

Inhaltsverzeichnis

1	Grundlagen	1
1.1	Logische Grundlagen	2
1.2	Grundlagen der Mengenlehre	9
1.3	Abbildungen	15
1.4	Die natürlichen Zahlen und die vollständige Induktion	16
1.5	Ganze, rationale und reelle Zahlen	22
1.6	Ungleichungen und Beträge	28
1.7	Komplexe Zahlen	36
1.8	Aufgaben	55
2	Analysis von Funktionen einer Veränderlichen	57
2.1	Begriff der Funktion	58
2.2	Eigenschaften von Funktionen	64
2.3	Elementare Funktionen	67
2.4	Grenzwert und Stetigkeit von Funktionen	71
2.5	Eigenschaften stetiger Funktionen	92
2.6	Differenzierbarkeit von Funktionen	98
2.7	Lineare Approximation und Differential	104
2.8	Eigenschaften differenzierbarer Funktionen	108
2.9	Taylor-Formel und der Satz von Taylor	113
2.10	Extremalprobleme	119
2.11	Banachscher Fixpunktsatz und Newton-Verfahren	122
2.12	Kurven im \mathbb{R}^2	129
2.13	Integralrechnung	139
2.14	Volumen und Oberfläche von Rotationskörpern	166
2.15	Parameterintegrale	168
2.16	Uneigentliche Integrale	170
2.17	Numerische Integration	181
2.18	Interpolation	184
2.19	Aufgaben	191
3	Reihen	193
3.1	Zahlenreihen	194
3.2	Funktionsfolgen	203
3.3	Gleichmäßig konvergente Reihen	209
3.4	Potenzreihen	211
3.5	Operationen mit Potenzreihen	214
3.6	Komplexe Potenzreihen, Reihen von $\exp x$, $\sin x$ und $\cos x$	215

3.7	Numerische Integralberechnung mit Potenzreihen	231
3.8	Konstruktion von Reihen	232
3.9	Fourier-Reihen	235
3.10	Aufgaben	267
4	Lineare Algebra	269
4.1	Determinanten	275
4.2	Cramersche Regel	288
4.3	Matrizen	291
4.4	Lineare Gleichungssysteme und deren Lösung	310
4.5	Allgemeine Vektorräume	318
4.6	Orthogonalisierungsverfahren nach Erhard Schmidt	334
4.7	Eigenwertprobleme	342
4.8	Vektorrechnung im \mathbb{R}^3	363
4.9	Aufgaben	380
5	Analysis im \mathbb{R}^n	383
5.1	Eigenschaften von Punktmenen aus dem \mathbb{R}^n	384
5.2	Abbildungen und Funktionen mehrerer Veränderlicher	389
5.3	Kurven im \mathbb{R}^n	390
5.4	Stetigkeit von Abbildungen	398
5.5	Partielle Ableitung einer Funktion	401
5.6	Ableitungsmatrix und Hesse-Matrix	406
5.7	Differenzierbarkeit von Abbildungen	408
5.8	Differentiationsregeln und die Richtungsableitung	409
5.9	Lineare Approximation	412
5.10	Totales Differential	414
5.11	Taylor-Formel und Mittelwertsatz	416
5.12	Satz über implizite Funktionen	420
5.13	Extremalaufgaben ohne Nebenbedingungen	423
5.14	Extremalaufgaben mit Nebenbedingungen	428
5.15	Ausgleichsrechnung	434
5.16	Newton-Verfahren für Gleichungssysteme	438
5.17	Aufgaben	440
6	Gewöhnliche Differentialgleichungen	443
6.1	Einführung	444
6.2	Allgemeine Begriffe	445
6.3	Allgemeines zu Differentialgleichungen erster Ordnung	446
6.4	Differentialgleichungen erster Ordnung mit trennbaren Variablen	449
6.5	Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung	452
6.6	Durch Transformationen lösbare Differentialgleichungen	455
6.7	Lineare Differentialgleichungssysteme erster Ordnung	462
6.8	Lineare Differentialgleichungen n -ter Ordnung	478
6.9	Anmerkungen zum "Rechnen" mit Differentialgleichungen	499
6.10	Numerische Lösungsmethoden	501

6.11	Potenzreihen zur Lösung von Differentialgleichungen	511
6.12	Besselsche und Legendresche Differentialgleichungen	514
6.13	Rand- und Eigenwertprobleme	525
6.14	Nichtlineare Differentialgleichungen	540
6.15	Aufgaben	553
7	Vektoranalysis und Kurvenintegrale	557
7.1	Die grundlegenden Operatoren der Vektoranalysis	558
7.2	Rechenregeln und Eigenschaften der Operatoren der Vektoranalysis	562
7.3	Potential und Potentialfeld	564
7.4	Skalare Kurvenintegrale	565
7.5	Vektoriell Kurvenintegral – Arbeitsintegral	569
7.6	Stammfunktion eines Gradientenfeldes	573
7.7	Berechnungsmethoden für Stammfunktionen	578
7.8	Vektorpotentiale	580
7.9	Aufgaben	582
8	Flächenintegrale, Volumenintegrale und Integralsätze	585
8.1	Flächeninhalt ebener Bereiche	586
8.2	Riemannsches Flächenintegral	588
8.3	Flächenintegralberechnung durch Umwandlung in Doppelintegrale	591
8.4	Satz von Green	597
8.5	Transformationsformel für Flächenintegrale	602
8.6	Integration über Oberflächen	607
8.7	Satz von Stokes	626
8.8	Volumenintegrale	631
8.9	Transformationsformel für Volumenintegrale	635
8.10	Satz von Gauss	639
8.11	Aufgaben	649
9	Partielle Differentialgleichungen	653
9.1	Was ist eine partielle Differentialgleichung?	654
9.2	Partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung	655
9.3	Beispiele von partiellen Differentialgleichungen aus der Physik	658
9.4	Wellengleichung	662
9.5	Wärmeleitungsgleichung	694
9.6	Potentialgleichung	701
9.7	Entdimensionierung von partiellen Differentialgleichungen	708
9.8	Aufgaben	711
10	Funktionentheorie	713
10.1	Komplexe Funktionen	714
10.2	Differentiation komplexer Funktionen	716
10.3	Elementare komplexe Funktionen und Potenzreihen	720
10.4	Konforme Abbildungen	723
10.5	Integration komplexer Funktionen	726

10.6	Reihenentwicklungen komplexer Funktionen	735
10.7	Behandlung von Singularitäten und der Residuensatz	737
10.8	Berechnung von Integralen mit Hilfe des Residuensatzes	744
10.9	Harmonische Funktionen	750
10.10	Aufgaben	755
11	Integraltransformationen	757
11.1	Definition von Integraltransformationen	758
11.2	Fourier-Transformation	760
11.3	Umkehrung der Fourier-Transformation	765
11.4	Eigenschaften der Fourier-Transformation	767
11.5	Anwendung der Fourier-Transformation auf partielle Differentialgleichungen	769
11.6	Laplace-Transformation	771
11.7	Inverse Laplace-Transformation	774
11.8	Rechenregeln der Laplace-Transformation	778
11.9	Praktische Arbeit mit der Laplace-Transformation und der Rücktransformation	784
11.10	3-Transformation	791
11.11	Aufgaben	801
12	Variationsrechnung und Optimierung	805
12.1	Einige mathematische Grundlagen	806
12.2	Funktionale auf Banach-Räumen	809
12.3	Variationsprobleme auf linearen Mannigfaltigkeiten	822
12.4	Klassische Variationsrechnung	827
12.5	Einige Variationsaufgaben	830
12.6	Natürliche Randbedingungen und Transversalität	837
12.7	Isoperimetrische Variationsprobleme	840
12.8	Funktionale mit mehreren Veränderlichen	842
12.9	Aufgaben	843
13	Elemente der Tensorrechnung	845
13.1	Tensoralgebra	846
13.2	Tensoranalysis	861
13.3	Aufgaben	872
14	Wahrscheinlichkeitsrechnung	873
14.1	Zufällige Ereignisse	874
14.2	Wahrscheinlichkeit zufälliger Ereignisse	880
14.3	Zufallsgrößen	889
14.4	Zufällige Vektoren	905
14.5	Aufgaben	931

15 Statistik	933
15.1 Stichproben	934
15.2 Punktschätzung	937
15.3 Intervallschätzung	943
15.4 Statistische Tests	956
15.5 Korrelations- und Regressionsanalyse	966
15.6 Aufgaben	975
16 Einige Grundlagen des maschinellen Lernens	979
16.1 Überwachtes Lernen am Beispiel eines vollständig verbundenen Feedforward-Netzwerks	982
16.2 Überwachtes Lernen mit einem Konvulations-Neuronalen-Netz- werk (Convolutional neural network)	987
16.3 Das Training von neuronalen Netzwerken	992
16.4 Gradientenverfahren im Training von neuronalen Netzwerken . . .	996
16.5 Nicht-überwachtes Lernen	1003
16.6 Was wir unter anderem "verschwiegen" haben	1006
16.7 Abschließende Bemerkungen	1009
16.8 Weiterführende Methoden	1013
16.9 Literatur zum Thema "deep learning"	1014
16.10Aufgaben	1014
A Formelkompendium	1017
B Octave/MATLAB	1031
B.1 Eingabekonventionen	1031
B.2 Kontrollstrukturen	1032
B.3 Vektoren und Matrizen	1034
B.4 Allgemeines	1035
B.5 Visualisierung: 2-dimensionale Plots	1037
B.6 Rechnen mit Matrizen	1038
B.7 Funktionen	1041
B.8 Rekursionen	1042
B.9 Komplexität	1043
B.10 Handles	1044
B.11 Verschiedenes	1045
C Literaturhinweise	1047