}$ k\u00f6nnen wir ja nicht $x = y = 0$ setzen. Es ist $f(x, 0) = 0$ f\u00fcr $x \neq 0$, ebenso $f(0, y) = 0$ f\u00fcr $y \neq 0$. Daher definieren wir

$$f(0, 0) = 0$$

Dann gilt $f(x, 0) = 0$ f\u00fcr alle x , $f(0, y) = 0$ f\u00fcr alle y . Wir zeigen nun, dass wider Erwarten f nicht stetig in $(0, 0)$ ist.

Angenommen f w\u00e4re doch stetig in $a = (0, 0)$. Zu $\epsilon > 0$ gibt es dann ein $\delta > 0$, so dass

$$|f(x, y) - f(0, 0)| < \epsilon \text{ f\u00fcr } |(x, y)| = \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$$

d. h.

$$\left| \frac{xy}{x^2 + y^2} \right| < \epsilon \text{ f\u00fcr } 0 < x^2 + y^2 < \delta^2$$

Speziell dürfen wir $y = x$ setzen und erhalten

$$\frac{1}{2} = \frac{x^2}{2x} < \epsilon \quad \text{für} \quad 2x^2 < \delta^2$$

*X = -y auch
diskutieren*

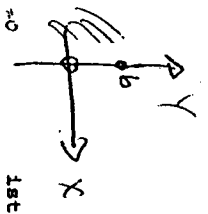
Wenn wir $\epsilon = \frac{1}{2}$ wählen, erhalten wir einen Widerspruch.

Beispiel 7
Die Funktion

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ x^2 + y^2 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

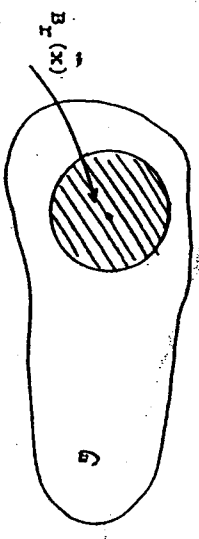
ist in \mathbb{R}^2 definiert, aber dort nicht überall stetig. Man kann zeigen, dass f nicht stetig ist in den Punkten

$$a = (0, b), \quad b \neq 0$$



3.2. Partielle Ableitungen

Sei G eine offene Menge im \mathbb{R}^n , d. h. $G \cap \partial G \neq \emptyset$ nach (3.1.6). Zu jedem Punkt $x \in G$ gibt es nach (3.1.8) eine Kugel $B_r(x)$, die auch noch ganz in G liegt.



Sei f eine in G definierte reellwertige ("skalare") Funktion,

$$f: G \rightarrow \mathbb{R}; \quad (x_1, \dots, x_n) \in G \mapsto u = f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$$

Wir halten alle Variablen fest bis auf eine Variable, nämlich x_k . Dadurch wird f zu einer Funktion einer Variablen. Wenn diese Funktion differenzierbar ist, so sagen wir, dass f eine partielle Ableitung nach x_k hat. Diese bezeichnen wir mit $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ oder auch $\frac{\partial f}{\partial x_k}$. Also ist

$$(3.2.1) \quad \frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_k} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_k + t, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n)}{t}$$

für $k = 1, \dots, n$. Zum Beispiel ist für $n = 3, k = 1$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + t, x_2, x_3) - f(x_1, x_2, x_3)}{t}$$

Die Funktion f hat also die n (ersten) partiellen Ableitungen

$$(3.2.2) \quad \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

Wir fassen diese zu einem Vektor zusammen, dem Gradienten, der definiert ist durch

$$(3.2.3) \quad \text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

Die Funktion f heißt in G stetig differenzierbar, wenn die (ersten) partiellen Ableitungen (3.2.2) existieren und stetig in G sind. Die Komponenten des Gradientenvektors sollen sich also stetig ändern, was z. B. Sprünge ausschließt.

Im Spezialfall $n = 2$ schreibt man oft (x, y) statt (x_1, x_2) . Der Gradient ist

$$(3.2.4) \quad \text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

und für eine stetig differenzierbare Funktion müssen $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ existieren und stetig in $(x,y) \in G$ sein.

Beispiel 1

Sei $n=2$, $f(x,y) = x^2y + y^{-2}$, $G = \{(x,y) : y > 0\}$.

Dann ist

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 2y^{-3}$$

also

$$\text{grad } f = (2xy, x^2 - 2y^{-3})$$

Die Funktion f ist stetig differenzierbar in G .

Beispiel 2

Sei $n=3$ und $f(x,y,z) = z \cos x \sin y$. Dann ist

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -z \sin x \sin y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = z \cos x \cos y, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \cos x \sin y$$

Da diese drei Funktionen stetig sind, ist f stetig differenzierbar in \mathbb{R}^3 .

Beispiel 3

Sei n beliebig und $G = \{x \in \mathbb{R}^n : x \neq 0\}$.

$$f(x) = |x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$$

Für $k=1, \dots, n$ ist nach der Kettenregel

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \frac{1}{2} (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x_k = \frac{x_k}{|x|}$$

(nicht stetig bei $X = 0$, z.B. $\frac{1}{\sqrt{2 \times 1.1}} \rightarrow \begin{cases} \neq 1 \\ 0 \end{cases}$ $\frac{1}{\sqrt{2 \times 1.1}} \rightarrow \begin{cases} \neq 0 \\ \neq 1 \end{cases}$ $Y=0, X \rightarrow 0$ $Y \neq 0, X \rightarrow 0$)

für $x \in G$, d. h. für $x \neq 0$. Also ist

$$(3.2.5) \quad \text{grad } |x| = \left(\frac{x_1}{|x|}, \dots, \frac{x_n}{|x|} \right) = \frac{x}{|x|}$$

Beispiel 4

Seien f und g stetig differenzierbar in G . Dann ist

$$\frac{\partial}{\partial x_k} (fg) = \frac{\partial f}{\partial x_k} g + f \frac{\partial g}{\partial x_k} \quad \text{für } k=1, \dots, n,$$

also

$$(3.2.6) \quad \text{grad } (fg) = g \text{ grad } f + f \text{ grad } g$$

Nun betrachten wir eine Abbildung ψ des Intervalls $I \subset \mathbb{R}$ in \mathbb{R}^n . Diese können wir schreiben als

$$\psi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)), \quad t \in I$$

Die Funktion ψ ist also vektorwertig. Wir nennen ψ stetig differenzierbar, wenn jede Komponentenfunktion φ_k differenzierbar und φ_k' stetig ist.

Satz 3.1 (Kettenregel). Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Weiter sei $I \subset \mathbb{R}$ und $\psi: I \rightarrow G$ stetig differenzierbar. Dann ist $g = f \circ \psi: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und

$$(3.2.7) \quad g'(t) = \frac{d}{dt} f(\psi(t)) = \sum_{k=1}^n \varphi_k'(t) \frac{\partial f}{\partial x_k}(\psi(t))$$

= $\psi'(t)$ grad $f(\psi(t))$
Skalarprodukt!

* d. h. die Komponenten $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ sollen stetig differenzierbar sein.

Handwritten signature

3. Dabei ist erst $\frac{\partial f}{\partial x}$ zu berechnen und dann $\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$ einzusetzen. Der letzte Ausdruck ist das Skalarprodukt der Vektoren $\vec{\varphi}'(t) = (\varphi_1'(t), \dots, \varphi_n'(t))$ und $\text{grad } f(\vec{\varphi}(t))$.

Zum Beweis brauchen wir den Mittelwertsatz der Differentialrechnung für Funktionen einer Variablen (MATH I, S. 199):

Sei $h: I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und $x, \xi \in I$. Dann gibt es x^* zwischen x und ξ mit

$$(3.2.8) \quad h(x) - h(\xi) = (x - \xi)h'(x^*)$$

Beweis von Satz 3.1. Der Einfachheit halber betrachten wir nur den Fall $n=2$. Es ist dann

$$g(t) = f(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \quad \text{für } t \in I$$

Für $\tau \neq t$ ist nach (3.2.8)

$$\begin{aligned} g(\tau) - g(t) &= f(\varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau)) - f(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \\ &= f(\varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau)) - f(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \\ &\quad + f(\varphi_1(\tau) - \varphi_1(t), \varphi_2(t)) \\ &\quad + f(\varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau) - \varphi_2(t)) \end{aligned}$$

wobei x_1^* zwischen $\varphi_1(t)$ und $\varphi_1(\tau)$ und x_2^* zwischen $\varphi_2(t)$ und $\varphi_2(\tau)$ liegt. Hieraus folgt

$$\begin{aligned} \frac{g(\tau) - g(t)}{\tau - t} &= \frac{\varphi_1(\tau) - \varphi_1(t)}{\tau - t} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^*, \varphi_2(\tau)) \\ &\quad + \frac{\varphi_2(\tau) - \varphi_2(t)}{\tau - t} \frac{\partial f}{\partial x_2}(\varphi_1(t), x_2^*) \end{aligned}$$

Für $\tau \rightarrow t$ gilt $x_1^* \rightarrow \varphi_1(t)$ und $x_2^* \rightarrow \varphi_2(t)$. Da $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ und $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ Voraussetzung stetig ist, folgt für $\tau \rightarrow t$

$$\frac{g(\tau) - g(t)}{\tau - t} \rightarrow \varphi_1'(t) \frac{\partial f}{\partial x_1}(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) + \varphi_2'(t) \frac{\partial f}{\partial x_2}(\varphi_1(t), \varphi_2(t)),$$

und das ist unsere Behauptung (3.2.7).

Beispiel 5

Sei $f(x) = |x|$ wie in Beispiel 3. Dann ist $g(t) = f(\vec{\varphi}(t)) = |\vec{\varphi}(t)|$, also nach (3.2.5) (falls $\vec{\varphi}'(t) \neq 0$)

$$\frac{d}{dt} |\vec{\varphi}(t)| = g'(t) = \vec{\varphi}'(t) \frac{\vec{\varphi}(t)}{|\vec{\varphi}(t)|}$$

ausgeschrieben

$$\frac{d}{dt} \sqrt{\varphi_1^2 + \dots + \varphi_n^2} = \frac{\varphi_1 \varphi_1' + \dots + \varphi_n \varphi_n'}{\sqrt{\varphi_1^2 + \dots + \varphi_n^2}}$$

Beispiel 6

Seien x und ξ Punkte in G , so das die Strecke zwischen x und ξ auch noch in G liegt. Weiter sei $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Wenn t von 0 bis 1 geht, so durchläuft

$$(3.2.9) \quad \vec{\varphi}(t) := x + t(\xi - x)$$

die Strecke von x nach ξ . Wir setzen

$$(3.2.10) \quad g(t) = f(x + t(\xi - x)) \quad (0 \leq t \leq 1)$$

und erhalten aus der Kettenregel (3.2.7)

$$(3.2.11) \quad g'(t) = (\xi - x) \text{ grad } f(\vec{\varphi}(t))$$

Satz 3.2 (Mittelwertsatz). Sei G offen und $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Für $\vec{x} \in G$ gibt es dann $\delta > 0$, so daß

$$(3.2.12) \quad f(\vec{\xi}) - f(\vec{x}) = (\vec{\xi} - \vec{x}) \text{ grad } f(\vec{x}^*) \quad \text{für } |\vec{\xi} - \vec{x}| < \delta$$

gilt, wobei \vec{x}^* ein geeigneter Punkt zwischen \vec{x} und $\vec{\xi}$ ist.

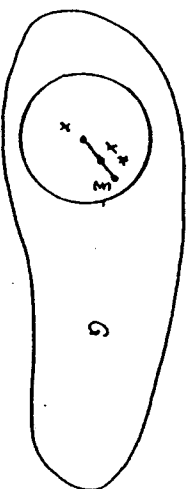
Beweis. Da G offen ist, gibt es eine Kugel $B_\delta(\vec{x})$, die ganz in G liegt. Für $\vec{\xi} \in B_\delta(\vec{x})$ liegt dann auch die Strecke von \vec{x} nach $\vec{\xi}$ in $B_\delta(\vec{x})$, also in G . Wir definieren ψ wie in (3.2.9) und wenden den Mittelwertsatz (S.54) auf die durch (3.2.10) definierte Funktion an. Danach gibt es $t^* \in [0, 1]$, so daß

$$g(1) - g(0) = g'(t^*)$$

ist. Aus (3.2.10) und (3.2.11) folgt daher

$$f(\vec{\xi}) - f(\vec{x}) = (\vec{\xi} - \vec{x}) \text{ grad } f(\vec{x} + t^*(\vec{\xi} - \vec{x}))$$

Das ist unsere Behauptung (3.2.12), da $\vec{x}^* = \vec{x} + t^*(\vec{\xi} - \vec{x})$ zwischen \vec{x} und $\vec{\xi}$ liegt.



Wenn $\vec{\xi}$ nahe bei \vec{x} liegt, so liegt \vec{x}^* auch nahe bei \vec{x} . Da die Komponenten $\partial f / \partial x_k$ von $\text{grad } f$ nach Voraussetzung stetig sein sollen, folgt $\text{grad } f(\vec{x}^*) \approx \text{grad } f(\vec{x})$. Aus dem Mittelwertsatz (3.2.12) ergibt sich daher

$$(3.2.13) \quad f(\vec{\xi}) \approx f(\vec{x}) + (\vec{\xi} - \vec{x}) \text{ grad } f(\vec{x}) \quad \text{für } \vec{\xi} \approx \vec{x}$$

Beispiel 7.

Sei $f(\vec{x}) = |\vec{x}|$ wie in Beispiel 3. Aus (3.2.13) und (3.2.5) folgt

$$|\vec{\xi}| \approx |\vec{x}| + \frac{\vec{x}(\vec{\xi} - \vec{x})}{|\vec{x}|}$$

also

$$\sqrt{\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2} \approx \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} + \frac{x_1(\xi_1 - x_1) + \dots + x_n(\xi_n - x_n)}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}}$$

3.3. Zweite partielle Ableitungen

Die ersten partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ kann man (eventuell) wieder partiell differenzieren und so

$$(3.3.1) \quad \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right) =: \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} \quad (k, j = 1, \dots, n)$$

bilden usw.

Wir beschränken uns auf den Fall $n=2$ und auf zweite partielle Ableitungen. Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ offen und $f: G \rightarrow \mathbb{R}$. Es gibt vier zweite partielle Ableitungen:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Man nennt f zweimal stetig differenzierbar in G , wenn diese vier Ableitungen stetig sind. Man kann zeigen, daß dann immer

(3.3.2)
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Ist, d. h. auf die Reihenfolge der partiellen Differentiationen kommt es nicht an.

Beispiel 1.

Sei $f(x,y) = x^3 - 3xy^2$. Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 3x^2 - 3y^2, & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 6x, & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= -6y, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -6xy, & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= -6y, & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= -6x. \end{aligned}$$

Satz 3.3 (Taylorische Formel). Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ offen und $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Zu $(x,y) \in G$ gibt es $\delta > 0$, so dass

(3.3.3)
$$\begin{aligned} f(\xi, \eta) &= f(x,y) + (\xi-x) \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + (\eta-y) \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \\ &+ \frac{1}{2} (\xi-x)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + (\xi-x)(\eta-y) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} (\eta-y)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{aligned}$$

für $(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 < \delta^2$ gilt, wobei die zweiten partiellen Ableitungen für einen geeigneten Punkt (x^*, y^*) zwischen (x,y) und (ξ, η) auszuwerten sind.

Dieser Satz soll nicht bewiesen werden. Er kann auf höhere Ableitungen verallgemeinert werden.

Da die zweiten Ableitungen stetig sind und da für $(\xi, \eta) \approx (x,y)$ auch $(x^*, y^*) \approx (x,y)$ gilt, ändert sich die rechte Seite nur geringfügig, wenn wir die zweiten Ableitungen an der Stelle (x,y) auswerten.

Wir wollen die Taylorische Formel geometrisch anwenden. Der Graph der Funktion $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine Fläche S über B , nämlich

(3.3.4)
$$S = \{(x,y,z) : (x,y) \in B, z = f(x,y)\}$$

kurz die Fläche

(3.3.5)
$$z = f(x,y) \text{ mit } (x,y) \in B$$

Sei nun (x,y,z) ein fester Punkt auf S . Wir definieren die Tangentialebene an S im Punkt (x,y,z) durch

(3.3.6)
$$t = z + (\xi-x) \frac{\partial f}{\partial x} + (\eta-y) \frac{\partial f}{\partial y} \text{ für } (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$$

Dies ist wirklich eine Ebene im (ξ, η, t) -Raum durch den Punkt (x,y,z) . Aus (3.3.3) folgt dann

(3.3.7)
$$f(\xi, \eta) - t \approx \frac{1}{2} (\xi-x)^2 + M(\xi-x)(\eta-y) + \frac{N}{2} (\eta-y)^2$$

wobei wir

(3.3.8)
$$L = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad M = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad N = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

gesetzt haben; diese Ableitungen sind an der Stelle (x,y) auszuwerten. Der Unterschied zwischen der Höhe $f(\xi, \eta)$ der Fläche und t der Tangentialebene ist also von der Größenordnung $(\xi-x)^2$ und $(\eta-y)^2$, also von kleinerer Größenordnung als $|\xi-x|$ und $|\eta-y|$ für (ξ, η) nahe bei (x,y) . Die Tangentialebene schmiegt sich also an die Fläche S im Punkt (x,y,z) an.

Aus (3.3.7) können wir noch Information gewinnen, ob S die Tangentialebene schneidet oder nicht.

Wir wollen annehmen, daß (dazu 3.3.8)

(3.3.9) $LN - M^2 > 0; L > 0$

Ist. Sei $s = \xi - x, t = \eta - y$ gesetzt. Aus (3.3.7) folgt

(3.3.10) $f(\xi, \eta) - \xi \approx \frac{L}{2} s^2 + Mst + \frac{N}{2} t^2$

~~gibst~~ $= \frac{1}{2L} [(Ls + Mt)^2 + (LN - M^2)t^2]$.

Wir unterscheiden drei Fälle.

(1) $LN - M^2 > 0, L > 0$: Dann ist der letzte Ausdruck in (3.3.10) immer > 0 für $(s, t) \neq (0, 0)$, d. h. für $(\xi, \eta) \neq (x, y)$. Durch eine exaktere Untersuchung von "≈" in (3.3.7) folgert man: Es gibt $\delta > 0$, so daß

$f(\xi, \eta) > \epsilon$ ist für $0 < |(\xi, \eta) - (x, y)| < \delta$,

d. h. in der Nähe von (x, y) liegt die Fläche oberhalb der Tangential-ebene.

(ii) $LN - M^2 > 0, L < 0$: Die Vorzeichen kehren sich um. In der Nähe von (x, y) liegt die Fläche unterhalb der Tangentialebene.

(iii) $LN - M^2 < 0$: Wir schreiben $LN - M^2 = -q^2$ mit $q > 0$.

Es ist

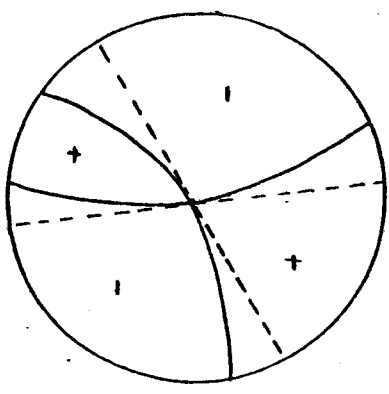
$(Ls + Mt)^2 + (LN - M^2)t^2 = (Ls + Mt)^2 - q^2 t^2 = 0$

für $Ls + Mt = \pm qt$, also für

$\xi - x = s = \frac{\pm q - M}{L} t = \frac{\pm q - M}{L} (\eta - y)$.

Dies sind zwei Geraden, eine für "+", die andere für "-". Auf diesen Geraden ist $f(\xi, \eta) - \epsilon = 0$ nach (3.3.10). Eine genauere Untersuchung zeigt, daß es zwei Kurven C_1 und C_2 durch (x, y) gibt, so daß für $|(\xi, \eta) - (x, y)| < \delta$ gilt

- $f(\xi, \eta) - \epsilon = 0$ auf C_1 und auf C_2 ,
- > 0 in zwei Zwischenbereichen,
- < 0 in zwei Zwischenbereichen.



Auf C_1 und C_2 scheidet die Fläche die Tangentialebene. In den + - Bereichen liegt die Fläche oberhalb, in den - - Bereichen unterhalb der Tangentialebene. Die Geraden sind in der Zeichnung gestrichelt.

Beispiel 2.

Sei $f(x, y) = x^2 + y^2$. Durch

$S: z = x^2 + y^2$

wird ein Rotationsparaboloid gegeben; dieses entsteht durch Rotation der Parabel $z = x^2$ um die z-Achse. Es ist in der Bezeichnung (3.3.8)

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \frac{\partial f}{\partial y} = 2y; L = 2, M = 0, N = 2$.

Die Tangentialebene durch (x, y, z) ist nach (3.3.6)

Panzer

$$z = z + 2x(\xi - x) + 2y(\eta - y) = 2x\xi + 2y\eta - 2x^2 - 2y^2$$

Wegen $LN - M^2 = 4 > 0$ und $L > 0$ liegt S immer oberhalb der Tangential-ebene, was ja auch anschaulich klar ist.

Beispiel 3.

$$\text{Set } f(x,y) = x^2 - y^2. \text{ Durch}$$

$$S : z = x^2 - y^2$$

wird ein "hyperbolisches Paraboloid" gegeben. Nun ist

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \frac{\partial f}{\partial y} = -2y; L = 2, M = 0, N = -2.$$

Die Tangentialebene ist

$$z = z + 2x(\xi - x) - 2y(\eta - y) = 2x\xi - 2y\eta - x^2 + y^2$$

Wegen $LN - M^2 < 0$ schneidet S alle Tangentialebenen.

Beispiel 4.

$$\text{Set } f(x,y) = 6xy - 3x^2 - y^3. \text{ Die Fläche}$$

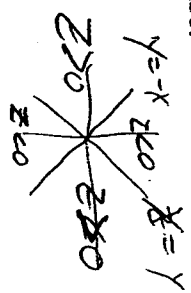
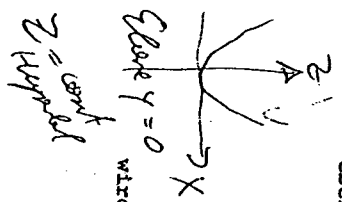
$$S : z = 6xy - 3x^2 - y^3$$

hat keinen Namen. Es ist

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6y - 6x, \frac{\partial f}{\partial y} = 6x - 3y^2; L = -6, M = 6, N = -6y.$$

Die Tangentialebene im Punkt (x,y,z) ist

$$z = z + 6(y - x)(\xi - x) + (6x - 3y^2)(\eta - y)$$



Es ist

$$LN - M^2 = 36y - 36 = 36(y - 1)$$

Für $y = 1$ ist unsere Voraussetzung (3.3.9) nicht erfüllt, unsere Theorie liefert also nichts.

Für $y > 1$ ist $LN - M^2 > 0$. Wegen $L = -6 < 0$ liegt also die Fläche unterhalb der Tangentialebene. Für $y < 1$ dagegen ist $LN - M^2 < 0$. Also schneidet die Fläche ihre Tangentialebene.

Unsere Betrachtungen sind nützlich für die Bestimmung lokaler Maxima und Minima von $f(x,y)$. In einem Maximum oder Minimum muß die Tangentialebene horizontal sein, also

$$(3.3.11) \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

gelten nach (3.3.6). Wenn (3.3.11) erfüllt ist, so liefern unsere Fälle:

(1) $LN - M^2 > 0, L > 0$: Die Fläche liegt oberhalb der horizontalen Tangentialebene durch (x,y,z) . Also hat man ein lokales Minimum.

(11) $LN - M^2 > 0, L < 0$: Man hat ein lokales Maximum.

(111) $LN - M^2 < 0$: Da $f(\xi,\eta)$ nahe (x,y) Werte $> z$ und auch Werte $< z$ annimmt, hat man weder Maximum noch Minimum, sondern einen sog. Sattelpunkt; dazu Beispiel 3 für $x = y = 0$.

3.4. Doppelintegrale und Nullmengen

Im Folgenden soll "Rechteck" immer achsenparalleles Rechteck einschließlich Rand bedeuten, also eine Menge der Form

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a_1 \leq x \leq a_2, b_1 \leq y \leq b_2\} \quad (a_1 < a_2, b_1 < b_2)$$

Der Flächeninhalt von R wird mit $\text{area } R$ bezeichnet, also

$$(3.4.1) \quad \text{area } R = (a_2 - a_1)(b_2 - b_1)$$

Die Menge $E \subset \mathbb{R}^2$ heißt Nullmenge, wenn man sie durch Rechtecke beliebig kleiner Gesamtfläche bedecken kann, d. h. zu $\epsilon > 0$ gibt es endlich oder abzählbar viele Rechtecke R_k mit

$$(3.4.2) \quad E \subset \bigcup_k R_k$$

$$(3.4.3) \quad \sum_k \text{area } R_k \leq \epsilon$$

Beispiel 1. Ein Rechteck ist keine Nullmenge. Dagegen ist jede Strecke eine Nullmenge. Der einfachste Fall ist die Strecke S von (a_1, b) nach (a_2, b) . Zu $\epsilon > 0$ wählen wir $\epsilon' = \epsilon / (2a_2 - 2a_1)$

$$R = \{(x,y) : a_1 \leq x \leq a_2, b - \epsilon' \leq y \leq b + \epsilon'\}$$

Bereits durch dieses eine Rechteck wird S überdeckt:

$$S \subset R, \text{ area } R = (a_2 - a_1)2\epsilon' = \epsilon$$

Also ist S eine Nullmenge. -



Beispiel 2.

Der Graph einer stetigen Funktion ist eine Nullmenge:

Sei $I = [a, \beta] \subset \mathbb{R}$ und $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist also

$$E = \{(x,y) : x \in I, y = \varphi(x)\}$$

eine Nullmenge. Wir wollen den Beweis dafür andeuten. Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Dann gibt es ein n , so daß

$$(3.4.4) \quad |\varphi(x) - \varphi(x')| < \frac{\epsilon}{\beta - a} \quad \text{für } |x - x'| \leq \frac{\beta - a}{n}$$

Nun teilen wir I in n gleichlange Teilintervalle I_k ($k = 1, \dots, n$) ein. Seien

$$y_k = \min_{x \in I_k} \varphi(x), \quad y_k^* = \max_{x \in I_k} \varphi(x) \quad \text{für } k = 1, \dots, n$$

Wir setzen $R_k = I_k \times [y_k, y_k^*]$. Dann ist $E \subset \bigcup_{k=1}^n R_k$ und

$$\sum_{k=1}^n \text{area } R_k = \sum_{k=1}^n \frac{\beta - a}{n} (y_k^* - y_k) < n \cdot \frac{\beta - a}{n} \cdot \frac{\epsilon}{\beta - a} = \epsilon$$

wegen (3.4.4). -

Satz 3.4. Die Vereinigung von abzählbar vielen Nullmengen ist wieder eine Nullmenge.

Abzählbar heißt: Endlich oder abzählbar unendlich. Die Vereinigung von überabzählbar vielen Nullmengen braucht nicht eine Nullmenge zu sein, z. B.

$$\mathbb{R}^2 = \bigcup_{x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}} \{(x,y)\}$$

Beweis (einfach aber schwierig zu verstehen). Wir betrachten den Fall von Nullmengen E_n für $n = 1, 2, \dots$. Da E_n eine Nullmenge ist, gibt es zu $\epsilon > 0$ Rechtecke R_{nk} ($k = 1, 2, \dots$) mit

$$E_n \subset \bigcup_k R_{nk}, \quad \text{I area } R_{nk} < \frac{\epsilon}{2^n}$$

Set E die Vereinigung der E_n . Dann folgt

$$E = \bigcup_n E_n \subset \bigcup_n \bigcup_k R_{nk}$$

Also wird E durch die abzählbar vielen Rechtecke R_{nk} überdeckt. Ihre Gesamtfläche ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_k \text{I area } R_{nk} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^n} = \epsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \epsilon$$

Also ist E eine Nullmenge.

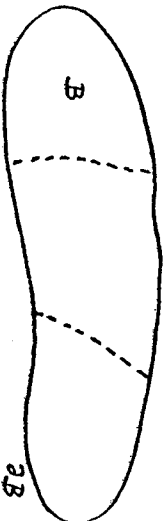
Der zentrale Punkt ist, wie wir sehen werden, dieser:

Bei der Integration kommt es auf Nullmengen nicht an.

Nun wollen wir das zweifache Integral einführen. Wir machen dabei folgende Annahmen:

(1) B eine beschränkte Menge in \mathbb{R}^2 , deren Rand ∂B eine Nullmenge ist;

(ii) $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ ist beschränkt und stetig bis auf eine Nullmenge, d. h. die Unstetigkeitsstellen von f bilden eine Nullmenge.



Die gestrichelten Kurven sollen Unstetigkeiten von f sein.

Set $n = 1, 2, \dots$. Wir legen über \mathbb{R}^2 ein Quadratgitter der Kantenlänge n^{-1} und betrachten die endlich vielen Quadrate Q_k , die ganz in B liegen. In jedem Q_k wählen wir einen Punkt (x_k, y_k) und bilden (dazu MATH I, S. 229)

$$s_n = \sum_k f(x_k, y_k) \text{ area } Q_k = \frac{1}{n^2} \sum_k f(x_k, y_k)$$

Nun kann man beweisen, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ existiert und unabhängig von der Wahl der Punkte $(x_k, y_k) \in Q_k$ ist. Wir definieren

$$(3.4.5) \quad \iint_B f(x, y) dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_k f(x_k, y_k)$$

Dieses Integral hat die Eigenschaften, die man erwartet. Insbesondere ist

$$(3.4.6) \quad \iint_B (f+g) dx dy = \iint_B f dx dy + \iint_B g dx dy$$

Wenn

$$(3.4.7) \quad B = \bigcup_{k=1}^m B_k, \quad \partial B_k \text{ Nullmenge, } B_k \text{ beschränkt}$$

und sich die B_k nicht überlappen, d. h. genauer

$$(3.4.8) \quad B_j \cap B_k \subset \partial B_k \quad \text{für } j \neq k$$

ist, so gilt

$$(3.4.9) \quad \iint_B f(x, y) dx dy = \sum_{k=1}^m \iint_{B_k} f(x, y) dx dy$$

Man definiert allgemein für Mengen B, die (I) erfüllen, den Flächeninhalt durch

$$(3.4.10) \quad \text{area } B = \iint_B dx dy$$

Unter der Voraussetzung (3.4.7) und (3.4.8) hat man also

$$(3.4.11) \quad \text{area } B = \sum_{k=1}^m \text{area } B_k$$

Satz 3.5. Seien (I) und (II) erfüllt. Zu $\epsilon > 0$ gibt es dann $\delta > 0$, so daß für jede Zerlegung $B = B_1 \cup \dots \cup B_m$ mit den obigen Eigenschaften und für $(x_k, y_k) \in B_k$

$$\left| \iint_B f(x,y) dx dy - \sum_{k=1}^m f(x_k, y_k) \text{area } B_k \right| < \epsilon$$

Ist, falls jede Menge B_k in einer Kreisscheibe vom Radius δ liegt.

Also gilt: Wenn alle Mengen B_k klein sind, so ist

$$(3.4.12) \quad \iint_B f(x,y) dx dy \approx \sum_{k=1}^m f(x_k, y_k) \text{area } B_k$$

Wir können Satz 3.5. hier nicht beweisen. Die folgende Betrachtung macht (3.4.12) vielleicht plausibel für den Fall, daß f stetig in B ist:

Da B_k klein ist, gilt $f(x,y) \approx f(x_k, y_k)$ in B_k . Also ist nach (3.4.9)

$$\begin{aligned} \iint_B f(x,y) dx dy &= \sum_{k=1}^m \iint_{B_k} f(x,y) dx dy \\ &\approx \sum_{k=1}^m f(x_k, y_k) \iint_{B_k} dx dy = \sum_{k=1}^m f(x_k, y_k) \text{area } B_k \end{aligned}$$

Satz 3.6. Wenn f und g die Voraussetzung (I) erfüllen und wenn

$$\{(x,y) \in B : f(x,y) * g(x,y)\}$$

eine Nullmenge ist, so ist

$$\iint_B f dx dy = \iint_B g dx dy$$

Für den Wert des Integrals kommt es also nicht darauf an, wie f auf einer Nullmenge definiert ist, z. B. auf dem Rand ∂B von B.

3.5. Die Berechnung von Doppelintegralen

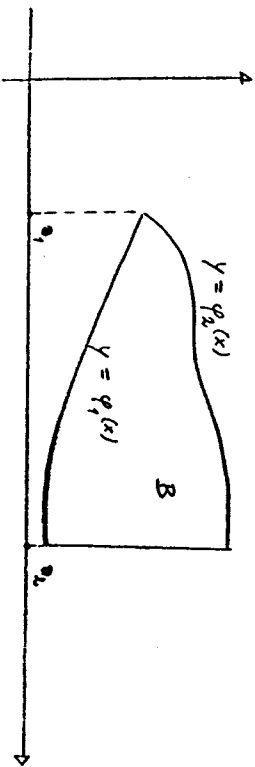
Zuerst betrachten wir den Fall, daß der Integrationsbereich durch Graphen berandet wird.

Satz 3.7. Seien $\varphi_1, \varphi_2 : [a_1, a_2] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $\varphi_1 \leq \varphi_2$. Sei

$$B = \{(x,y) : a_1 < x < a_2, \varphi_1(x) < y < \varphi_2(x)\}$$

Wenn f : B \rightarrow \mathbb{R} stetig und beschränkt ist, so gilt

$$(3.5.1) \quad \iint_B f(x,y) dx dy = \int_{a_1}^{a_2} \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y) dy \right) dx$$



Nach S. 65, Beispiel 2 sind die Graphen $\{(x, \psi_j(x)) : a_1 \leq x \leq a_2\}$ Nullmengen. Es kommt daher nicht darauf an, ob und wie f auf B definiert ist.

Ein wichtiger Spezialfall ist das Rechteck, wo also $\psi_j(x) = b_j$ ist. Dann ist

$$(3.5.2) \quad \iint_B f(x,y) dx dy = \int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} f(x,y) dy dx$$

Entsprechende Formeln gelten auch, wenn man die Rollen von x und y vertauscht.

Beispiel 1

Sei $B = \{(x,y) : 0 < x < a, 0 < y < b\}$

Dann ist nach (3.5.2) zum Beispiel

$$\begin{aligned} \iint_B (xy + y^2) dx dy &= \int_0^a \left(\int_0^b (xy + y^2) dy \right) dx \\ &= \int_0^a \left(\frac{1}{2} x b^2 + \frac{1}{3} b^3 \right) dx = \frac{1}{4} a^2 b^2 + \frac{1}{3} a b^3 \end{aligned}$$

Beispiel 2

Sei $B = B_1((0,0)) = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 1\}$. Es ist

$$B = \{(x,y) : -1 < x < 1, -\sqrt{1-x^2} < y < \sqrt{1-x^2}\}$$

also zum Beispiel

$$\iint_B y^2 dx dy = \int_{-1}^1 \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} y^2 dy \right) dx = \int_{-1}^1 \frac{2}{3} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} dx$$

B

Wir substituieren

$$x = \sin t, \quad dx = \cos t dt, \quad 1 - x^2 = 1 - \sin^2 t = \cos^2 t$$

und erhalten unter Benutzung einer Formeltabelle

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4 t dt &= \frac{2}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{1}{8} \cos 4t + \frac{1}{2} \cos 2t + \frac{3}{8} \right) dt \\ &= \frac{2}{3} \left[\frac{1}{32} \sin 4t + \frac{1}{4} \sin 2t + \frac{3}{8} t \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{8} \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

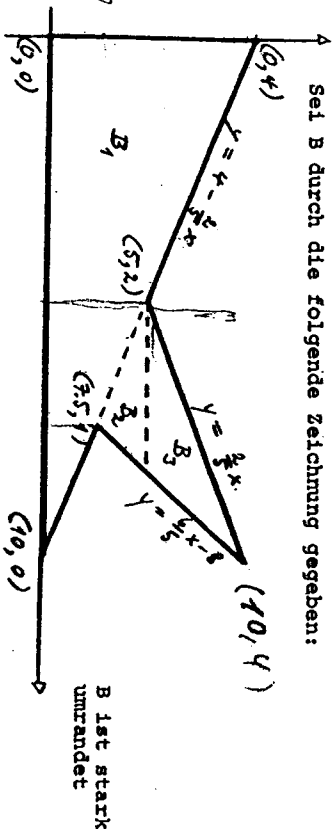
Also ist

$$\iint_B y^2 dx dy = \frac{\pi}{4}$$

Alle praktisch vorkommenden Fälle kann man durch geeignete Zerlegung und Anwendung von Satz 3.7 (eventuell unter Vertauschung von x und y) erledigen. Dazu geben wir nur ein Beispiel.

Beispiel 3

Sei B durch die folgende Zeichnung gegeben:



Es gibt viele Zerlegungsmöglichkeiten in Bereiche, die durch Graphen berandet sind. Die in der Zeichnung angedeutete Möglichkeit führt auf

$$\iint_B f \, dx \, dy = \iint_{B_1} f \, dx \, dy + \iint_{B_2} f \, dx \, dy + \iint_{B_3} f \, dx \, dy$$

Dabei ist

$$\iint_{B_1} f \, dx \, dy = \int_0^{10} \int_0^{4-\frac{2}{5}x} f(x,y) \, dy \, dx, \quad \text{erst } dy \text{ dann } dx,$$

$$\iint_{B_2} f \, dx \, dy = \int_1^2 \int_{10-\frac{5}{2}y}^{\frac{5}{6}y+\frac{20}{3}} f(x,y) \, dx \, dy, \quad \text{erst } dx \text{ dann } dy,$$

$$\iint_{B_3} f \, dx \, dy = \int_{\frac{2}{5}y}^4 \int_{\frac{5}{6}y+\frac{20}{3}} f(x,y) \, dx \, dy, \quad \text{erst } dx \text{ dann } dy.$$

4. Kurven und Flächen

4.1. Kurven

Die Einheitsvektoren im \mathbb{R}^3 sind $\vec{e}_x = (1,0,0)$, $\vec{e}_y = (0,1,0)$ und $\vec{e}_z = (0,0,1)$. Mit ihrer Hilfe kann man

$$(4.1.1) \quad (x,y,z) = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

schreiben.

Eine Kurve C wird gegeben durch eine Parameterdarstellung

$$(4.1.2) \quad \vec{x} = \vec{x}(t) = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y + z(t)\vec{e}_z \quad \text{für } \alpha \leq t \leq \beta,$$

also durch die drei reellen Funktionen

$$(4.1.3) \quad x(t), y(t), z(t) \quad \text{für } \alpha \leq t \leq \beta.$$

Wir setzen im folgenden immer folgendes voraus:

- (1) Die Funktion $x,y,z : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ sind zweimal stetig differenzierbar;

$$(1.1) \quad \text{für } t \in [\alpha, \beta] \text{ ist } \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \neq 0.$$

Die Ableitungen nach t schreibt man traditionell mit einem Punkt, also

$$\dot{x}, \dot{y}, \dot{z} \quad \text{bzw. } x', y', z'$$

Diese sollen also stetig sein und es soll gelten

(4.1.4) $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \neq 0$ für $\alpha \leq t \leq \beta$

Es ist

$$\frac{d}{dt} \vec{x}(t) = \dot{x}(t) \vec{e}_x + \dot{y}(t) \vec{e}_y + \dot{z}(t) \vec{e}_z \neq \vec{0}$$

Die durch die Kurve dargestellte Punktmenge ist

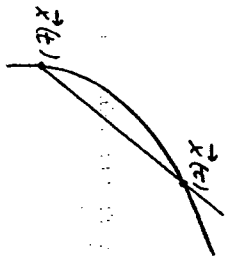
$$\{ \vec{x}(t) \in \mathbb{R}^3 : \alpha \leq t \leq \beta \}$$

Sei $\alpha \leq t < \beta$ und $t < \tau < \beta$. Der Vektor $\vec{x}(\tau) - \vec{x}(t)$ zeigt vom Kurvenpunkt $\vec{x}(t)$ nach $\vec{x}(\tau)$. Also hat

$$\frac{\vec{x}(\tau) - \vec{x}(t)}{\tau - t}$$

die Richtung der Strecke von $\vec{x}(t)$ nach $\vec{x}(\tau)$. Daher hat

$$\dot{\vec{x}}(t) = \lim_{\tau \rightarrow t} \frac{\vec{x}(\tau) - \vec{x}(t)}{\tau - t}$$



Die Richtung der Tangenten an C im Punkt $\vec{x}(t)$. Den Einheitsvektor dieser Richtung nennt man den Tangentenvektor. Also ist

(4.1.5) $\vec{t} = \frac{\dot{\vec{x}}}{|\dot{\vec{x}}|}$

der Tangentenvektor der Kurve C im Punkt \vec{x} ; nach Voraussetzung (11) ist der Nenner $|\dot{\vec{x}}| \neq 0$ (und $\vec{t} \neq \vec{0}$)

Beispiel 1

(Ellipse) Sei $x(t) = a \cos t$, $y(t) = b \sin t$, $z(t) = 0$ ($a, b > 0$) für $0 \leq t \leq 2\pi$. Wegen $z(t) = 0$ hat man eine ebene Kurve.

Es ist

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

Also liegt unsere Kurve auf einer Ellipse mit den Halbachsen a und b. Wenn t von 0 nach 2π geht, so wird diese Ellipse genau einmal durchlaufen. Es ist

$$\dot{x}(t) = -a \sin t, \quad \dot{y}(t) = b \cos t, \quad \dot{z}(t) = 0$$

und $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t$. Der Tangentenvektor ist daher

$$\vec{t} = \frac{-a \sin t \vec{e}_x + b \cos t \vec{e}_y}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}}$$

Beispiel 2 (Schraubenlinie)

Sei $m = 1, 2, \dots$, $c \geq 0$ und

$$x(t) = \cos t, \quad y(t) = \sin t, \quad z(t) = ct \quad \text{für } 0 \leq t \leq 2\pi m$$

Diese Kurve stellt eine Schraubenlinie der Ganghöhe $2\pi c$ und mit m Windungen dar. Es ist

$$\dot{x}(t) = -\sin t, \quad \dot{y}(t) = \cos t, \quad \dot{z}(t) = c$$

Also ist $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 1 + c^2$ und daher mit $p = \sqrt{1 + c^2}$

$$\vec{t} = -\frac{\sin t}{p} \vec{e}_x + \frac{\cos t}{p} \vec{e}_y + \frac{c}{p} \vec{e}_z$$

Nun wollen wir die Länge von C definieren. Wir zerlegen das Parameterintervall $[\alpha, \beta]$ in n Teilintervalle mit den Endpunkten

$$(4.1.6) \quad \alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = \beta$$

Auf C zeichnen wir die entsprechenden Punkte $\vec{x}(t_\nu)$. Aufeinanderfolgende Punkte verbinden wir. So erhalten wir einen Streckenzug S_n der Länge

$$l(S_n) = \sum_{\nu=1}^n |\vec{x}(t_\nu) - \vec{x}(t_{\nu-1})|$$

Da \vec{x} stetig differenzierbar ist, gilt

$$\vec{x}(t_\nu) - \vec{x}(t_{\nu-1}) \approx (t_\nu - t_{\nu-1}) \dot{\vec{x}}(t_\nu)$$

also

$$l(S_n) \approx \sum_{\nu=1}^n |\dot{\vec{x}}(t_\nu)| (t_\nu - t_{\nu-1})$$

Dies ist eine Riemannsche Summe. Für großes n ist daher

$$l(S_n) \approx \int_{\alpha}^{\beta} |\dot{\vec{x}}(t)| dt$$

Da S_n die Kurve C approximiert, ist es sinnvoll, die Länge von C durch

$$(4.1.7) \quad l(C) = \int_{\alpha}^{\beta} |\dot{\vec{x}}(t)| dt$$

zu definieren.

Sei $\alpha \leq t \leq \beta$. Dann wird durch $\vec{x}(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$ ein Kurvenstück C_t von C gegeben. Seine Länge ist nach (4.1.7)



$$(4.1.8) \quad s = s(t) = l(C_t) = \int_{\alpha}^t |\dot{\vec{x}}(\tau)| d\tau$$

Hieraus folgt

$$(4.1.9) \quad \frac{ds}{dt} = \left| \frac{d\vec{x}}{dt} \right| > 0$$

Also ist die Bogenlänge $s = s(t)$ eine stetig streng wachsende Funktion

$$s : [\alpha, \beta] \rightarrow [0, l(C)]$$

Diese Funktion kann man umkehren zu $t = t(s)$. Man führt nun auf C die Bogenlänge s als Parameter ein, indem man

$$(4.1.10) \quad \vec{x} = \vec{x}(t(s)), \quad 0 \leq s \leq l(C)$$

schreibt. Mit der Bogenlänge als Parameter schreibt man 'statt', also

$$(4.1.11) \quad \frac{d\vec{x}}{ds} = \vec{x}'$$

Nach (4.1.9) ist daher

$$(4.1.12) \quad \left| \frac{d\vec{x}}{ds} \right| = \left| \frac{d\vec{x}}{dt} / \frac{ds}{dt} \right| = 1$$

Aus (4.1.5) erhält man daher für den Tangentialvektor

$$(4.1.13) \quad \vec{t} = \frac{d\vec{x}}{ds} = \vec{x}'$$

Beispiel 2 (Fortsetzung).

Mit $p = \sqrt{1+c^2}$ ist

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{1+c^2} dt = pt, \quad t = \frac{s}{p}$$

Handwritten note:
 $\frac{d\vec{x}}{ds} = \frac{d\vec{x}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds}$
 also $\frac{d\vec{x}}{ds} = \vec{x}' \cdot \frac{1}{p}$

Daher ist

$$\vec{x} = \cos \frac{s}{p} \cdot \vec{e}_x + \sin \frac{s}{p} \cdot \vec{e}_y + \frac{cs}{p} \vec{e}_z \quad (0 \leq s \leq 2\pi p)$$

die Darstellung der Schraubenlinie mit der Bogenlänge s als Parameter.

Nun kommen wir zum Begriff der Krümmung. Die Kurve C habe die Parameterdarstellung

$$(4.1.14) \quad \vec{x} = \vec{x}(s), \quad 0 \leq s \leq l, \quad s \text{ Bogenlänge.}$$

Dann ist $x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$. Durch Differentiation nach s folgt

$$(4.1.15) \quad x''x' + y''y' + z''z' = 0, \text{ also } \vec{x}'' \cdot \vec{x}' = 0.$$

Wir nennen \vec{x}'' den Krümmungsvektor der Kurve C im Punkt \vec{x} . Nach (4.1.15) gilt

$$(4.1.16) \quad \text{Der Krümmungsvektor } \vec{x}'' \text{ ist senkrecht zum Tangentialvektor } \vec{t} = \vec{x}'.$$

Durch Anwendung der Taylorschen Formel auf x,y,z folgt

$$(4.1.17) \quad \vec{x}(\sigma) \approx \vec{x} + (\sigma - s) \vec{t} + \frac{1}{2} (\sigma - s)^2 \vec{x}'' \quad \text{für } \sigma \approx s$$

mit $\vec{x} = \vec{x}(s)$, $\vec{t} = \vec{x}' = \vec{x}'(s)$, $\vec{x}'' = \vec{x}''(s)$. Der vernachlässigte Rest ist klein im Vergleich zu $(\sigma - s)^2$. Nun ist

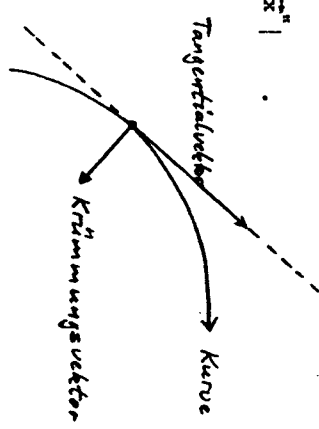
$$(4.1.18) \quad \vec{t} = \vec{x}' + (\sigma - s) \vec{t}'' \quad (-\infty < \sigma < +\infty)$$

die Tangente an C im Punkt \vec{x} . Man kann daher (4.1.17) als

$$(4.1.19) \quad \vec{x}(\sigma) \approx \vec{x} + \frac{1}{k} (\sigma - s)^2 \vec{x}'' \quad \text{für } \sigma \approx s$$

schreiben. Durch den Krümmungsvektor wird also die Abweichung der Kurve von ihrer Tangente beschrieben. Die Krümmung ist definiert durch

$$(4.1.20) \quad k = |\vec{x}''|$$



Man definiert $\rho = 1/k$ als den Krümmungsradius.

Beispiel 3.

Sei $x = r \cos \frac{s}{r}$, $y = r \sin \frac{s}{r}$, $z = 0$ ($0 \leq s \leq 2\pi r$). Also ist C ein ebener Kreis um den Nullpunkt vom Radius r, der durch die Bogenlänge s parametrisiert ist. Es ist

$$\vec{t} = \vec{x}' = (-\sin \frac{s}{r}, \cos \frac{s}{r}, 0), \quad \vec{x}'' = (-\frac{1}{r} \cos \frac{s}{r}, -\frac{1}{r} \sin \frac{s}{r}, 0)$$

Somit sind Krümmungsvektor und Krümmung

$$\vec{x}'' = -\frac{1}{r} \vec{x}, \quad k = |\vec{x}''| = \frac{1}{r}$$

d. h. die Krümmung eines Kreises ist der reziproke Radius.

Fortsetzung von Beispiel 2. Es ist

$$\vec{r} = \vec{x}' = -\frac{1}{p} \sin \frac{s}{p} \cdot \vec{e}_x + \frac{1}{p} \cos \frac{s}{p} \cdot \vec{e}_y + \frac{c}{p} \vec{e}_z$$

$$\vec{x}'' = -\frac{1}{p^2} \cos \frac{s}{p} \cdot \vec{e}_x - \frac{1}{p^2} \sin \frac{s}{p} \cdot \vec{e}_y, \quad k = |\vec{x}''| = \frac{1}{p^2}$$

Der Krümmungsvektor ist also parallel zu (x,y)-Ebene, d. h. die Schraubenlinie krümmt sich nicht nach oben. Ihre Krümmung ist konstant = 1/(1+c^2), nimmt also mit der Ganghöhe 2πc ab.

Nun nehmen wir an, daß die Kurve C durch einen beliebigen Parameter t dargestellt wird. Für den Fall einer ebenen Kurve x(t), y(t), 0 rechnet man nach, daß die Krümmung durch

$$(4.1.21) \quad k = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} \quad (\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \quad \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} \text{ usw.})$$

gegeben ist. Für ebene Kurven kann man der Krümmung ein Vorzeichen geben, während das für Raumkurven nicht möglich ist.

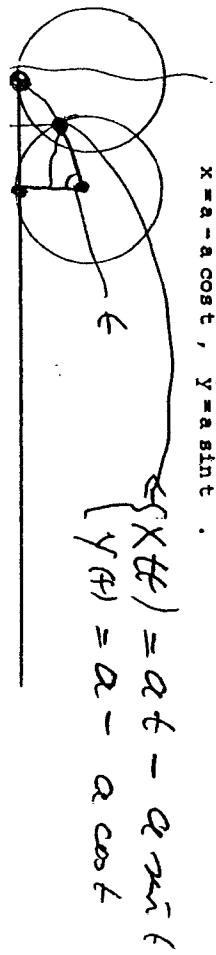
Beispiel 4 (Zykloide).

Wenn ein Kreis vom Radius a auf einer Geraden abrollt, so erhält man eine Zykloide. Ihre Gleichung ist

$$x(t) = a(t - \sin t), \quad y(t) = a(1 - \cos t) \quad \text{für } 0 \leq t \leq 2\pi$$

die Einschränkung 0 ≤ t ≤ 2π besagt, daß der Kreis einmal abrollt. Hieraus folgt

$$\dot{x} = a - a \cos t, \quad \dot{y} = a \sin t$$



Also ist

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = a^2 - 2a^2 \cos t + a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t = 2a^2(1 - \cos t) = 4a^2 \sin^2 \frac{t}{2}$$

Für 0 ≤ t ≤ 2π ist sin t/2 ≥ 0, also $\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = 2a \sin \frac{t}{2}$

Daher hat C die Länge

$$l = \int_0^{2\pi} 2a \sin \frac{t}{2} dt = 4a[-\cos \frac{t}{2}]_0^{2\pi} = 8a$$

Weiter ist $\ddot{x} = a \sin t, \ddot{y} = a \cos t$. Aus (4.1.21) folgt somit

$$k = \frac{a^2(1 - \cos t) \cos t - a^2 \sin^2 t}{(2a \sin \frac{t}{2})^3} = -\frac{1}{a} \frac{1 - \cos t}{8 \sin^3 \frac{t}{2}} = -\frac{1}{4a \sin \frac{t}{2}}$$

Für t = 0 und t = 2π verschwindet der Nenner, man erhält also unendliche Krümmung. Das hängt damit zusammen, daß unsere Kurve t = 0 und 2π nicht mehr die Voraussetzung (11) erfüllt.

Schließlich soll die Krümmung noch physikalisch interpretiert werden. Die Kurve C sei durch s parametrisiert. Wir betrachten $\vec{x}(s)$ als eine Bewegung der konstanten Geschwindigkeit $|\dot{\vec{x}}| = 1$. Die Beschleunigung ist \vec{x}'' . Da die Geschwindigkeit auf C konstant ist, ist dies eine reine Seitenbeschleunigung. Ihre Größe ist $|\vec{x}''| = k$. Also gilt: Die Seitenbeschleunigung beim Durchfahren einer Kurve mit konstanter Geschwindigkeit ist proportional zur Krümmung der Kurve. Allgemein gilt:

$$|\dot{\vec{x}}(t)| = v \Rightarrow |\ddot{\vec{x}}(t)| = v^2 k = \frac{v^2}{\rho}$$

Centr!

4.2: Flächen

Sei B eine offene Menge in \mathbb{R}^2 und $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Durch

$$(4.2.1) \quad z = f(x, y), \quad (x, y) \in B$$

wird dann eine Fläche über B dargestellt. Anders ausgedrückt ist

$$(4.2.2) \quad S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in B, z = f(x, y)\}$$

Beispiel 1.

$$\text{Sei } a > 0, b > 0 \text{ und } c > 0, B = \left\{ \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b} \right) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1 \right\}$$

$$z = f(x, y) = c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$$

Dann ist

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad z > 0$$

Die Fläche ist also die obere Hälfte eines Ellipsoids mit den Halbachsen a, b, c. -

Nun wollen wir die Oberfläche von S definieren. Dazu müssen wir noch zwei Voraussetzungen machen, nämlich

(4.2.3) ∂B sei Nullmenge,

(4.2.4) $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ seien beschränkt in B;

wie oben soll f in B stetig differenzierbar sein. Unter diesen Voraussetzungen definiert man die Oberfläche, genauer Oberflächeninhalt oder Flächeninhalt, von S durch

$$(4.2.5) \quad \text{area } S = \iint_B \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} \, dx \, dy$$

Diese Formel wollen wir motivieren.

Dazu betrachten wir das ebene Rechteck R der Zeichnung. Über R liegt das Stück

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in R$$

$$(x, \eta) \quad (\xi, \eta)$$



der Fläche S. Die über den Ecken von R liegenden Punkte haben als z-Koordinaten

$$f(x, y), f(\xi, \eta), f(x, \eta), f(\xi, \eta)$$

Nach dem Mittelwertsatz (dazu (3.2.13)) sind diese Werte für kleines $\xi - x$ und kleines $\eta - y$ angenähert

$$z, z + (\xi - x) \frac{\partial f}{\partial x}, z + (\eta - y) \frac{\partial f}{\partial y}, z + (\xi - x) \frac{\partial f}{\partial x} + (\eta - y) \frac{\partial f}{\partial y}$$

mit $z = f(x, y)$. Daher ist unser Flächenstück angenähert ein Parallelogramm aufgespannt durch die Vektoren

$$\vec{a} = (\xi - x, 0, (\xi - x) \frac{\partial f}{\partial x}), \quad \vec{b} = (0, \eta - y, (\eta - y) \frac{\partial f}{\partial y})$$

die in (x, y, z) angetragen werden. Der Flächeninhalt dieses Parallelogramms ist (z. B. nach Bronstein, Abschnitt 4.2.1.4) die Wurzel aus

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{\begin{vmatrix} a_y a_z & a_x a_z \\ b_y b_z & b_x b_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_y a_x & a_z a_x \\ b_y b_x & b_z b_x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_x a_y & a_z a_y \\ b_x b_y & b_z b_y \end{vmatrix}}$$

$$= (\xi - x)^2 \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + (\xi - x)^2 \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + 1$$

Man wird also erwarten, dass das kleine Flächenstück die Oberfläche

$$\approx \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} \text{ area } R$$

hat, da $(\xi - x)(\eta - y)$ der Flächeninhalt von R ist. Nun kann man sich S annähernd aus kleinen Flächenstücken dieser Art zusammengesetzt denken. Wegen (3.4.12) wird man dann auf die Definition (4.2.5) geführt.

Beispiel 2.

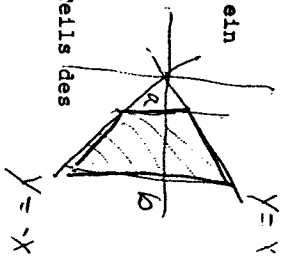
Sei $B = \{(x, y) : a < x < b, |y| < x\}$ mit $0 < a < b$; das ist ein Trapez. Durch

$$z = f(x, y) = c \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \in B$$

wird eine Fläche definiert, die aus dem über B liegenden Teils des Kegels $z = c \sqrt{x^2 + y^2}$ besteht. Es ist

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{cx}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{cy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

also nach (4.2.5)



$z = c \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\text{area } S = \iint_B \sqrt{1 + \frac{c^2 x^2}{x^2 + y^2} + \frac{c^2 y^2}{x^2 + y^2}} \, dx \, dy = \iint_B \sqrt{1 + c^2} \, dx \, dy$$

$$= \sqrt{1 + c^2} \text{ area } B = \frac{b^2 - a^2}{2} \sqrt{1 + c^2}$$

Häufig ist günstiger, Flächen durch zwei Parameter darzustellen als in der Form (4.2.1). Im folgenden werden wir auf die genaue Formulierung der Voraussetzungen verzichten. Sei A eine Menge in der (u, v) -Ebene, der Parameterbereich. Die Fläche S wird dargestellt durch

(4.2.6) $x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v), z = \chi(u, v)$

für $(u, v) \in A$. Dies kann man sich nicht als Fläche über A vorstellen. Der früher betrachtete Fall ist, daß x und y die Parameter sind. Man erhält (4.2.1), wenn $A = B$ ist und in (4.2.6)

$$\varphi(u, v) = u, \psi(u, v) = v, \chi(u, v) = f(u, v)$$

gesetzt wird; es ist also $x = u$ und $y = v$.

Beispiel 3.

Sei $r(u) > 0$ und sei S gegeben durch

(4.2.7) $x = r(u) \cos v, y = r(u) \sin v, z = u$

für $a \leq u \leq b, 0 \leq v \leq 2\pi$. Dann ist

$$x^2 + y^2 = r(u)^2$$

Also ist S eine Rotationsfläche um die z -Achse. Ihre Höhe ist $b - a$. Speziell für $r(u) = \sqrt{1 - u^2}$, $a = -1$, $b = 1$ ergibt sich eine Kugelfläche vom Radius 1.

Beispiel 4.

(dazu Beispiel 2 von Abschnitt 4.1). Sei $m = 1, 2, \dots$. Durch

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = v$$

für $0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 2\pi$ wird eine Schraubensfläche mit m Windungen gegeben. Für $m > 1$ kann man diese nicht mehr in der Form $z = f(x, y)$ darstellen.

Die Formel für die Oberfläche einer in Parametern dargestellten Fläche S lautet

$$(4.2.8) \quad \text{area } S = \iint_A \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| du dv$$

Hier ist $\vec{r} = (x, y, z)$ und x bezeichnet das Vektorprodukt. Die Menge A ist der Bereich der Parameter u, v der Fläche.

Beispiel 3 (Fortsetzung)

Es ist $\vec{r}(u, v) = (r(u) \cos v, r(u) \sin v, u)$, also

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = (r' \cos v, r' \sin v, 1), \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = (-r \sin v, r \cos v, 0).$$

Daher ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} &= (-r \cos v, -r \sin v, r r' \cos^2 v + r r' \sin^2 v) \\ &= (-r \cos v, -r \sin v, r r'), \end{aligned}$$

also

$$\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| = (r^2 + r^2 r'^2)^{\frac{1}{2}} = r \sqrt{1 + r'^2}$$

Aus (4.2.8) folgt also für die Oberfläche der Rotationsfläche (4.2.7)

$$(4.2.9) \quad \text{area } S = 2\pi \int_a^b r(u) \sqrt{1 + r'(u)^2} du$$

wegen $\int_0^{2\pi} dv = 2\pi$.

Beispiel 5

Als Spezialfall betrachten wir eine Kugelkappe ("Polargebiet"), nämlich

$$x = \sqrt{1-u^2} \cos v, \quad y = \sqrt{1-u^2} \sin v, \quad z = u$$

für $a \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 2\pi$. Dann ist $r(u) = \sqrt{1-u^2}$, also

$$r' = -\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}, \quad 1 + r'^2 = \frac{1-u^2+u^2}{1-u^2} = \frac{1}{1-u^2}$$

Als Oberfläche der Kugelkappe ergibt sich daher nach (4.2.9)

$$\text{area } S = 2\pi \int_a^1 \sqrt{1-u^2} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = 2\pi \int_a^1 du = 2\pi(1-a).$$

Speziell für $a = -1$ (ganze Kugel) erhält man 4π .

5. Gewöhnliche Differentialgleichungen

5.1. Differentialgleichungen erster Ordnung

Eine Differentialgleichung erster Ordnung in expliziter Form hat die Gestalt

$$(5.1.1) \quad y' = \frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Dabei ist f eine gegebene Funktion, x ist die unabhängige Variable und $y = y(x)$ die gesuchte Lösungsfunktion.

Beispiel ① Sei $f(x, y) = xy$, d.h. wir betrachten die Dglf. $y' = xy$.

Zur Lösung dividieren wir durch y (falls z.B. $y > 0$ ist) und erhalten

$$\frac{y'}{y} = x.$$

Durch Integration folgt

$$\ln y = \frac{x^2}{2} + a, \quad a \text{ Konstante,}$$

$$\text{also } y = e^{\frac{x^2}{2} + a} = e^{\frac{x^2}{2}} \cdot e^a \quad \text{mit } c = e^a > 0.$$

Dies ist aber noch nicht die allgemeine Lösung. Diese lautet $y = y(x) = c e^{x^2/2}$ mit $c \in \mathbb{R}$ beliebig. -

Set durch eine Anfangsbedingung

$$(5.1.2) \quad y(x_0) = y_0$$

wird die Lösung eindeutig festgelegt, wobei x_0, y_0 gegebene Werte sind. Die Lösung soll also an der Stelle x_0 den Wert y_0 haben.

① (Fortsetzung) Es soll also

$$y(x_0) = c e^{x_0^2/2} = y_0$$

sich, also $c = \frac{y_0}{e^{x_0^2/2}}$

$$y(x) = y_0 e^{(x^2 - x_0^2)/2}$$

die Lösung von $y' = xy$, die (5.1.2) erfüllt. -

Nun wollen wir die Begriffe genau definieren. Sei G eine offene Menge in \mathbb{R}^2 und

$$f : G \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig.}$$

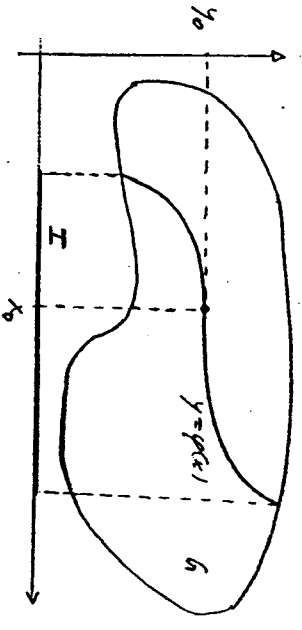
Eine Lösung von (5.1.1) im Intervall I mit $x_0 \in I \subset \mathbb{R}$ ist eine Funktion

$$\varphi : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig differenzierbar}$$

mit

$$(5.1.3) \quad (x, \varphi(x)) \in G \quad \text{für } x \in I,$$

$$(5.1.4) \quad \varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \quad \text{für } x \in I.$$



Existenz- und Eindeutigkeitsatz. Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ offen,

$f: G \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar

und $(x_0, y_0) \in G$ gegeben. Dann gibt es genau eine Lösung $y = p(x)$ von $y' = f(x, y)$ mit

$p(x_0) = y_0$ (Anfangsbedingung)

Die Lösung existiert in einem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und ihr Graph $\{(x, p(x)) : x \in I\}$ kommt auf beiden Seiten dem Rand von G beliebig nahe.

Die letzte Behauptung soll zeigen: Sei etwa $I = (x, \beta)$. Dann gilt mindestens eine der folgenden drei Aussagen:

- (i) $x = -\infty$!
- (ii) $|f(x, y)|$ ist unbeschränkt für $x \rightarrow x+0$;
- (iii) es gibt einen Punkt $(a, b) \in \partial G$, dem $(x, p(x))$ für $x \rightarrow x+0$ beliebig nahe kommt.

Entsprechendes gilt für den rechten Endpunkt β von I .

Bemerkung ② Sei $f(x, y) = y^2$, d.h. wir betrachten die Dgl $y' = y^2$. Man kann $G = \mathbb{R}^2$ wählen. Sei $x_0 = 0, y_0 = 1$. Man verifiziert, daß

$p(x) = \frac{1}{1-x}, I = (-\infty, 1)$

die Lösung mit $p(0) = 1$ ist. Am linken Endpunkt $x = -\infty$ ist (ii) erfüllt. Am rechten Endpunkt $\beta = 1$ ist (iii) erfüllt, da $p(x) \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow 1-0$) gilt.

Wir wollen nun etwas zum Beweis sagen, wobei wir uns auf den Fall $G = I \times \mathbb{R}$,

(5.1.5) $|f(x, y)| \leq M, \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| \leq L$ für $(x, y) \in G$ beschränken wollen. Es ist also $x_0 \in I$.

Die Dgl $y' = f(x, y)$ mit der Anfangsbedingung $p(x_0) = y_0$ ist äquivalent zur Integralgleichung

(5.1.6) $p(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, p(t)) dt.$

Diese läßt man durch ein Störansatzverfahren: Sei

(5.1.7) $p_0(x) \equiv y_0.$

Wieder sei p_n bereits definiert. Man setzt dann

(5.1.8) $p_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, p_n(t)) dt.$

Aus (5.1.5) folgt nach dem Mittelwertsatz

$|f(x, y) - f(x, \tilde{y})| \leq L|y - \tilde{y}|$ für $x \in I, y, \tilde{y} \in \mathbb{R}.$

Aus (5.1.8) erhält man daher (etwa für $x \geq x_0$)

(5.1.9) $|p_{n+1}(x) - p_n(x)| = \left| \int_{x_0}^x [f(t, p_n(t)) - f(t, p_{n-1}(t))] dt \right| \leq \int_{x_0}^x L |p_n(t) - p_{n-1}(t)| dt.$

Speziell ist nach (5.1.7) und (5.1.8)

$|p_1(x) - p_0(x)| = \left| \int_{x_0}^x f(t, y_0) dt \right| \leq M(x - x_0)$

wegen (5.1.5). Allgemein beweisen wir nun durch Induktion

$$(5.1.10) \quad |p_n(x) - p_{n-1}(x)| \leq \frac{1}{n!} L \frac{(x-x_0)^n}{n!} \quad \text{für } x \in I, x \geq x_0.$$

Für $n=1$ haben wir das oben gezeigt. Wenn (5.1.10) für n gilt, so folgt aus (5.1.9) eben für $x \geq x_0$

$$|p_n(x) - p_{n-1}(x)| \leq L \int_{x_0}^x \frac{1}{n!} L^{n-1} \frac{(t-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} dt = \frac{1}{(n+1)!} L^n (x-x_0)^n$$

Also gilt (5.1.10) allgemein. (Für $x < x_0$ gilt das analoges mit $(x-x_0)^n$)

Wir setzen nun

$$(5.1.11) \quad p(x) = y_0 + \sum_{j=0}^{\infty} (y_j(x) - y_{j-1}(x)).$$

Die Summanden dieser Reihe sind nach (5.1.10) höchstens gleich der konvergenz Reihe

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} L^j \frac{(x-x_0)^j}{j!} \quad (= \frac{1}{j!} L^j e^{L|x-x_0|}).$$

Nach dem Vergleichskriterium (5.3) konvergiert also die Reihe in (5.1.11). Für die n -te Partialsumme erhalten wir

$$y_0 + \sum_{j=0}^n (y_j - y_{j-1}) = y_0 + (y_0 - y_0) + \dots + (y_n - y_{n-1}) = y_n.$$

Da (5.1.11) konvergiert, gilt also

$$(5.1.12) \quad p_n(x) \rightarrow p(x) \quad \text{für } n \rightarrow \infty,$$

also auch $p_{n+1}(x) \rightarrow p(x)$. Nach (5.1.8) ist

$$p_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, p_n(t)) dt.$$

Man kann zeigen (z.B. mit Satz 1.2), daß man den Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ unter das Integral ziehen kann. Es folgt also

$$p(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, p(t)) dt,$$

und das ist unsere Behauptung (5.1.6).

Manus hat man Differentialgleichungen durch numerische Methoden. Nur für einige einfache Typen kann man explizit die Lösung hinschreiben.

Für Diff. erster Ordnung kann man gelegentlich die Separation der Variablen durchführen, und zwar für den Fall

$$f(x,y) = g(x)h(y),$$

also die Diff.

$$(5.1.13) \quad \frac{dy}{dx} = g(x)h(y).$$

An besten geht man rein formal vor und verfährt zum Skizze des Systems: Formel ist (5.1.13) dasselbe wie

$$\frac{dy}{h(y)} = g(x) dx,$$

woraus durch Integration "folgt"

$$\int \frac{dy}{h(y)} = c + \int g(x) dx, \quad c \text{ Konstante.}$$

Wenn man die Integrationskonstanten kann, ist man fertig (dazu auch ① und ②).

Beispiel ③ Wir betrachten $y' = xy^2$, also

$$\frac{dy}{y^2} = x dx, \quad -\frac{1}{y} = c + \frac{x^2}{2},$$

also

$$y = -\frac{1}{c + \frac{x^2}{2}}, \quad c \text{ Konstante.}$$

5.2. Lineare Differentialgleichungen

Eine Diffgl. zweiter Ordnung (in expliziter Form) hat die Gestalt

$$y'' = f(x, y, y')$$

also z.B. $y'' = xy^2 + y'$. Die Lösung $y = y(x)$ wird jetzt durch zwei Anfangsbedingungen festgelegt, etwa

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0,$$

wo x_0, y_0 und y'_0 gegebene Werte sind.

Eine Diffgl. n-ter Ordnung hat die Form

$$y^{(n)} = f(x, y, \dots, y^{(n-1)}),$$

und die Lösung wird durch n Anfangsbedingungen festgelegt, etwa

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

wo jetzt $x_0, y_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ gegebene Werte sind.

Wir wollen uns auf den wichtigsten Fall beschränken, nämlich auf lineare Diffgl., die man als

$$(5.2.1) \quad y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_0(x)y = f(x)$$

schreiben kann. Hier sind die Koeffizienten $a_0(x), \dots, a_{n-1}(x)$ und die rechte Seite $f(x)$ gegebene Funktionen, und $y = y(x)$ ist gesucht.

Die lineare Diffgl. heißt homogen, wenn $f(x) \equiv 0$ ist, dann ist also

$$(5.2.3) \quad y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_0(x)y' + a_0(x)y = 0$$

lineare Diffgl. werden in Kapitel 7 von Teil II behandelt.

Die Funktionen p_1, \dots, p_n heißen linear unabhängig, wenn gilt.

$$\lambda_1 p_1(x) + \dots + \lambda_n p_n(x) \equiv 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$$

Wenn sie dagegen linear abhängig sind, so läßt sich mindestens eine von ihnen als Linearkombination der übrigen darstellen.

Sei I ein Intervall in \mathbb{R} . Wir setzen voraus, daß f und die Koeffizienten

a_0, \dots, a_{n-1} in I stetig sind. Die Funktion p heißt eine Lösung der Diffgl. (5.2.1) in I , wenn p in I mindestens n -mal

stetig differenzierbar ist und

$$p^{(n)}(x) + \dots + a_{n-1}(x)p^{(n-1)}(x) + \dots + a_0(x)p(x) = f(x)$$

für $x \in I$ ist.

Der zentrale Satz über die Lösungsstruktur der homogenen Diffgl.

lautet nun: Es gibt n linear unabhängige Lösungen

$$(5.2.4) \quad p_1, \dots, p_n$$

von (5.2.1), und jede Lösung p läßt sich in der Form

$$(5.2.5) \quad p = c_1 p_1 + \dots + c_n p_n, \quad c_1, \dots, c_n \text{ Konstante}$$

schreiben. Umgekehrt ist jedes solche p eine Lösung. Also bilden die Lösungen einen Vektorraum der Dimension n .

Die allgemeine Lösung der inhomogenen linearen Dgl. lautet

(5.2.6) $y = y_0 + c_1 p_1 + \dots + c_n p_n$, c_1, \dots, c_n Konstante,

wobei p_1, \dots, p_n linear unabhängige Lösungen der homogenen Dgl. und y_0 eine Lösung der inhomogenen Dgl. ist.

Im nächsten Abschnitt werden wir den besonders wichtigen Fall konstanter Koeffizienten behandeln. Eine Methode, die auch für Dgl. mit variablen Koeffizienten angewandt werden kann, ist der Polynomansatz.

Der Einfachheit halber betrachten wir den für die Anwendung wichtigsten Fall $n=2$ und wählen $a_1(x) \equiv 0$, $f(x) \equiv 0$, haben also

(5.2.7) $y'' + a(x)y = 0$.

zu lösen. Wir nehmen an, daß man $a(x)$ in eine Potenzreihe um 0 entwickeln kann, d.h. daß

(5.2.8) $a(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h$ für $-r < x < r$

ist, wo r der Konvergenzradius ist. Nun machen wir den Ansatz

(5.2.9) $p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$.

Dann ist

$p'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n b_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) b_{n+1} x^n$

(5.2.10) $p''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) b_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) b_{n+2} x^n$.

Nach (5.2.7) soll gelten

(5.2.11) $p''(x) = -a(x)p(x)$

Nach (5.2.8) und (5.2.9) ist

$a(x)p(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_j b_k x^{j+k}$.

Mit $n = j+k$ ist also $j = n-k$.

$a(x)p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k \right) x^n$.

Wenn zwei Potenzreihen (um den gleichen Punkt, hier um 0) die gleiche Funktion darstellen, so müssen ihre Koeffizienten übereinstimmen, man kann also einen Koeffizientenvergleich machen. Aus (5.2.10) und (5.2.11) folgt also

$(n+1)(n+2) b_{n+2} = - \sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k$ für $n=0,1,\dots$,

Wir erhalten also die Rekursionsformel

(5.2.12) $b_{n+2} = - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k$ für $n=0,1,\dots$.

Speziell für $n=0,1,2$ erhält man

(5.2.13) $b_2 = -\frac{1}{2} a_0 b_0$,

(5.2.14) $b_3 = -\frac{1}{6} (a_1 b_0 + a_2 b_1) = -\frac{1}{6} a_1 b_0 - \frac{1}{6} a_2 b_1$,

(5.2.15) $b_4 = -\frac{1}{12} (a_2 b_0 + a_3 b_1 + a_0 b_2)$.

Mit (5.2.13) ergibt das

(5.2.16) $b_4 = -\frac{1}{12} (a_2 b_0 + a_3 b_1 - \frac{1}{2} a_0^2 b_0) = (-\frac{1}{12} a_2 + \frac{1}{24} a_0^2) b_0 - \frac{1}{12} a_3 b_1$.

Durch wiederholte Anwendung von (5.2.12) sieht man, daß b_n für $n \geq 2$ die Form

(5.2.17) $b_n = A_n b_0 + B_n b_1$.

hat, wo A_n und B_n Kombinationen der a_0, a_1, \dots, a_{n-2} sind.

So ist z.B. $A_2 = -\frac{1}{2} a_0$, $B_2 = 0$ nach (5.2.13). Mit

$$(5.2.12) \quad p_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n, \quad p_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n$$

erhält man aus (5.2.9) und (5.2.17)

$$(5.2.19) \quad p(x) = b_0 p_1(x) + b_1 p_2(x)$$

wobei b_0 und b_1 beliebig sind. Das ist genau (5.2.5) mit $a_1 = b_0, a_2 = b_1$.

Es ist klar, daß sich die Rekursionsformel (5.2.12) ausgezeichnet für numerische Rechnung eignet. Wir wollen sie noch einmal aussprechen:

$$(5.2.20) \quad b_{n+2} = -\frac{1}{(n+1)(n+2)} (a_n b_n + \dots + a_1 b_{n-1} + a_0 b_n). \quad (n=0, 1, \dots)$$

Wir haben oben nur formal gerechnet. Man kann jedoch aus (5.2.20) folgern daß die Potenzreihe für $p(x)$ ebenfalls für $-r < x < r$ konvergiert. Daraus folgt dann, daß man sie in (5.2.10) gliedweise differenzieren darf; unsere formale Rechnung wird daher nachträglich gerechtfertigt.

Beispiel. Wir betrachten die Diffgl.

$$y'' = xy.$$

Also ist $a_1 = -1$ und $a_n = 0$ für $n \neq 1$. Daher wird (5.2.20) zu

$$(5.2.21) \quad b_{n+2} = \frac{b_{n-1}}{(n+1)(n+2)} \quad \text{für } n \in \mathbb{Z}_1,$$

und $b_2 = 0$ ist. Speziell folgt aus Reihe nach

$$b_2 = \frac{1}{2} b_0, \quad b_4 = \frac{1}{12} b_0, \quad b_6 = \frac{1}{20} b_0 = 0$$

$$b_8 = \frac{1}{50} b_0, \quad b_{10} = \frac{1}{42} b_0, \quad b_{12} = \frac{1}{504} b_0.$$

Allgemein ist $b_{2k+2} = 0$ und

$$p(x) = b_0 \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k} x^{2k} + b_1 \sum_{k=0}^{\infty} B_{2k+1} x^{2k+1}.$$

5.3. Konstante Koeffizienten

Nun betrachten wir die homogene lineare Diffgl. n -ter Ordnung

$$(5.3.1) \quad y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

mit konstanten Koeffizienten $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$.

Obwohl die Koeffizienten reell sind, ist es günstig, diesmal auch komplexe Lösungen zuzulassen. Wir machen den Ansatz

$$(5.3.2) \quad y = e^{\lambda x}, \quad \lambda \in \mathbb{C} \text{ zu bestimmen.}$$

Dann ist $y' = \lambda e^{\lambda x}, \dots, y^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x}$, aus (5.3.1) folgt also wegen $e^{\lambda x} \neq 0$

$$(5.3.3) \quad P(\lambda) := \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0.$$

Dies ist die charakteristische Gleichung zu (5.3.1). Sie hat n Wurzeln $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. Diese können zusammenfallen, wir machen jedoch die ausdrucksreiche Annahme

(5.3.4) die Wurzeln $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ der charakteristischen Gleichung sind alle verschieden.

Dann sind die Funktionen

$$(5.3.5) \quad p_k(x) = e^{\lambda_k x} \quad (k=1, \dots, n)$$

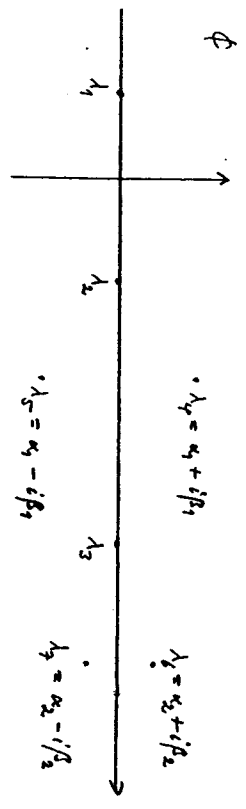
linear unabhängig; dazu S. II 165. Die allgemeine komplexe Lösung lautet also

$$(5.3.6) \quad p(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + \dots + c_n e^{\lambda_n x}, \quad c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C} \text{ Konstanten.}$$

Da die Koeffizienten a_0, \dots, a_{n-1} der charakteristischen Gleichung reell sind, gibt es

in reelle Wurzeln $(0 \leq m \leq n/2)$,
 & Paare konjugiert komplexer Wurzeln $(0 \leq k \leq n/2)$,
 wobei $n = m + 2k$ ist. Die n Wurzeln kann man also schreiben als

(5.3.7) $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$
 $\lambda_k \pm i\beta_k, \dots, \lambda_k \pm i\beta_k$ mit $\beta_k > 0, \dots, \beta_k > 0$.



Im Beispiel der Zeichnung ist $m=3, k=2$, also $n=7$.

In (5.3.6) können wir Paare konjugierter Eigenwerte zusammenfassen.

Es ist $(\alpha \pm i\beta)^k x + e^{(\alpha \pm i\beta)x} = e^{[\alpha \cos \beta x + i \sin \beta x]} + e^{[\alpha \cos \beta x - i \sin \beta x]}$
 $= e^{[\alpha \cos \beta x + i \sin \beta x]}$
 $= e^{\alpha x} [\cos \beta x + i \sin \beta x]$

wobei $b = \alpha + c', b' = i(\alpha - c')$ reell sind, falls $c' = c$. Also ist nach (5.3.6)

(5.3.8) $\varphi(x) = \sum_{j=1}^m c_j e^{\lambda_j x} + \sum_{k=1}^k (b_k \cos \beta_k x + b'_k \sin \beta_k x) e^{\alpha_k x}$.

Dies ist die allgemeine reelle Lösung mit $c_j, \dots, c_m \in \mathbb{R} (j=1, \dots, m), b_k, b'_k \in \mathbb{R} (k=1, \dots, k)$.

Beispiel Wir betrachten die lineare homogene Dgl.

$y''' + 3y'' + y' - 5y = 0$.

Die charakteristische Gleichung lautet

$p(\lambda) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda - 5 = 0$.

Die Wurzel ist $\lambda = 1$. Also kann man den Faktor $\lambda - 1$ abspalten:
 Es ist

$p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 4\lambda + 5) = 0$, also $\lambda = 1$ oder $\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$.

Das führt auf die Wurden

$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2 + i, \lambda_3 = -2 - i$.

Die allgemeine komplexe Lösung lautet also

$\varphi(x) = c_1 e^x + c_2 e^{(-2+i)x} + c_3 e^{(-2-i)x}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$.

Die allgemeine reelle Lösung ist

$\varphi(x) = c e^x + (b \cos x + b' \sin x) e^{-2x}, \quad c, b, b' \in \mathbb{R}$.

Nun kommen wir zur inhomogenen linearen Dgl. n -ter Ordnung

(5.3.9) $y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(x)$;

mit konstanten Koeffizienten $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$; die rechte Seite hängt dann von x abhangen. Die Wurzeln $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ der charakteristischen Gleichung (5.3.3) sollen wieder als verschieden vorausgesetzt werden. Nach (5.2.6) und (5.3.6) hat die inhomogene Dgl. als allgemeine komplexe Lösung

(5.3.10) $\varphi(x) = \psi(x) + c_1 e^{\lambda_1 x} + \dots + c_n e^{\lambda_n x} \quad (c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C})$,

wobei ψ eine Lösung von (5.3.9) ist, die sog. partiulare Lösung.

Zur Bestimmung dieser partikulären Lösung gibt es viele Methoden, wir beschränken uns auf den Fall, daß

$$f(x) = f(x) \text{ für } x \in \mathbb{R},$$

ist, d.h. f soll st-periodisch sein. Unter geeigneten Voraussetzungen kann man dann f in eine Fourierreihe entwickeln (S. 24):

$$(5.3.11) \quad f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_k e^{ikx}, \quad d_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx.$$

Wir machen den Ansatz

$$y_0(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma_k e^{ikx}.$$

Wenn man geläufige Differentiations darf, folgt

$$(5.3.12) \quad y_0^{(n)}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma_k (ik)^n e^{ikx} \quad (n=0,1,\dots,n).$$

Man soll

$$y_0^{(n)} + \dots + a_1 y_0' + a_0 y_0 = f$$

sein. Wir setzen (5.3.12) und (5.3.11) ein und erhalten

$$(5.3.13) \quad \sum_k ((ik)^n + a_{n-1}(ik)^{n-1} + \dots + a_1 ik + a_0) \gamma_k e^{ikx} = \sum_k d_k e^{ikx}.$$

Das ist erfüllt, wenn die entsprechenden Koeffizienten von e^{ikx} gleich sind

Wir setzen wie in (5.3.3)

$$(5.3.14) \quad p(ik) \gamma_k = d_k + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 \quad (z \in \mathbb{C})$$

wird erhalten aus (5.3.13)

$$p(ik) \gamma_k = d_k,$$

also

$$(5.3.15) \quad \gamma_k = \frac{d_k}{p(ik)} \quad \text{für } k \in \mathbb{Z},$$

falls $p(ik) \neq 0$ ist, d.h. falls

$$(5.3.16) \quad \lambda_1, \dots, \lambda_n \neq ik \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}$$

ist. Unter dieser Voraussetzung folgt also aus (5.3.11)

$$(5.3.17) \quad y_0(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{d_k}{p(ik)} e^{ikx},$$

wobei die d_k aus (5.3.11) bestimmt sind. Man kann zeigen, daß diese Reihe so gut konvergiert, daß die gleichwertigen Differentiation in (5.3.12) gerechtfertigt sind.

Damit haben wir gesehen (dazu (5.3.10)): Wenn f die Periode 2π hat (und z.B. stetig und stückweise stetig differenzierbar ist), so hat (5.3.9) die allgemeine Lösung

$$(5.3.18) \quad y(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{d_k}{p(ik)} e^{ikx} + q_0 e^{\lambda_1 x} + \dots + q_n e^{\lambda_n x},$$

falls (5.3.16) erfüllt ist.

Für die Anwendung ist die Frage der Stetigkeit wichtig. Dazu interpretiert man x am besten als Zeit und fragt, wie die Lösung nach langer Zeit aussieht. Man untersucht also das Verhalten von $y(x)$ für $x \rightarrow +\infty$.

Mit $\lambda = \alpha + i\beta$ gilt

$$|e^{\lambda x}| = |e^{\alpha x + i\beta x}| = e^{\alpha x} \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{falls } \alpha < 0, \\ 1 & \text{falls } \alpha = 0, \\ \infty & \text{falls } \alpha > 0. \end{cases}$$

für $x \rightarrow +\infty$. Meistens folgt

Wenn alle Wurzeln der charakteristischen Gleichung negativ Realteil haben, d.h. wenn

$$(5.3.19) \quad \operatorname{Re} \lambda_j < 0 \quad \text{für } j=1, \dots, n,$$

so sagen wir, daß die Diffgl. (5.3.1) stabil ist für $x \rightarrow +\infty$.
Dann ist

$$(5.3.20) \quad \varphi(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + \dots + c_n e^{\lambda_n x} \rightarrow 0 \quad \text{für } x \rightarrow +\infty.$$

Nach (5.3.10) gilt also für die Lösung der inhomogenen Gleichung

$$(5.3.21) \quad y'(x) \approx y_0(x) \quad \text{für großes } x.$$

Für großes x ist also die Lösung einer stabilen Diffgl. praktisch unabhängig bestimmt, also praktisch unabhängig von den Anfangsbedingungen.

Das hat große Konsequenzen für die Praxis: Wenn ein Gerät eingeschaltet wird, so hat es zu Beginn einen ziemlich unkontrollierten (unfalligen) Verhalten. Wenn das Verhalten des Geräts durch eine stabile Differentialgleichung beschreibbar ist, so ist das Verhalten nach einiger Zeit unabhängig vom anfänglichen Anfangszustand. Die Details des Einschaltvorgangs spielen also keine Rolle.

Wenn dagegen eine Wurzel λ_j positiven Realteil hat, so wird $|y(x)|$ für $x \rightarrow +\infty$ beliebig groß. In der Praxis kann dies katastrophale Folgen haben.

Beispiel. ② Wir betrachten

$$y'' - y = 2 \cos x = e^{ix} + e^{-ix}$$

Die charakteristische Gleichung lautet $\lambda^2 - 1 = 0$. Also ist $\lambda_{1,2} = \pm 1$,

$$\varphi(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^x$$

In (5.3.10) ist $a_1 = 1$, $a_2 = 0$ sonst. Aus (5.3.17) folgt daher

mit $p(x) = x^2 - 1$, $p'(x) = -2$

$$y_0(x) = -\frac{1}{2} e^{ix} - \frac{1}{2} e^{-ix} = -\cos x,$$

also

$$(5.3.22) \quad y(x) = -\cos x + c_1 e^{-x} + c_2 e^x$$

Für $x \rightarrow +\infty$ gilt $c_1 e^{-x} \rightarrow 0$. Dagegen gilt $c_2 e^x \rightarrow \pm \infty$ für $x \rightarrow +\infty$, außer wenn $c_2 = 0$ ist:

Wir betrachten oben die Anfangsbedingungen

$$y(0) = -1, \quad y'(0) = 2 \cdot 10^{-6}.$$

Aus (5.3.22) folgt $y(x) = \sin x - c_1 e^{-x} + c_2 e^x$. Es muß also

$$\begin{aligned} -1 + c_1 + c_2 &= -1, \\ 0 - c_1 + c_2 &= 2 \cdot 10^{-6} \end{aligned}$$

gelten, also

$$c_1 = -10^{-6}, \quad c_2 = 10^{-6},$$

d.h. nach (5.3.22)

$$y(x) = -\cos x + 10^{-6} e^x - 10^{-6} e^{-x}.$$

Am Anfang ist das letzte Glied unmerklich, aber trotzdem gilt

$$y(x) \rightarrow +\infty \quad \text{für } x \rightarrow +\infty.$$

Natürlich ist unsere Diffgl. nicht stabil, da $\lambda_1 = \operatorname{Re} \lambda_2 = 1 > 0$ ist.

Kap. 6. Partielle Differentialgleichungen

6.1. Typenunterscheidung

Eine partielle Differentialgleichung ist eine Gleichung für Funktionen mehrerer Variabler, in der die partiellen Ableitungen für die gesuchte Funktion vorkommen.

Wir beschränken uns auf Funktionen von zwei Variablen und auf lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Diese sehen dann so aus:

$$(6.1.1) \quad a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = A \frac{\partial u}{\partial x} + B \frac{\partial u}{\partial y} + C u + f,$$

wo a, b, c und A, B, C, f gegebene Funktionen von x, y sind.

Gesucht ist die Lösung $u = u(x, y)$. Wir wollen uns weiterhin darauf beschränken, daß a, b, c konstant und nicht alle $= 0$ sind.

Nun kann man (6.1.1) auf eine Normalform bringen, indem man

$$(6.1.2) \quad u(\xi, \eta) = u(x\xi + \beta y, \gamma\xi + \delta y)$$

setzt, also ξ, η als neue Variable einführt. Durch geeignete

Wahl der Konstanten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ kann man erreichen, daß die linke Seite eine der drei folgenden Formen hat

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} \quad ; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} \quad ; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} \quad (\text{wird so eingeführt})$$

Nun man wieder (ξ, η) in (x, y) und v in u umbrennt, kommt man so zu den folgenden drei Typen:

Elliptische Diffgl.:

$$(6.1.3) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = A \frac{\partial u}{\partial x} + B \frac{\partial u}{\partial y} + C u + f;$$

Hyperbolische Diffgl.:

$$(6.1.4) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = A \frac{\partial u}{\partial x} + B \frac{\partial u}{\partial y} + C u + f;$$

Parabolische Diffgl.:

$$(6.1.5) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = A \frac{\partial u}{\partial x} + B \frac{\partial u}{\partial y} + C u + f.$$

Diese drei Typen haben meist verschiedene Verfahren, insbesondere bzgl. Anfangs- und Randbedingungen. Um die Lösung vollständig festzulegen, müssen die Werte auf gewissen Rändern vorgegeben sein. Das sind die Anfangs- und Randbedingungen.

Wir wollen für die verschiedenen Typen Beispiele betrachten, die zwar einfach aber doch jeweils typisch sind.

6.2. Hyperbolische Differentialgleichungen

Besatz betrachten wir die einfachste hyperbolische D'gl., nämlich

$$(6.2.1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

In diesem Fall ist eine andere Form günstiger. Dazu betrachten wir

$$(6.2.2) \quad \xi = x+y, \quad \eta = x-y, \quad \text{also } x = \frac{1}{2}(\xi+\eta), \quad y = \frac{1}{2}(\xi-\eta)$$

und (das ist ein Spezialfall von (6.1.2))

$$(6.2.3) \quad v(\xi, \eta) = u\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2}\right).$$

Dann ist

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{1}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{1}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{1}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

nach (6.2.1). Somit ist

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} \right) = 0, \quad \text{also } \frac{\partial v}{\partial \xi} = h(\xi) \text{ unabhängig von } \eta.$$

Hieraus folgt

$$v(\xi, \eta) = \int h(\xi) d\xi + g(\eta), \quad g(\eta) \text{ unabhängig von } \xi.$$

Mit $f(\xi) = \int h(\xi) d\xi$ folgt $v(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta)$, nach (6.2.2)

und (6.2.3) also

$$(6.2.4) \quad u(x, y) = f(x+y) + g(x-y).$$

Dies ist die allgemeine Lösung von (6.2.1). Dabei sind f und g zwei beliebige (also arbiträr wählbar) Funktionen.

Nun betrachten wir die inhomogene D'gl.

$$(6.2.5) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 1.$$

Die Transformation (6.2.3) führt auf

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{1}{4}$$

Eine Lösung hiervon ist $v = \frac{1}{4} \xi \eta$, also $u = \frac{1}{4} (x^2 - y^2)$.

Dies ist eine partikuläre von (6.2.5); die allgemeine Lösung ist

(partikuläre Lösung) + (allgemeine Lösung der homogenen Gleichung),
nach (6.2.4) also

$$(6.2.6) \quad u(x, y) = \frac{1}{4}(x^2 - y^2) + f(x+y) + g(x-y).$$

Wieder seien zwei "Anfangsbedingungen" gegeben, nämlich

$$(6.2.7) \quad u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = 0 \quad \text{für alle } x.$$

Aus (6.2.6) folgt

$$\frac{\partial}{\partial y} u(x, y) = -\frac{y}{2} + f'(x+y) - g'(x-y).$$

Nach (6.2.7) soll also sein

$$\frac{1}{2} x^2 + f(x) + g(x) = 0, \quad f'(x) - g'(x) = 0.$$

Also ist $g(x) = c + f(x)$ mit einer Konstanten c und daher

$$\frac{1}{2} x^2 + 2f(x) + c = 0 \quad \text{für alle } x.$$

Somit ist $f(x) = -\frac{x}{2} - \frac{1}{4} x^2$, $g(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} x^2$, also nach (6.2.6)

$$u(x, y) = \frac{1}{4}(x^2 - y^2) - \frac{1}{8}(x+y)^2 - \frac{1}{8}(x-y)^2 = -\frac{1}{2} y^2;$$

die Konstante hebt sich weg. Die Lösung ist also durch die Anfangsbedingungen (6.2.7) eindeutig bestimmt.

6.3. Elliptische Differentialgleichungen

Der einfachste Fall einer elliptischen Dgl. ist

$$(6.3.1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Als Gebiet wählen wir die Einheitskreiszscheibe

$$B = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Diesmal betrachten wir eine Randbedingung, nämlich

$$(6.3.2) \quad u(x,y) = f(x,y) \text{ für } x^2 + y^2 = 1,$$

wo

$$f : \partial B \rightarrow \mathbb{R}$$

eine vorgegebene stetige Funktion ist.

Eine Lösung u unseres Problems ist eine Funktion

$$u : B \cup \partial B \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig,}$$

die in B zweimal stetig diffbar ist und (6.3.1) und (6.3.2) erfüllt.

Wir führen neue, dem Gebiet B angepasste Variablen ein, nämlich Polarkoordinaten r, θ , d.h.

$$(6.3.3) \quad x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

Dann ist $B = \{(x,y) : 0 \leq r < 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$.

Wir setzen

$$(6.3.4) \quad v(r,\theta) = u(r \cos \theta, r \sin \theta).$$

Nach einiger Rechnung sieht man, daß sich (6.3.1) transformiert zu

$$(6.3.5) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = 0;$$

die Randbedingung (6.3.2) nimmt die einfache Form

$$(6.3.6) \quad v(1,\theta) = g(\theta) \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

an, wobei

$$(6.3.7) \quad g(\theta) = f(\cos \theta, \sin \theta) \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

gesehen ist, diese Funktion ist 2π -periodisch.

Wenn wir z.B. annehmen, daß g stückweise stetig diffbar ist, so können wir g in eine Fourierreihe entwickeln, dazu S.21.

Also ist

$$(6.3.8) \quad g(\theta) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

mit den Fourierkoeffizienten

$$(6.3.9) \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) \cos n\theta d\theta, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) \sin n\theta d\theta.$$

Die gesuchte Lösung ist auch 2π -periodisch bzgl. θ nach (6.3.4), kann also auch in eine Fourierreihe entwickelt werden:

$$(6.3.10) \quad v(r,\theta) = \frac{1}{2} a_0 r^0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n r^n \cos n\theta + \beta_n r^n \sin n\theta).$$

Nach der Randbedingung (6.3.2) ist wegen (6.3.8) und (6.3.10)

$$(6.3.11) \quad a_n r^n(1) = a_n, \quad \beta_n r^n(1) = b_n.$$

Nun gehen wir formal vor. Aus (6.3.10) folgt durch stückweise Differenzieren

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial r} &= \frac{1}{2} a_0 r^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n r^{n-1} \cos n\theta + \beta_n r^{n-1} \sin n\theta), \\ \frac{\partial v}{\partial \theta} &= \frac{1}{2} a_0' r^0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n'' r^n \cos n\theta + \beta_n'' r^n \sin n\theta), \end{aligned}$$

ansuchen

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = - \sum_{n=1}^{\infty} (a_n(r) n^2 \cos n\theta + b_n(r) n^2 \sin n\theta).$$

Aus der Diffgl. (6.3.5) folgt dann

$$\frac{1}{2} (a_n'' + \frac{a_n'}{r}) + \sum_{n=1}^{\infty} [(a_n'' + \frac{a_n'}{r} - \frac{n^2}{r^2} a_n) \cos n\theta + (b_n'' + \frac{b_n'}{r} - \frac{n^2}{r^2} b_n) \sin n\theta] = 0.$$

Koeffizientenvergleich führt auf (n ≥ 1)

$$(6.3.12) \quad a_n'' + \frac{1}{r} a_n' = \frac{n^2}{r^2} a_n, \quad b_n'' + \frac{1}{r} b_n' = \frac{n^2}{r^2} b_n.$$

Die Funktionen a_n und b_n erfüllen also die gewöhnliche Diffgl.

$$(6.3.13) \quad z'' + \frac{1}{z} z' - \frac{n^2}{z^2} z = 0.$$

Zur Lösung machen wir den Ansatz $z = r^{\lambda}$ und erhalten durch Einsetzen

$$\lambda(\lambda-1) r^{\lambda-2} + \lambda r^{\lambda-2} - n^2 r^{\lambda-2} = 0, \text{ d.h. } (\lambda^2 - n^2) r^{\lambda-2} = 0.$$

Somit ist $\lambda^2 = n^2$, also $\lambda = \pm n$. Für $n \geq 1$ sind die Lösungen $r^{\pm n}$ und $r^{\pm n}$ linear unabhängig. Also ist (dazu S. 89)

$$a_n r^{\pm n} + b_n r^{\pm n}$$

die allgemeine Lösung von (6.3.13). Für $r \rightarrow 0$ wissen aber

$a_n(r)$ und $b_n(r)$ endlichen Wert annehmen. Also muß $c_1 = 0$ sein. Also ist nach (6.3.11)

$$(6.3.14) \quad a_n(r) = a_n r^n, \quad b_n(r) = b_n r^n.$$

Für $n=0$ zeigt man $a_0(r) \equiv a_0$. Nach (6.3.10) ist also für $0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi$

$$(6.3.15) \quad v(r, \theta) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) r^n$$

die Lösung von (6.3.5) mit der Randbedingung (6.3.6). Man kann nachträglich mit Satz 1.3 (auf S. 12) zeigen, daß unsere gewählte Differentialgleichung gerechtfertigt war.

Beispiel. Sei $f(x, y) = |y|$, d.h. die Randbedingung lautet

$$u(x, y) = |y| \quad \text{für } x^2 + y^2 = 1.$$

Also soll sein

$$v(1, \theta) = |\sin \theta| =: g(\theta).$$

Die Fourierreihe lautet

$$g(\theta) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k\theta)}{4k^2-1}.$$

Nach (6.3.15) (mit $n=2k$) ist also die Lösung

$$v(r, \theta) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k\theta)}{4k^2-1} r^{2k}, \quad \text{für } 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Da $\left| \frac{\cos(2k\theta)}{4k^2-1} r^{2k} \right| \leq \frac{1}{4k^2-1} \leq \frac{1}{2k^2}$

ist und da $\sum k^{-2}$ konvergiert, folgt aus dem Weierstraßkriterium, daß die Reihe konvergiert.

6.4. Parabolische Differentialgleichungen

Das Problem der Wärmeleitung führt auf die parabolische Diffg.

(6.4.1) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial y}$

Zuerst betrachten wir $0 \leq x \leq \pi, y \geq 0$ und fordern

(6.4.2) $u(0,y) = u(\pi,y) = 0$ für $y \geq 0$ (Randbedingung),

(6.4.3) $u(x,0) = f(x)$ für $0 \leq x \leq \pi$ (Anfangsbedingung).

Hier ist f eine stetige und stückweise stetig differenzierbare Funktion; wegen (6.4.3) muß

$f(0) = f(\pi) = 0$

sein. Mit setzen $f(x) = -f(\pi-x)$ für $0 \leq x \leq \pi$, wobei also so eine stetige Funktion in $[-\pi, \pi]$ mit $f(\pm\pi) = 0$. Diese Funktion können wir zur sinusartigen k -periodischen Funktion fortsetzen. Da f ungerade ist, lautet die Fourierreiheentwicklung

(6.4.4) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$

Wir machen den Ansatz

(6.4.5) $u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n(y) \sin nx$;

hieraus wird die Randbedingung (6.4.2) automatisch erfüllt. Nun differenzieren wir Gleichung (6.4.5) und erhalten

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = - \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n(y) n^2 \sin nx$,

$\frac{\partial u}{\partial y} = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n'(y) \sin nx$.

Koeffizientenvergleich führt wegen (6.4.1) auf

$\beta_n'(y) = -n^2 \beta_n(y)$,

also $\beta_n'/\beta_n = -n^2$, $\ln \beta_n(y) = \ln \beta_n(0) - n^2 y$. Nach (6.4.3) muß $\beta_n(0) = b_n \sin nx$, also

$\beta_n(y) = b_n e^{-n^2 y}$.

Damit erhalten wir aus (6.4.5) die Lösung

(6.4.6) $u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2 y} \sin nx$.

Beispiel $\textcircled{1}$ Sei

$f(x) = x$ für $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $= \pi-x$ für $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$.

Nach (2.2.23) auf S.24 ist (mit dem zusätzlichen Faktor $\pi/2$)

$f(x) = \frac{y}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \sin(2k+1)x$.

Aus (6.4.6) (mit $n = 2k+1$) folgt daher

$u(x,y) = \frac{y}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} e^{-(2k+1)^2 y} \sin(2k+1)x$.

$= \frac{y}{\pi} e^{-y} \sin x - \frac{y}{\pi} e^{-9y} \sin(3x) + \dots$

Hier gilt

$u(x,y) \rightarrow 0$ für $y \rightarrow \infty$;

für festes y ist

$u(x,y) \approx \frac{y}{\pi} e^{-y} \sin x$.

Nun betrachten wir die Wärmeleitungsgleichung im Randstrahl

$$f(x, y) : 0 \leq x < \infty, 0 \leq y < \infty$$

und fordern

$$(6.4.7) \quad u(0, y) = 0 \quad \text{für } y \geq 0 \quad (\text{Randbedingung}),$$

$$(6.4.8) \quad u(x, 0) = f(x) \quad \text{für } x \geq 0: \quad (\text{Anfangsbedingung}),$$

wo f eine gegebene stetige Funktion ist. Aus (6.4.7) mit $y=0$ folgt

$$(6.4.9) \quad f(0) = 0.$$

Wir setzen f als ungerade Funktion fort, d.h. wir definieren

$$(6.4.10) \quad f(-x) = -f(x) \quad \text{für } x \geq 0.$$

Nach (6.4.9) ist dann f stetig in \mathbb{R} .

Da der x -Bereich unbeschränkt ist, betrachten wir Fourierintegroal statt Fourierreihen. Die Fouriertransformation von f ist nach (2.4.12) auf S. 39

$$(6.4.11) \quad g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \quad \text{für } \omega \in \mathbb{R},$$

woraus nun nach der Invertierungsformel (2.4.15)

$$(6.4.12) \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{i\omega x} d\omega = \frac{i}{\pi} \int_0^{\infty} g(\omega) \sin \omega x d\omega$$

zurücktransformiert kann, wobei wir benutzt haben, daß aus (6.4.10) $g(-\omega) = -g(\omega)$ folgt.

Durch die Analoge zu (6.4.4) und (6.4.6) wird die Lösung

$$(6.4.13) \quad u(x, y) = \frac{i}{\pi} \int_0^{\infty} g(\omega) e^{-\omega^2 y} \sin \omega x d\omega$$

verfügt. Wir machen die Probe: Es ist

$$u(0, y) = 0 \quad \text{für alle } y,$$

d.h. (6.4.7) ist erfüllt. Weiter ist nach (6.4.13) und (6.4.12)

$$u(x, 0) = \frac{i}{\pi} \int_0^{\infty} g(\omega) \sin \omega x d\omega = f(x),$$

so daß auch (6.4.8) erfüllt ist. Durch formale Differenzialen folgt aus (6.4.13)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\omega^2 u = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Also ist die Differentialgleichung (6.4.1) erfüllt.

Beispiel. ② Sei $f(x) = x e^{-x}$ für $x \geq 0$, also $f(x) = x e^{-|x|}$ für $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx = -\frac{4i\omega}{(1+\omega^2)^2},$$

also nach (6.4.13)

$$u(x, y) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega}{(1+\omega^2)^2} e^{-\omega^2 y} \sin \omega x d\omega.$$